

Mémoire du stage MFA
Modèle bidomaine macroscopique du coeur

Fakhrielddine BADER

Encadrant: Mazen SAAD

Université de Nantes

09 juillet 2018

Table des matières

Introduction	5
1 Modèle bidomaine et Préliminaires	9
1.1 Modélisation du modèle bidomaine	10
1.1.1 Modèle microscopique du tissu cardiaque	10
1.1.2 Modèle macroscopique du tissu cardiaque	11
1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle	13
2 Analyse d'une classe de systèmes de réaction-diffusion	17
2.1 Quelques hypothèses	17
2.1.1 Conditions sur les champs de vecteurs de diffusion $M_j(t, x, \xi)$	17
2.1.2 Conditions sur le courant ionique $h(t, x, v)$	18
2.2 Étude du système non-dégénéré	19
2.2.1 Existence de solutions approchées par la méthode de Faedo-Galerkin	19
2.2.2 Estimation d'énergie	25
2.2.3 Passage à la limite	35
2.2.4 Retrouver la condition initiale du problème non-dégénéré (2.1)	43
3 Étude du système bidomaine linéaire	45
3.1 Le cas où $v_0 = u_{i,0} - u_{e,0}$ avec $u_{i,0}, u_{e,0} \in H_0^1(\Omega)$	46
3.2 Le cas où $v_0 \in L^2(\Omega)$	47
4 Étude du système bidomaine non-linéaire	49
4.1 Le cas où $v_0 = u_{i,0} - u_{e,0}$ avec $u_{i,0}, u_{e,0} \in W_0^{1,p}(\Omega)$	50
4.2 Le cas où $v_0 \in L^2(\Omega)$	53
5 Unicité des solutions faibles	59
Conclusion	63
A	65
Bibliographie	69

Introduction

Le coeur est un organe qui assure la vie pour tout être vivant. En effet, sa grande importance provient de sa fonction organique qui permet la circulation du sang dans tout le corps. C'est un organe musculaire composé de quatre cavités : l'oreillette et la ventricule gauches qui constituent le coeur gauche, l'oreillette et la ventricule droites qui forment le coeur droit. Ces quatre cavités sont entourées par un tissu cardiaque qui est organisé en fibres musculaires. Ces fibres constituent un réseau contractif de cellules musculaires cardiaques appelées "myocytes" (voir figure (1)).

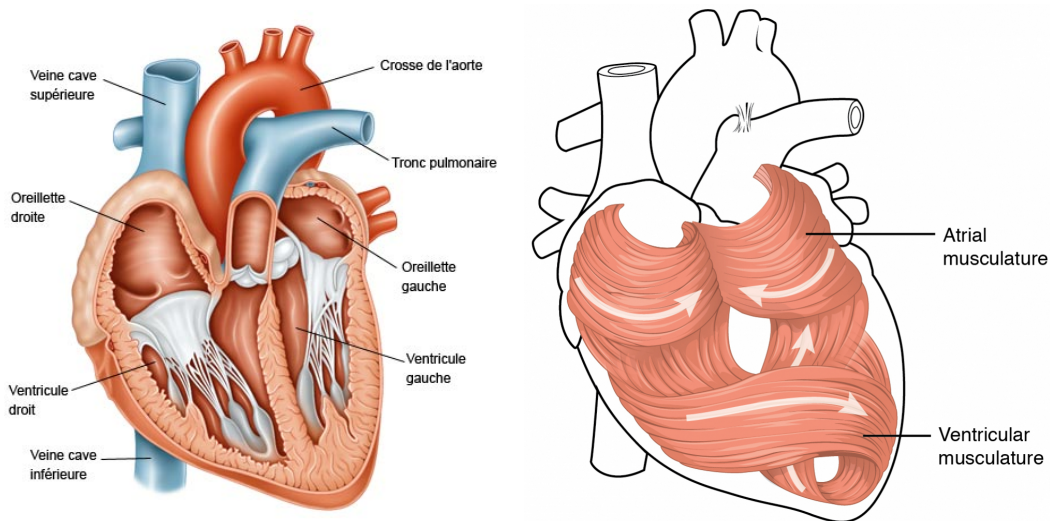


FIGURE 1 – Composition du coeur

D'un point de vue microscopique, ce tissu cardiaque se divise en deux milieux : l'un comporte le contenu des myocytes notamment "le cytoplasme", c'est qu'on appelle milieu "intracellulaire" et l'autre est dit extracellulaire et constitué du liquide présent entre les myocytes ainsi que d'autres cellules (voir figure (2)).

Ces deux milieux sont séparés par une membrane cellulaire permettant la pénétration de protéines dont certains jouent un rôle passif et d'autres jouent un rôle actif alimenté par le métabolisme cellulaire.

Il faut noter qu'il y a une différence entre la composition chimique du cytoplasme et celle du milieu extérieur. Cette différence joue un rôle très important pour l'activité cardiaque. En effet, la concentration des anions (ions négatifs) dans les myocytes est plus élevée que celle du milieu extérieur. Ce décalage de concentrations crée un potentiel transmembranaire qui est la différence de potentiels entre les deux milieux. Ce potentiel se propage au niveau microscopique grâce à la structure du milieu intra-cellulaire. D'un point de vue macroscopique, cette propagation est similaire à la propagation d'une onde dans un milieu continu. En résumé, à l'échelle microscopique le domaine du tissu cardiaque est représenté comme deux domaines intra et extra-cellulaire séparés par la membrane des myocytes. Alors qu'à l'échelle macroscopique, ce domaine est bien considéré

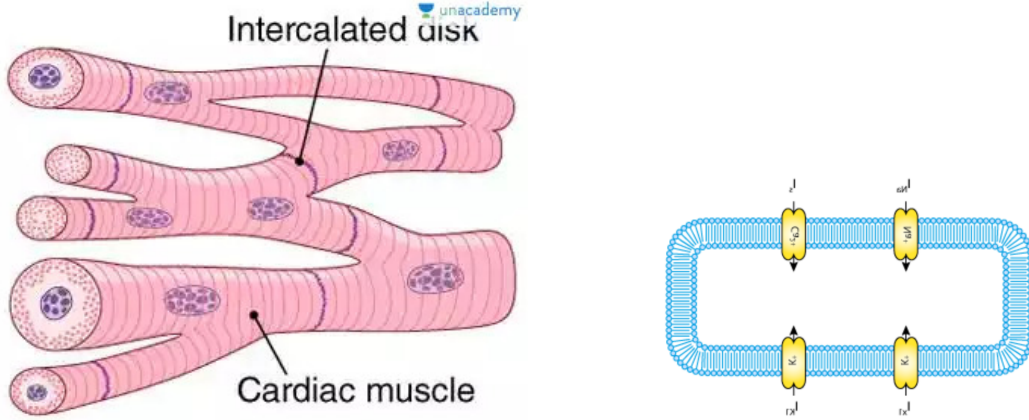


FIGURE 2 – Tissue cardiaque

comme un seul domaine.

Le modèle bidomaine linéaire est modélisé dans un domaine physique qui désigne le tissu cardiaque et exprimé par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} c_m \partial_t v - \operatorname{div}(\mathbf{M}_i(t, x) \nabla u_i) + h(t, x, v) = I_{app}(t, x), \\ c_m \partial_t v - \operatorname{div}(\mathbf{M}_e(t, x) \nabla u_e) + h(t, x, v) = I_{app}(t, x), \end{cases} \quad (1)$$

avec $(t, x) \in Q_T$ désignant le cylindre spatio-temporel $(0, T) \times \Omega$, avec :

- c_m la capacité par unité de surface de la membrane cellulaire.
- u_i, u_e les potentiels électriques dans les milieux intra-cellulaires et extra-cellulaires respectivement.
- $v = u_i - u_e$: le potentiel transmembranaire.
- $\mathbf{M}_i(t, x)$ et $\mathbf{M}_e(t, x)$: les tenseurs de conductivité relatifs aux milieux intra-cellulaires et extra-cellulaires respectivement.
- $h(t, x, v)$: le courant ionique dépend du potentiel transmembranaire v à chaque instant t et à la position x .
- I_{app} : le courant de stimulation appliqué à l'espace intra-cellulaire et extra-cellulaire.

Dans ce travail, on s'intéresse aux conditions limites de Dirichlet pour les potentiels électriques intra-cellulaires et extra-cellulaires données par :

$$u_j = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (2)$$

En ce qui concerne la condition initiale pour le potentiel transmembranaire v , elle est exprimée comme suit :

$$v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Remarque 1. On peut aussi traiter le problème avec les conditions limites de Neumann qui sont définies par :

$$(M_j(t, x) \nabla u_j) \cdot \eta = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T),$$

où $j = i, e$ et η désigne la normale sortante au bord de Ω .

Dans ce rapport, on va aussi faire l'étude pour des systèmes caractérisés par une combinaison de termes de diffusion non linéaire et une structure similaire à celle du modèle bidomaine linéaire

(1). Ces systèmes bidomaines dégénérés non-linéaires de réaction-diffusion sont représentés comme suit :

$$\begin{cases} c_m \partial_t v - \operatorname{div} M_i(t, x, \nabla u_i) + h(t, x, v) = I_{app}(t, x), \\ c_m \partial_t v - \operatorname{div} M_e(t, x, \nabla u_e) + h(t, x, v) = I_{app}(t, x), \end{cases} \quad (4)$$

où $(t, x) \in Q_T$ et $M_j : Q_T \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, avec $j = i, e$, sont les champs de vecteurs non-linéaires sont supposés comme des opérateurs Leray-Lions et satisfont les conditions précises, voir chapitre 2.

On adopte aussi les conditions de Dirichlet (2) pour les potentiels électriques intra-cellulaires et extra-cellulaires et la condition initiale (3) pour le potentiel transmembranaire.

D'abord, on a besoin de montrer l'existence et l'unicité de la solution faible de ces deux systèmes dégénérés de types paraboliques. On utilise une technique de régularisation définie par un système non-dégénéré de type parabolique qui couvre à la fois les deux systèmes précédents qui est exprimé comme suit :

$$\begin{cases} c_m \partial_t v + \varepsilon \partial_t u_i - \operatorname{div} M_i(t, x, \nabla u_i) + h(t, x, v) = I_{app}(t, x), \\ c_m \partial_t v - \varepsilon \partial_t u_e - \operatorname{div} M_e(t, x, \nabla u_e) + h(t, x, v) = I_{app}(t, x), \end{cases} \quad (5)$$

où $(t, x) \in Q_T$ et $\varepsilon \partial_t u_j$ l'opérateur d'amortissement dépendant du paramètre de régularisation $\varepsilon \ll 1$ avec $j = i, e$. On pose de nouveau le problème avec les conditions de Dirichlet (2) et la condition initiale suivante :

$$u_j(0, x) = u_{j,0}(x), \quad x \in \Omega, \quad j = i, e. \quad (6)$$

On remarque que le système non-dégénéré (5) couvre le système bidomaine linéaire (1) cas où $M_j(t, x, \xi) = \mathbf{M}_j(t, x)\xi$ ($p = 2$) (opérateur de Laplace) et le système non-linéaire (4) cas où $M_j(t, x, \xi) = |\xi|^{p-2}\mathbf{M}_j(t, x)\xi$ ($p > 2$) (opérateur de p -Laplacien)

Le reste de ce rapport est organisé comme suit. Dans la première partie, on fait d'abord la modélisation permettant la description du modèle bidomaine du tissu cardiaque. Ensuite, on donne quelques rappels d'analyse fonctionnelle qui seront utiles dans l'étude après. Dans la deuxième partie, on introduit la méthode de Faedo-Galerkin qui permet de résoudre le système non-dégénéré en prouvant l'existence de sa solution faible en fixant ε . Ainsi, on déduit l'existence de la solution du modèle bidomaine et du modèle non-linéaire en variant ε et en passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Finalement, on termine par la démonstration de l'unicité de la solution faible pour les deux systèmes dégénérés bidomaine ($p = 2$) et non-linéaire ($p > 2$).

Chapitre 1

Modèle bidomaine et Préliminaires

On présente dans ce chapitre la modélisation du tissu cardiaque. D'une part, elle est basée sur des données physiologiques à travers l'étude des structures de ses cellules musculaires cardiaques à l'échelle microscopique (structure en réseau) et à l'échelle macroscopique (milieu homogène et continue). D'autre part, elle apparaît comme un système de deux EDP de Laplace dans les milieux intra-cellulaires et extra-cellulaires, couplées par ses conditions physiques concernant les courants et les potentiels électriques sur la membrane. Ensuite, on parle avec quelques rappels et notions mathématiques sur l'analyse fonctionnelle qui est utilisé pour traiter ces EDP concernant l'existence et l'unicité de ses solutions.

1.1 Modélisation du modèle bidomainé

1.1.1 Modèle microscopique du tissu cardiaque

À l'échelle microscopique, le tissu cardiaque $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est composé de deux volumes ohmiques, nommés milieu intra-cellulaire Ω_i et milieu extra-cellulaire Ω_e selon une analyse détaillée dans le chapitre 1 et 2 du livre de Charles Pierre et du l'article de Franzone-Savaré [11, 5]. On trouve géométriquement que Ω_i et Ω_e sont deux ouverts tels que :

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_i \cup \bar{\Omega}_e, \text{ avec } \Omega_i \cap \Omega_e = \emptyset,$$

en supposant que Ω_i est connexe. Ces deux ouverts sont séparés par la membrane cellulaire $\partial\Omega$ qui est exprimé par :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_e = \partial\Omega_i - \partial\Omega,$$

en supposant que la membrane est régulière et on définit n_i la normale unitaire à $\partial\Omega$ sortante de Ω_i et de Ω_e respectivement avec $n_i = -n_e$ (voir figure (1.1)).

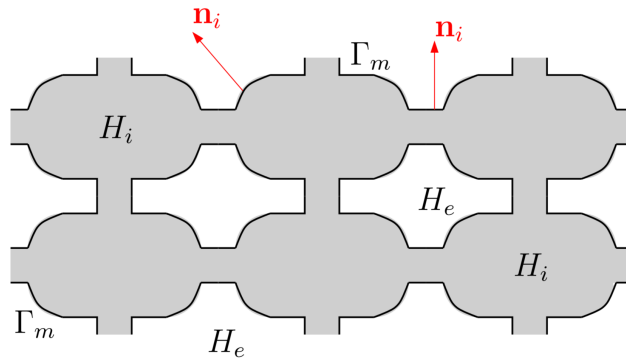


FIGURE 1.1 – Milieux intra-cellulaires et extra-cellulaires

La membrane cellulaire est transpercée par des protéines dont le rôle est d'assurer le transport de flux de substances ioniques entre les deux milieux Ω_i et Ω_e à travers ce membrane $\partial\Omega$. Donc on a ces deux domaines intra-cellulaires et extra-cellulaires agissent comme deux volumes conducteurs de sorte que l'on peut relier les potentiels électriques $u_j : \Omega_j \mapsto \mathbb{R}$, aux flux de courant $J_j : \Omega_j \mapsto \mathbb{R}^3$ avec $j = i, e$, dans chacun de ces deux domaines par loi d'Ohm :

$$J_j = -m_j \nabla u_j, \quad j = i, e,$$

avec $m_j : \Omega_j \mapsto (0, +\infty)$, $j = i, e$, représentent les conductivités des milieux intra-cellulaires et extra-cellulaires respectivement. On dénote $I_{app,i}$ et $I_{app,e}$ les courants appliqués (donnés) sur les

milieux intra et extra-cellulaires respectivement et on a alors :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(m_i \nabla u_i) &= I_{app,i} \text{ dans } \Omega_i, \\ -\operatorname{div}(m_e \nabla u_e) &= I_{app,e} \text{ dans } \Omega_e. \end{aligned} \quad (1.1)$$

D'après la relation d'équilibre sur la membrane exprimant la loi de conservation du courant alors on introduit maintenant le courant transmembranaire $I_m : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ mesuré de Ω_i vers Ω_e :

$$I_m = -J_i \cdot n_i = J_e \cdot n_e, \text{ sur } \partial\Omega.$$

On définit le potentiel transmembranaire $v : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$,

$$v = u_i - u_e.$$

Comme la membrane possède en même temps une propriété capacitive schématisée par un condensateur et une propriété résistive schématisée par une résistance. Alors le courant transmembranaire est exprimé par :

$$I_m = I_c + I_r,$$

avec I_c et I_r désignent le courant capacitif et résistif respectivement. D'une part, la propriété capacitive dépend de la formation de la membrane d'une bicouche lipidique isolant qui peut-être représentée par un condensateur de capacité c_m (la capacité par unité de surface de la membrane)(voir figure 3). On rappelle que la quantité de la charge d'un condensateur est $q = c_m v$. Donc le courant capacitif est la quantité de charge qui s'écoule par unité de temps :

$$I_c = \partial_t q = c_m \partial_t v.$$

D'autre part, la propriété résistive dépend du transport ionique entre les milieux intra-cellulaire Ω_i et extra-cellulaire Ω_e . Donc le courant résistif I_r est le courant ionique I_{ion} mesuré du milieu intra-cellulaire Ω_i vers le milieu extra-cellulaire Ω_e qui dépend du potentiel transmembranaire v . Alors I_m satisfait l'équation suivant :

$$I_m = c_m \partial_t v + I_{ion}(v) = -m_i \nabla u_i \cdot n_i = m_e \nabla u_e \cdot n_i. \quad (1.2)$$

Le modèle microscopique bidomaine de tissu cardiaque est un système de deux EDP de Laplace (1.1) dans chacun des domaines Ω_i et Ω_e couplés par la condition limite de dynamique (1.2) sur la membrane $\partial\Omega$. Il est exprimé comme suit :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(J_i) = I_{app,i}, & \text{dans } \Omega_i, \\ -\operatorname{div}(J_e) = I_{app,e}, & \text{dans } \Omega_e, \\ c_m \partial_t v + I_{ion}(v) = -J_i \cdot n_i = -J_e \cdot n_i, & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

avec la condition initiale suivante :

$$v(0, x) = v_0(x)$$

1.1.2 Modèle macroscopique du tissu cardiaque

À l'échelle macroscopique, le tissu cardiaque présente un milieu continu et comme il est organisé en fibres musculaires donc les milieux intra-cellulaires et extra-cellulaires sont indiscernables, interpénétrés et superposés l'un de l'autre connectés par la membrane cellulaire à chaque point. Donc on considère le tissu cardiaque comme suit :

$$\Omega \equiv \Omega_i \equiv \Omega_e \subset \mathbb{R}^3.$$

Pour obtenir ce modèle macroscopique, qu'on l'appelle "modèle bidomaine", on va proposer une méthode de prise en moyenne rigoureuse du modèle microscopique précédent selon une analyse

détaillée dans [10, 11]. Considérent un volume $\tilde{\Omega}$ constituée d'un grand nombre de cellules, on définit sur $\tilde{\Omega}$ les quantités moyennésées $\tilde{I}_m, \tilde{I}_{ion}, \tilde{v}$:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_m &= \frac{1}{|\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega|} \int_{\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega} I_m \, ds, \quad \tilde{I}_{ion} = \frac{1}{|\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega|} \int_{\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega} I_{ion} \, ds, \\ \tilde{v} &= \frac{1}{|\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega|} \int_{\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega} v \, ds,\end{aligned}$$

avec $j = i, e$ et $|\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega|$ représente la surface de la membrane contenue dans $\tilde{\Omega}$. Ces quantités vérifient l'équation (1.2) moyennésée :

$$\tilde{I}_m = c_m \partial_t \tilde{v} + \tilde{I}_{ion}. \quad (1.4)$$

On définit maintenant avec n la normale sortante de $\tilde{\Omega}$ les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \tilde{J}_i &:= \frac{1}{|\tilde{\Omega}|} \int_{\partial\tilde{\Omega}} J_i \cdot n \, ds, \\ \operatorname{div} \tilde{J}_e &:= \frac{1}{|\tilde{\Omega}|} \int_{\partial\tilde{\Omega}} J_e \cdot n \, ds.\end{aligned} \quad (1.5)$$

On déduit d'après les relations du modèle microscopique que :

$$\operatorname{div} \tilde{J}_i = \frac{1}{|\tilde{\Omega}|} \int_{\partial\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega} J_i \cdot n_i \, ds = -\frac{1}{|\tilde{\Omega}|} \int_{\partial\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega} I_m \, ds = -\frac{|\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega|}{|\tilde{\Omega}|} \tilde{I}_m,$$

et de même :

$$\operatorname{div} \tilde{J}_e = \frac{|\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega|}{|\tilde{\Omega}|} \tilde{I}_m.$$

Donc d'après cette méthode de prise en moyenne, on a :

$$\operatorname{div} \tilde{J}_i = -A_m \tilde{I}_m, \quad \operatorname{div} \tilde{J}_e = A_m \tilde{I}_m, \quad (1.6)$$

avec $A_m = \frac{|\tilde{\Omega} \cap \partial\Omega|}{|\tilde{\Omega}|}$ le taux moyen de surface membranaire par unité de volume.

En se référant à l'article Bendahmane et Karlsen[1] de ce stage, on généralise cette méthode pour obtenir :

$$\operatorname{div} \tilde{J}_i = -\chi \tilde{I}_m + \tilde{I}_{app}, \quad \operatorname{div} \tilde{J}_e = \chi \tilde{I}_m - \tilde{I}_{app}, \quad (1.7)$$

avec χ le taux de surface membrane par unité de volume et \tilde{I}_{app} le courant appliqué sur le milieu $\tilde{\Omega}$.

On peut conclut ,en prenant $\chi = 1$, un problème constitué d'une équation d'évolution couplée avec une équation elliptique :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\tilde{J}_i + \tilde{J}_e) &= 0, \\ c_m \partial_t \tilde{v} + \tilde{I}_{ion} - \tilde{I}_{app} &= -\operatorname{div} \tilde{J}_i\end{aligned} \quad (1.8)$$

En omettant les tildes sur les quantités macroscopiques on trouve que les variables u_i, u_e, v avec $v = u_i - u_e$ ainsi que le courant ionique I_{ion} sont définis macroscopiquement sur Ω tout entier :

$$u_i, u_e, v, I_{ion} : \Omega \mapsto \mathbb{R}.$$

Macroscopiquement, l'organisation du tissu cardiaque en fibres musculaire lui confère une nature de conducteur électrique. Donc les flux de courants sont données par la loi de conservation :

$$J_j = -\mathbf{M}_j(x) \nabla u_j, \quad j = i, e,$$

avec \mathbf{M}_j , $j = i, e$, les tenseurs de conductivité maroscopiques relatifs aux milieux intra-cellulaires et extra-cellulaires. Cette conductivité sera mesurée dans la direction longitudinale et transversale du fibre. Les matrices de conductivité sont de la forme :

$$\mathbf{M}_j(x) = \sigma_t^j I + (\sigma_l^j - \sigma_t^j) a(x) a(x)^\top, \quad j = i, e, \quad (1.9)$$

avec :

- I dénote la matrice d'identité,
- σ_l^j et σ_t^j sont les coefficients de conductivité électrique dans la direction longitudinale et transversale à la fibre en x avec $j = i, e$,
- et $a(x)$ le vecteur tangent à la fibre en x .

On suppose que $\sigma_l^j > \sigma_t^j$, $j = i, e$ et les matrices \mathbf{M}_j sont symétriques, définie-positive et possèdent deux différentes valeurs propres positives σ_l^j d'ordre de multiplicité 1 et σ_t^j d'ordre de multiplicité 2 respectivement.

Les équations (1.8) se réécrivent comme :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{M}_i \nabla u_i + \mathbf{M}_e \nabla u_e) &= 0, \\ c_m \partial_t v + I_{ion} - I_{app} &= -\operatorname{div}(\mathbf{M}_i \nabla u_i). \end{aligned}$$

Ce modèle macroscopique nous donne le modèle bidomaine (3.1) avec des conditions aux bord du tissu cardiaque et la condition initiale $v(0, x) = v_0(x)$. Mais la différence entre ces deux modèles est que \mathbf{M}_j dépendent seulement de x dans le modèle macroscopique par contre dans le modèle bidomaine pour la généralisation. Même idée pour $I_{ion} = h(v)$ le courant ionique qui a une modélisation bien écrit dans [5] de la part de FitzHugh-Nagumo.

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

L'objectif de cette section est de rappeler quelques notions et résultats qui seront utilisés dans la suite. Les espaces de Sobolev sont un outil important dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de [2, 4, 12] puis on passe aux espaces $L^p(0, T, X)$.

Définition 1.1. Soit Ω un ouvert régulier dans \mathbb{R}^n avec $1 \leq p \leq \infty$.

On note $L^p(\Omega)$ l'espace défini par :

$$L^p(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}) \}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,max}_{\Omega} |u|, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}) \text{ et } \nabla u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \}.$$

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

On définit maintenant $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de $D(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ dans l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ c'est-à-dire $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$, $\forall 1 \leq p < \infty$.

