De l'hydrodynamique d'Euler à la gravitation d'Einstein via le transport optimal de Monge

Yann Brenier, CNRS,
LMO, Orsay, Université Paris-Saclay
en association avec l'équipe CNRS-INRIA "MOKAPLAN".

COLLOQUIUM NANTES 14 Octobre 2021

L’hydrodynamique d’Euler

En 1757, Euler décrit les fluides de façon décisive comme une "théorie de champs", au travers d’un ensemble cohérent et complet d’EDP:

L'hydrodynamique d'Euler

En 1757, Euler décrit les fluides de façon décisive comme une "théorie de champs", au travers d'un ensemble cohérent et complet d'EDP:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \; \partial_t(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) + \nabla(p(\rho)) = 0.$$

L'hydrodynamique d'Euler

En 1757, Euler décrit les fluides de façon décisive comme une "théorie de champs", au travers d'un ensemble cohérent et complet d'EDP:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \ \partial_t(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) + \nabla(p(\rho)) = 0.$$

On a là le prototype des théories de champs de la Physique (Maxwell, Einstein, Schrödinger, Dirac)...

L'hydrodynamique d'Euler

En 1757, Euler décrit les fluides de façon décisive comme une "théorie de champs", au travers d'un ensemble cohérent et complet d'EDP:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \ \partial_t(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) + \nabla(p(\rho)) = 0.$$

On a là le prototype des théories de champs de la Physique (Maxwell, Einstein, Schrödinger, Dirac)... et les premières EDP (d'évolution, multid.) de l'histoire!


PRO JUVENTUTE 1957
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$
LEONHARD EULER 1707-1783
5
+5 HELVETIA

Euler 1757 : les 1ères EDP jamais écrites...

XXI. Nous n'avons donc qu'à égaler ces forces accélératrices avec les accélerations actuelles que nous venons de trouver, & nous obtiendrons les trois équations ſuivantes :

$$P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$Q - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$R - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

Si nous ajoutons à ces trois équations premièrement celle, que nous a fournie la conſidération de la continuité du fluide :

Euler 1757 : les 1ères EDP jamais écrites...

XXI. Nous n'avons donc qu'à égaler ces forces accélératrices avec les accélerations actuelles que nous venons de trouver, & nous obtiendrons les trois équations ſuivantes :

$$P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$Q - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$R - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

Si nous ajoutons à ces trois équations premièrement celle, que nous a fournie la conſidération de la continuité du fluide :

...au moins en style moderne.

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d\,qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0.$$

Si le fluide n'étoit pas compreſſible, la denſité q ſeroit la même en Z, & en Z', & pour ce cas on auroit cette équation :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0.$$

qui eſt auſſi celle ſur laquelle j'ai établi mon Mémoire latin allégué ci-deſſus.

tombent dans la ſurface même. Or nous voyons par là ſuffiſamment, combien nous ſommes encore éloignés de la connoiſſance complette du mouvement des fluides, & que ce que je viens d'expliquer, n'en contient qu'un foible commencement. Cependant tout ce que la Théorie des fluides renferme, eſt contenu dans les deux équations rapportées cy-deſſus (§. XXXIV.), de ſorte que ce ne ſont pas les principes de Méchanique qui nous manquent dans la pourſuite de ces recherches, mais uniquement l'Analyſe, qui n'eſt pas encore aſſés cultivée, pour ce deſſein : & partant on voit clairement, quelles découvertes nous reſtent encore à faire dans cette Science, avant que nous puiſſions arriver à une Théorie plus parfaite du mouvement des fluides.

Conclusion d'Euler, toujours d'actualité après 264 ans

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)=0\,;$$

& enſuite celle que donne le rapport entre l'élaſticité p, la denſité q, & l'autre qualité r, qui influë ſur l'élaſticité p, outre la denſité q, nous aurons cinq équations qui renferment toute la Théorie du mouvement des fluides.

XXII. De quelque nature que ſoient les forces P, Q, R, pourvû qu'elles ſoient réelles, il faut remarquer que $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ eſt toujours un différentiel réel d'une certaine quantité finie & déterminée, en ſuppoſant les trois coordonnées x, y, & z, variables ; de ſorte qu'il y aura toujours :

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)\,;\quad \left(\frac{dP}{dz}\right)=\left(\frac{dR}{dx}\right)\,;\quad \left(\frac{dQ}{dz}\right)=\left(\frac{dR}{dy}\right),$$

& ſi nous poſons cette quantité finie $= S$, en ſorte qu'il y ait :

$$dS = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

en ſuppoſant le tems t conſtant, en cas que les forces P, Q, R, changent auſſi avec le tems aux mêmes endroits ; cette quantité S exprime ce que je nomme l'effort des forces ſollicitantes, & qui eſt la ſomme des intégrales de chaque force multipliée par l'élément de ſa direction, ou par le petit eſpace, par lequel elle traineroit un corps qui obeïroit à ſon action. Cette idée de l'effort eſt de la derniere importance dans toute la Théorie, tant de l'équilibre que du mouvement, ayant fait voir, que la ſomme de tous les efforts eſt toujours un *maximum* ou *minimum*. Cette belle propriété convient admirablement avec le beau principe de la moindre action ; dont nous devons la découverte à notre Illuſtre Préſident, M. de *Maupertuis*.