En particulier, on note $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$ pour $p = 2$.

On rappelle qu'on peut définir l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme suit :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega), \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \forall 1 \leq p < \infty\},$$

et muni de la norme :

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall 1 \leq p < \infty.$$

Proposition 1.2. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ ou $(W^{1,p}(\Omega))'$, p' est le conjugué de p , $\forall 1 \leq p < \infty$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ et par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.

Théorème 1.3. (*Caractérisation de $W^{-1,p'}(\Omega)$*)

- Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, alors il existe $f^0, f^1, \dots, f^n \in L^{p'}(\Omega)$ tel que :

$$\forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (f, \phi)_{W^{-1,p'}(\Omega)W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_{\Omega} f^0 \phi \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f^i \partial_{x_i} \phi \, dx.$$

- $\forall f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, on a :

$$\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \max_{0 \leq i \leq n} \|f^i\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

- En particulier, on a pour $p \geq 2$ $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ donc on obtient :

$$\forall f \in L^2(\Omega) \text{ et } \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (f, \phi)_{W^{-1,p'}(\Omega)W_0^{1,p}(\Omega)} = (f, \phi)_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. Admis voir [2]. □

Théorème 1.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné et de classe C^1 . On a :*

- si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,
- si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \infty[$,
- si $p > n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,

avec injections continues.

En particulier, si $p = 2$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ alors $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ avec une injection continue.

Démonstration. Admis voir [2]. □

Théorème 1.5. (*Rellich-Kondrachov*)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné de classe C^1 . On a :

- si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,
- si $p = n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \infty[$,
- si $p > n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,

avec injections compactes.

En particulier, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ avec une injection compacte $\forall p$.

Démonstration. Admis voir [2, 4]. □

Remarque 2. Ce théorème nous donne une conséquence utile qui est la suivante :

si $(u_n)_n$ est une suite bornée dans $W^{1,p}(\Omega) \underset{\text{compacte}}{\subset} L^p(\Omega)$,

alors par cet argument de compacité il existe une sous-suite $u_{n_k} \in L^p(\Omega)$ qui converge fortement vers u dans $L^p(\Omega)$.

Espaces de Sobolev $L^p(0, T, X)$ dépendant du temps :

On introduit maintenant les espaces de fonctions en x et t .

Soit X un espace de Banach, on définit $L^p(0, T; X)$ comme suit :

$$L^p(0, T; X) = \{ u :]0, T[\rightarrow X \text{ mesurable tel que } \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < +\infty \}.$$

L'espace $L^p(0, T; X)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \begin{cases} (\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Définition 1.6. Soit X un espace de Banach. On définit $C^0([0, T]; X)$ est l'ensemble des fonctions continues $u : [0, T] \rightarrow X$ tel que :

$$\|u\|_{C^0([0, T]; X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < +\infty.$$

Théorème 1.7. (Lions-Magenes continuité)

Soit X un espace de Banach et $1 < p < +\infty$.

Alors $E = \{u \in L^p(0, T; X) \text{ et } \partial_t u \in L^p(0, T; X)\}$ s'injecte continuellement dans $C^0([0, T], X)$.

Démonstration. Admis voir [9]. □

Théorème 1.8. (Lions-Magenes continuité)

Soit V et H deux espaces de Banach tel que $V \underset{\text{continue et dense}}{\subset} H \underset{\text{continue}}{\subset} V'$.

Alors $E = \{u \in L^2(0, T; V) \text{ et } \partial_t u \in L^2(0, T; V')\}$ s'injecte continuellement dans $C^0([0, T], H)$.

Démonstration. Admis voir [9]. □

Théorème 1.9. (Aubin-Lions)

Soit X, X_0 et X_1 trois espaces de Banach tel que X_0 et X_1 sont séparables et réflexifs et

$$X_0 \underset{\text{compacte}}{\subset} X \underset{\text{continue}}{\subset} X_1.$$

Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et $E = \{u \in L^p(0, T; X_0) \text{ et } \partial_t u \in L^{p'}(0, T; X_1) \text{ avec } 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\}$. Alors, on a :

- si $p < +\infty$, alors $E \underset{\text{compacte}}{\subset} L^p(0, T; X)$.
- si $p = +\infty$ et $p' > 1$, alors $E \underset{\text{compacte}}{\subset} C^0(0, T; X)$.

Démonstration. Admis voir [8]. □

Un autre résultat de base de la théorie d'intégration est le théorème de Vitali, qui est le suivant :

Théorème 1.10. (Théorème de Vitali's)

Soit $1 \leq p < \infty$. Si u_n est une suite de $L^p(0, T; X)$ converge p.p. vers u . Alors on a l'équivalence suivante :

- $(u_n)_n \rightarrow u$ converge fortement dans $L^p(0, T; X)$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall n \geq 1, \forall A \subset (0, T)$ mesurable avec $|A| < \delta$, on ait :

$$\int_A \|u_n(t)\|_X^p dt < \varepsilon.$$

Chapitre 2

Analyse d'une classe de systèmes de réaction-diffusion non dégénéré

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de l'existence de solutions faibles de systèmes de réaction-diffusion de types paraboliques non dégénérés dans un domaine borné en plusieurs étapes comme c'est fait dans l'article Bendahmane et Karlsen [1]. Plus précisément, on s'intéresse dans ce chapitre au système non dégénéré avec $0 < \varepsilon \ll 1$ fixé :

$$\begin{cases} c_m \partial_t v + \varepsilon \partial_t u_i - \operatorname{div} M_i(t, x, \nabla u_i) + h(t, x, v) = I_{app}(t, x), \\ c_m \partial_t v - \varepsilon \partial_t u_e - \operatorname{div} M_e(t, x, \nabla u_e) + h(t, x, v) = I_{app}(t, x), \end{cases} \quad (2.1)$$

où $(t, x) \in Q_T$. On pose de nouveau le problème avec les conditions de Dirichlet :

$$u_j = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.2)$$

et la condition initiale suivante :

$$u_j(0, x) = u_{j,0}(x), \quad x \in \Omega, \quad j = i, e. \quad (2.3)$$

2.1 Quelques hypothèses

On suppose que le domaine physique Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^3 qui représente le tissu cardiaque avec une frontière régulière $\partial\Omega$ (la membrane). On commence par introduire les conditions sur les champs de vecteurs de diffusion $M_j(t, x, \xi)$ du modèle non-dégénéré (2.1) qui couvre le modèle bidomaine (1) c'est le cas où $M_j(t, x, \xi) = \mathbf{M}_j(t, x)\xi$ et le modèle non-linéaire (4) c'est le cas où $M(t, x, \xi) = |\xi|^{p-2}\mathbf{M}_j(t, x)\xi$. Puis, on donne les conditions sur le courant ionique $h(t, x, v)$.

2.1.1 Conditions sur les champs de vecteurs de diffusion $M_j(t, x, \xi)$.

Soit $2 \leq p < \infty$. On suppose que $M_j = M_j(t, x, \xi) : Q_T \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $j = i, e$, sont des fonctions de Carathéodory (voir Annexe).

Ces champs vérifient les hypothèses de type Leray-Lions suivantes :

- Condition de continuité :

$$|M_j(t, x, \xi)| \leq C_M(|\xi|^{p-1} + f_1(t, x)), \quad j = i, e, \quad (2.4)$$

- Condition de monotonie :

$$(M_j(t, x, \xi) - M_j(t, x, \xi')) \cdot (\xi - \xi') \geq C_M(|\xi - \xi'|^p), \quad j = i, e, \quad (2.5)$$

- Condition de coercivité :

$$M_j(t, x, \xi) \cdot \xi \geq C_M |\xi|^p, \quad j = i, e, \quad (2.6)$$

pour $(t, x) \in Q_T$ p.p., $\forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^3$, et avec C_M une constante positive et $f_1 \in L^p(Q_T)$.

De plus, on suppose qu'il existe des fonctions Carathéodory $G_j = G_j(t, x, \xi) : Q_T \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $j = i, e$, tel que $\forall (t, x) \in Q_T$ et $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_l} G_j(t, x, \xi) = M_{j,l}(t, x, \xi), \quad l = 1, 2, 3, \quad (2.7)$$

$$|\partial_t G_j(t, x, \xi)| \leq K_1 G_j(t, x, \xi) + f_2(t, x), \quad (2.8)$$

avec K_1 une constante et $f_2 \in L^1(Q_T)$.

Un exemple type satisfaisant les hypothèses de type Leray-Lions (2.4)-(2.6) est donné par $M_j(t, x, \xi) = |\xi|^{p-2} \mathbf{M}_j(t, x) \xi$. En ce qui concerne ces champs particuliers, les fonctions $G_j(t, x, \xi)$ qui satisfont la condition de Cauchy (2.7) sont exprimées par $G_j = \frac{1}{p} |\xi|^p \mathbf{M}_j(t, x)$.

Remarque 3. En se référant au modèle bidomaine dans le cas où $p = 2$, les champs de vecteurs de diffusions $M_j(t, x, \xi) = \mathbf{M}_j(t, x) \xi$ satisfont les hypothèses de type Leray-Lions (2.4)-(2.6) à condition que :

$$\mathbf{M}_j(t, x) \in L^\infty(Q_T), \quad j = i, e, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{M}_j(t, x) \cdot \xi \geq C'_M |\xi|^2, \quad \text{pour p.p. } (t, x) \in Q_T \text{ et } \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \text{ avec } C'_M, j = i, e. \quad (2.10)$$

2.1.2 Conditions sur le courant ionique $h(t, x, v)$.

On suppose que le courant ionique $h(t, x, v) : Q_T \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory. Pour $p \geq 2$, on suppose qu'il existe des constantes $C_h, K_2 > 0$ telles que :

- Condition de monotonie de h sur v :

$$h(t, x, 0) = 0, \quad \frac{h(t, x, v_1) - h(t, x, v_2)}{v_1 - v_2} \geq -C_h, \quad \forall v_1 \neq v_2, \quad (2.11)$$

$$H(t, x, v) := \int_0^v h(t, x, \rho) d\rho, \quad |\partial_t H(t, x, v)| \leq K_2 H(t, x, v) + f_3(t, x), \quad (2.12)$$

pour $(t, x) \in Q_T$ p.p. et $f_3 \in L^1(Q_T)$.

En plus, on suppose pour $p = 2$:

$$0 < \liminf_{|v| \rightarrow \infty} \frac{h(\cdot, \cdot, v)}{v^3} \leq \limsup_{|v| \rightarrow \infty} \frac{h(\cdot, \cdot, v)}{v^3} < \infty, \quad (2.13)$$

Alors que pour $p > 2$, on suppose :

$$0 < \liminf_{|v| \rightarrow \infty} \frac{h(\cdot, \cdot, v)}{|v|^{p-2} v} \leq \limsup_{|v| \rightarrow \infty} \frac{h(\cdot, \cdot, v)}{|v|^{p-2} v} < \infty. \quad (2.14)$$

Un exemple sur h satisfaisant ces hypothèses est $h(t, x, v) = v$ pour $p = 2$ et $h(t, x, v) = |v|^{p-2} v$ pour $p > 2$.

Remarque 4. D'après la condition de monotonie de h sur v (2.11) et la condition (2.13), on peut conclure qu'il existe $C, C', C'' > 0$ tel que :

$$|h(t, x, v)| \leq C(|v|^3 + 1), \quad (p = 2), \quad (2.15)$$

$$C'|v|^{p-1} \leq |h(t, x, v)| \leq C''(|v|^{p-1} + 1), \quad (p > 2), \quad (2.16)$$

pour p.p. $(t, x) \in Q_T$ et $\forall v \in \mathbb{R}$.

Remarque 5. D'après la même condition de monotonie (2.11), on prend une conséquence utile dans ce travail :

$$(h(t, x, v_1) - h(t, x, v_2))(v_1 - v_2) + C_h(v_1 - v_2)^2 \geq 0, \quad (2.17)$$

$\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ et pour $(t, x) \in Q_T$ p.p.

2.2 Étude du système non-dégénéré

La démonstration est basée sur la méthode de Faedo-Galerkin qui consiste à réaliser la stratégie principale :

- Rechercher des solutions approchées par cette méthode.
- Établir des estimations d'énergies a priori sur ces solutions approchées.
- On passe à la limite, grâce à des propriétés de compacité (dans les termes non linéaires).
- Retrouver la condition initiale du problème non-dégénéré (2.1).

Définition 2.1. Pour tout ε fixé, on dit qu'une solution (u_i, u_e, v) du problème non-dégénéré (2.1) est faible si le triplet de fonctions u_i, u_e et $v \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ avec $v = u_i - u_e$ tel que $\partial_t u_j \in L^2(Q_T)$, $u_j(0) = u_{j,0}$ p.p. dans Ω , pour $j = i, e$, et elle vérifie la formulation faible suivante :

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} c_m \partial_t v \varphi_i \, dx \, dt + \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_i \varphi_i \, dx \, dt + \iint_{Q_T} M_i(t, x, \nabla u_i) \cdot \nabla \varphi_i \, dx \, dt \\ + \iint_{Q_T} h(t, x, v) \varphi_i \, dx \, dt = \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_i \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} c_m \partial_t v \varphi_e \, dx \, dt + \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_e \varphi_e \, dx \, dt + \iint_{Q_T} M_e(t, x, \nabla u_e) \cdot \nabla \varphi_e \, dx \, dt \\ + \iint_{Q_T} h(t, x, v) \varphi_e \, dx \, dt = \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_e \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$\forall \varphi_j \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, $j = i, e$.

2.2.1 Existence de solutions approchées par la méthode de Faedo-Galerkin

La méthode de Faedo-Galerkin est une méthode de projection qui consiste à chercher des solutions approchées dans un espace vectoriel de dimension finie au lieu d'un espace de dimension infinie.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est séparable et d'après la définition (1.6), il existe une suite e_1, \dots, e_n ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} e_l \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall l; \\ e_1, e_2, \dots, e_n \text{ sont linéairement indépendants } \forall n; \\ \bigcup_{n \geq 1} \langle e_1, \dots, e_n \rangle \text{ dense dans } W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \quad (2.20)$$

On choisit $\{e_l\}_{l=1}^\infty$ une base orthonormée de $L^2(\Omega)$ et orthogonale de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

On note $W_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ l'espace vectoriel de dimension n . Par la méthode de Faedo-Galerkin, on projete u_i, u_e et v sur cette base W_n , donc on obtient les solutions approchées comme des suites $\{u_{i,n}\}_{n \geq 1}$, $\{u_{e,n}\}_{n \geq 1}$, $\{v_n\}_{n \geq 1}$ définies pour $t \geq 0$ et $x \in \Omega$ par :

$$u_{i,n}(t, x) = \sum_{l=1}^n c_{i,l}(t) e_l(x), \quad u_{e,n}(t, x) = \sum_{l=1}^n c_{e,l}(t) e_l(x), \quad (2.21)$$

$$v_n(t, x) = \sum_{l=1}^n d_{n,l}(t) e_l(x), \quad d_{n,l}(t) := c_{i,l}(t) - c_{e,l}(t), \quad (2.22)$$

Déterminer $\{u_{i,n}\}_{n \geq 1}$, $\{u_{e,n}\}_{n \geq 1}$, $\{v_n\}_{n \geq 1}$ revient à déterminer $\{c_{i,l}\}_{l=1}^n$, $\{c_{e,l}\}_{l=1}^n$, $\{d_{n,l}\}_{l=1}^n$. On s'intéresse à la recherche de ces coefficients afin de prouver l'existence des solutions approchées du système non-dégénéré approché :

$$\begin{cases} c_m \partial_t v_n + \varepsilon \partial_t u_{i,n} - \operatorname{div} M_i(t, x, \nabla u_{i,n}) + h(t, x, v_n) = I_{app,n}(t, x), \\ c_m \partial_t v_n - \varepsilon \partial_t u_{e,n} - \operatorname{div} M_e(t, x, \nabla u_{e,n}) + h(t, x, v_n) = I_{app,n}(t, x), \end{cases} \quad (2.23)$$

avec $I_{app,n}(t, x)$ est la projection orthogonale finie du courant appliqué I_{app} qui est définie comme suit :

$$I_{app,n}(t, x) = \sum_{l=1}^n (I_{app}, e_l)_{L^2(\Omega)}(t) e_l(x). \quad (2.24)$$

On adopte les mêmes conditions de Dirichlet (2.2) pour les potentiels électriques intra-cellulaires et extra-cellulaires et en se référant à (2.3), la condition initiale est alors la suivante :

$$\begin{aligned} u_{i,n}(0, x) = u_{0,i,n}(x) &:= \sum_{l=1}^n c_{i,l}(0) e_l(x), & c_{i,l}(0) &:= (u_{i,0}, e_l)_{L^2(\Omega)}, \\ u_{e,n}(0, x) = u_{0,e,n}(x) &:= \sum_{l=1}^n c_{e,l}(0) e_l(x), & c_{e,l}(0) &:= (u_{e,0}, e_l)_{L^2(\Omega)}, \\ v_n(0, x) = v_{0,n}(x) &:= \sum_{l=1}^n d_{n,l}(0) e_l(x), & d_{n,l}(0) &:= c_{i,l}(0) - c_{e,l}(0). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Comme $I_{app} \in L^2(Q_T)$ et $u_{0,j} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut remarquer que $I_{app,n} \rightarrow I_{app}$ dans $L^2(Q_T)$ et $u_{0,j,n} \rightarrow u_{j,0}$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ quand $n \rightarrow \infty$.

• **Existence des solutions approchées du système non-dégénéré approché (2.23)**

Maintenant, on multiplie chaque équation du système non-dégénéré approché (2.23) puis on intègre en espace pour obtenir :

$$\begin{aligned} & (c_m \partial_t v_n, e_k)_{L^2(\Omega)} + (\varepsilon \partial_t u_{i,n}, e_k)_{L^2(\Omega)} \\ & + \int_{\Omega} \operatorname{div} M_i(t, x, \nabla u_{i,n}) e_k \, dx + \int_{Q_T} h(t, x, v_n) e_k \, dx \\ & = \iint_{Q_T} I_{app,n}(t, x) \varphi_{i,n} \, dx \, dt, \\ & (c_m \partial_t v_n, e_k)_{L^2(\Omega)} - (\varepsilon \partial_t u_{e,n}, e_k)_{L^2(\Omega)} \\ & + \int_{\Omega} \operatorname{div} M_e(t, x, \nabla u_{e,n}) e_k \, dx + \int_{\Omega} h(t, x, v_n) e_k \, dx \\ & = \int_{\Omega} I_{app,n}(t, x) e_k \, dx, \end{aligned}$$

En utilisant la formule de la divergence (voir Annexe) et les conditions de Dirichlet (2.2) sur la frontière que :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) e_k \, dx = - \int_{\Omega} M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) \cdot \nabla e_k \, dx,$$

avec $j = i, e$.

Comme les suites $\{u_{i,n}\}_{n \geq 1}$, $\{u_{e,n}\}_{n \geq 1}$, $\{v_n\}_{n \geq 1}$ ont la forme dans (2.21), (2.22), Alors :

$$\partial_t v_n(t, x) = \sum_{l=1}^n d'_{n,l}(t) e_l(x),$$

et

$$\partial_t u_{j,n}(t, x) = \sum_{l=1}^n c'_{j,l}(t) e_l(x).$$

En utilisant la bilinéarité et l'orthonormalité de la base $(e_k)_k$, on peut écrire les deux premiers termes dans les deux équations précédentes plus explicitement :

- Le premier terme devient :

$$\begin{aligned} (c_m \partial_t v_n, e_k)_{L^2(\Omega)} &= (c_m \sum_{i=1}^n d'_{n,i}(t) e_i(x), e_k)_{L^2(\Omega)}, \\ &= c_m \sum_{i=1}^n d'_{n,i}(t) (e_i, e_k)_{L^2(\Omega)}, \\ &= c_m d'_{n,k}(t). \end{aligned}$$

- De même pour le deuxième terme, on obtient :

$$\begin{aligned} (\varepsilon \partial_t u_{j,n}, e_k)_{L^2(\Omega)} &= (\varepsilon \sum_{i=1}^n c'_{j,i}(t) e_i(x), e_k)_{L^2(\Omega)}, \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^n c'_{j,i}(t) (e_i, e_k)_{L^2(\Omega)}, \\ &= \varepsilon c'_{j,l}(t). \end{aligned}$$

Donc, en remplaçant chaque terme par sa valeur, on obtient un système d'équations différentiels ordinaires :

$$c_m d'_{n,k}(t) + \varepsilon c'_{i,l}(t) + \int_{\Omega} M_i(t, x, \nabla u_{i,n}) \cdot \nabla e_k \, dx + \int_{\Omega} h(t, x, v_n) e_k \, dx = \int_{\Omega} I_{app,n}(t, x) e_k \, dx, \quad (2.26)$$

et

$$c_m d'_{n,k}(t) - \varepsilon c'_{e,l}(t) - \int_{\Omega} M_e(t, x, \nabla u_{j,n}) \cdot \nabla e_k \, dx + \int_{\Omega} h(t, x, v_n) e_k \, dx = \int_{\Omega} I_{app,n}(t, x) e_k \, dx. \quad (2.27)$$

Ensuite, on somme les deux équations (2.26), (2.27) du système pour obtenir :

$$\begin{aligned} 2c_m d'_{n,k}(t) + \varepsilon (c'_{j,l}(t) - c'_{e,l}(t)) + \int_{\Omega} (M_i(t, x, \nabla u_{i,n}) - M_e(t, x, \nabla u_{j,n})) \cdot \nabla e_k \, dx \\ + 2 \int_{\Omega} h(t, x, v_n) e_k \, dx = 2 \int_{\Omega} I_{app,n}(t, x) e_k \, dx. \end{aligned}$$

Donc, elle est équivalente à :

$$\begin{aligned} (2c_m + \varepsilon) d'_{n,k}(t) &= \int_{\Omega} (M_e(t, x, \nabla u_{i,n}) - M_i(t, x, \nabla u_{j,n})) \cdot \nabla e_k \, dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} h(t, x, v_n) e_k \, dx + 2 \int_{\Omega} I_{app,n}(t, x) e_k \, dx, \\ &=: F^k(t, \{c_{i,l}\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}\}_{l=1}^n, \{d_{n,l}\}_{l=1}^n). \end{aligned} \quad (2.28)$$

On retourne aux deux équations (2.26), (2.27). D'après l'équation différentielle ordinaire de $d'_{n,k}$ (2.28), on remplace $d'_{n,k}$ par sa valeur dans ces deux équations pour obtenir les équations différen-

tielles ordinaires :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon c'_{i,k}(t) &= \frac{-c_m}{2c_m + \varepsilon} F^k(t, \{c_{i,l}\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}\}_{l=1}^n, \{d_{n,l}\}_{l=1}^n) \\
 &\quad - \int_{\Omega} M_i(t, x, \nabla u_{j,n}) \cdot \nabla e_k \, dx - \int_{\Omega} h(t, x, v_n) e_k \, dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} I_{app,n}(t, x) e_k \, dx, \\
 &=: F_i^k(t, \{c_{i,l}\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}\}_{l=1}^n, \{d_{n,l}\}_{l=1}^n).
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon c'_{e,k}(t) &= \frac{c_m}{2c_m + \varepsilon} F^k(t, \{c_{i,l}\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}\}_{l=1}^n, \{d_{n,l}\}_{l=1}^n) \\
 &\quad - \int_{\Omega} M_i(t, x, \nabla u_{j,n}) \cdot \nabla e_k \, dx + \int_{\Omega} h(t, x, v_n) e_k \, dx \\
 &\quad - \int_{\Omega} I_{app,n}(t, x) e_k \, dx, \\
 &=: F_e^k(t, \{c_{i,l}\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}\}_{l=1}^n, \{d_{n,l}\}_{l=1}^n).
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Maintenant, on a trois systèmes différentielles ordinaires (2.28), (2.29), (2.30) de la forme $z' = F(t, z)$. Cette étape consiste à prouver l'existence locale de coefficients $\{d_{n,l}\}_{l=1}^n, \{c_{i,l}\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}\}_{l=1}^n$ de ces systèmes, à l'aide de théorème de Carathéodory's existence [6].

Soit $\rho \in (0, T)$ et on pose $U = [0, \rho]$. On choisit $r > 0$ grand tel que la boule $B_r \subset \mathbb{R}^{3n}$ contient les trois vecteurs $\{d_{n,l}(0)\}_{l=1}^n, \{c_{i,l}(0)\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}(0)\}_{l=1}^n$ et on pose $V := \overline{B_r}$. Soit $F = \{F^k\}_{k=1}^n, F_i = \{F_i^k\}_{k=1}^n$ et $F_e = \{F_e^k\}_{k=1}^n$.

Sous les hypothèses (2.4)-(2.14), les fonctions $F, F_j : U \times V \mapsto \mathbb{R}^n, j = i, e$, sont des fonctions de Carathéodory. Il suffit de démontrer qu'il existe des fonctions Lebesgue intégrables $K(t), K_j(t) \in L^1(U)$ et $\forall(t, \{c_{i,l}\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}\}_{l=1}^n, \{d_{n,l}\}_{l=1}^n) \in U \times V$ tel que $F^k, F_j^k, j = i, e$, peuvent être respectivement estimés comme suit :

$$|F^k(t, \{c_{i,l}\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}\}_{l=1}^n, \{d_{n,l}\}_{l=1}^n)| \leq K(t)C(r, n),$$

et

$$|F_j^k(t, \{c_{i,l}\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}\}_{l=1}^n, \{d_{n,l}\}_{l=1}^n)| \leq K_j(t)C_j(r, n),$$

avec $C(r, n), C_j(r, n)$ sont des constantes dépendantes de r, n seulement.

Or, on a :

$$\begin{aligned}
 &|F^k(t, \{c_{i,l}\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}\}_{l=1}^n, \{d_{n,l}\}_{l=1}^n)| \\
 &\leq \left| \int_{\Omega} (M_e(t, x, \nabla u_{i,n}) - M_i(t, x, \nabla u_{j,n})) \cdot \nabla e_k \, dx \right| + 2 \left| \int_{\Omega} h(t, x, v_n) e_k \, dx \right| \\
 &\quad + 2 \left| \int_{\Omega} I_{app,n}(t, x) e_k \, dx \right|.
 \end{aligned}$$

Comme on a $(e_k)_{k=1}^n$ une base orthonormée de $L^2(\Omega)$ et orthogonale de $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors :

- $\|e_l\|_{L^p(\Omega)} \leq l_1, \|\nabla e_l\|_{L^p(\Omega)} \leq l_2 \, \forall p \geq 2, \|e_l\|_{L^2(\Omega)} = 1$, avec l_1, l_2 sont des constantes indépendantes de r, n .
- Vu que $I_{app,n}$ prend la forme (2.24), alors on a : $\|I_{app,n}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|I_{app}\|_{L^2(\Omega)} \leq l_3(t)$ avec $l_3(t) = \|I_{app}\|_{L^2(\Omega)}$ une constante indépendante de r, n (dépend seulement de t).

Comme $\nabla u_{j,n} \in L^p(\Omega)$, et en utilisant la condition de croissance (2.4) de M_j , avec $f_1 \in L^{p'}(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned}
 |M_j(t, x, \nabla u_{j,n})|^{p'} &\leq C_M(|\nabla u_{j,n}|^{p-1} + f_1)^{p'} \\
 &\leq 2^{p'-1} C_M(|\nabla u_{j,n}|^{p'(p-1)} + f_1^{p'}) \\
 &\leq 2^{p'-1} C_M(|\nabla u_{j,n}|^p + f_1^{p'}) \\
 &\leq C'(|\nabla u_{j,n}|^p + f_1^{p'}),
 \end{aligned}$$

avec $C' = 2^{p'-1}C_M$, donc $M_j \in L^{p'}(\Omega)$. De plus, on a $\nabla u_{j,n} = \sum_{i=1}^n c_{j,i}(t)\nabla e_i(x)$ avec $c_{j,i}(t) \in V$ (c'est-à-dire $|c_{j,i}(t)| \leq r$) il reste à estimer M_j de la manière suivante :

$$\begin{aligned} |M_j(t, x, \nabla u_{j,n})|^{p'} &\leq C'(|\nabla u_{j,n}|^p + f_1^{p'}) \\ &\leq C' \left(\left| \sum_{i=1}^n c_{j,i}(t)\nabla e_i(x) \right|^p + f_1^{p'} \right) \\ &\leq C' \left(\sum_{i=1}^n |c_{j,i}(t)| |\nabla e_i(x)| \right)^p + C' f_1^{p'} \\ &\leq C' r^p \left(\sum_{i=1}^n |\nabla e_i(x)| \right)^p + C' f_1^{p'}. \end{aligned}$$

Donc en utilisant l'inégalité de Minkowski et les estimations sur les éléments de la base, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \|M_j(t, x, \nabla u_{j,n})\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} &\leq C' r^p \left\| \sum_{i=1}^n |\nabla e_i(x)| \right\|_{L^p(\Omega)}^p + C' \|f_1\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} \\ &\leq C' r^p \left(\sum_{i=1}^n \|\nabla e_i(x)\|_{L^p(\Omega)} \right)^p + C' \|f_1\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} \\ &\leq C' (\widehat{\alpha}(r, n) l_2^p + l_4^{p'}(t)) \\ &\leq \alpha(r, n) l_{2,4}(t), \end{aligned}$$

avec $\widehat{\alpha}(r, n)$ une constante qui dépend seulement de r, n et $\alpha(r, n) = C' \max(\widehat{\alpha}(r, n), 1)$, $l_4(t) = \|f_1\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'}$ une constante dépend seulement de t et $l_{2,4}(t) = l_2^p + l_4^{p'}(t)$. Maintenant, on va estimer $h \in L^{p'}(\Omega) \forall p \geq 2$. D'après les estimations (2.15)- (2.16) de h dans la remarque 4, on va commencer par le cas où $p = 2$ et $p > 2$. Comme on a v_n est de la forme (2.22), avec $d_{n,i}(t) \in V$ (c'est-à-dire $|d_{n,i}(t)| \leq r$) et en utilisant l'inégalité d'indice et de Minkowski (voir Annexe), on obtient les estimations suivantes :

- Pour $p = 2$, on a alors :

$$\begin{aligned}
 \|h(t, x, v_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C^2 \int_{\Omega} (|v_n|^3 + 1)^2 dx \\
 &\leq 2C^2 \int_{\Omega} (|v_n|^6 + 1^2) dx \\
 &\leq 2C^2 \left(\int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^n d_{n,i}(t) e_i(x) \right|^6 dx + C_{\Omega} \right) \\
 &\leq 2C^2 \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n |d_{n,i}(t)| |e_i(x)| \right)^6 dx + 2C^2 C_{\Omega} \\
 &\leq 2C^2 r^6 \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n |e_i(x)| \right)^6 dx + 2C^2 C_{\Omega} \\
 &\leq 2C^2 r^6 \left\| \sum_{i=1}^n |e_i(x)| \right\|_{L^6(\Omega)}^6 + 2C^2 C_{\Omega} \\
 &\leq 2C^2 r^6 \left(\sum_{i=1}^n \|e_i(x)\|_{L^6(\Omega)} \right)^6 + 2C^2 C_{\Omega} \\
 &\leq 2C^2 (\widehat{\beta}_1(r, n) l_1^6 + C_{\Omega}) \\
 &\leq \beta_1(r, n),
 \end{aligned}$$

avec $\widehat{\beta}_1(r, n)$ une constante qui dépend seulement de r, n et $\beta_1(r, n) = 2C^2(\widehat{\beta}_1(r, n)l_1^6 + C_{\Omega})$.

- Pour $p' > 2$, on a $p' = \frac{p}{p-1}$ le conjugué de p alors :

$$\begin{aligned}
 \|h(t, x, v_n)\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} &\leq C^{p'} \int_{\Omega} (|v_n|^{p-1} + 1)^{p'} dx \\
 &\leq 2^{p'-1} C^{p'} \int_{\Omega} (|v_n|^{(p-1)\frac{p'}{p-1}} + 1^{p'}) dx \\
 &\leq 2^{p'-1} C^{p'} \left(\int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^n d_{n,i}(t) e_i(x) \right|^p dx + C_{\Omega} \right) \\
 &\leq 2^{p'-1} C^{p'} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n |d_{n,i}(t)| |e_i(x)| \right)^p dx + 2^{p'-1} C^{p'} C_{\Omega} \\
 &\leq 2^{p'-1} C^{p'} r^p \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n |e_i(x)| \right)^p dx + 2^{p'-1} C^{p'} C_{\Omega} \\
 &\leq 2^{p'-1} C^{p'} r^p \left\| \sum_{i=1}^n |e_i(x)| \right\|_{L^p(\Omega)}^p + 2^{p'-1} C^{p'} C_{\Omega}, \\
 &\leq 2^{p'-1} C^{p'} r^p \left(\sum_{i=1}^n \|e_i(x)\|_{L^p(\Omega)} \right)^p + 2^{p'-1} C^{p'} C_{\Omega} \\
 &\leq 2^{p'-1} C^{p'} (\widehat{\beta}_2(r, n) l_1^p + C_{\Omega}) \\
 &\leq \beta_2(r, n),
 \end{aligned}$$

avec $\widehat{\beta}_2(r, n)$ une constante qui dépend seulement de r, n et $\beta_2(r, n) = 2^{p'-1} C^{p'} (\widehat{\beta}_2(r, n) l_1^p + C_{\Omega})$.

Par conséquent, on a : $\forall p \geq 2$, $\|h(t, x, v_n)\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} \leq \beta(r, n)$, avec $\beta(r, n) = \max(\beta_1(r, n), \beta_2(r, n))$. Ensuite, on retourne à l'estimation de F^k et en utilisant l'inégalité de Hölder alors on obtient en combinant toutes les estimations précédentes que :

$$\begin{aligned}
& |F^k(t, \{c_{i,l}\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}\}_{l=1}^n, \{d_{n,l}\}_{l=1}^n)| \\
& \leq \left| \int_{\Omega} M_e(t, x, \nabla u_{i,n}) \cdot \nabla e_k \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} M_i(t, x, \nabla u_{j,n}) \cdot \nabla e_k \, dx \right| \\
& + 2 \left| \int_{\Omega} h(t, x, v_n) e_k \, dx \right| + 2 \left| \int_{\Omega} I_{app,n}(t, x) e_k \, dx \right|, \\
& \leq \sum_{j=i,e} \left| \int_{\Omega} M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) \cdot \nabla e_k \, dx \right| + 2 \left| \int_{\Omega} h(t, x, v_n) e_k \, dx \right| \\
& + 2 \left| \int_{\Omega} I_{app,n}(t, x) e_k \, dx \right|, \\
& \leq \sum_{j=i,e} \|M_j(t, x, \nabla u_{j,n})\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\nabla e_l\|_{L^p(\Omega)} + 2 \|h(t, x, v_n)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|e_l\|_{L^p(\Omega)} \\
& + 2 \|I_{app,n}\|_{L^2(\Omega)} \|e_l\|_{L^2(\Omega)}, \\
& \leq 2\alpha^{\frac{1}{p'}}(r, n) l_{2,4}^{\frac{1}{p'}}(t) l_2 + 2\beta^{\frac{1}{p'}}(r, n) l_1 + 2l_2 l_3(t), \\
& \leq 2K(t)C(r, n).
\end{aligned}$$

avec $C(r, n) = \max(\alpha^{\frac{1}{p'}}(r, n) l_2, \beta^{\frac{1}{p'}}(r, n) l_1, l_2)$ une constante qui dépend seulement de r, n et $K(t) = l_{2,4}^{\frac{1}{p'}}(t) + l_3(t) + 1$ une fonction $L^1(U)$ qui dépend seulement de t . D'une manière similaire à ce qui a été fait pour la première estimation au-dessus on prouve aussi que :

$$|F_j^k(t, \{c_{i,l}\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}\}_{l=1}^n, \{d_{n,l}\}_{l=1}^n)| \leq K_j(t)C_j(r, n),$$

avec $C_j(r, n)$ une constante dépendant de r, n seulement et $K_j(t)$ sont des fonctions $L^1(U)$ indépendante de r, n . Ainsi, on a montré que $F^k, F_j^k, j = i, e$, vérifient les conditions du théorème de Carathéodory.

Par conséquent, d'après le théorème de Carathéodory d'existence de solution, il existe de coefficients absolument continues $\{d_{n,l}(t)\}_{l=1}^n, \{c_{i,l}(t)\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}(t)\}_{l=1}^n$ satisfont ces systèmes d'équations différentielles ordinaires (2.28), (2.29), (2.30) pour $t \in [0, T^*)$ p.p., avec $T^* < \rho$. De plus, on a ces coefficients vérifent les équations suivantes sur $[0, T^*)$:

$$\begin{aligned}
d_{n,l} &= d_{n,l}(0) \\
& + \frac{1}{2c_m + \varepsilon} \int_0^t F^k(\tau, \{c_{i,l}(\tau)\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}(\tau)\}_{l=1}^n, \{d_{n,l}(\tau)\}_{l=1}^n) \, d\tau,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
c_{j,l} &= c_{j,l}(0) \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t F_j^k(\tau, \{c_{i,l}(\tau)\}_{l=1}^n, \{c_{e,l}(\tau)\}_{l=1}^n, \{d_{n,l}(\tau)\}_{l=1}^n) \, d\tau,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

avec $j = i, e$.

En résumé, pour chaque n , on a montré l'existence locale de solutions approchées sur $[0, T^*)$ (peut-être dépend de n) du système non-dégénéré approché (2.23).

2.2.2 Estimation d'énergie

Cette section consiste à trouver des estimations d'énergies qui permettent d'exhiber la norme dans laquelle la solution est bornée. Ceci entraîne les espaces fonctionnels adéquats.

Pour démontrer l'existence globale de solutions Faedo-Galerkin sur $[0, T)$ (indépendante de n), on

a besoin des estimations d'énergie.

On a montré l'existence locale des solutions Faedo-Galerkin faible du système non-dégénéré approché (2.23) sur $[0, T^*]$ avec $T^* \in (0, T)$.

Étant donné certains coefficients (absolument continues) $a_{j,l}(t)$, avec $j = i, e$, on forme les fonctions $\varphi_{i,n}(t, x) := \sum_{l=1}^n a_{i,l}(t) e_l(x)$ et $\varphi_{e,n}(t, x) := \sum_{l=1}^n a_{e,l}(t) e_l(x)$. Donc, les solutions Faedo-Galerkin satisfont la formulation faible pour chaque t (en se référant à la définition 2.1), qui sera le point de départ pour prouver les estimations d'énergie :

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} c_m \partial_t v_n \varphi_{i,n} \, dx \, dt + \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_{i,n} \varphi_{i,n} \, dx \, dt \\ & + \iint_{Q_T} M_i(t, x, \nabla u_{i,n}) \cdot \nabla \varphi_{i,n} \, dx \, dt + \iint_{Q_T} h(t, x, v_n) \varphi_{i,n} \, dx \, dt \\ & = \iint_{Q_T} I_{app,n}(t, x) \varphi_{i,n} \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} c_m \partial_t v_n \varphi_{e,n} \, dx \, dt + \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_{e,n} \varphi_{e,n} \, dx \, dt \\ & + \iint_{Q_T} M_e(t, x, \nabla u_{e,n}) \cdot \nabla \varphi_{e,n} \, dx \, dt + \iint_{Q_T} h(t, x, v_n) \varphi_{e,n} \, dx \, dt \\ & = \iint_{Q_T} I_{app,n}(t, x) \varphi_{e,n} \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$\forall \varphi_{j,n} \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, $j = i, e$.

On remarque que T ici un temps arbitraire dans l'intervalle de l'existence de la solution $[0, T^*)$ différent que T le temps final et qu'on va le prendre dans la suite et avant d'attaquer la démonstration globale.

Lemme 2.2. *On suppose que les conditions (2.4)-(2.14) sont vérifiées et $p \geq 2$.*

Si $u_{i,0}, u_{e,0} \in L^2(\Omega)$ et $I_{app} \in L^2(Q_T)$, alors il existe des constantes positives c_1, c_2, c_3 indépendantes de n telles que :

$$\|v_n\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \sum_{j=i,e} \|\sqrt{\varepsilon} u_{j,n}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq c_1, \quad (2.35)$$

$$\sum_{j=i,e} \|\nabla u_{j,n}\|_{L^p(Q_T)} \leq c_2, \quad (2.36)$$

$$\sum_{j=i,e} \|u_{j,n}\|_{L^p(Q_T)} \leq c_3, \quad (2.37)$$

Si de plus, $u_{i,0}, u_{e,0} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors il existe une constante $c_4 > 0$ indépendante de n telle que :

$$\|\partial_t v_n\|_{L^2(Q_T)} + \sum_{j=i,e} \|\sqrt{\varepsilon} \partial_t u_{j,n}\|_{L^2(Q_T)} \leq c_4, \text{ avec } j = i, e. \quad (2.38)$$

Démonstration. On prend la valeur de $\varphi_{i,n} = u_{i,n}$ et $\varphi_{e,n} = -u_{e,n}$ dans (2.33), (2.34) respectivement et on somme les deux équations. Ensuite, on obtient l'équation :

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} c_m \partial_t v_n v_n \, dx \, dt + \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_{j,n} u_{j,n} \, dx \, dt \\ & + \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) \cdot \nabla u_{j,n} \, dx \, dt + \iint_{Q_T} h(t, x, v_n) v_n \, dx \, dt \\ & = \iint_{Q_T} I_{app,n}(t, x) v_n \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Cette dernière est équivalente à :

$$\begin{aligned} & \frac{c_m}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v_n(t, x)|^2 dx dt + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=i, e} \int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_{j, n}(t, x)|^2 dx dt \\ & + \sum_{j=i, e} \int_0^T \int_{\Omega} M_j(t, x, \nabla u_{j, n}) \cdot \nabla u_{j, n} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} h(t, x, v_n) v_n dx dt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} I_{app, n}(t, x) v_n dx dt, \end{aligned}$$

Ensuite, en ajoutant le terme $C_h \iint_{Q_T} |v_n(t, x)|^2 dx dt$, l'équation précédente est équivalente :

$$\begin{aligned} & \frac{c_m}{2} \int_{\Omega} |v_n(T, x)|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=i, e} \int_{\Omega} |u_{j, n}(T, x)|^2 dx + \sum_{j=i, e} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla u_{j, n}) \cdot \nabla u_{j, n} dx dt \\ & + \iint_{Q_T} (h(t, x, v_n) v_n + C_h |v_n(t, x)|^2) dx dt \\ & = \frac{c_m}{2} \int_{\Omega} |v_n(0, x)|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=i, e} \int_{\Omega} |u_{j, n}(0, x)|^2 dx \\ & + \iint_{Q_T} I_{app, n}(t, x) v_n dx dt + C_h \iint_{Q_T} |v_n(t, x)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

On note par E_i avec $i = 1, \dots, 8$ les termes de la dernière équation qui se réécrit de la manière suivante (à respecter l'ordre) :

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = E_5 + E_6 + E_7 + E_8.$$

Maintenant, on va minorer E_3, E_4 et majorer E_5, E_6, E_7, E_8 :

- D'après la monotonie de $M_j(t, x, \xi)$ (2.5) et comme $C_M \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} E_3 &= \sum_{j=i, e} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla u_{j, n}) \cdot \nabla u_{j, n} dx dt \\ &\geq C_M \sum_{j=i, e} \iint_{Q_T} |\nabla u_{j, n}(t, x)|^p dx dt \geq 0. \end{aligned}$$

- En utilisant les conséquences des hypothèses du courant ionique (2.17), on obtient :

$$E_4 = \iint_{Q_T} (h(t, x, v_n) v_n + C_h |v_n(t, x)|^2) dx dt \geq 0.$$

- On a $u_{j, n}(0, x) = u_{0, j, n}(x)$, $v_n(0, x) = v_{0, n}(x)$, avec $j = i, e$ et $I_{app, n}(t, x)$ sont définis dans (2.25), (2.24) respectivement et comme on a $\{e_l\}_{l=1}^{\infty}$ est une base orthonormée de $L^2(\Omega)$, alors :

$$\begin{cases} \|v_n(0, x)\|_{L^2(\Omega)} = \|v_{0, n}(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v_0(x)\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u_{j, n}(0, x)\|_{L^2(\Omega)} = \|u_{0, j, n}(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_{0, j}(x)\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|I_{app, n}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|I_{app}\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \quad (2.39)$$

On déduit que :

$$E_5 = \frac{c_m}{2} \int_{\Omega} |v_n(0, x)|^2 dx \leq \frac{c_m}{2} \int_{\Omega} |v_0(x)|^2 dx,$$

et comme $\varepsilon \ll 1$, alors on a :

$$E_6 = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=i,e} \int_{\Omega} |u_{j,n}(0, x)|^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=i,e} \int_{\Omega} |u_{0,j}(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \sum_{j=i,e} \int_{\Omega} |u_{0,j}(x)|^2 dx.$$

Par conséquent, on a $E_5 \leq \frac{\alpha_1}{2}$ et $E_6 \leq \frac{\alpha_2}{2}$, avec $\alpha_1 = c_m \int_{\Omega} |v_0(x)|^2 dx > 0$,

$$\alpha_2 = \sum_{j=i,e} \int_{\Omega} |u_{0,j}(x)|^2 dx > 0 \text{ indépendantes de } n.$$

En ce qui concerne E_7 , on utilise l'inégalité de Cauchy Schwarz puis l'inégalité de Young et la dernière inégalité du système (2.39) pour obtenir l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} E_7 &= \iint_{Q_T} I_{app,n}(t, x) v_n dx dt \\ &\leq \|I_{app,n}\|_{L^2(Q_T)} \|v_n\|_{L^2(Q_T)} \\ &\leq \|I_{app}\|_{L^2(Q_T)} \|v_n\|_{L^2(Q_T)} \\ &\leq \frac{\|I_{app}\|_{L^2(Q_T)}^2}{2} + \frac{\|v_n\|_{L^2(Q_T)}^2}{2} \\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha'_1 + \|v_n\|_{L^2(Q_T)}^2), \end{aligned}$$

avec $\alpha'_1 = \|I_{app}\|_{L^2(Q_T)}^2 > 0$, indépendante de n .

En combinant les estimations ci-dessus, on obtient :

- Comme $E_2 \geq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{c_m}{2} \int_{\Omega} |v_n(T, x)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha'_1) + \frac{1}{2}(1 + 2C_h) \int_0^T \int_{\Omega} |v_n(t, x)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

On pose maintenant $y(T) = \int_{\Omega} |v_n(T, x)|^2 dx$, alors l'inégalité sera : $y(T) \leq \beta_1 + \beta_2 \int_0^T y(t) dt$,

avec $\beta_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha'_1}{c_m} > 0$ et $\beta_2 = \frac{1 + 2C_h}{c_m} > 0$ indépendantes de n .

D'après le lemme de Gronwall 2 (voir Annexe), on obtient alors :

$$y(T) \leq \beta_1 \exp \int_0^T \beta_2 dt \leq \beta_1 \exp^{\beta_2 T} \leq C'_1,$$

avec $C'_1 = \beta_1 \exp^{\beta_2 T} > 0$ indépendante de n .

- Comme $E_1 \geq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=i,e} \int_{\Omega} |u_{j,n}(T, x)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha'_1) + \frac{1}{2}(1 + 2C_h) \int_0^T \int_{\Omega} |v_n(t, x)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Mais comme on a $v_n = u_{i,n} - u_{e,n}$, alors d'après l'inégalité triangulaire et l'inégalité $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ respectivement, on a :

$$|v_n|^2 = |u_{i,n} - u_{e,n}|^2 \leq (|u_{i,n}| + |u_{e,n}|)^2 \leq 2(|u_{i,n}|^2 + |u_{e,n}|^2).$$

Alors E_2 devient :

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=i,e} \int_{\Omega} |u_{j,n}(T, x)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha'_1) + (1 + 2C_h) \sum_{j=i,e} \int_0^T \int_{\Omega} |u_{j,n}(T, x)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

De même, on pose $z(T) = \varepsilon \sum_{j=i,e} \int_{\Omega} |u_{j,n}(T, x)|^2 dx = \sum_{j=i,e} \int_{\Omega} |\sqrt{\varepsilon} u_{j,n}(T, x)|^2 dx$, alors

l'inégalité sera : $z(T) \leq \gamma_1 + \gamma_2 \int_0^T z(T) dt$, avec $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha'_1 > 0$, $\gamma_2 = 2(1 + 2C_h) > 0$, indépendantes de n .

D'après le lemme de Gronwall 2 (voir Annexe), on obtient alors :

$$z(T) \leq \gamma_1 \exp \int_0^T \gamma_2 dt \leq \gamma_1 \exp^{\gamma_2 T} \leq C'_1,$$

avec $C''_1 = \gamma_1 \exp^{\gamma_2 T} > 0$ indépendante de n .

En conclusion, on a donc :

$$\begin{cases} \sup_{0 \leq t \leq T} \|v_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{C'_1}, \\ \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{j=i,e} \|\sqrt{\varepsilon} u_{j,n}(T, x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{C''_1}. \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient la première estimation du lemme :

$$\|v_n\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))} + \sum_{j=i,e} \|\sqrt{\varepsilon} u_{j,n}\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))} \leq C_1, \quad (2.40)$$

avec $C_1 = \max(C'_1, C''_1) > 0$ indépendante de n .