Le principe de moindre action

"La moindre action" pour les équations d'Euler

On cherche les points critiques
$(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to (\rho, v)(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$,

$$\text{de} \quad \int (\frac{\rho|v|^2}{2} - \Phi(\rho)) dxdt \quad (\text{avec} \quad r\Phi''(r) = p'(r))$$

"La moindre action" pour les équations d'Euler

On cherche les points critiques
$(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to (\rho, v)(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$,

$$\text{de} \quad \int \left(\frac{\rho|v|^2}{2} - \Phi(\rho)\right) dxdt \quad (\text{avec} \quad r\Phi''(r) = p'(r))$$

soumis à l'équation de "continuité" $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0.$

"La moindre action" pour les équations d'Euler

On cherche les points critiques
$(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to (\rho, v)(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$,

$$\text{de} \quad \int \left(\frac{\rho|v|^2}{2} - \Phi(\rho)\right) dxdt \quad (\text{avec} \quad r\Phi''(r) = p'(r))$$

soumis à l'équation de "continuité" $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0$.

N.B. Le problème de Cauchy (quand (ρ, v) est donnée à $t = 0$) est bien posé si $p'(r) \geq 0$, i.e. Φ convexe, par exemple $p(r) = c^2 r$, $\Phi(r) = c^2 r(logr - 1)$.

Le cas sans pression et le problème de Monge

Dans le cas limite $p = 0$, on obtient

$$\mathrm{crit}\ \left(\int \frac{\rho|v|^2}{2} dxdt\right), \quad \text{s.t.} \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

Le cas sans pression et le problème de Monge

Dans le cas limite $p = 0$, on obtient

$$\text{crit} \left(\int \frac{\rho |v|^2}{2} dxdt \right), \quad \text{s.t.} \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

Ainsi, on trouve une fonctionnelle convexe avec contrainte linéaire en les variables (ρ, $m = \rho v$).
Il est donc sensé de minimiser sur $t \in [0, 1]$, avec ρ prescrit en $t = 0$ et $t = 1$.

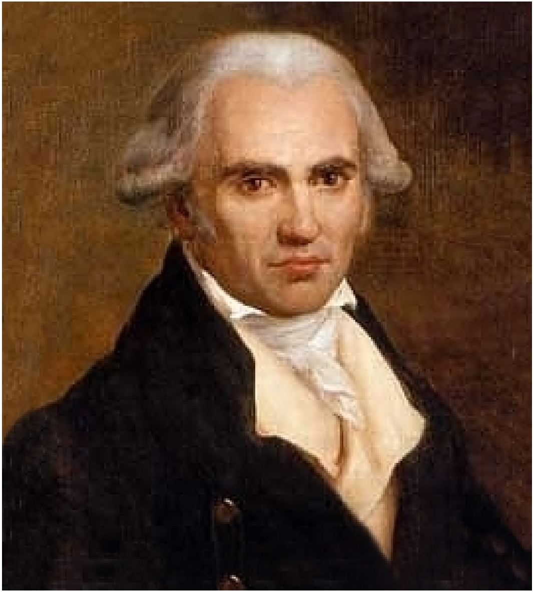
Le cas sans pression et le problème de Monge

Dans le cas limite $p = 0$, on obtient

$$\mathrm{crit}\ \left(\int \frac{\rho|v|^2}{2} dxdt\right), \ \ \text{s.t.}\ \ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

Ainsi, on trouve une fonctionnelle convexe avec contrainte linéaire en les variables $(\rho, m = \rho v)$.
Il est donc sensé de minimiser sur $t \in [0, 1]$, avec ρ prescrit en $t = 0$ et $t = 1$. Cela devient très différent du problème de Cauchy et correspond en fait au problème de transport optimal de Monge.

(Mémoire sur les déblais et les remblais, 1780, cf. livres de Villani et Santambrogio.)



Le problème de Monge (quadratique)

$$Monge_2(\rho_0, \rho_1)^2 = \inf \int_{\mathbb{R}^d} |T(x) - x|^2 \rho_0(x) dx,$$

pour toute application de Borel T donnant de $\rho_0(x)dx$ l'image $\rho_1(y)dy$ par $y = T(x)$.