Or, on a $E_1 \geq 0$, $E_2 \geq 0$, on peut déduire d'après la première estimation (2.35) que :

$$\begin{aligned} C_M \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} |\nabla u_{j,n}(t, x)|^p dx dt &\leq E_3 \\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha'_1) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 + 2C_h) \int_0^T \int_{\Omega} |v_n(t, x)|^2 dx dt, \\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha'_1) + \frac{1}{2}(1 + 2C_h) C'_1 T \leq C'_2, \end{aligned}$$

avec $C'_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha'_1) + \frac{1}{2}(1 + 2C_h) C'_1 T > 0$ indépendante de n . Ainsi, on obtient la deuxième estimation du lemme :

$$\sum_{j=i,e} \|\nabla u_{j,n}\|_{L^p(Q_T)}^p \leq C_2, \quad (2.41)$$

avec $C_2 = \frac{C'_2}{C_M} > 0$ indépendante de n .

On rappelle que $u_{j,n} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ alors d'après l'inégalité de Poincaré et la deuxième estimation (2.36) on a :

$$\sum_{j=i,e} \|u_{j,n}\|_{L^p(Q_T)}^p \leq C_\Omega \sum_{j=i,e} \|\nabla u_{j,n}\|_{L^p(Q_T)}^p \leq C_\Omega C_2 \leq C_3,$$

avec $C_3 = C_\Omega C_2 > 0$ indépendante de n . D'où, la troisième estimation du lemme :

$$\sum_{j=i,e} \|u_{j,n}\|_{L^p(Q_T)}^p \leq C_3. \quad (2.42)$$

Pour démontrer la dernière estimation, On prend la valeur de $\varphi_{i,n} = u_{i,n}$ et $\varphi_{e,n} = -u_{e,n}$ dans (2.33), (2.34) respectivement et on somme les deux équations. On obtient l'équation :

$$\begin{aligned} c_m \iint_{Q_T} |\partial_t v_n|^2 dx dt + \varepsilon \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} |\partial_t u_{j,n}|^2 dx dt + \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) \cdot \nabla(\partial_t u_{j,n}) dx dt \\ + \iint_{Q_T} h(t, x, v_n) \partial_t v_n dx dt = \iint_{Q_T} I_{app,n}(t, x) \partial_t v_n dx dt. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Pour simplifier l'écriture, on définit $\xi(t, x) = \nabla u_{j,n}(t, x)$ et on dérive $G_j(t, x, \xi)$ et $H(t, x, v_n)$ en temps pour obtenir :

- D'une part, en utilisant l'hypothèse de condition de Cauchy (2.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t(G_j(t, x, \xi)) &= \partial_t G_j(t, x, \xi) + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial G_j}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial t}, \\ &= \partial_t G_j(t, x, \xi) + \sum_{l=1}^3 M_{j,l}(t, x, \xi) \partial_t \xi_l, \\ &= \partial_t G_j(t, x, \xi) + M_j(t, x, \xi) \cdot \partial_t \xi. \end{aligned}$$

- D'autre part, d'après la définition (2.12) de H et comme on a $h(t, x, 0) = 0$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \partial_t(H(t, x, v_n)) &= \partial_t H(t, x, v_n) + \partial_{v_n} H(t, x, v_n) \partial_t v_n, \\ &= \partial_t H(t, x, v_n) + h(t, x, v_n) \partial_t v_n. \end{aligned}$$

D'abord, on va estimer la dernière intégrale, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la dernière estimation de (2.39) puis l'inégalité de Young avec $\theta = c_m > 0$ et $p = 2$, pour obtenir :

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} I_{app,n}(t, x) \partial_t v_n dx dt &\leq \|I_{app,n}\|_{L^2(Q_T)} \|\partial_t v_n\|_{L^2(Q_T)}, \\ &\leq \|I_{app}\|_{L^2(Q_T)} \|\partial_t v_n\|_{L^2(Q_T)}, \\ &\leq \frac{\|I_{app}\|_{L^2(Q_T)}}{2c_m} + c_m \frac{\|\partial_t v_n\|_{L^2(Q_T)}}{2}, \\ &\leq \widehat{C}_4 + \frac{c_m}{2} \iint_{Q_T} |\partial_t v_n|^2 dx dt, \end{aligned}$$

avec $\widehat{C}_4 = \frac{\|I_{app}\|_{L^2(Q_T)}}{2c_m}$ une constante indépendante de n .

Donc en remplaçant les valeurs de $M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) \cdot \partial_t(\nabla u_{j,n})$ et $h(t, x, v_n) \partial_t v_n$ respectivement, en fonction de $G_j(t, x, \xi)$ et $H(t, x, v_n)$ dans l'équation (2.43) et d'après l'estimation du dernier intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{c_m}{2} \iint_{Q_T} |\partial_t v_n|^2 dx dt + \varepsilon \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} |\partial_t u_{j,n}|^2 dx dt \\ + \int_0^T \partial_t \int_{\Omega} \left(\sum_{j=i,e} G_j(t, x, \nabla u_{j,n}) + H(t, x, v_n) \right) dx dt \\ \leq \widehat{C}_4 + \iint_{Q_T} \left(\sum_{j=i,e} \partial_t G_j(t, x, \nabla u_{j,n}) + \partial_t H(t, x, v_n) \right) dx dt. \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule le troisième intégral en $t \in (0, T)$ de l'estimation précédente de l'équation (2.43) et d'après la condition d'exponentielle en temps (2.8), (2.12) sur G_j et H , on ajoute le terme

$C_h \int_{\Omega} |v_n(T, x)|^2 dx$ d'une part et d'autre de l'estimation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{c_m}{2} \iint_{Q_T} |\partial_t v_n|^2 dx dt + \varepsilon \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} |\partial_t u_{j,n}|^2 dx dt \\
& + \int_{\Omega} \left(\sum_{j=i,e} G_j(T, x, \nabla u_{j,n}(T, x)) + H(T, x, v_n(T, x)) + C_h |v_n(T, x)|^2 \right) dx \\
& \leq \widehat{C}_4 + \max(K_1, K_2) \iint_{Q_T} \left(\sum_{j=i,e} G_j(t, x, \nabla u_{j,n}) + H(t, x, v_n) \right) dx dt \\
& + \iint_{Q_T} (f_2 + f_3) dx dt + C_h \int_{\Omega} |v_n(T, x)|^2 dx \\
& + \int_{\Omega} \left(\sum_{j=i,e} G_j(0, x, \nabla u_{j,n}(0, x)) + H(T, x, v_n(0, x)) \right) dx, \\
& \leq \widehat{C}_4 + \|f_2\|_{L^1(Q_T)} + \|f_3\|_{L^1(Q_T)} + C_h C'_1 \\
& + \max(K_1, K_2) \iint_{Q_T} \left(\sum_{j=i,e} G_j(t, x, \nabla u_{j,n}) + H(t, x, v_n) \right) dx dt \\
& + \int_{\Omega} \left(\sum_{j=i,e} G_j(0, x, \nabla u_{j,n}(0, x)) + H(T, x, v_n(0, x)) \right) dx, \\
& \leq C'_4 + K \iint_{Q_T} \left(\sum_{j=i,e} G_j(t, x, \nabla u_{j,n}) + H(t, x, v_n) \right) dx dt \\
& + \int_{\Omega} \left(\sum_{j=i,e} G_j(0, x, \nabla u_{j,n}(0, x)) + H(T, x, v_n(0, x)) \right) dx,
\end{aligned}$$

avec $C'_4 = \widehat{C}_4 + \|f_2\|_{L^1(Q_T)} + \|f_3\|_{L^1(Q_T)} + C_h C'_1$ et $K = \max(K_1, K_2)$ des constantes positives indépendantes de n .

Pour utiliser le lemme de Gronwall 2, on a besoin du terme $C_h |v_n(t, x)|^2$ dans

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_T} \left(\sum_{j=i,e} G_j(t, x, \nabla u_{j,n}) + H(t, x, v_n) \right) dx dt \text{ et } C_h |v_n(0, x)|^2 \text{ dans} \\
& \int_{\Omega} \left(\sum_{j=i,e} G_j(0, x, \nabla u_{j,n}(0, x)) + H(T, x, v_n(0, x)) \right) dx
\end{aligned}$$

Comme $C_h|v_n(t, x)|^2 \geq 0$ et $C_h|v_n(0, x)|^2 \geq 0$ donc on peut les injecter dedans, alors on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{c_m}{2} \iint_{Q_T} |\partial_t v_n|^2 dx dt + \varepsilon \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} |\partial_t u_{j,n}|^2 dx dt \\
 & + \int_{\Omega} \left(\sum_{j=i,e} G_j(T, x, \nabla u_{j,n}(T, x)) + H(T, x, v_n(T, x)) + C_h|v_n(T, x)|^2 \right) dx \\
 & \leq C'_4 + K \iint_{Q_T} \left(\sum_{j=i,e} G_j(t, x, \nabla u_{j,n}) + H(t, x, v_n) + C_h|v_n(t, x)|^2 \right) dx dt \\
 & + \int_{\Omega} \left(\sum_{j=i,e} G_j(0, x, \nabla u_{j,n}(0, x)) + H(T, x, v_n(0, x)) + C_h|v_n(0, x)|^2 \right) dx.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Maintenant, on pose :

$$w_n(T) = \int_{\Omega} \left(\sum_{j=i,e} G_j(T, x, \nabla u_{j,n}(T, x)) + H(T, x, v_n(T, x)) + C_h|v_n(T, x)|^2 \right) dx, \tag{2.45}$$

Alors l'estimation devient :

$$w_n(T) \leq (w_n(0) + C'_4) + K \int_0^T w_n(t) dt.$$

Pour utiliser le lemme de Gronwall 2, il faut que $w_n(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, T]$. En effet, comme on a $G_j \in C^1(\mathbb{R}^3)$ par rapport à la troisième variable $\xi(t, x) = \nabla u_{j,n}(t, x)$ d'après la condition de Cauchy (2.7) donc en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral par rapport à cette variable et d'après les conditions de monotonies (2.5), (2.11) on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 G_j(\xi) &= G_j(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^l \frac{\partial}{\partial \xi_i} G_j(s\xi) \xi_i ds \\
 &= G_j(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^l M_{j,i}(s\xi) \xi_i ds \\
 &= G_j(0) + \int_0^1 M_j(t, x, s\xi) \cdot \xi ds \\
 &= G_j(0) + \int_0^1 \frac{1}{s} M_j(t, x, s\xi) \cdot s\xi ds \\
 &\geq G_j(0) + C_M |\xi|^p \int_0^1 \frac{1}{s} ds \\
 &\geq G_j(0) + C_M |\xi|^p \\
 &\geq 0,
 \end{aligned}$$

et d'après la définition (2.12) de H et la remarque (2.17) on a alors :

$$\begin{aligned}
 H(t, x, v_n(t, x)) + C_h|v_n(t, x)|^2 &= \int_0^{v_n} h(t, x, \rho) d\rho + C_h|v_n(t, x)|^2 \\
 &= \int_0^{v_n} (h(t, x, \rho) + 2C_h\rho(t, x)) d\rho \\
 &\geq \int_0^{v_n} (h(t, x, \rho) + C_h\rho(t, x)) d\rho \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Par conclusion, on déduit que $w_n(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, T]$. Donc d'après le lemme de Gronwall 2 (voir Annexe), on conclut que :

$$w_n(T) \leq (w_n(0) + C'_4) \exp^{\int_0^T K dt} \leq (w_n(0) + C'_4) \exp^{KT}. \quad (2.46)$$

Maintenant, pour obtenir la dernière estimation d'énergie donc il suffit de montrer que $w_n(0) \leq \widetilde{C}_4$ avec \widetilde{C}_4 indépendante de n . Pour généraliser on va prouver que $w_n(t) \leq \widetilde{C}'_4$, $\forall t \in [0, T]$ avec \widetilde{C}'_4 indépendante de n .

D'une part, on a d'après le théorème de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned} G_j(\xi) &= G_j(0) + \int_0^1 M_j(t, x, s\xi) \cdot \xi \, ds \\ &\leq G_j(0) + C_M |\xi| \int_0^1 |M_j(t, x, s\xi)| \, ds \\ &\leq G_j(0) + C_M |\xi| \int_0^1 (|s\xi|^{p-1} + f_1) \, ds \\ &\leq G_j(0) + C_M \left(|\xi|^p \int_0^1 |s|^{p-1} \, ds + |\xi| f_1 \right) \\ &\leq G_j(0) + C_M (|\xi|^p + |\xi| f_1). \end{aligned}$$

Et comme on a $\xi = \nabla u_{j,n} \in L^p(\Omega)$ et $f_1 \in L^{p'}(\Omega)$ et en utilisant l'inégalité de Hölder et la deuxième estimation d'énergie alors on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} G_j(\xi) \, dx &\leq \int_{\Omega} G_j(0) \, dx + C_M \left(\int_{\Omega} |\xi|^p \, dx + \int_{\Omega} |\xi| f_1 \, dx \right) \\ &\leq \int_{\Omega} G_j(0) \, dx + C_M \left(\|\nabla u_{j,n}\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u_{j,n}\|_{L^p(\Omega)} \|f_1\|_{L^{p'}(\Omega)} \right) \\ &\leq \int_{\Omega} G_j(0) \, dx + C_M \left(c_2^p + c_2 \|f_1\|_{L^{p'}(\Omega)} \right) \leq g_4, \end{aligned}$$

avec $g_4 = \int_{\Omega} G_j(0) \, dx + C_M \left(c_2^p + c_2 \|f_1\|_{L^{p'}(\Omega)} \right)$ indépendante de n .

D'autre part, en utilisant la remarque (2.15)-(2.16) sur le courant ionique h dans le cas où :

- $p = 2$, on rappelle les injections continues de Sobolev $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega) \subset L^4(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, ainsi le courant ionique dans ce cas est estimé comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} H(t, x, v_n(t, x)) \, dx &= \int_{\Omega} \int_0^{v_n} h(t, x, \rho) \, d\rho \\ &\leq C \int_{\Omega} \int_0^{v_n} (|\rho|^3 + 1) \, d\rho \, dx \\ &\leq \frac{C}{4} \int_{\Omega} |v_n|^4 \, dx + C \int_{\Omega} |v_n| \, dx \\ &\leq \frac{C}{4} \|v_n(t, x)\|_{L^4(\Omega)} + C \|v_n(t, x)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C_{\Omega} \frac{C}{4} \|v_n(t, x)\|_{H_0^1(\Omega)} + C'_{\Omega} C \|v_n(t, x)\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C \left(\frac{1}{4} C_{\Omega} + C'_{\Omega} \right) \|v_n(t, x)\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C \left(\frac{1}{4} C_{\Omega} + C'_{\Omega} \right) c_2 \leq h_4, \end{aligned}$$

avec $h_4 = C \left(\frac{1}{4} C_{\Omega} + C'_{\Omega} \right) c_2$ indépendante de n .

- $p > 2$, on a on rappelle les injections continues de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, ainsi le courant ionique dans ce cas est estimé comme suit :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} H(t, x, v_n(t, x)) \, dx &= \int_{\Omega} \int_0^{v_n} h(t, x, \rho) \, d\rho \\
 &\leq C'' \int_{\Omega} \int_0^{v_n} (|\rho|^{p-1} + 1) \, d\rho \, dx \\
 &\leq \frac{C''}{p} \int_{\Omega} |v_n|^p \, dx + C'' \int_{\Omega} |v_n| \, dx \\
 &\leq \frac{C''}{p} \|v_n(t, x)\|_{L^p(\Omega)} + C'' \|v_n(t, x)\|_{L^1(\Omega)} \\
 &\leq C_{\Omega} \frac{C''}{p} \|v_n(t, x)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + C'_{\Omega} C'' \|v_n(t, x)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
 &\leq C'' \left(\frac{1}{p} C_{\Omega} + C'_{\Omega} \right) \|v_n(t, x)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
 &\leq C'' \left(\frac{1}{p} C_{\Omega} + C'_{\Omega} \right) c_2 \leq h'_4,
 \end{aligned}$$

avec $h'_4 = C'' \left(\frac{1}{p} C_{\Omega} + C'_{\Omega} \right) c_2$ indépendante de n .

Donc d'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \left(H(t, x, v_n(t, x)) + C_h |v_n(t, x)|^2 \right) \, dx \\
 &= \int_{\Omega} \int_0^{v_n} h(t, x, \rho) \, d\rho \, dx + C_h \|v_n(t, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\leq \max(h_4, h'_4) + C_h C'_1.
 \end{aligned}$$

On déduit alors :

$$\begin{aligned}
 w_n(t) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=i,e} G_j(t, x, \nabla u_{j,n}(t, x)) + H(t, x, v_n(t, x)) + C_h |v_n(t, x)|^2 \right) \, dx \\
 &\leq g_4 + \max(h_4, h'_4) + C_h C'_1 \leq \widetilde{C}'_4,
 \end{aligned}$$

avec $\widetilde{C}'_4 = g_4 + \max(h_4, h'_4) + C_h C'_1$ indépendante de n .

Par conclusion, on obtient pour $t = 0$:

$$\begin{aligned}
 w_n(T) &\leq (w_n(0) + C'_4) \exp \int_0^T K \, dt \\
 &\leq (w_n(0) + C'_4) \exp^{KT} \\
 &\leq (\widetilde{C}_4 + C'_4) \exp^{KT} \leq C_4,
 \end{aligned}$$

avec $C_4 = (\widetilde{C}_4 + C'_4) \exp^{KT} > 0$ une constante indépendante de n . Alors, on a démontré la dernière estimation en remplaçant les estimations précédentes :

$$\|\partial_t v_n\|_{L^2(Q_T)} + \sum_{j=i,e} \|\sqrt{\varepsilon} \partial_t u_{j,n}\|_{L^2(Q_T)} \leq C_4, \quad (2.47)$$

avec C_4 indépendante de n et $j = i, e$. □

Maintenant, on va utiliser les estimations d'énergie pour prouver l'existence globale de solution. C'est-à-dire que on va faire l'extension de l'intervalle local $[0, T^*)$ sur tout l'intervalle $[0, T)$

(indépendante de n). On sait d'après la définitions de solutions de Faedo-Galerkin (2.22),(2.21) pour t arbitraire dans $[0, T^*)$ et d'après les estimations d'énergies que :

$$\begin{aligned} & |\{d_{n,k}(t)\}_{k=1,\dots,n}|_{\mathbb{R}^n}^2 + \sum_{j=i,e} |\{c_{j,k}(t)\}_{k=1,\dots,n}|_{\mathbb{R}^n}^2 \\ &= \|v_n(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{j,n}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \end{aligned} \quad (2.48)$$

avec $C > 0$ une constante indépendante de n et de t . On introduit alors :

$$S := \{t \in [0, T) \text{ tel qu'il existe une solution de (2.28), (2.29), (2.29) sur } [0, t]\}$$

et on observe que $S \neq \emptyset$ d'après la première étape de Faedo-Galerkin (existence locale de la solution).

On va démontrer que $S = [0, T)$ donc il suffit de montrer que S un ensemble ouvert et fermé respectivement.

Premièrement, soit $\bar{t} \in S$ donc on va chercher un voisinage V de \bar{t} telque $\bar{t} \in V \subset S$ pour déduire que $t \in \overset{\circ}{S}$.

Soit $0 < t < \bar{t}$ telque $|t - \bar{t}| < \delta$, avec $\delta > 0$. Comme on a $\bar{t} \in S$ et d'après la solution (2.31)-(2.32) des EDO (2.28),(2.29),(2.29) on déduit que :

$$|d_{n,k}(t) - d_{n,k}(\bar{t})| \leq c(C, n, c_m, \varepsilon) \int_t^{\bar{t}} |M(\tau)| d\tau,$$

et

$$|c_{j,k}(t) - c_{j,k}(\bar{t})| \leq c(C, n, c_m, \varepsilon) \int_t^{\bar{t}} |M_j(\tau)| d\tau, \quad j = i, e.$$

On conclut que $\lim_{t \nearrow \bar{t}} (d_{n,k}(t), c_{i,k}(t), c_{e,k}(t)) = (d_{n,k}(\bar{t}), c_{i,k}(\bar{t}), c_{e,k}(\bar{t}))$ nous donne qu'il existe une solution sur $[0, t + \delta)$. En conclusion, il existe $\delta > 0$ telque $\bar{t} \in V = [0, t + \delta) \subset S$ donc S est ouvert. Deuxièmement, soit $\bar{t} \in \bar{S}$ alors il existe une suite $(t_l)_{l>1} \subset S$ tel que $t_l \rightarrow \bar{t}$ quand $l \rightarrow +\infty$. On dénote $\{(d_{n,k}^l(t), c_{i,k}^l(t), c_{e,k}^l(t))\}_{l=1}^n$ la solution des EDO (2.28),(2.29),(2.30) sur $[0, t_l)$, et on définit les suites suivantes pour $k = 1, \dots, n$:

$$\tilde{d}_{n,k}^l(t) = \begin{cases} d_{n,k}^l(t), & \text{si } t \in [0, t_l), \\ d_{n,k}^l(t_l), & \text{si } t \in [t_l, \bar{t}), \end{cases}$$

et pour $j = i, e$,

$$\tilde{c}_{j,k}^l(t) = \begin{cases} c_{j,k}^l(t), & \text{si } t \in [0, t_l), \\ c_{j,k}^l(t_l), & \text{si } t \in [t_l, \bar{t}), \end{cases}$$

On déduit de ce qui précède que ces suites $\{\tilde{d}_{n,k}^l(t)\}_{l>1}, \{\tilde{c}_{j,k}^l(t)\}_{l>1}$ sont equibornées equicontinues sur $[0, \bar{t})$. Donc d'après le théorème d'Ascoli, il existe des sous suites telle qu'elles convergent uniformément vers $\tilde{d}_{n,k}(t)$ et $\tilde{c}_{j,k}(t)$, $j = i, e$. En passant à la limite dans les EDO (2.28),(2.29),(2.29) pour ces suites sur $[0, t_l)$ et en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue (TCDL), on trouve que $\tilde{d}_{n,k}(t)$ et $\tilde{c}_{j,k}(t)$, $j = i, e$, vérifient le système d'EDO (2.28),(2.29),(2.29) sur $[0, \bar{t})$. Par conséquent, $\bar{t} \in S$ et S est fermé. En conclusion, $S = [0, T)$. D'où l'existence globale de solutions de Faedo-Galerkin sur $[0, T)$.

2.2.3 Passage à la limite

Cette étape est consacrée à prouver l'existence d'une solution du modèle non-dégénéré (2.1),(2.2), (2.3) en utilisant les conséquences des estimations d'énergies dans le lemme 2.3 avec des arguments de compacités et des densités.

Théorème 2.3. *On suppose que les conditions (2.4)-(2.14) sont vérifiées et $p \geq 2$.*

Si $u_{j,0} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $j = i, e$ et $I_{app} \in L^2(Q_T)$. alors le système non-dégénéré (2.1), (2.3), (2.2), possède au moins une solution faible $\forall \varepsilon > 0$ fixé (sa condition initiale on va la prouver dans la sous-section ci-après).

Avant de montrer ce théorème, on va donner les conséquences des estimations d'énergie (2.35), (2.36), (2.37), (2.38) du lemme (2.3) qui montrent que les suites $\{v_n\}_{n \geq 1}$, $\{u_{j,n}\}_{n \geq 1}$, avec $j = i, e$, sont uniformément bornées dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, $\forall p \geq 2$ et $\{\partial_t v_n\}_{n \geq 1}$, $\{\partial_t u_{j,n}\}_{n \geq 1}$, avec $j = i, e$, sont uniformément bornées dans $L^2(Q_T)$. Alors d'après le corollaire des suites bornées (voir Annexe), on peut conclure qu'il existe des sous-suites $\{v_n\}_{n \geq 1}$, $\{u_{j,n}\}_{n \geq 1}$, avec $j = i, e$, et $v_n = u_{i,n} - u_{e,n}$ tel que :

- $v_n \rightharpoonup v$ converge faiblement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$,
- $\partial_t v_n \rightharpoonup \partial_t v$ converge faiblement dans $L^2(Q_T)$,
- $u_{j,n} \rightharpoonup u_j$ converge faiblement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$,
- et $\partial_t u_{j,n} \rightharpoonup \partial_t u_j$ converge faiblement dans $L^2(Q_T)$, avec $j = i, e$.

D'après la remarque de l'argument de compacité

$W_0^{1,p}(\Omega) \underset{\text{compacte}}{\subset} L^p(\Omega)$, on obtient $v_n \rightarrow v$ converge fortement dans $L^p(Q_T)$, et $u_{j,n} \rightarrow u_j$ converge aussi fortement dans $L^p(Q_T)$, $\forall p \geq 2$. Et d'après le théorème de Fischer-Riesz, on peut extraire aussi une sous-suite $v_n \rightarrow v$ p.p. dans Q_T et $u_{j,n} \rightarrow u_j$ p.p. dans Q_T .

De plus, on a d'après l'hypothèse de croissance (2.4) de M_j et en utilisant l'inégalité d'indice $(a+b)^{p'} \leq 2^{p'-1}(a^{p'} + b^{p'})$:

$$\begin{aligned} |M_j(t, x, \nabla u_{j,n})|^{p'} &\leq C_M (|\nabla u_{j,n}|^{p-1} + f_1)^{p'} \\ &\leq 2^{p'-1} C_M (|\nabla u_{j,n}|^{p'(p-1)} + f_1^{p'}), \\ &\leq 2^{p'-1} C_M (|\nabla u_{j,n}|^p + f_1^{p'}), \\ &\leq C' (|\nabla u_{j,n}|^p + f_1^{p'}), \end{aligned}$$

avec $C' = 2^{p'-1} C_M > 0$ indépendante de n .

Alors, en utilisant la deuxième estimation d'énergie (2.36) on obtient :

$$\begin{aligned} \|M_j(t, x, \nabla u_{j,n})\|_{L^{p'}(Q_T)}^{p'} &\leq C' (\|\nabla u_{j,n}\|_{L^p(Q_T)}^p + \|f_1\|_{L^{p'}(Q_T)}^{p'}), \\ &\leq C' (C_2^p + \|f_1\|_{L^{p'}(Q_T)}^{p'}), \\ &\leq \alpha, \end{aligned}$$

avec $\alpha = C'(C_2^p + \|f_1\|_{L^{p'}(Q_T)})$ indépendante de n .

Par conclusion, on a montré que la suite $M_j(t, x, \nabla u_{j,n})$ est uniformément bornée dans $L^{p'}(Q_T, \mathbb{R}^3)$, ce qui implique qu'il existe une sous-suite $M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) \rightharpoonup \Sigma_j$ faiblement dans $L^{p'}(Q_T, \mathbb{R}^3)$. D'abord, on va estimer aussi $h(t, x, v_n)$ dans $L^{p'}(\Omega)$, $\forall p' \geq 2$, en utilisant les conséquences dans la remarque 4, l'inégalité d'indice et les estimations d'énergie (2.36)-(2.37) on a :

- Pour $p = 2$, en utilisant l'injection continue $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, on peut conclure que :

$$\begin{aligned} \|h(t, x, v_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C^2 \int_{\Omega} (|v_n|^3 + 1)^2 dx, \\ &\leq 2C^2 \int_{\Omega} (|v_n|^6 + 1^2) dx, \\ &\leq 2C^2 (\|v_n\|_{L^6(\Omega)}^6 + C'_{\Omega}), \\ &\leq 2C^2 (C_{\Omega}^6 \|v_n\|_{H^1(\Omega)}^6 + C'_{\Omega}), \\ &\leq \beta_1, \end{aligned}$$

avec β_1 une constante indépendante de n .

- Pour $p > 2$, comme on a $p' = \frac{p}{p-1}$ le conjugué de p alors on peut aussi conclure que :

$$\begin{aligned} \|h(t, x, v_n)\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} &\leq C^{p'} \int_{\Omega} (|v_n|^{p-1} + 1)^{p'} dx, \\ &\leq 2C^2 \int_{\Omega} (|v_n|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} + 1^{p'}) dx, \\ &\leq 2^{p'-1} C^{p'} (\|v_n\|_{L^p(\Omega)}^p + C'_{\Omega}), \\ &\leq \beta_2, \end{aligned}$$

avec β_2 une constante indépendante de n .

En conclusion, on a $\forall p' \geq 2$, $\|h(t, x, v_n)\|_{L^{p'}(Q_T)}^{p'} \leq \beta$, avec $\beta = \max(\beta_1 T, \beta_2 T)$ une constante indépendante de n . Donc on déduit que $h(t, x, v_n)$ est uniformément bornée dans $L^{p'}(Q_T)$. De même, ceci implique qu'il existe une sous-suite $h(t, x, v_n) \rightharpoonup h(t, x, v)$ converge faiblement dans $L^{p'}(Q_T)$ et comme on a $v_n \rightarrow v$ p.p. dans Q_T et h est continue en v , alors $h(t, x, v_n) \rightarrow h(t, x, v)$ p.p. dans Q_T .

Avant de commencer à prouver ce théorème, on va prouver quelques lemmes :

Lemme 2.4. *Quand $n \rightarrow \infty$, on a $h(t, x, v_n) \rightarrow h(t, x, v)$ converge fortement dans $L^q(Q_T)$, $\forall q \in [1, p']$.*

Démonstration. On va démontrer ce lemme en utilisant le théorème de Vitali's.

Comme on a $h(t, x, v_n)$ est uniformément bornée dans $L^{p'}(Q_T)$ avec $\|h(t, x, v_n)\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} \leq \beta'$, où $\beta' = \max(\beta_1, \beta_2)$ une constante indépendante de n et $\forall p' \leq 2$ et $h(t, x, v_n) \rightarrow h(t, x, v)$ converge p.p. dans Q_T . Il suffit de montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall n \geq 1$, $\forall A \subset (0, T)$ mesurable avec $|A| < \delta$, on ait :

$$\int_A \|h(t, x, v_n)\|_{L^q(\Omega)}^q dt < \varepsilon.$$

D'abord, on a $L^{p'}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec une injection continue alors on a :

$$\begin{aligned} \int_A \|h(t, x, v_n)\|_{L^q(\Omega)}^q dt &\leq \int_A C_{\Omega} \|h(t, x, v_n)\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} dt, \\ &\leq C_{\Omega} \int_A \beta' dt, \\ &\leq \beta' \int_A 1 dt, \\ &\leq C_{\Omega} \beta' |A|, \\ &< C_{\Omega} \beta' \delta, \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors d'après Vitali's, on conclut que $h(t, x, v_n) \rightarrow h(t, x, v)$ converge fortement dans $L^q(Q_T)$, $\forall q \in [1, p']$ quand $n \rightarrow \infty$. \square

Maintenant, Fixons $N \geq 1$ et $\varphi_{j,N} \in C^1([0, T], W_0^{1,p}(\Omega))$, $j = i, e$, définie par : $\varphi_{i,N}(t, x) := \sum_{l=1}^N a_{i,l}(t) e_l(x)$ et $\varphi_{e,N}(t, x) := \sum_{l=1}^N a_{e,l}(t) e_l(x)$. on a les formulations variationnelles suivante :

$$\begin{aligned} &\iint_{Q_T} c_m \partial_t v_n \varphi_{i,N} dx dt + \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_{i,n} \varphi_{i,N} dx dt \\ &+ \iint_{Q_T} M_i(t, x, \nabla u_{i,n}) \cdot \nabla \varphi_{i,N} dx dt + \iint_{Q_T} h(t, x, v_n) \varphi_{i,N} dx dt \\ &= \iint_{Q_T} I_{app,n}(t, x) \varphi_{i,N} dx dt, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_{Q_T} c_m \partial_t v_n \varphi_{e,N} \, dx \, dt + \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_{e,n} \varphi_{e,N} \, dx \, dt \\
 & + \iint_{Q_T} M_e(t, x, \nabla u_{e,n}) \cdot \nabla \varphi_{e,N} \, dx \, dt + \iint_{Q_T} h(t, x, v_n) \varphi_{e,N} \, dx \, dt \\
 & = \iint_{Q_T} I_{app,n}(t, x) \varphi_{e,N} \, dx \, dt,
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

$\forall \varphi_{j,N} \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ fixé, avec $j = i, e$.

Si on passe à la limite $n \rightarrow \infty$, on a d'après les conséquences précédentes des estimations d'énergie concernant la convergence faible de chaque terme donc on trouve qu'on a besoin d'identifier $\Sigma_j(t, x)$ comme $M_j(t, x, \nabla u_j)$, avec $j = i, e$.

On remarque dans le cas bidomaine $p = 2$ où $M_j(t, x, \xi) = \mathbf{M}_j(t, x)\xi$ que la convergence faible suffit pour passer à la limite. Au contraire dans le cas non-linéaire $p > 2$ où par exemple $M_j(t, x, \xi) = |\xi|^{p-2}\mathbf{M}_j(t, x)\xi$. On a besoin de prouver la convergence forte des gradients $\nabla u_{j,n}$ dans $L^p(Q_T)$ dans le lemme suivant :

Lemme 2.5. *Pour $j = i, e$, $\nabla u_{j,n} \rightarrow \nabla u_j$ converge fortement dans $L^p(Q_T)$ quand $n \rightarrow \infty$ et $\Sigma_j(t, x) = M_j(t, x, \nabla u_j)$ p.p. pour $(t, x) \in Q_T$ avec $j = i, e$.*

Démonstration. Fixons $N \geq 1$ et considérons les fonctions $w_{j,N} \in C^1([0, T], W_N)$, $j = i, e$, définies par : $w_{j,N}(t, x) := \sum_{l=1}^n b_{j,l}(t) e_l(x)$.

Soit $n \geq N$, donc $w_{j,N} \in W_n$ et soit $w_N := w_{i,N} - w_{e,N}$. On retourne aux formulations variationnelles (2.33), (2.34) en choisissant les fonctions tests comme suivent :

$\varphi_{i,n}(t, \cdot) = (u_{i,n} - w_{i,N})(t, \cdot)$ et $\varphi_{e,n}(t, \cdot) = -(u_{e,n} - w_{e,N})(t, \cdot)$.

Par conséquent, $\varphi_{i,n}(t, \cdot) + \varphi_{e,n}(t, \cdot) = (v_n - w_N)(t, \cdot)$ et $\varphi_{i,n}(t, \cdot) - \varphi_{e,n}(t, \cdot) = \sum_{j=i,e} (u_{j,n} - w_{j,N})(t, \cdot)$,

avec $j = i, e$. On remplace $\varphi_{i,n}(t, \cdot)$ et $\varphi_{e,n}(t, \cdot)$ par ses valeurs dans ces formulations variationnelles et on les somme pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 & \iint_{Q_T} c_m \partial_t v_n (v_n - w_N) \, dx \, dt + \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_{j,n} (u_{j,n} - w_{j,N}) \, dx \, dt \\
 & + \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) \cdot (\nabla u_{j,n} - \nabla w_{j,N}) \, dx \, dt \\
 & + \iint_{Q_T} h(t, x, v_n) (v_n - w_N) \, dx \, dt = \iint_{Q_T} I_{app,n}(t, x) (v_n - w_N) \, dx \, dt.
 \end{aligned}$$

Alors, on ajoute les termes $C_h \iint_{Q_T} |v_n - w_N|^2 \, dx \, dt$ et $-\sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla w_{j,N}) \cdot (\nabla u_{j,n} -$

$\nabla w_j, N) dx dt$ d'une part et d'autre de l'équation précédente pour obtenir :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} (M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) - M_j(t, x, \nabla w_{j,N})) \cdot (\nabla u_{j,n} - \nabla w_j, N) dx dt \\
&= - \iint_{Q_T} c_m \partial_t v_n (v_n - w_N) dx dt - \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_{j,n} (u_{j,n} - w_{j,N}) dx dt \\
&- \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla w_{j,N}) \cdot (\nabla u_{j,n} - \nabla w_{j,N}) dx dt \\
&- \iint_{Q_T} [(h(t, x, v_n) - h(t, x, w_N)) (v_n - w_N) + C_h (v_n - w_N)^2] dx dt \\
&- \iint_{Q_T} h(t, x, w_N) (v_n - w_N) dx dt + C_h \iint_{Q_T} |v_n - w_N|^2 dx dt \\
&+ \iint_{Q_T} I_{app,n}(t, x) (v_n - w_N) dx dt,
\end{aligned}$$

$\forall w_{j,N} \in C^1([0, T], W_N)$, avec $j = i, e$.

On note par E_i avec $i = 1, \dots, 6$ les termes de la dernière équation qui se réécrit de la manière suivante (à respecter l'ordre) :

$$E_1 = E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 + E_7 + E_8.$$

On a d'après les conséquences précédentes des estimations d'énergie quand $n \rightarrow \infty$:

- $\partial_t v_n \rightharpoonup \partial_t v$ converge faiblement dans $L^2(Q_T)$,
- et $v_n \rightarrow v$ converge fortement dans $L^2(Q_T)$, donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (T.C.D.L) on a
 $v_n - w_N \rightarrow v - w_N$ converge fortement dans $L^2(Q_T)$.

Alors d'après la proposition de la multiplication de la convergence faible avec la convergence forte (voir Annexe), on a alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} E_2 &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} c_m \partial_t v_n (v_n - w_N) dx dt, \\
&= - \iint_{Q_T} c_m \partial_t v (v - w_N) dx dt.
\end{aligned}$$

Ensuite, comme on a $I_{app,n}(t, x) \rightarrow I_{app}(t, x)$ converge fortement dans $L^2(Q_T)$ alors la proposition (1.5) nous donne :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} E_8 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} I_{app,n}(t, x) (v_n - w_N) dx dt, \\
&= \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) (v - w_N) dx dt.
\end{aligned}$$

Et d'après la définition de la convergence forte de $v_n - w_N$ dans $L^2(Q_T)$ on a alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} E_7 &= - \lim_{n \rightarrow \infty} C_h \iint_{Q_T} |v_n - w_N|^2 dx dt \\
&= -C_h \iint_{Q_T} |v - w_N|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

De même, on a quand $n \rightarrow \infty$:

- $\partial_t u_{j,n} \rightharpoonup \partial_t u_j$ converge faiblement dans $L^2(Q_T)$,

- et $u_{j,n} \rightarrow u_j$ converge fortement dans $L^2(Q_T)$, donc d'après T.C.D.L $u_{j,n} - w_{j,N} \rightarrow u_j - w_{j,N}$ converge fortement dans $L^2(Q_T)$, avec $j = i, e$.

Alors d'après la proposition de la multiplication de la convergence faible avec la convergence forte (voir Annexe) on a alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_3 &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_{j,n} (u_{j,n} - w_{j,N}) \, dx \, dt, \\ &= - \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_j (u_j - w_{j,N}) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

D'abord, on a par définition $w_{j,N} \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, avec $j = i, e$ alors d'après ce qui précède on a donc $M_j(t, x, \nabla w_{j,N}) \in L^{p'}(Q_T, \mathbb{R}^3)$ et $h(t, x, w_N) \in L^{p'}(Q_T)$.

On a d'après les conséquences précédentes des estimations d'énergie quand $n \rightarrow \infty$ que $u_{j,n} \rightarrow u_j$ converge faiblement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p})$ ce qui implique :

- $u_{j,n} - w_{j,N} \rightarrow u_j - w_{j,N}$ faiblement dans $L^p(Q_T)$,
- et $\nabla u_{j,n} - \nabla w_{j,N} \rightarrow \nabla u_j - \nabla w_{j,N}$ faiblement dans $L^p(Q_T)$.

On peut déduire d'après la définition de la convergence faible que :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_4 &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla w_{j,N}) \cdot (\nabla u_{j,n} - \nabla w_{j,N}) \, dx \, dt, \\ &= - \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla w_{j,N}) \cdot (\nabla u_j - \nabla w_{j,N}) \, dx \, dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_6 &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} h(t, x, w_N) (v_n - w_N) \, dx \, dt, \\ &= - \iint_{Q_T} h(t, x, w_N) (v - w_N) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Et D'après la remarque 5, on a :

$$E_5 = - \iint_{Q_T} [(h(t, x, v_n) - h(t, x, w_N)) (v_n - w_N) + C_h (v_n - w_N)^2] \, dx \, dt \leq 0.$$

Mais l'hypothèse de monotonie (2.5) de M_j nous donne que :

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} (M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) - M_j(t, x, \nabla w_{j,N})) \cdot (\nabla u_{j,n} - \nabla w_{j,N}) \, dx \, dt \\ &\geq C_M \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} |\nabla u_{j,n} - \nabla w_{j,N}|^p \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Maintenant on passe à la limite $n \rightarrow \infty$ dans l'équation précédente en combinant tous les estima-

tions et les limites pour obtenir :

$$\begin{aligned}
& C_M \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} |\nabla u_{j,n} - \nabla w_{j,N}|^p dx dt \\
& \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} (M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) - M_j(t, x, \nabla w_{j,N})) \cdot (\nabla u_{j,n} - \nabla w_{j,N}) dx dt \\
& \leq - \iint_{Q_T} c_m \partial_t v (v - w_N) dx dt - \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_j (u_j - w_{j,N}) dx dt \\
& \quad - \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla w_{j,N}) \cdot (\nabla u_j - \nabla w_{j,N}) dx dt + \iint_{Q_T} I_{app}(v - w_N) dx dt \\
& \quad - \iint_{Q_T} h(t, x, w_N)(v - w_N) dx dt - C_h \iint_{Q_T} |v - w_N|^2 dx dt,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

$\forall w_{j,N} \in C^1([0, T], W_N)$, avec $j = i, e$.

Reste à passer à la limite sur $N \rightarrow \infty$:

On a $\bigcup_{N \geq 1} W_N$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ alors la définition de densité nous donne que :

$\forall w_j \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, il existe une suite $w_{j,N} \in C^1([0, T], W_N)$ tel que $w_{j,N} \rightarrow w_j$ converge fortement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ quand $N \rightarrow \infty$ avec $j = i, e$.

Ceci implique que : $w_N \rightarrow w$ converge fortement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ avec $w := w_i - w_e$. On passe à la limite quand $N \rightarrow \infty$ dans l'estimation (2.51) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
& C_M \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} |\nabla u_{j,n} - \nabla w_j|^p dx dt \\
& \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} (M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) - M_j(t, x, \nabla w_j)) \cdot (\nabla u_{j,n} - \nabla w_j) dx dt \\
& \leq - \iint_{Q_T} c_m \partial_t v (v - w) dx dt - \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_j (u_j - w_j) dx dt \\
& \quad - \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla w_j) \cdot (\nabla u_j - \nabla w_j) dx dt \\
& \quad - \iint_{Q_T} h(t, x, w_N)(v - w) dx dt - C_h \iint_{Q_T} |v - w|^2 dx dt \\
& \quad + \iint_{Q_T} I_{app}(t, x)(v - w) dx dt,
\end{aligned}$$

$\forall w_{j,N} \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, avec $j = i, e$. Par conséquent, on peut choisir $w_j = u_j$, avec $j = i, e$ donc $w = v$. D'après l'estimation précédente, comme on a $C_M \geq 0$ alors :

$$0 \leq C_M \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} |\nabla u_{j,n} - \nabla u_j|^p dx dt \leq 0.$$

Quand $n \rightarrow \infty$ on a $\nabla u_{j,n} \rightarrow \nabla u_j$ converge fortement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, avec $j = i, e$. En conclusion, $M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) \rightarrow M_j(t, x, \nabla u_j)$ converge fortement dans $L^{p'}(0, T, W_0^{1,p'}(\Omega))$, avec $j = i, e$.

En plus, on a $M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) \rightarrow \Sigma_j(t, x)$ converge faiblement dans $L^{p'}(0, T, W_0^{1,p'}(\Omega))$ alors d'après l'unicité de la limite au sens de distribution on a $\Sigma_j(t, x) = M_j(t, x, \nabla u_j)$ p.p. pour $(t, x) \in Q_T$. D'où la démonstration du lemme. \square

Maintenant on va démontrer le théorème (2.3) comme suit :

Démonstration. On retourne aux formulations variationnelles (2.49),(2.50) et puis on passe à la limite $n \rightarrow \infty$. Mais avant on a $\varphi_{j,N} \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ fixé $\forall p \geq 2$, avec $j = i, e$, et en utilisant la définition de la convergence faible et la proposition de la multiplication de la convergence faible-forte, on a :

- $\partial_t v_n \rightharpoonup \partial_t v$ converge faiblement dans $L^2(Q_T)$,
alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} c_m \partial_t v_n \varphi_{j,N} dx dt = \iint_{Q_T} c_m \partial_t v \varphi_{j,N} dx dt$.
- $\partial_t u_{j,n} \rightharpoonup \partial_t u_j$ converge faiblement dans $L^2(Q_T)$, avec $j = i, e$,
alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_{j,n} \varphi_{j,N} dx dt = \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_j \varphi_{j,N} dx dt$.
- D'après le lemme (2.6) on a $M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) \rightarrow M_j(t, x, \nabla u_j)$ converge faiblement dans $L^{p'}(0, T, W_0^{1,p'}(\Omega))$, avec $j = i, e$,
alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla u_{j,n}) \cdot \nabla \varphi_{j,N} dx dt = \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla u_j) \cdot \nabla \varphi_{j,N} dx dt$.
- De même, on a $h(t, x, v_n) \rightharpoonup h(t, x, v)$ converge faiblement dans $L^{p'}(Q_T)$,
alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} h(t, x, v_n) \varphi_{j,N} dx dt = \iint_{Q_T} h(t, x, v) \varphi_{j,N} dx dt$, avec $j = i, e$.
- Enfin, on a $I_{app,n} \rightarrow I_{app}$ fortement dans $L^2(Q_T)$
alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{Q_T} I_{app,n}(t, x) \varphi_{j,N} dx dt = \int \int_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_{j,N} dx dt$, avec $j = i, e$.

En passant à la limite $n \rightarrow \infty$ dans ces formulations variationnelles et en combinant toutes ces limites, on obtient :

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} c_m \partial_t v \varphi_{i,N} dx dt + \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_i \varphi_{i,N} dx dt \\ & + \iint_{Q_T} M_i(t, x, \nabla u_i) \cdot \nabla \varphi_{i,N} dx dt + \iint_{Q_T} h(t, x, v) \varphi_{i,N} dx dt \\ & = \int \int_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_{i,N} dx dt, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} c_m \partial_t v \varphi_{e,N} dx dt + \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_e \varphi_{e,N} dx dt \\ & + \iint_{Q_T} M_e(t, x, \nabla u_e) \cdot \nabla \varphi_{e,N} dx dt + \iint_{Q_T} h(t, x, v) \varphi_{e,N} dx dt \\ & = \int \int_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_{e,N} dx dt, \end{aligned} \quad (2.53)$$

$\forall \varphi_{j,N} \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ fixé, avec $j = i, e$.

Reste à passer à la limite sur $N \rightarrow \infty$:

On a $\bigcup_{N \geq 1} W_N$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ alors la définition de densité nous donne que :

$\forall \varphi_j \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, il existe une suite $\varphi_{j,N} \in C^1([0, T], W_N)$ tel que $\varphi_{j,N} \rightarrow \varphi_j$ converge fortement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ quand $N \rightarrow \infty$ avec $j = i, e$.

On passe à la limite quand $N \rightarrow \infty$ dans les formulations variationnelles précédentes (2.52),(2.53) pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} c_m \partial_t v \varphi_i dx dt + \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_i \varphi_i dx dt \\ & + \iint_{Q_T} M_i(t, x, \nabla u_i) \cdot \nabla \varphi_i dx dt + \iint_{Q_T} h(t, x, v) \varphi_i dx dt \\ & = \int \int_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_i dx dt, \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_T} c_m \partial_t v \varphi_e \, dx \, dt + \iint_{Q_T} \varepsilon \partial_t u_e \varphi_e \, dx \, dt \\
& + \iint_{Q_T} M_e(t, x, \nabla u_e) \cdot \nabla \varphi_e \, dx \, dt + \iint_{Q_T} h(t, x, v) \varphi_e \, dx \, dt \\
& = \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_e \, dx \, dt,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

$\forall \varphi_j \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ fixé, avec $j = i, e$.

On conclut que le modèle non-dégénéré (2.1), (2.2), (2.3) admet au moins une solution faible qui vérifie les formulations variationnelles (2.54), (2.55) pour tout $\varepsilon > 0$ fixé. D'où la démonstration du théorème. \square

2.2.4 Retrouver la condition initiale du problème non-dégénéré (2.1)

Enfin, dans cette étape on va prouver que les limites u_i, u_e de solutions Faedo-Galerkin, qui vérifient les conséquences d'estimations d'énergies, satisfont la condition initiale (2.3) :

$$u_j(0, x) = u_{j,0}(x) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

La démonstration est consacrée sur un argument donné dans [3]. On utilise les formulations variationnelles (2.54), (2.55) de solution faible du système non-dégénéré (2.1) en choisissant la fonction test $\varphi_j \in C^1([0, T], W_0^{1,p}(\Omega))$ tel que $\varphi_j(T, \cdot) = 0$ avec $j = i, e$.

On commence à démontrer la condition initiale pour $j = i$ et on suit l'autre où $j = e$ avec les mêmes démarches de démonstration pour $j = i$.