Le problème de Monge (quadratique)

$$Monge_2(\rho_0, \rho_1)^2 = \inf \int_{\mathbb{R}^d} |T(x) - x|^2 \rho_0(x) dx,$$

pour toute application de Borel T donnant de $\rho_0(x)dx$ l'image $\rho_1(y)dy$ par $y = T(x)$.

On peut alors prouver

$$Monge_2(\rho_0, \rho_1)^2 = \inf \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^d} \rho(t, x) |v(t, x)|^2 dx,$$

sous contrainte $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \ \ \rho(0, \cdot) = \rho_0 \ \ \rho(1, \cdot) = \rho_1.$

(J.-D. Benamou, Y.B. 2000, F. Otto 2001, L. Ambrosio-N. Gigli-G. Savaré 2005.)

N.B. Les équations d'optimalité sont: $v = \nabla \phi, \ \ \partial_t v + \nabla(|v|^2/2) = 0.$

Formulation "hydro" de la RG dans le vide

Trouver une paire $(C, V)(x, \xi)$ de champs de matrices réelles 4×4 sur l'espace des phases $(x, \xi) \in \mathbb{R}^8$

$$\text{critique pour} \quad \int \mathrm{trace}(C(x,\xi)V^2(x,\xi))\,dx\,d\xi$$

Formulation "hydro" de la RG dans le vide

Trouver une paire $(C, V)(x, \xi)$ de champs de matrices réelles 4×4 sur l'espace des phases $(x, \xi) \in \mathbb{R}^8$

$$\text{critique pour} \quad \int \text{trace}(C(x, \xi) V^2(x, \xi)) dx d\xi$$

et soumise à l'équation de "continuité" généralisée

$$\partial_{x^j} C^j_k + \partial_{\xi^j} (CV + VC)^j_k = 0$$

Formulation "hydro" de la RG dans le vide

Trouver une paire $(C, V)(x, \xi)$ de champs de matrices réelles 4×4 sur l'espace des phases $(x, \xi) \in \mathbb{R}^8$

$$\text{critique pour} \quad \int \mathrm{trace}(C(x,\xi)V^2(x,\xi))dxd\xi$$

et soumise à l'équation de "continuité" généralisée

$$\partial_{x^j} C^j_k + \partial_{\xi^j}(CV + VC)^j_k = 0$$

ainsi qu'aux symétries $\quad \partial_{\xi^i} V^k_j = \partial_{\xi^j} V^k_i,$

$$\partial_{\xi^m} C^\gamma_\gamma \, \delta^j_k - 3\partial_{\xi^m} C^j_k = \partial_{\xi^k} C^\gamma_\gamma \, \delta^j_m - 3\partial_{\xi^k} C^j_m.$$

cf. Y.B. 2021, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03311171.

Théorème: Soit (g, Γ) une solution lisse de la RG dans le vide. Posons

$$V_k^j(x,\xi) = -\Gamma^j_{k\gamma}(x)\xi^\gamma,$$

$$C_k^j(x,\xi) = \partial_{\xi^k} A^j(x,\xi) - \partial_{\xi^q} A^q(x,\xi)\ \delta_k^j,$$

$$A^j(x,\xi) = \xi^j\ \mathrm{det} g(x)\ \cos(\frac{g_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta}{2}).$$

Alors (C, V) obéit à la formulation "hydrodynamique".

à paraître aux CRAS, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03311171.


PRO JUVENTUTE 1957
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$
5
+5
HELVETIA
LEONHARD EULER 1707-1783

Quelques ingrédients de la preuve

Idée clef: voir V comme la collection de 4 champs de vecteurs, linéaires en ξ: $V^j_k(x,\xi) = -\Gamma^j_{k\gamma}(x)\xi^\gamma,$

Quelques ingrédients de la preuve

Idée clef: voir V comme la collection de 4 champs de vecteurs, linéaires en ξ: $V_k^j(x,\xi) = -\Gamma^j_{k\gamma}(x)\xi^\gamma,$ de sorte que les courbures de Riemann et Ricci s'écrivent comme commutateurs:

$$R^n_{jkm}(x)\xi^m = \Big((\partial_{x^k} + V_k^\gamma \partial_{\xi^\gamma})V_j^n - (\partial_{x^j} + V_j^\gamma \partial_{\xi^\gamma})V_k^n\Big)(x,\xi)$$