D'une part, on intègre par parties par rapport au temps le premier terme dans la formulation variationnelle (2.54) et on obtient :

$$\begin{aligned}
& - \iint_{Q_T} c_m v \partial_t \varphi_i \, dx \, dt - \int_{\Omega} c_m v(0, x) \varphi_i(0, x) \, dx \\
& - \iint_{Q_T} \varepsilon u_i \partial_t \varphi_i \, dx \, dt - \int_{\Omega} \varepsilon u_i(0, x) \partial_t \varphi_i(0, x) \, dx \\
& + \iint_{Q_T} M_i(t, x, \nabla u_i) \cdot \nabla \varphi_i \, dx \, dt + \iint_{Q_T} h(t, x, v) \varphi_i \, dx \, dt \\
& = \int \int_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_i \, dx \, dt,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

$\forall \varphi_i \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ fixé.

D'autre part, revenons maintenant à la formulation variationnelle (2.49) qu'on intègre par parties par rapport au temps le premier terme dans cette formulation variationnelle pour obtenir :

$$\begin{aligned}
& - \iint_{Q_T} c_m v_n \partial_t \varphi_{i,N} \, dx \, dt - \int_{\Omega} c_m v_n(0, x) \varphi_{i,N}(0, x) \, dx \\
& - \iint_{Q_T} \varepsilon u_{i,n} \partial_t \varphi_{i,N} \, dx \, dt - \int_{\Omega} \varepsilon u_{i,n}(0, x) \varphi_{i,N}(0, x) \, dx \\
& + \iint_{Q_T} M_i(t, x, \nabla u_{i,n}) \cdot \nabla \varphi_{i,N} \, dx \, dt + \iint_{Q_T} h(t, x, v_n) \varphi_{i,N} \, dx \, dt \\
& = \int \int_{Q_T} I_{app,n}(t, x) \varphi_{i,N} \, dx \, dt,
\end{aligned} \tag{2.57}$$

$\forall \varphi_{i,N} \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ fixé.

Or on a d'après ce qui précède :

- $v_n(0, x) \rightarrow v_0(x)$ dans $L^6(\Omega)$ quand $n \rightarrow \infty$,
- $u_{j,n}(0, x) \rightarrow u_{j,0}$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ quand $n \rightarrow \infty$,
- $\varphi_{i,N} \rightarrow \varphi_i$ converge fortement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ quand $N \rightarrow \infty$.

On passe à la limite quand $n \rightarrow \infty$, en suivant les mêmes démarches pour les limites comme avant, puis on passe à la limite $N \rightarrow \infty$ et on a alors la formulation faible suivante :

$$\begin{aligned}
& - \iint_{Q_T} c_m v \partial_t \varphi_i \, dx \, dt - \int_{\Omega} c_m v_0(x) \varphi_i(0, x) \, dx \\
& - \iint_{Q_T} \varepsilon u_i \partial_t \varphi_i \, dx \, dt - \int_{\Omega} \varepsilon u_{i,0}(x) \varphi_i(0, x) \, dx \\
& + \iint_{Q_T} M_i(t, x, \nabla u_i) \cdot \nabla \varphi_i \, dx \, dt + \iint_{Q_T} h(t, x, v) \varphi_i \, dx \, dt \\
& = \int \int_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_i \, dx \, dt,
\end{aligned} \tag{2.58}$$

$\forall \varphi_i \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ fixé.

Maintenant, on fait la soustraction entre les deux formulations variationnelles (2.56), (2.58) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} c_m v(0, x) \varphi_i(0, x) \, dx + \int_{\Omega} \varepsilon u_i(0, x) \partial_t \varphi_i(0, x) \, dx \\
& = \int_{\Omega} c_m v_0(x) \varphi_i(0, x) \, dx + \int_{\Omega} \varepsilon u_{i,0}(x) \varphi_i(0, x) \, dx
\end{aligned}$$

Ensuite, on fait $\varepsilon \rightarrow 0$ pour trouver que $v_0(x) = v(0, x)$ dans $L^2(\Omega)$. Et on remplace $v_0(x) = v(0, x)$ dans cette égalité, en simplifiant par $\varepsilon > 0$, pour déduire que : $u_i(0, x) = u_{i,0}(x)$ p.p. $x \in \Omega$.

Par conséquent, on a complètement démontré le théorème (2.4).

Chapitre 3

Étude du système bidomaine linéaire

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de l'existence de solutions faibles du modèle bidomaine par déduction du modèle non-dégénéré (5) en variant $\varepsilon > 0$ dans le chapitre 2 puis en passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Plus précisément, on s'intéresse dans ce chapitre au système dégénéré bidomaine (linéaire) suivant :

$$\begin{cases} c_m \partial_t v - \operatorname{div}(\mathbf{M}_i(t, x) \nabla u_i) + h(t, x, v) = I_{app}(t, x), \\ c_m \partial_t v - \operatorname{div}(\mathbf{M}_e(t, x) \nabla u_e) + h(t, x, v) = I_{app}(t, x), \end{cases} \quad (3.1)$$

avec les mêmes conditions limites de Dirichlet :

$$u_j = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.2)$$

En ce qui concerne la condition initiale est exprimée comme suit :

$$v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.3)$$

Définition 3.1. On dit qu'une solution (u_i, u_e, v) du problème bidomaine (3.1) est faible si le triplet de fonctions u_i, u_e et $v \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ avec $v = u_i - u_e$ telles que $\partial_t v \in L^2(Q_T)$, $v(0) = v_0$ p.p. dans Ω et elle vérifie la formulation faible suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^T c_m (\partial_t v, \varphi_i)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \iint_{Q_T} \mathbf{M}_i(t, x) \nabla u_i \cdot \nabla \varphi_i dx dt \\ + \iint_{Q_T} h(t, x, v) \varphi_i dx dt = \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_i dx dt, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T c_m (\partial_t v, \varphi_e)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt - \iint_{Q_T} \mathbf{M}_e(t, x) \nabla u_e \cdot \nabla \varphi_e dx dt \\ + \iint_{Q_T} h(t, x, v) \varphi_e dx dt = \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_e dx dt, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$\forall \varphi_j \in L^p(0, T, H_0^1(\Omega))$, $j = i, e$.

Théorème 3.2. On suppose que les conditions (2.4)-(2.13) sont vérifiées.

Si $v_0 \in L^2(\Omega)$ et $I_{app} \in L^2(Q_T)$. alors le système bidomaine (3.1), (3.2), (3.3), possède une unique solution faible.

En plus, si $v_0 = u_{i,0} - u_{e,0}$ avec $u_{i,0}, u_{e,0} \in H_0^1(\Omega)$ et $I_{app} \in L^2(Q_T)$ alors $\partial_t v \in L^2(Q_T)$.

On va prouver ce théorème sous les deux cas suivantes :

- Le cas où $v_0 = u_{i,0} - u_{e,0}$ avec $u_{i,0}, u_{e,0} \in H_0^1(\Omega)$.
- Le cas où $v_0 \in L^2(\Omega)$.

3.1 Le cas où $v_0 = u_{i,0} - u_{e,0}$ avec $u_{i,0}, u_{e,0} \in H_0^1(\Omega)$.

On sait d'après le chapitre 2 où on a utilisé la méthode de Faedo-Galerkin qu'il existe des suites $\{u_{i,\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$, $\{u_{e,\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$, $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ avec $v_\varepsilon = u_{i,\varepsilon} - u_{e,\varepsilon}$ de solutions approchées (solutions Faedo-Galerkin) du système non-dégénéré (2.1),(2.2),(2.3), cf. Définition 3.1 (avec $p = 2$). En outre, on a évidemment ces solutions satisfont les estimations d'énergie (pour $p = 2$) dans le lemme suivant :

Lemme 3.3. *On suppose que les conditions (2.4)-(2.13) sont vérifiées.*

Si $u_{i,0}, u_{e,0} \in L^2(\Omega)$ et $I_{app} \in L^2(Q_T)$, alors il existe des constantes positives c_1, c_2, c_3 indépendantes de ε tel que :

$$\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \sum_{j=i,e} \|\sqrt{\varepsilon}u_{j,\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq c_1, \quad (3.6)$$

$$\sum_{j=i,e} \|\nabla u_{j,\varepsilon}\|_{L^2(Q_T)} \leq c_2, \quad (3.7)$$

$$\sum_{j=i,e} \|u_{j,\varepsilon}\|_{L^2(Q_T)} \leq c_3, \quad (3.8)$$

Si de plus, $u_{i,0}, u_{e,0} \in H_0^1(\Omega)$, alors il existe une constante $c_4 > 0$ indépendante de ε telle que :

$$\|\partial_t v_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} + \sum_{j=i,e} \|\sqrt{\varepsilon}\partial_t u_{j,\varepsilon}\|_{L^2(Q_T)} \leq c_4, \text{ avec } j = i, e. \quad (3.9)$$

Démonstration. D'après le lemme (2.3), les estimations d'énergie sont vérifiées par $v_n, u_{i,n}, u_{e,n}$ qui seront remplacées par $v_\varepsilon, u_{i,\varepsilon}, u_{e,\varepsilon}$. De plus, en se référant à la démonstration du lemme (2.3) on trouve que les constantes c_1, c_2, c_3, c_4 sont indépendantes de ε . \square

D'après les estimations d'énergie (3.6),(3.7),(3.8),(3.9) et le corollaire de bornitude et de compacité (voir Annexe), on peut conclure qu'il existe des sous-suites $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}, \{u_{j,\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$, avec $j = i, e$, et $v_\varepsilon = u_{i,\varepsilon} - u_{e,\varepsilon}$ telles que :

- $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ converge faiblement dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$,
- $\partial_t v_\varepsilon \rightharpoonup \partial_t v$ converge faiblement dans $L^2(Q_T)$,
- $u_{j,\varepsilon} \rightharpoonup u_j$ converge faiblement dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$,
- et $\varepsilon\partial_t u_{j,\varepsilon} \rightarrow 0$ converge faiblement dans $L^2(Q_T)$, avec $j = i, e$.

D'après la remarque (2) et en utilisant l'argument de compacité

$H_0^1(\Omega) \underset{\text{compacte}}{\subset} L^2(\Omega)$, on obtient $v_\varepsilon \rightarrow v$ converge fortement dans $L^2(Q_T)$, et $u_{j,\varepsilon} \rightarrow u_j$ converge

aussi fortement dans $L^2(Q_T)$. Et d'après le théorème de Fischer-Riesz, on peut extraire aussi une sous-suite $v_\varepsilon \rightarrow v$ p.p. dans Q_T et $u_{j,\varepsilon} \rightarrow u_j$ p.p. dans Q_T .

Comme on a $\partial_t v_\varepsilon, \partial_t v \in L^2(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ donc d'après le théorème de Caratérisation de $H^{-1}(\Omega)$ et la définition de la convergence faible on a alors :

$$(\partial_t v_\varepsilon, \phi)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = (\partial_t v_\varepsilon, \phi)_{L^2(\Omega)} \rightarrow (\partial_t v, \phi)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = (\partial_t v, \phi)_{L^2(\Omega)},$$

$\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$. Aussi on a $v \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ et $\partial_t v \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ alors on conclut, en utilisant le théorème de Lions-Magenes (voir Section 1.2), que $v \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$. En se référant à la preuve de lemme (2.5), on déduit aussi que $h(t, x, v_\varepsilon) \rightarrow h(t, x, v)$ fort dans $L^q(Q_T)$, $\forall q \in [1, 2)$.

Maintenant, avec tous ces convergences, on travaille avec la même stratégie du chapitre 1 pour démontrer que la condition initiale (3.3) est vérifiée, ensuite l'existence de la solution faible du modèle bidomaine (3.1),(3.2),(3.3), cf. Définition 3.1, donc on a prouvé le premier cas du théorème 3.2.

3.2 Le cas où $v_0 \in L^2(\Omega)$.

Pour traiter ce cas, on a besoin de régulariser la condition initiale v_0 par une suite $\{v_{0,\rho}\}_{\rho>0}$ de fonctions satisfaisantes :

$$v_{0,\rho} \in H_0^1(\Omega), \quad \|v_{0,\rho}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad v_{0,\rho} \rightarrow v_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } \rho \rightarrow 0.$$

Pour $\rho > 0$, on fait la décomposition de $v_{0,\rho}$ de la manière suivante :

$$v_{0,\rho} = u_{i,0,\rho} - u_{e,0,\rho} \text{ avec } u_{i,0,\rho}, u_{e,0,\rho} \in H_0^1(\Omega).$$

On déduit, d'après le premier cas, qu'il existe des suites $\{v_\rho\}_{\rho>0}, \{u_{j,\rho}\}_{\rho>0}$, avec $j = i, e$, et $v_\rho = u_{i,\rho} - u_{e,\rho}$ de sorte que $u_{i,\rho}, u_{e,\rho} \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, $\partial_t v_\rho \in L^2(Q_T)$ et on a :

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} c_m \partial_t v_\rho \varphi_i \, dx \, dt + \iint_{Q_T} \mathbf{M}_i(t, x) \nabla u_{i,\rho} \cdot \nabla \varphi_i \, dx \, dt \\ + \iint_{Q_T} h(t, x, v_\rho) \varphi_i \, dx \, dt = \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_i \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} c_m \partial_t v_\rho \varphi_e \, dx \, dt - \iint_{Q_T} \mathbf{M}_e(t, x) \nabla u_{e,\rho} \cdot \nabla \varphi_e \, dx \, dt \\ + \iint_{Q_T} h(t, x, v_\rho) \varphi_e \, dx \, dt = \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_e \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$\forall \varphi_j \in L^p(0, T, H_0^1(\Omega))$, $j = i, e$. En plus, on a ces solutions satisfaisant les estimations d'énergie (pour $p = 2$) dans le lemme suivant :

Lemme 3.4. *On suppose que les conditions (2.4)-(2.13) sont vérifiées.*

Si $u_{i,0}, u_{e,0} \in L^2(\Omega)$ et $I_{app} \in L^2(Q_T)$, alors il existe des constantes positives c_1, c_2, c_3, c'_4 indépendantes de ρ tel que :

$$\|v_\rho\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))} \leq c_1, \quad (3.12)$$

$$\sum_{j=i, e} \|\nabla u_{j,\rho}\|_{L^2(Q_T)} \leq c_2, \quad (3.13)$$

$$\sum_{j=i, e} \|u_{j,\rho}\|_{L^2(Q_T)} \leq c_3, \text{ avec } j = i, e, \quad (3.14)$$

$$\|\partial_t v_\rho\|_{L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))} \leq c'_4. \quad (3.15)$$

Démonstration. D'après le lemme (2.3), les estimations d'énergie sont vérifiées par $v_n, u_{i,n}, u_{e,n}$ qui seront remplacées par $v_\rho, u_{i,\rho}, u_{e,\rho}$. De plus, en se référant à la démonstration du lemme (2.3) on trouve que les constantes c_1, c_2, c_3 sont indépendantes de ρ . Il suffit de montrer la dernière estimation du lemme. D'après la conséquence du théorème de Hahn-Banach, $\forall \varphi \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ on a :

$$\|\partial_t v_\rho\|_{L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))} = \sup_{\substack{\varphi \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)), \\ \varphi \neq 0}} \frac{|\int_0^T (\partial_t v_\rho, \varphi)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \, dt|}{\|\varphi\|_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))}}.$$

Maintenant, on prend $\varphi = \varphi_j \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ dans l'une des formulations variationnelles (3.10), (3.11) et on utilise l'inégalité de Hölder puis l'inégalité de Poincaré pour obtenir :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T (\partial_t v_\rho, \varphi_j)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt \right| &\leq \| \mathbf{M}_j \|_{L^\infty(Q_T)} \| \nabla u_{j,\rho} \|_{L^2(Q_T)} \| \nabla \varphi_{j,\rho} \|_{L^2(Q_T)} \\ &\quad + \| h(t, x, v_\rho) \|_{L^2(Q_T)} \| \varphi_{j,\rho} \|_{L^2(Q_T)} \\ &\quad + \| I_{app} \|_{L^2(Q_T)} \| \varphi_{j,\rho} \|_{L^2(Q_T)}, \\ &\leq (c_2 \| \mathbf{M}_j \|_{L^\infty(Q_T)} + \beta C_P \\ &\quad + C_P \| I_{app} \|_{L^2(Q_T)}) \| \varphi_{j,\rho} \|_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))}, \\ &\leq c'_4 \| \varphi_{j,\rho} \|_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))}, \end{aligned}$$

avec $j = i, e$ et $c'_4 = c_2 \| \mathbf{M}_j \|_{L^\infty(Q_T)} + \beta C_P + C_P \| I_{app} \|_{L^2(Q_T)}$ une constante positive indépendante de ρ . Par conséquent, on a $\| \partial_t v_\rho \|_{L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))} \leq c'_4$. D'où la démonstration du lemme. \square

D'après les estimations d'énergie (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) et le corollaire (1.5), on a les suites $\{v_\varepsilon\}_{\rho>0}$, $\{u_{i,\rho}\}_{\rho>0}$, $\{u_{e,\rho}\}_{\rho>0}$ sont uniformément bornées dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ et $\{\partial_t v_\rho\}_{\rho>0}$ est uniformément bornées dans $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ mais on sait pas de la bornitude de $\{\partial_t u_{j,\rho}\}_{\rho>0}$.

Donc on peut conclure qu'il existe des sous-suites $\{v_\varepsilon\}_{\rho>0}$, $\{u_{j,\rho}\}_{\rho>0}$, avec $j = i, e$, et $v_\rho = u_{i,\rho} - u_{e,\rho}$ tel que :

- $v_\rho \rightharpoonup v$ converge faiblement dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$,
- $\partial_t v_\rho \rightharpoonup \partial_t v$ converge faiblement dans $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$,
- $u_{j,\rho} \rightharpoonup u_j$ converge faiblement dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, avec $j = i, e$. D'après la remarque (2) et en utilisant l'argument de compacité $H_0^1(\Omega) \underset{\text{compacte}}{\subset} L^2(\Omega)$, on obtient $v_\rho \rightarrow v$ converge fortement dans $L^2(Q_T)$, et $u_{j,\rho} \rightarrow u_j$ converge aussi fortement dans $L^2(Q_T)$. Ensuite, on conclut que $v_\rho \rightarrow v$ p.p. dans Q_T et $u_{j,\rho} \rightarrow u_j$ p.p. dans Q_T .

Aussi, d'après ce qui précède on a $h(t, x, v_\rho) \rightharpoonup h(t, x, v)$ faible dans $L^2(Q_T)$ et en se référant à la preuve de lemme 2.4, on déduit aussi que $h(t, x, v_\rho) \rightarrow h(t, x, v)$ fort dans $L^q(Q_T)$, $\forall q \in [1, 2)$.

Maintenant, on peut passer à la limite $\rho \rightarrow 0$ avec tous ces convergences pour démontrer l'existence de la solution faible du modèle bidomaine (3.1), (3.2), (3.3) dans le cas où $v_0 \in L^2(\Omega)$. D'où la démonstration du théorème 2.8 dans le deuxième cas.

Chapitre 4

Étude du système bidomaine non-linéaire

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de l'existence de solutions faibles du modèle bidomaine non-linéaire (4.1) qui est une généralisation du modèle bidomaine linéaire (3.1). On déduit cette existence de solution faible de ce modèle du modèle non dégénéré (2.1) qui a été traité dans le chapitre 2 en se variant ε puis on passe à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ de même stratégie du modèle bidomaine. Plus précisément, on s'intéresse dans ce chapitre au système dégénéré non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} c_m \partial_t v - \operatorname{div} M_i(t, x, \nabla u_i) + h(t, x, v) = I_{app}(t, x), \\ c_m \partial_t v - \operatorname{div} M_e(t, x, \nabla u_e) + h(t, x, v) = I_{app}(t, x), \end{cases} \quad (4.1)$$

avec les mêmes conditions limites de Dirichlet :

$$u_j = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (4.2)$$

En ce qui concerne la condition initiale est exprimée comme suit :

$$v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.3)$$

Définition 4.1. On dit qu'une solution (u_i, u_e, v) du problème non-linéaire (4.1) est faible si le triplet de fonctions u_i, u_e et $v \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ avec $v = u_i - u_e$ telles que $\partial_t v \in L^{p'}(0, T, W^{-1,p'}(\Omega))$, $v(0) = v_0$ p.p. dans Ω et elle vérifie la formulation faible suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^T c_m (\partial_t v, \varphi_i)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} dt + \iint_{Q_T} M_i(t, x, \nabla u_i) \cdot \nabla \varphi_i dx dt \\ + \iint_{Q_T} h(t, x, v) \varphi_i dx dt = \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_i dx dt, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T c_m (\partial_t v, \varphi_e)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} dt - \iint_{Q_T} M_e(t, x, \nabla u_e) \cdot \nabla \varphi_e dx dt \\ + \iint_{Q_T} h(t, x, v) \varphi_e dx dt = \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_e dx dt, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$\forall \varphi_j \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, $j = i, e$.

Théorème 4.2. On suppose que les conditions (2.4)-(2.12) et (2.14) sont vérifiées.

Si $v_0 \in L^2(\Omega)$ et $I_{app} \in L^2(Q_T)$. alors le système non-linéaire (4.1), (4.3), (4.2), possède une unique solution faible.

En plus, si $v_0 = u_{i,0} - u_{e,0}$ avec $u_{i,0}, u_{e,0} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $I_{app} \in L^2(Q_T)$ alors $\partial_t v \in L^2(Q_T)$.

On va prouver ce théorème sous les deux cas suivantes :

- Le cas où $v_0 = u_{i,0} - u_{e,0}$ avec $u_{i,0}, u_{e,0} \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
- Le cas où $v_0 \in L^2(\Omega)$.

4.1 Le cas où $v_0 = u_{i,0} - u_{e,0}$ avec $u_{i,0}, u_{e,0} \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

On sait d'après le chapitre 2 où on a utilisé la méthode de Faedo-Galerkin qu'il existe des suites $\{u_{i,\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$, $\{u_{e,\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$, $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ avec $v_\varepsilon = u_{i,\varepsilon} - u_{e,\varepsilon}$ de solutions approchées (solutions Faedo-Galerkin) du système non-dégénéré (2.1),(2.2),(2.3), cf. Définition 2.2, et elles vérifient les formulations faibles suivantes pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} c_m \partial_t v_\varepsilon \varphi_i \, dx \, dt + \varepsilon \iint_{Q_T} \partial_t u_{i,\varepsilon} \varphi_i \, dx \, dt \\ & + \iint_{Q_T} M_i(t, x, \nabla u_{i,\varepsilon}) \cdot \nabla \varphi_i \, dx \, dt + \iint_{Q_T} h(t, x, v_\varepsilon) \varphi_i \, dx \, dt \\ & = \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_i \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} c_m \partial_t v_\varepsilon \varphi_e \, dx \, dt + \varepsilon \iint_{Q_T} \partial_t u_{e,\varepsilon} \varphi_e \, dx \, dt \\ & + \iint_{Q_T} M_e(t, x, \nabla u_{e,\varepsilon}) \cdot \nabla \varphi_e \, dx \, dt + \iint_{Q_T} h(t, x, v_\varepsilon) \varphi_e \, dx \, dt \\ & = \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_e \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$\forall \varphi_j \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, $j = i, e$.

De même le lemme 2.10 pour le modèle bidomaine (3.1), on a les estimations d'énergies pour le modèle non-linéaire (4.1) :

Lemme 4.3. *On suppose que les conditions (2.4)-(2.12) et (2.14) sont vérifiées.*

Si $u_{i,0}, u_{e,0} \in L^2(\Omega)$ et $I_{app} \in L^2(Q_T)$, alors il existe des constantes positives c_1, c_2, c_3 indépendantes de n tel que :

$$\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} + \sum_{j=i,e} \|\sqrt{\varepsilon} u_{j,\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq c_1, \quad (4.8)$$

$$\sum_{j=i,e} \|\nabla u_{j,\varepsilon}\|_{L^p(Q_T)} \leq c_2, \quad (4.9)$$

$$\sum_{j=i,e} \|u_{j,\varepsilon}\|_{L^p(Q_T)} \leq c_3, \quad (4.10)$$

Si de plus, $u_{i,0}, u_{e,0} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors il existe une constante $c_4 > 0$ indépendante de n telle que :

$$\|\partial_t v_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} + \sum_{j=i,e} \|\sqrt{\varepsilon} \partial_t u_{j,\varepsilon}\|_{L^2(Q_T)} \leq c_4, \text{ avec } j = i, e. \quad (4.11)$$

D'après les estimations d'énergie (4.8),(4.9),(4.10),(4.11) et le corollaire (1.5), on peut conclure qu'il existe des sous-suites $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\{u_{j,\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$, avec $j = i, e$, et $v_\varepsilon = u_{i,\varepsilon} - u_{e,\varepsilon}$ tel que :

- $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ converge faiblement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$,
 $v_\varepsilon \rightarrow v$ fortement dans $L^p(Q_T)$, p.p dans Q_T ,
- $\partial_t v_\varepsilon \rightharpoonup \partial_t v$ converge faiblement dans $L^2(Q_T)$,
- $u_{j,\varepsilon} \rightharpoonup u_j$ converge faiblement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$,
 $u_{j,\varepsilon} \rightarrow u_j$ fortement dans $L^p(Q_T)$, p.p dans Q_T ,
- et $\varepsilon \partial_t u_{j,\varepsilon} \rightarrow 0$ converge faiblement dans $L^2(Q_T)$, avec $j = i, e$,

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Comme on a $\partial_t v_\varepsilon, \partial_t v \in L^2(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ donc d'après le théorème de Caratérisation de $W^{-1,p'}(\Omega)$ et la définition de la convergence faible on a alors :

$$(\partial_t v_\varepsilon, \phi)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = (\partial_t v_\varepsilon, \phi)_{L^2(\Omega)} \rightarrow (\partial_t v, \phi)_{L^2(\Omega)} = (\partial_t v, \phi)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)},$$

$\forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Aussi on a $v \in L^2(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ et $\partial_t v \in L^2(0, T, W^{-1,p'}(\Omega))$ alors on conclut, en utilisant le théorème de Lions-Magenes continuité (voir Annexe), que $v \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$.

D'après les conséquences des estimations d'énergies (2.35), (2.36), (2.37), (2.38), on déduit quand $\varepsilon \rightarrow 0$ que :

- $M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) \rightharpoonup \Sigma_j$ faiblement dans $L^{p'}(Q_T, \mathbb{R}^3)$,
- $h(t, x, v_\varepsilon) \rightarrow h(t, x, v)$ p.p. dans Q_T et $h(t, x, v_\varepsilon) \rightharpoonup h(t, x, v)$ faiblement dans $L^{p'}(Q_T)$.
En se référant à la preuve de lemme 2.4, on conclut aussi que $h(t, x, v_\varepsilon) \rightarrow h(t, x, v)$ fort dans $L^q(Q_T)$, $\forall q \in [1, p']$.

On a déjà dit que le cas bidomaine $p = 2$ où $M_j(t, x, \xi) = \mathbf{M}_j(t, x)\xi$ diffère du cas non-linéaire $p > 2$ où par exemple $M_j(t, x, \xi) = |\xi|^{p-2}\mathbf{M}_j(t, x)\xi$ où la convergence faible ça suffit pour le premier cas quand on passe à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Par contre que le deuxième cas a besoin de la convergence forte des gradients $\nabla u_{j,n}$ dans $L^p(Q_T)$ pour identifier Σ_j comme $M_j(t, x, \nabla u_j)$ et dans la suite on va l'identifier :

Lemme 4.4. Pour $j = i, e$,

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=i,e} \int_0^T \int_{\Omega} M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) \cdot \nabla u_{j,\varepsilon} \, dx \, dt \\ \leq \sum_{j=i,e} \int_0^T \int_{\Omega} \Sigma_j(t, x) \cdot \nabla u_j \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Démonstration. On retourne aux formulations variationnelles (4.6), (4.7) en choisissant les fonctions tests comme suivent : $\varphi_i = u_{i,\varepsilon} - u_i$ et $\varphi_e = -(u_{e,\varepsilon} - u_e)$.

Par conséquent, $\varphi_{i,\varepsilon} + \varphi_{e,\varepsilon} = v_\varepsilon - v$ et $\varphi_{i,\varepsilon} - \varphi_{e,\varepsilon} = \sum_{j=i,e} (u_{j,\varepsilon} - u_j)$, avec $j = i, e$. On remplace φ_i et φ_e par ses valeurs dans ces formulations variationnelles et on les somme pour obtenir :

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} (c_m \partial_t v_\varepsilon (v_\varepsilon - v) + \sum_{j=i,e} \varepsilon \partial_t u_{j,\varepsilon} (u_{j,\varepsilon} - u_j)) \, dx \, dt \\ + \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) \cdot (\nabla u_{j,\varepsilon} - \nabla u_j) \, dx \, dt \\ + \iint_{Q_T} h(t, x, v_\varepsilon) (v_\varepsilon - v) \, dx \, dt = \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) (v_\varepsilon - v) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

On note par J_ε^i avec $i = 0, \dots, 3$ les termes de la dernière équation qui se réécrit de la manière suivante (à respecter l'ordre) :

$$J_\varepsilon^0 + J_\varepsilon^1 + J_\varepsilon^2 = J_\varepsilon^3.$$

On a d'après les conséquences précédentes des estimations d'énergie dans ce cas quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

- $\partial_t v_\varepsilon \rightharpoonup \partial_t v$ converge faiblement dans $L^2(Q_T)$,
- $v_\varepsilon \rightarrow v$ converge fortement dans $L^2(Q_T)$, donc on a $v_\varepsilon - v \rightarrow 0$ converge fortement dans $L^2(Q_T)$,
- $\varepsilon \partial_t u_{j,\varepsilon} \rightarrow 0$ converge faiblement dans $L^2(Q_T)$,
- $u_{j,\varepsilon} \rightarrow u_j$ converge fortement dans $L^2(Q_T)$, donc on a $u_{j,\varepsilon} - u_j \rightarrow 0$ converge fortement dans $L^2(Q_T)$,

- $h(t, x, v_\varepsilon) \rightharpoonup h(t, x, v)$ faiblement dans $L^{p'}(Q_T)$.

Alors d'après la proposition (1.5) de la multiplication de la convergence faible-forte (voir Annexe), on a alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{Q_T} (c_m \partial_t v_\varepsilon (v_\varepsilon - v) + \sum_{j=i,e} \varepsilon \partial_t u_{j,\varepsilon} (u_{j,\varepsilon} - u_j)) dx dt = 0,$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{Q_T} h(t, x, v_\varepsilon) (v_\varepsilon - v) dx dt = 0.$$

Ensuite, comme on a $I_{app,n}(t, x) \in L^2(Q_T)$ alors la définition de la convergence nous donne :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) (v_\varepsilon - v) dx dt = 0.$$

Par conclusion, on prend la limite supérieure quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'équation précédente pour obtenir :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon^2 = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) \cdot (\nabla u_{j,\varepsilon} - \nabla u_j) dx dt \leq 0.$$

Comme on a $M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) \rightharpoonup \Sigma_j$ faiblement dans $L^{p'}(Q_T, \mathbb{R}^3)$ et en utilisant la définition de la convergence faible on déduit que :

$$\begin{aligned} & \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) \cdot (\nabla u_{j,\varepsilon}) dx dt \\ & \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) \cdot (\nabla u_j) dx dt \\ & = \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} \Sigma_j(t, x) \cdot \nabla u_j dx dt. \end{aligned}$$

D'où la démonstration du lemme. \square

La convergence forte des gradients $\nabla u_{j,n}$ dans $L^p(Q_T)$ est une conséquence du lemme précédent. On va la prouver dans le lemme suivant :

Lemme 4.5. *Pour $j = i, e$ Pour $j = i, e$, $\nabla u_{j,n} \rightarrow \nabla u_j$ converge fortement dans $L^p(Q_T)$ quand $n \rightarrow \infty$ et $\Sigma_j(t, x) = M_j(t, x, \nabla u_j)$ p.p. pour $(t, x) \in Q_T$ avec $j = i, e$.*

Démonstration. Comme on a d'après ce qui précède que :

- $M_j(t, x, \nabla u_j)$ est bornée dans $L^{p'}(Q_T)$,
- et quand $\varepsilon \rightarrow 0$ $\nabla u_{j,\varepsilon} \rightharpoonup \nabla u_j$ converge faiblement dans $L^p(Q_T)$,

alors on déduit que :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) \cdot (\nabla u_{j,\varepsilon} - \nabla u_j) dx dt = 0.$$

Mais l'hypothèse de monotonie (2.5) de M_j nous donne que :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} (M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) - M_j(t, x, \nabla u_j)) \cdot (\nabla u_{j,\varepsilon} - \nabla u_j) dx dt \\ & \geq C_M \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} |\nabla u_{j,\varepsilon} - \nabla u_j|^p dx dt. \end{aligned}$$

En conclusion, d'après ce qui précède et du lemme précédent donc on a :

$$\begin{aligned} & C_M \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} |\nabla u_{j,\varepsilon} - \nabla u_j|^p dx dt \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} (M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) - M_j(t, x, \nabla u_j)) \cdot (\nabla u_{j,\varepsilon} - \nabla u_j) dx dt, \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$ on a $\nabla u_{j,\varepsilon} \rightarrow \nabla u_j$ converge fortement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, avec $j = i, e$. En conclusion, $M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) \rightarrow M_j(t, x, \nabla u_j)$ converge fortement dans $L^{p'}(0, T, W_0^{1,p'}(\Omega))$, avec $j = i, e$.

En plus, on a $M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) \rightarrow \Sigma_j(t, x)$ converge faiblement dans $L^{p'}(0, T, W_0^{1,p'}(\Omega))$ alors d'après l'unicité de la limite au sens de distribution on a $\Sigma_j(t, x) = M_j(t, x, \nabla u_j)$ p.p. pour $(t, x) \in Q_T$. D'où la démonstration du lemme. \square

Maintenant, avec tous ces convergences, on travaille avec la même stratégie de la section de la condition initiale du chapitre 2 pour démontrer que la condition initiale (4.3) est vérifiée, ensuite l'existence de la solution faible du modèle non-linéaire (4.1),(4.2),(4.3), cf. Définition 4.1, donc on a prouvé le premier cas du théorème 4.2.

4.2 Le cas où $v_0 \in L^2(\Omega)$.

On fait la preuve avec la même stratégie de la démonstration de la deuxième cas du système bidomaine (3.1), on a besoin de régulariser la condition initiale v_0 par une suite $\{v_{0,\rho}\}_{\rho>0}$ de fonctions satisfaisantes :

$$v_{0,\rho} \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v_{0,\rho}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v_0\|_{L^2(\Omega)}, v_{0,\rho} \rightarrow v_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } \rho \rightarrow 0.$$

Pour $\rho > 0$, on fait la décomposition de $v_{0,\rho}$ de la manière suivante :

$$v_{0,\rho} = u_{i,0,\rho} - u_{e,0,\rho} \text{ avec } u_{i,0,\rho}, u_{e,0,\rho} \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On déduit, d'après le premier cas, qu'il existe des suites $\{v_\rho\}_{\rho>0}, \{u_{j,\rho}\}_{\rho>0}$, avec $j = i, e$, et $v_\rho = u_{i,\rho} - u_{e,\rho}$ de sorte que $u_{i,\rho}, u_{e,\rho} \in L^2(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, $\partial_t v_\rho \in L^2(Q_T)$ et :

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} c_m \partial_t v_\rho \varphi_i dx dt + \iint_{Q_T} M_i(t, x, \nabla u_{i,\rho}) \cdot \nabla \varphi_i dx dt \\ & + \iint_{Q_T} h(t, x, v_\rho) \varphi_i dx dt = \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_i dx dt, \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} c_m \partial_t v_\rho \varphi_e dx dt - \iint_{Q_T} M_e(t, x, \nabla u_{e,\rho}) \cdot \nabla \varphi_e dx dt \\ & + \iint_{Q_T} h(t, x, v_\rho) \varphi_e dx dt = \iint_{Q_T} I_{app}(t, x) \varphi_e dx dt, \end{aligned} \tag{4.13}$$

$\forall \varphi_j \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, $j = i, e$. Pour passer à la limite $\rho \rightarrow 0$ dans les formulations précédentes (4.12),(4.13), on a besoin des estimations qui sont exprimées dans le lemme suivant :

Lemme 4.6. *On suppose que les conditions (2.4)-(2.12) et (2.14) sont vérifiées.*

Si $u_{i,0}, u_{e,0} \in L^2(\Omega)$ et $I_{app} \in L^2(Q_T)$, alors il existe des constantes positives c_1, c_2, c_3, c_4' indépendantes de ρ tel que :

$$\|v_\rho\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq c_1, \tag{4.14}$$

$$\sum_{j=i,e} \|\nabla u_{j,\rho}\|_{L^2(Q_T)} \leq c_2, \quad (4.15)$$

$$\sum_{j=i,e} \|u_{j,\rho}\|_{L^2(Q_T)} \leq c_3, \text{ avec } j = i, e, \quad (4.16)$$

$$\|\partial_t v_\rho\|_{L^2(0,T,W^{-1,p'}(\Omega))} \leq c_4''. \quad (4.17)$$

Démonstration. D'après le lemme (2.3), les estimations d'énergie sont vérifiées par $v_n, u_{i,n}, u_{e,n}$ qui seront remplacées par $v_\rho, u_{i,\rho}, u_{e,\rho}$. De plus, en se référant à la démonstration du lemme (2.3) on trouve que les constantes c_1, c_2, c_3 sont indépendantes de ρ . Il suffit de montrer la dernière estimation du lemme. D'après la conséquence du théorème de Hahn-Banach, $\forall \varphi \in L^2(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ on a :

$$\|\partial_t v_\rho\|_{L^2(0,T,W^{-1,p'}(\Omega))} = \sup_{\substack{\varphi \in L^2(0,T,W_0^{1,p}(\Omega)), \\ \varphi \neq 0}} \frac{\left| \int_0^T (\partial_t v_\rho, \varphi)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} dt \right|}{\|\varphi\|_{L^2(0,T,W_0^{1,p}(\Omega))}}.$$

Maintenant, on prend $\varphi = \varphi_j \in L^2(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ dans l'une des formulations variationnelles (4.12), (4.13) et on utilise l'inégalité de Hölder puis l'inégalité de Poincaré pour obtenir :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T (\partial_t v_\rho, \varphi_j)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} dt \right| &\leq \|M_j\|_{L^{p'}(Q_T)} \|\nabla \varphi_{j,\rho}\|_{L^p(Q_T)} \\ &\quad + \|h(t, x, v_\rho)\|_{L^{p'}(Q_T)} \|\varphi_{j,\rho}\|_{L^p(Q_T)} \\ &\quad + \|I_{app}\|_{L^2(Q_T)} \|\varphi_{j,\rho}\|_{L^p(Q_T)}, \\ &\leq (\alpha^{\frac{1}{p'}} c_2 + \beta^{\frac{1}{p'}} C_P \\ &\quad + C_P \|I_{app}\|_{L^2(Q_T)}) \|\varphi_{j,\rho}\|_{L^2(0,T,W_0^{1,p}(\Omega))}, \\ &\leq c_4'' \|\varphi_{j,\rho}\|_{L^2(0,T,W_0^{1,p}(\Omega))}, \end{aligned}$$

avec $j = i, e$ et $c_4'' = \alpha^{\frac{1}{p'}} c_2 + \beta^{\frac{1}{p'}} C_P + C_P \|I_{app}\|_{L^2(Q_T)}$ une constante positive indépendante de ρ . Par conséquent, on a $\|\partial_t v_\rho\|_{L^2(0,T,W^{-1,p'}(\Omega))} \leq c_4''$. D'où la démonstration du lemme. \square

D'après les estimations d'énergie (4.14), (4.15), (4.16), (4.17) et le corollaire (1.5), on a les suites $\{v_\rho\}_{\rho>0}, \{u_{i,\rho}\}_{\rho>0}, \{u_{e,\rho}\}_{\rho>0}$ sont uniformément bornées dans $L^2(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ et $\{\partial_t v_\rho\}_{\rho>0}$ est uniformément bornées dans $L^2(0, T, W^{-1,p'}(\Omega))$ mais on sait pas de la bornitude de $\{\partial_t u_{j,\rho}\}_{\rho>0}$. Donc on peut déduire qu'il existe des sous-suites $\{v_\rho\}_{\rho>0}, \{u_{j,\rho}\}_{\rho>0}$, avec $j = i, e$, et $v_\rho = u_{i,\rho} - u_{e,\rho}$ tel que :

- $v_\rho \rightharpoonup v$ converge faiblement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$,
- $\partial_t v_\rho \rightharpoonup \partial_t v$ converge faiblement dans $L^{p'}(0, T, W^{-1,p'}(\Omega))$,
- $u_{j,\rho} \rightharpoonup u_j$ converge faiblement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, avec $j = i, e$. En utilisant l'argument de compacité $W_0^{1,p}(\Omega) \subset_{compacte} L^p(\Omega)$, on obtient $v_\rho \rightarrow v$ converge fortement dans $L^p(Q_T)$, et $u_{j,\rho} \rightarrow u_j$ converge aussi fortement dans $L^p(Q_T)$. Ensuite, on conclut que $v_\rho \rightarrow v$ p.p. dans Q_T et $u_{j,\rho} \rightarrow u_j$ p.p. dans Q_T .

Aussi on a $v \in L^2(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ et $\partial_t v \in L^2(0, T, W^{-1,p'}(\Omega))$ alors on conclut, en utilisant le théorème de Lions-Magenes continuité (voir Annexe), que $v \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$.

En plus, d'après les conséquences des estimations d'énergies (2.35), (2.36), (2.37), (2.38), on déduit quand $\rho \rightarrow 0$ que :

- on a $h(t, x, v_\rho) \rightharpoonup h(t, x, v)$ faible dans $L^{p'}(Q_T)$, $h(t, x, v_\rho) \rightarrow h(t, x, v)$ p.p dans Q_T et en se référant à la preuve de lemme (2.5), on déduit aussi que $h(t, x, v_\rho) \rightarrow h(t, x, v)$ fort dans $L^q(Q_T)$, $\forall q \in [1, p']$.
- $M_j(t, x, \nabla u_{j,\rho}) \rightharpoonup \Sigma_j$ faiblement dans $L^{p'}(Q_T, \mathbb{R}^3)$.

Avec tous ces convergences, on peut simplement passer à la limite pour obtenir l'existence de la solution faible du système non-linéaire (4.1),(4.2),(4.3) mais il reste à identifier Σ_j comme $M_j(t, x, \nabla u_j)$, donc on a besoin de la convergence forte des gradients $\nabla u_{j,\rho}$ dans $L^p(Q_T)$.

Mais la différence entre ce cas et le cas précédent est que v_0 n'est pas régulière pour assurer la convergence faible de $\partial_t v_\rho$ dans $L^2(Q_T)$, qui a été utilisée dans la preuve du lemme 4.4. Pour traiter ce problème, on applique une méthode de régularisation du temps introduites par Landes [7] pour résoudre des équations paraboliques et dans la suite on va l'identifier en prouvant les lemmes suivants :

Lemme 4.7. Pour $j = i, e$,

$$\begin{aligned} \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sum_{j=i,e} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega M_j(t, x, \nabla u_{j,\rho}) \cdot \nabla u_{j,\rho} \, dx \, ds \, dt \\ \leq \sum_{j=i,e} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \Sigma_j(t, x) \cdot \nabla u_j \, dx \, ds \, dt. \end{aligned}$$

Démonstration. La démonstration est basée sur les deux étapes suivantes :

- Régularisation du temps de v avec $v = u_i - u_e$.
- Continuer avec la même startigie de la démonstration du lemme 4.4 en utilisant ces fonctions de régularisations.

La première étape consiste à régulariser en temps pour la fonction v avec $v = u_i - u_e$ qui sont les limites de fonctions $u_{i,\rho}, u_{e,\rho}$ et v_ρ d'après les estimations d'énergies précédentes. On note cette fonction de régularisation par $(v)_\mu$, avec μ est un paramètre de régularisation tend vers l'infini. On définit $(v)_\mu$ est l'unique solution de $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ de l'équation parabolique suivante :

$$\partial_t (v)_\mu + \mu((v)_\mu - v) = 0, \text{ Dans } D'(Q_T), \quad (4.18)$$

avec la condition initiale est exprimée comme suit :

$$(v)_\mu|_{t=0} = v_0^\mu, \quad x \in \Omega, \quad (4.19)$$

où $\{v_0^\mu\}_{\mu>1}$ est suite de fonctions tel ques :

- $v_0^\mu \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v_0^\mu \rightarrow v_0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $\mu \rightarrow \infty$,
- et $\frac{1}{\mu} \|v_0^\mu\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $\mu \rightarrow \infty$.

D'après Landes [7], on peut déduire les propriétés suivantes :

- $\partial_t (v)_\mu \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$
- et $(v)_\mu \rightarrow v$ fortement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ quand $\mu \rightarrow \infty$.

Maintenant dans la deuxième étape, on suit la même démarche comme la preuve du lemme 2.14 en choisissant les fonctions tests :

$$\varphi_i = u_{i,\rho} - (u_i)_\mu \text{ et } \varphi_e = -(u_{e,\rho} - (u_e)_\mu).$$

Par conséquent, $\varphi_{i,\rho} + \varphi_{e,\rho} = v_\rho - (v)_\mu$ et $\varphi_{i,\rho} - \varphi_{e,\rho} = \sum_{j=i,e} (u_{j,\rho} - (u_j)_\mu)$, avec $j = i, e$. On remplace φ_i et φ_e par ses valeurs dans les formulations variationnelles (4.12), (4.13) et on les somme pour

obtenir :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} c_m \partial_t v_{\rho} (v_{\rho} - (v)_{\mu}) \, dx \, ds \, dt \\
& + \sum_{j=i,e} \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} M_j(t, x, \nabla u_{j,\rho}) \cdot (\nabla u_{j,\rho} - \nabla (u_j)_{\mu}) \, dx \, ds \, dt \\
& + \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} h(t, x, v_{\rho}) (v_{\rho} - (v)_{\mu}) \, dx \, ds \, dt \\
& = \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} I_{app}(t, x) (v_{\rho} - (v)_{\mu}) \, dx \, ds \, dt.
\end{aligned}$$

On note par $J_{\rho,\mu}^i$ avec $i = 0, \dots, 3$ les termes de la dernière équation qui se réécrit de la manière suivante (à respecter l'ordre) :

$$J_{\rho,\mu}^0 + J_{\rho,\mu}^1 + J_{\rho,\mu}^2 = J_{\rho,\mu}^3.$$

On veut passer premièrement à la limite quand $\rho \rightarrow 0$ puis deuxièmement quand $\mu \rightarrow \infty$.

On commence par $J_{\rho,\mu}^0$ en ajoutant le terme $\partial(v)_{\mu} (v_{\rho} - (v)_{\mu})$:

$$\begin{aligned}
J_{\rho,\mu}^0 &= \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} c_m \partial_t v_{\rho} (v_{\rho} - (v)_{\mu}) \, dx \, ds \, dt \\
&= \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} c_m \partial_t (v_{\rho} - (v)_{\mu}) (v_{\rho} - (v)_{\mu}) \, dx \, ds \, dt \\
&+ \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} c_m \partial_t (v)_{\mu} (v_{\rho} - (v)_{\mu}) \, dx \, ds \, dt \\
&= \int_0^T \int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c_m |v_{\rho} - (v)_{\mu}|^2 \, dx \, ds \, dt \\
&+ \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} c_m \partial_t (v)_{\mu} (v_{\rho} - (v)_{\mu}) \, dx \, ds \, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} c_m |v_{\rho} - (v)_{\mu}|^2 \, dx \, dt \\
&- \frac{T}{2} \int_{\Omega} c_m |v_{0,\rho} - v_0^{\mu}|^2 \, dx \\
&+ \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} c_m \partial_t (v)_{\mu} (v_{\rho} - (v)_{\mu}) \, dx \, ds \, dt.
\end{aligned}$$

Comme on a $v_{0,\rho} \rightarrow v_0$ fort dans $L^2(\Omega)$ et d'après les estimations d'énergie on a $v_{\rho} \rightarrow v$ fort dans $L^p(Q_T)$, par conséquent, fortement dans $L^2(Q_T)$, quand $\rho \rightarrow 0$.

Ensuite, on passe à la limite quand $\rho \rightarrow 0$ dans $J_{\rho,\mu}^0$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \rightarrow 0} J_{\rho,\mu}^0 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} c_m |v - (v)_{\mu}|^2 \, dx \, ds \, dt \\
&- \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} c_m |v_0 - v_0^{\mu}|^2 \, dx \, ds \, dt \\
&+ \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} c_m \partial_t (v)_{\mu} (v - (v)_{\mu}) \, dx \, ds \, dt
\end{aligned}$$

Comme on a :

- $v_0^{\mu} \rightarrow v_0$ fort dans $L^2(\Omega)$,
- $\partial_t (v)_{\mu} \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ et $(v)_{\mu} \rightarrow v$ fort dans $L^2(Q_T)$.