Quelques ingrédients de la preuve

Idée clef: voir V comme la collection de 4 champs de vecteurs, linéaires en ξ: $V_k^j(x,\xi) = -\Gamma^j_{k\gamma}(x)\xi^\gamma$, de sorte que les courbures de Riemann et Ricci s'écrivent comme commutateurs:

$$R^n_{jkm}(x)\xi^m = \Big((\partial_{x^k} + V_k^\gamma \partial_{\xi^\gamma}) V_j^n - (\partial_{x^j} + V_j^\gamma \partial_{\xi^\gamma}) V_k^n \Big)(x,\xi)$$

$$= \partial_{x^k} V_j^n + \partial_{\xi^j}(V_k^\gamma V_\gamma^n) - \partial_{x^j} V_k^n - \partial_{\xi^k}(V_i^\gamma V_\gamma^n),$$

Quelques ingrédients de la preuve

Idée clef: voir V comme la collection de 4 champs de vecteurs, linéaires en ξ: $V_k^j(x,\xi) = -\Gamma^j_{k\gamma}(x)\xi^\gamma$, de sorte que les courbures de Riemann et Ricci s'écrivent comme commutateurs:

$$R^n_{jkm}(x)\xi^m = \Big((\partial_{x^k} + V_k^\gamma \partial_{\xi^\gamma}) V_j^n - (\partial_{x^j} + V_j^\gamma \partial_{\xi^\gamma}) V_k^n\Big)(x,\xi)$$

$$= \partial_{x^k} V_j^n + \partial_{\xi^j}(V_k^\gamma V_\gamma^n) - \partial_{x^j} V_k^n - \partial_{\xi^k}(V_i^\gamma V_\gamma^n),$$

$$R_{km}(x)\xi^m = \partial_{x^k} V_j^j + \partial_{\xi^j}(V_k^\gamma V_\gamma^j) - \partial_{x^j} V_k^j - \partial_{\xi^k}(V_j^\gamma V_\gamma^j).$$

La nullité de la courbure de Ricci s'écrit donc

$$\partial_{x^k} V_j^j + \partial_{\xi^j}(V_k^\gamma V_\gamma^j) - \partial_{x^j} V_k^j - \partial_{\xi^k}(V_j^\gamma V_\gamma^j) = 0$$

qui joue le rôle de l'équation $\partial_t v + \nabla(|v|^2/2) = 0$ du problème de Monge. On établit alors le dictionnaire

La nullité de la courbure de Ricci s'écrit donc

$$\partial_{x^k} V_j^j + \partial_{\xi^j}(V_k^\gamma V_\gamma^j) - \partial_{x^j} V_k^j - \partial_{\xi^k}(V_j^\gamma V_\gamma^j) = 0$$

qui joue le rôle de l'équation $\partial_t v + \nabla(|v|^2/2) = 0$ du problème de Monge. On établit alors le dictionnaire

$$C_k^j(x,\xi) \quad \Leftarrow \quad \rho(t,x)$$

La nullité de la courbure de Ricci s'écrit donc

$$\partial_{x^k} V_j^j + \partial_{\xi^j}(V_k^\gamma V_\gamma^j) - \partial_{x^j} V_k^j - \partial_{\xi^k}(V_j^\gamma V_\gamma^j) = 0$$

qui joue le rôle de l'équation $\partial_t v + \nabla(|v|^2/2) = 0$ du problème de Monge. On établit alors le dictionnaire

$$C_k^j(x, \xi) \quad \Leftarrow \quad \rho(t, x)$$

$$\partial_{x^j} C_k^j + \partial_{\xi^j}(CV + VC)_k^j = 0 \quad \Leftarrow \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho V) = 0,$$

La nullité de la courbure de Ricci s'écrit donc

$$\partial_{x^k} V^j_j + \partial_{\xi^j}(V^\gamma_k V^j_\gamma) - \partial_{x^j} V^j_k - \partial_{\xi^k}(V^\gamma_j V^j_\gamma) = 0$$

qui joue le rôle de l'équation $\partial_t v + \nabla(|v|^2/2) = 0$ du problème de Monge. On établit alors le dictionnaire

$$C^j_k(x,\xi) \quad \Leftarrow \quad \rho(t,x)$$

$$\partial_{x^j} C^j_k + \partial_{\xi^j}(CV + VC)^j_k = 0 \quad \Leftarrow \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho V) = 0,$$

$$\int \mathrm{trace}(C(x,\xi)V^2(x,\xi))dxd\xi \quad \Leftarrow \quad \int \rho |V|^2 dxdt.$$

MERCI DE VOTRE ATTENTION!!!

Autres travaux récents liant RG et TO
A. Mondino, S. Suhr arXiv:1810.13309, 2018,
R. McCann, Camb. J. Math. 2020, fondés sur la définition "synthétique" par TO de la courbure de Ricci selon Lott-Sturm-Villani.

Pour notre approche, très différente, voir hal-03311171.

Connexions avec Y. B. CMP 2018, D. Vorotnikov arxiv.org/abs/1905.06059,

H. Lavenant, J. Funct. Anal. 2019.