Ensuite, on passe à la limite quand $\mu \rightarrow \infty$ dans $\lim_{\rho \rightarrow 0} J_{\rho, \mu}^0$ pour obtenir :

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} J_{\rho, \mu}^0 = 0.$$

Aussi, on a $h(t, x, v_\rho) \rightarrow h(t, x, v)$ dans $L^{p'}(Q_T)$ et $I_{app} \in L^2(Q_T)$ avec $v_\rho \rightarrow v$ fort dans $L^p(Q_T)$ donc on passe à la limite dans $J_{\rho, \mu}^2$ et $J_{\rho, \mu}^3$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} J_{\rho, \mu}^2 &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} h(t, x, v_\rho)(v_\rho - (v)_\mu) \, dx \, ds \, dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} h(t, x, v)(v - (v)_\mu) \, dx \, ds \, dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} J_{\rho, \mu}^3 &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} I_{app}(v_\rho - (v)_\mu) \, dx \, ds \, dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} I_{app}(v - (v)_\mu) \, dx \, ds \, dt. \end{aligned}$$

En plus, d'après $(v)_\mu \rightarrow v$ fort dans $L^p(Q_T)$ et en passant à la limite $\mu \rightarrow \infty$ on a :

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} J_{\rho, \mu}^2 = 0 \text{ et } \lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} J_{\rho, \mu}^3 = 0.$$

Par conclusion, on obtient :

$$\limsup_{\mu \rightarrow \infty} \limsup_{\rho \rightarrow 0} J_{\rho, \mu}^1 \leq 0.$$

On déduit que :

$$\begin{aligned} &\limsup_{\rho \rightarrow 0} \sum_{j=i, e} \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} M_j(t, x, \nabla u_{j, \rho}) \cdot \nabla u_{j, \rho} \, dx \, ds \, dt \\ &\leq \limsup_{\mu \rightarrow \infty} \limsup_{\rho \rightarrow 0} \sum_{j=i, e} \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} M_j(t, x, \nabla u_{j, \rho}) \cdot \nabla (u_j)_\mu \, dx \, ds \, dt \\ &= \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} \Sigma_j \cdot \nabla u_j \, dx \, ds \, dt. \end{aligned}$$

D'où la démonstration du lemme. □

Lemme 4.8. *Pour $j = i, e$ Pour $j = i, e$, $\nabla u_{j, n} \rightarrow \nabla u_j$ converge fortement dans $L^p(Q_T)$ quand $n \rightarrow \infty$ et $\Sigma_j(t, x) = M_j(t, x, \nabla u_j)$ p.p. pour $(t, x) \in Q_T$ avec $j = i, e$.*

Démonstration. Comme on a d'après ce qui précède que :

- $M_j(t, x, \nabla u_j)$ est bornée dans $L^{p'}(Q_T)$,
- et quand $\varepsilon \rightarrow 0$ $\nabla u_{j, \varepsilon} \rightarrow \nabla u_j$ converge faiblement dans $L^p(Q_T)$,

alors on déduit que :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=i, e} \iint_{Q_T} M_j(t, x, \nabla u_{j, \varepsilon}) \cdot (\nabla u_{j, \varepsilon} - \nabla u_j) \, dx \, dt = 0.$$

Mais l'hypothèse de monotonie (2.5) de M_j nous donne que :

$$\begin{aligned} &\sum_{j=i, e} \iint_{Q_T} (M_j(t, x, \nabla u_{j, \varepsilon}) - M_j(t, x, \nabla u_j)) \cdot (\nabla u_{j, \varepsilon} - \nabla u_j) \, dx \, dt \\ &\geq C_M \sum_{j=i, e} \iint_{Q_T} |\nabla u_{j, \varepsilon} - \nabla u_j|^p \, dx \, dt. \end{aligned}$$

En conclusion, d'après ce qui précède et du lemme précédent donc on a :

$$\begin{aligned}
& C_M \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} |\nabla u_{j,\varepsilon} - \nabla u_j|^p dx dt \\
& \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=i,e} \iint_{Q_T} (M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) - M_j(t, x, \nabla u_j)) \cdot (\nabla u_{j,\varepsilon} - \nabla u_j) dx dt, \\
& \leq 0.
\end{aligned}$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$ on a $\nabla u_{j,\varepsilon} \rightarrow \nabla u_j$ converge fortement dans $L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$, avec $j = i, e$. En conclusion, $M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) \rightarrow M_j(t, x, \nabla u_j)$ converge fortement dans $L^{p'}(0, T, W_0^{1,p'}(\Omega))$, avec $j = i, e$.

En plus, on a $M_j(t, x, \nabla u_{j,\varepsilon}) \rightarrow \Sigma_j(t, x)$ converge faiblement dans $L^{p'}(0, T, W_0^{1,p'}(\Omega))$ alors d'après l'unicité de la limite au sens de distribution on a $\Sigma_j(t, x) = M_j(t, x, \nabla u_j)$ *p.p.* pour $(t, x) \in Q_T$. D'où la démonstration du lemme. \square

Chapitre 5

Unicité des solutions faibles

Le but de cette dernière section est de prouver l'unicité des solutions faibles des systèmes dégénérés c'est-à-dire seulement pour le modèle bidomaine et non-linéaire.

Théorème 5.1. *On suppose que (2.4)-(2.14) sont vérifiées et $p \geq 2$.*

Soit $(u_{i,1}, u_{e,1}, v_1)$ et $(u_{i,2}, u_{e,2}, v_2)$ sont deux solutions faibles du modèle bidomaine (3.1),(3.2), (3.3) ou du modèle non-linéaire (4.1),(4.2),(4.3) avec la condition initiale $v_0 = v_{0,1}, I_{app} = I_{app,1}$ et $v_0 = v_{0,2}, I_{app} = I_{app,2}$ respectivement. Alors $\forall t \in [0, T]$ on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |v_1(t, x) - v_2(t, x)|^2 dx \\ & \leq \exp\left(\frac{2C_h + 1}{c_m} t\right) \int_{\Omega} |v_{0,1}(x) - v_{0,2}(x)|^2 dx \\ & + \frac{2C_h + 1}{c_m} \int_0^t \exp\left(\frac{2C_h + 1}{c_m}(t - s)\right) \int_{\Omega} |I_{app,1}(s, x) - I_{app,2}(s, x)|^2 dx ds \end{aligned}$$

En particulier, il existe au plus une solution faible du modèle bidomaine (3.1),(3.2), (3.3) et du modèle non-linéaire (4.1),(4.2),(4.3).

Démonstration. D'après les deux définitions de solutions faibles de ces deux systèmes (3.1),(4.1), les deux formulations faibles sont vérifiées pour toutes fonctions tests $\varphi_j \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega))$ avec $j = i, e$:

$$\begin{aligned} & \int_0^t c_m (\partial_t(v_1 - v_2), \varphi_i)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} (M_i(s, x, \nabla u_{i,1}) - M_i(s, x, \nabla u_{i,2})) \cdot \nabla \varphi_i dx ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} (h(t, x, v_1) - h(t, x, v_2)) \varphi_i dx ds \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} (I_{app,1}(t, x) - I_{app,2}(t, x)) \varphi_i dx ds, \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t c_m (\partial_t(v_1 - v_2), \varphi_e)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} ds \\ & - \int_0^t \int_{\Omega} (M_e(s, x, \nabla u_{e,1}) - M_e(s, x, \nabla u_{e,2})) \cdot \nabla \varphi_e dx ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} (h(t, x, v_1) - h(t, x, v_2)) \varphi_e dx ds \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} (I_{app,1}(t, x) - I_{app,2}(t, x)) \varphi_e dx ds, \end{aligned} \tag{5.2}$$

On choisit $\varphi_i = u_{i,1} - u_{i,2}$ dans l'équation (5.1), $\varphi_e = u_{e,1} - u_{e,2}$ dans l'équation (5.2) et on somme les deux équations puis on ajoute le terme $C_h \int_0^t \int_{\Omega} |v_1 - v_2|^2 dx ds$ d'une part et d'autre de l'équation pour obtenir :

$$\begin{aligned}
& c_m \int_0^t (\partial_t(v_1 - v_2), (v_1 - v_2))_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} ds \\
& + \sum_{j=i,e} \int_0^t \int_{\Omega} (M_j(s, x, \nabla u_{j,1}) - M_j(s, x, \nabla u_{j,2})) \cdot (\nabla u_{j,1} - \nabla u_{j,2}) dx ds \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} (h(t, x, v_1) - h(t, x, v_2))(v_1 - v_2) + C_h |v_1 - v_2|^2 dx ds \\
& = C_h \int_0^t \int_{\Omega} |v_1 - v_2|^2 dx ds \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} (I_{app,1}(t, x) - I_{app,2}(t, x))(v_1 - v_2) dx ds.
\end{aligned}$$

On note par E_i avec $i = 1, \dots, 5$ les termes de la dernière équation qui se réécrit de la manière suivante (à respecter l'ordre) :

$$E_1 + E_2 + E_3 = E_4 + E_5.$$

Maintenant, on va simplifier l'écriture de E_1 minorer E_2 , E_3 et majorer E_5 :

- Comme on a d'après les deux définitions de solutions faibles de ces deux systèmes (2.7), (2.11) que $\partial_t v_1, \partial_t v_2 \in L^2(\Omega)$ et d'après le théorème de Caractérisation de $W^{-1,p'}(\Omega)$, on peut déduire que :

$$\begin{aligned}
& (\partial_t(v_1 - v_2), (v_1 - v_2))_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} \\
& = (\partial_t(v_1 - v_2), (v_1 - v_2))_{L^2(\Omega)} \\
& = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int_{\Omega} |v_1(s, x) - v_2(s, x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Puis on intègre sur $[0, t]$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}
E_1 & = c_m \int_0^t (\partial_t(v_1 - v_2), (v_1 - v_2))_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} ds \\
& = \frac{c_m}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} \int_{\Omega} |v_1(s, x) - v_2(s, x)|^2 dx ds \\
& = \frac{c_m}{2} \int_{\Omega} |v_1(t, x) - v_2(t, x)|^2 dx - \frac{c_m}{2} \int_{\Omega} |v_{0,1} - v_{0,2}|^2 dx.
\end{aligned}$$

- D'après la monotonie (2.5) de $M_j(t, x, \xi)$ et comme $C_M \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
E_2 & = \sum_{j=i,e} \int_0^t \int_{\Omega} (M_j(s, x, \nabla u_{j,1}) - M_j(s, x, \nabla u_{j,2})) \cdot (\nabla u_{j,1} - \nabla u_{j,2}) dx ds \\
& \geq C_M \sum_{j=i,e} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_{j,1}(t, x) - \nabla u_{j,2}(t, x)|^p dx ds \geq 0.
\end{aligned}$$

- En utilisant les conséquences des hypothèses du courant ionique (2.17), on obtient :

$$E_3 = \int_0^t \int_{\Omega} (h(t, x, v_1) - h(t, x, v_2))(v_1 - v_2) + C_h |v_1 - v_2|^2 dx ds \geq 0.$$

- Comme on a $I_{app,1}, I_{app,2}, v_1, v_2 \in L^2(Q_t)$ avec $Q_t = (0, t) \times \Omega$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy shwarz puis l'inégalité de Young pour obtenir l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
E_5 &= \int_0^t \int_{\Omega} (I_{app,1}(t, x) - I_{app,2}(t, x))(v_1 - v_2) dx ds \\
&\leq \|I_{app,1} - I_{app,2}\|_{L^2(Q_t)} \|v_1 - v_2\|_{L^2(Q_t)}, \\
&\leq \frac{1}{2} \|I_{app,1} - I_{app,2}\|_{L^2(Q_t)}^2 + \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_{L^2(Q_t)}^2, \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |I_{app,1}(s, x) - I_{app,2}(s, x)|^2 dx ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |v_1(s, x) - v_2(s, x)|^2 dx ds.
\end{aligned}$$

En combinant tous ces estimations dans la dernière équation et on obtient alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{c_m}{2} \int_{\Omega} |v_1(t, x) - v_2(t, x)|^2 dx \\
&\leq \frac{c_m}{2} \int_{\Omega} |v_{0,1} - v_{0,2}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |I_{app,1}(s, x) - I_{app,2}(s, x)|^2 dx ds \\
&\quad + (C_h + \frac{1}{2}) \int_0^t \int_{\Omega} |v_1(s, x) - v_2(s, x)|^2 dx ds.
\end{aligned}$$

On pose maintenant que :

- $y(s) = \int_{\Omega} |v_1(s, x) - v_2(s, x)|^2 dx \geq 0,$
- $z(s) = \int_{\Omega} |I_{app,1}(s, x) - I_{app,2}(s, x)|^2 dx \geq 0,$
- et $\lambda = \frac{2C_h + 1}{c_m} \geq 0.$

Comme $\frac{1}{c_m} \leq \lambda,$ donc l'inégalité sera :

$$\begin{aligned}
y(t) &\leq y(0) + \frac{1}{c_m} \int_0^t z(s) ds + \lambda \int_0^t y(s) ds \\
&\leq y(0) + \lambda \int_0^t z(s) + y(s) ds.
\end{aligned}$$

On pose aussi $w(t) = y(0) + \lambda \int_0^t z(s) + y(s) ds$ donc cette inégalité sera équivalente $y(t) \leq w(t).$

Comme $\lambda, z(0), y(0) \geq 0$ alors on obtient :

$$\begin{aligned}
w'(t) &= \lambda(z(t) + y(t)) - \lambda(z(0) + y(0)) \\
&\leq \lambda(z(t) + y(t)) \\
&\leq \lambda z(t) + \lambda w(t)
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall 1 (voir Annexe) sur $w(t)$ avec $g(t) = \lambda$ et $h(t) = \lambda z(t),$ on déduit que :

$$w(t) \leq \left(w(0) + \int_0^t \exp^{-\int_0^s \lambda d\tau} \lambda z(s) ds \right) \exp \int_0^t \lambda ds$$

Comme $y(t) \leq w(t)$ et $w(0) = y(0)$ alors obtient :

$$\begin{aligned} y(t) &\leq w(t) \\ &\leq \left(y(0) + \int_0^t \exp^{-\lambda s} \lambda z(s) ds \right) \exp^{\lambda t}. \end{aligned}$$

En remplaçant chaque par sa valeur, on obtient alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |v_1(t, x) - v_2(t, x)|^2 dx \\ &\leq \exp\left(\frac{2C_h + 1}{c_m} t\right) \int_{\Omega} |v_{0,1}(x) - v_{0,2}(x)|^2 dx \\ &\quad + \frac{2C_h + 1}{c_m} \int_0^t \exp\left(\frac{2C_h + 1}{c_m} (t - s)\right) \int_{\Omega} |I_{app,1}(s, x) - I_{app,2}(s, x)|^2 dx ds \end{aligned}$$

D'où la preuve du théorème. □

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à la modélisation et l'étude du système bidomaine du tissu cardiaque. D'abord, on a présenté les deux points de vue microscopique et macroscopique modélisant le tissu cardiaque. Ensuite, on a abordé dans le chapitre 2 l'étude du système non-dégénéré de type parabolique. Ce système est obtenu en ajoutant un opérateur d'amortissement $\varepsilon \partial_t$ dépendant de paramètre de régularisation ε . L'existence de sa solution faible est démontrée en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin pour tout ε fixé. Comme ce système couvre à la fois les deux systèmes bidomaines dégénérés linéaire et non-linéaire. On a montré dans le chapitre 3 et 4 l'existence des solutions faibles de ces deux modèles en variant ε . On a prouvé l'existence dans les deux cas sous la condition initiale où : $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $v_0 \in L^2(\Omega)$. Le premier cas se fait par déduction du chapitre 2 par passage à la limite sur le problème régularisé. Par contre, dans le deuxième cas la condition initiale est régularisée (l'existence de la solution est assuré par le premier cas) et on établit des estimations d'énergies indépendantes de la régularisation pour ensuite passer à la limite pour obtenir la solution faible.

Enfin, on termine ce travail par la démonstration de l'unicité de solutions faibles de systèmes bidomaine et non-linéaire.

Il serait important dans la suite de faire l'étude de l'homogénéisation du modèle monodomaine. Le modèle monodomaine défini dans un domaine périodique Ω et est exprimé par :

$$-\operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) = f(x) \text{ dans } \Omega,$$

avec $A(\cdot)$ la matrice de conductivité périodique, ε très petit et u_ε désine le potentiel électrique.

Annexe A

Définition A.1. Soit E un espace vectoriel normé. On désigne par E' le dual défini par :
 $E' = \{ \text{ensemble de fonctions linéaires et continues } f : E \rightarrow \mathbb{R} \}$.
 Si $f \in E'$ et $x \in E$, on introduit le crochet de dualité :

$$(f, x)_{E'E} = f(x),$$

et d'après le théorème de Hahn-Banach, on a :

$$\forall x \in E, \quad \|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{|(f, x)_{E'E}|}{\|x\|_E}.$$

En particulier, on a $(L^2(\Omega))' \cong L^2(\Omega)$ et son crochet de dualité est exprimé alors de la manière suivante :

$$\forall f, g \in L^2(\Omega), \quad (f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} fg \, dx.$$

Définition A.2. Soit E un espace de Banach. On dit qu'une suite $u_n \in E$ converge fortement vers $u \in E$, et note $u_n \rightarrow u$ dans E , si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_E = 0$.

Définition A.3. Soit E un espace de Banach de dual E' . On dit qu'une suite $u_n \in E$ converge faiblement vers $u \in E$, et note $u_n \rightharpoonup u$ dans E , si et seulement si
 $\forall f \in E', \quad f(u_n) = (f, u_n)_{E'E} \rightarrow f(u) = (f, u)_{E'E}$ (la convergence dans \mathbb{R}).

En particulier, si on a $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^p(\Omega) \forall 1 < p < \infty$ alors $\forall \phi \in (L^p(\Omega))' \cong L^{p'}(\Omega)$, $\exists u \in L^p(\Omega)$, $\int_{\Omega} u_n \phi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} u \phi \, dx$ avec p' le conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

Proposition A.4. (Convergence faible \times Convergence forte)

Soient $p, q, r \in [1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Si $u_n \rightharpoonup u$ fortement dans $L^p(\Omega)$ et $v_n \rightharpoonup v$ faiblement dans $L^q(\Omega)$, alors $u_n v_n \rightharpoonup uv$ faiblement dans $L^r(\Omega)$.

On sait que la convergence forte implique la convergence faible. On peut remarquer qu'on ne peut pas conclure à propos de la multiplication de la convergence faible avec la convergence faible au contraire de la multiplication de la convergence forte avec la convergence forte qui nous donne la convergence forte.

Théorème A.5. (Théorème de Fischer-Riesz)

Soit $L^p(\Omega)$ un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, $p \geq 1$.

Si $(u_n)_n$ est une suite de $L^p(\Omega)$ qui converge fortement vers u pour la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, alors on peut extraire une suite $(u_n)_n$ qui converge presque partout vers u dans Ω , on le note par $u_n \rightarrow u$ p.p. dans Ω (c'est-à-dire que $u_n(x)$ converge vers $u(x)$ dans Ω sauf pour un ensemble A de Ω de mesure nulle.)

Notation : On note par E'' le dual de E' .

Définition A.6. Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E'' . On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$. Autrement dit, si E est réflexif alors $E \cong E''$.

Corollaire A.7. Soit E un espace de Banach réflexif.

Alors pour toute suite bornée de E , on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans E (c'est-à-dire qu'il existe une sous-suite $(u_n)_n \in E$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans E).

Définition A.8. Soit E un espace de Banach. On dit que E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.

Définition A.9. Soit A et B deux espace vectoriels normés. On dit que $A \subset B$ avec une injection continue s'il existe une constante C tel que

$$\|u\|_B \leq C\|u\|_A.$$

En particulier, si on prend l'exemple $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, $\forall 1 \leq p < \infty$ avec une injection continue alors la constante C dépend seulement de $|\Omega|$.

Définition A.10. Soit E et F deux espace vectoriels normés et soit $B_E(0, 1)$ la boule unité dans E définie par

$$B_E(0, 1) := \{x \in E; |x| \leq 1\}.$$

On dit qu'un opérateur linéaire $T : E \rightarrow F$ est compact si $T(B_E(0, 1))$ est relativement compacte dans F c'est-à-dire $\overline{T(B_E(0, 1))}$ est compacte dans F . Autrement dit, $E \subset F$ avec une injection compacte.

Définition A.11. une fonction $f(t, x, \xi) : A \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite fonction de Carathéodory, si et seulement si, f mesurable en $(t, x) \in A$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et continue en $\xi \in \mathbb{R}^n$ pour $(t, x) \in A$ p.p.

Lemme A.12. (Formule de la divergence)

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^3 , avec $\partial\Omega$ sa frontière et n sa normale extérieure. Soit v une fonctions régulièr et u un champ de vecteurs définis sur Ω . Alors :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} u)v \, dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot n \, v \, d\sigma - \int_{\Omega} u \cdot \nabla v \, dx,$$

avec $\operatorname{div} u = \nabla \cdot u$.

On introduit maintenant quelques inégalités très utiles qui portent sur les normes de Sobolev :

Proposition A.13. (Inégalité de Young)

Soit $a, b \geq 0$ deux réels positifs, $\theta > 0$, p et $p' > 0$ deux réels strictement positifs tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{\theta p} + \theta \frac{b^{p'}}{p'}$$

Proposition A.14. (Inégalité de Hölder)

Soit $1 \leq p_i \leq +\infty$ et $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. On suppose que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ et $f = \prod_{i=1}^n f_i$, alors :

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

On remarque alors que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder pour $p_i = 2$ et $i = 2$.

Proposition A.15. (Inégalité de Minkowski)

Soit $1 \leq p < +\infty$ et $\forall 1 \leq i \leq n$, f_i des fonctions dans $L^p(\Omega)$. Alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposition A.16. (Inégalité de Poincaré)

Soit Ω borné et $1 \leq p < \infty$. Alors, $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, il existe une constante C_P qui dépend seulement de $|\Omega|$ telle que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \begin{cases} C_P \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, & \text{si } 1 < p < \infty, \\ C_P \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}, & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Lemme A.17. (Lemme de Gronwall 1)

Soit y une fonction positive et différentiable presque par tout $t \in [0, T]$ et $g, h \in L^\infty(0, T)$ deux fonctions positives telles que $y'(t) \leq g(t)y(t) + h(t)$. Alors, on a :

$$y(t) \leq \left(y(0) + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s g(\tau) d\tau\right) h(s) ds \right) \exp\int_0^t g(s) ds, \quad \text{p.p. } t \in [0, T].$$

Lemme A.18. (Lemme de Gronwall 2)

Soit $y \in L^\infty(0, T)$, $g \in L^1(0, T)$ deux fonctions positives et z_0 une constante positive telle que : $y(t) \leq z_0 + \int_0^t g(s)y(s) ds$, p.p. $t \in (0, T)$. Alors, on a :

$$y(t) \leq z_0 \exp\int_0^t g(s) ds, \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

Proposition A.19. (Inégalité d'indice)

Soit $a, b \geq 0$ et $p \geq 2$. Cette inégalité nous donne que :

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Bibliographie

- [1] Mostafa Bendahmane and Kenneth H Karlsen. Analysis of a class of degenerate reaction-diffusion systems and the bidomain model of cardiac tissue. *Preprint series. Pure mathematics* <http://urn.nb.no/URN:NBN:no-8076>, 2005. [12](#), [17](#)
- [2] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010. [13](#), [14](#), [15](#)
- [3] Lawrence C Evans. Partial differential equations and monge-kantorovich mass transfer. *Current developments in mathematics*, 1997(1) :65–126, 1997. [43](#)
- [4] LC Evans. Partial differential equations (graduate studies in mathematics vol 19)(providence, ri : American mathematical society). 1998. [13](#), [15](#)
- [5] Piero Colli Franzone and Giuseppe Savaré. Degenerate evolution systems modeling the cardiac electric field at micro-and macroscopic level. In *Evolution equations, semigroups and functional analysis*, pages 49–78. Springer, 2002. [10](#), [13](#)
- [6] Jack K Hale. Retarded functional differential equations : basic theory. In *Theory of functional differential equations*, pages 36–56. Springer, 1977. [22](#)
- [7] Rüdiger Landes. On the existence of weak solutions for quasilinear parabolic initial-boundary value problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics*, 89(3-4) :217–237, 1981. [55](#)
- [8] Jacques Louis Lions. Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires. 1969. [15](#)
- [9] Jacques-Louis Lions and Enrico Magenes. Problèmes aux limites non homogènes et applications. volume i. 1968. [15](#)
- [10] JC Neu and W Krassowska. Homogenization of syncytial tissues. *Critical reviews in biomedical engineering*, 21(2) :137–199, 1993. [12](#)
- [11] Charles Pierre. *Modélisation et simulation de l'activité électrique du coeur dans le thorax, analyse numérique et méthodes de volumes finis*. PhD thesis, Université de Nantes, 2005. [10](#), [12](#)
- [12] Michael Renardy and Robert C Rogers. *An introduction to partial differential equations*, volume 13. Springer Science & Business Media, 2006. [13](#)