Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$

Théo JAMIN

Mémoire
à
L'Université d'Angers

Supervisé par Laurent MEERSSEMAN

Juillet 2018

Table des matières

Remerciements

Ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'intervention, consciente, d'un grand nombre de personnes et je souhaite ici les en remercier.

Je tiens d'abord à remercier très chaleureusement mon directeur de mémoire Laurent Meersseman pour m'avoir proposé ce travail et sans qui, celui-ci n'aurait pas abouti. Les conseils qu'il m'a prodigués, la patience, la confiance qu'il m'a témoignée ont été déterminants dans la réalisation de ce travail.

Ces remerciements s'étendent aussi à tous mes enseignants de ces cinq dernières années d'études ainsi qu'à toute l'équipe du LAREMA. Je remercie en particulier Rodolphe pour m'avoir écouté parler pendant de longues heures de mon travail.

Je voudrais également aussi adresser mes remerciements à l'équipe des doctorants et post-doctorants pour leur accueil si chaleureux ainsi que pour leurs innombrables conseils. L'écoute et l'attention dont ils ont fait preuve à mon égard m'ont permis d'avancer dans la réalisation de ce mémoire.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ce travail.

Introduction

En 1966, Madabusi Santanam Raghunathan publiait dans un article [Rag66] un résultat sur la rigidité locale des quotients compacts de groupes de Lie semi-simple complexe sans facteur localement isomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ par des réseaux. Nous pouvons bien sûr appliquer ce résultat à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ pour $n \geqslant 3$. Mais qu'en est-il du cas $n = 2$? C'est la question à laquelle nous répondrons au fil des pages à partir de l'article d'E. Ghys, directeur de recherche à l'École normale supérieure de Lyon, en prenant garde à développer certaines preuves et idées majeures pour les rendre plus accessibles.

Ce mémoire a donc pour objectif de décrire les déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Principalement cela revient à étudier l'espace de Kuranishi des variétés complexes compactes non kählériennes de la forme $M =\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ où Γ est un sous groupe discret co-compact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Chapitre 0

Géométrie

0.1 Propriétés générales

0.1.1 Rappels sur les groupes et algèbres de Lie

Ce mémoire n'a pas pour vocation d'être un cours introductif sur les groupes et algèbres de Lie mais il est essentiel de redéfinir les objets/outils utilisés au fil des pages pour que tout lecteur en ait la même considération.

Définition. Un *groupe de Lie complexe* G (resp. *réel*) est une variété holomorphe (resp. différentiable) munie d'une structure de groupe pour laquelle la multiplication et le passage à l'inverse sont des applications holomorphes (resp. C^{∞}).

Définition. Soit G un groupe de Lie. L'*algèbre de Lie*, notée $\mathfrak{g}$, associée à G est l'algèbre des champs de vecteurs invariants par translations à droite.

L'algèbre de Lie de G, notée aussi $\mathrm{Lie}(G)$, s'identifie naturellement à l'espace vectoriel tangent au groupe de Lie G en l'identité (en effet, si $Y \in T_eG$ le lecteur vérifiera aisément que pour tout $g \in G$, $X(g) = dR_g(Y)$ définit bien un champ de vecteurs invariant à droite). Nous utiliserons dans la suite ces deux définitions simultanément.
Ici nous étudierons plus particulièrement le groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Nous pouvons remarquer que l'algèbre de Lie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, notée $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, correspond à l'ensemble des matrices de trace nulle.

Proposition 1. Tout groupe de Lie complexe (resp. réel) est une variété holomorphe (resp. différentiable) holomorphiquement parallélisable (resp. parallélisable).

Démonstration. Soit G un groupe de Lie. Tout élément $g \in G$ définit une application $L_g : G \to G$ de multiplication à gauche et on remarque que :

$$\begin{array}{cc} G \times T_eG \to TG & TG \to G \times T_eG \\ (g,v) \to (g, d_eL_g(v)) & (g,v) \to (g, d_eL_g^{-1}(v)) \end{array}$$

sont des biholomorphismes (resp. isomorphismes) inverses. Le fibré holomorphe tangent (resp. fibré tangent) à G est donc holomorphiquement trivialisable (resp. trivialisable). $\square$

Remarque. Sur un groupe de Lie G, une base de son algèbre nous donne un parallélisme invariant à gauche dont les automorphismes sont les translations à gauche (les applications L_g).

Par la suite, nous ne stipulerons plus le cas des variété C^∞ dans chaque définition (sauf mention contraire bien évidemment) mais le lecteur doit garder en tête qu'elles sont transposables en géométrie réelle. Nous nous plaçons donc dans un contexte complexe.
Voici encore quelques définitions et propositions qui nous seront utiles par la suite :

Définition. Une algèbre de Lie (non réduite à 0 et de dimension finie) est dite *simple* si elle ne possède pas d'idéal abélien non nul. Elle sera dite *semi-simple* si c'est une somme directe finie d'algèbres simples.
Nous dirons qu'un groupe de Lie est semi-simple si son algèbre de Lie est semi-simple.

Proposition 2. Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{g}$ est semi-simple.
- $\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéal abélien non nul.
- G est semi-simple.
- G ne contient pas de sous-groupe qui soit non trivial, normal, abélien et connexe.

Démonstration. Voir [Ser01] pour $\mathfrak{g}$ est semi-simple $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéal abélien non nul. $\mathfrak{g}$ est semi-simple $\Leftrightarrow$ G est semi-simple par définition. Enfin pour la dernière assertion, on remarquera seulement que l'application exponentielle envoie un idéal abélien sur un sous groupe normal, abélien, connexe et réciproquement. □

Proposition 3. $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est semi-simple.

Démonstration. [Ser01] □

Définition. Soit G un groupe de Lie. On appelle *représentation adjointe* de G dans $\mathfrak{g}$ l'application :

$$\begin{aligned} Ad : G &\to Aut(\mathfrak{g}) \\ g &\to Ad_g(*) = g * g^{-1} \end{aligned}$$

0.1.2 Espaces homogènes

Définition. Soit X une variété holomorphe, on dit que X est un *espace homogène* s'il existe un groupe G qui agit de façon transitive sur X, i.e. $\forall x, y \in X,\ \exists g \in G$ tel que $y = g.x$.

Proposition 4. Soit G un groupe de Lie, pour tout sous-groupe fermé H de G ($\Leftrightarrow$ H est un sous-groupe de Lie, par le théorème de Cartan, Von-Neumann), la variété quotient G/H est une variété différentiable et est aussi un espace homogène via l'action du groupe G. A fortiori, tout groupe de Lie est un espace homogène.

Démonstration. Ceci découle immédiatement de la définition. □

Corollaire. Dans notre cas, si Γ est un sous-groupe fermé invariant par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ alors $M = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ est une variété homogène et son fibré tangent est isomorphe à $M \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

0.2 Géométrie de SL$_2(\mathbb{C})$

0.2.1 Métrique de Killing

Définition. Une *métrique riemannienne holomorphe* sur une variété complexe est un champ holomorphe de formes quadratiques (complexes) non dégénérées sur le fibré holomorphe tangent à la variété. Cette métrique est dite *complète* si toutes les géodésiques locales se prolongent en des géodésiques globales définies sur $\mathbb{C}$.

Attention, une métrique riemannienne holomorphe n'est pas une métrique hermitienne, il convient plutôt de l'envisager comme l'analogue complexe d'une métrique pseudo-riemannienne.
En général, il n'existe pas de telles métriques sur une variété complexe, mais dans notre contexte, on peut définir une métrique riemannienne holomorphe sur M en "poussant" (par translations à gauche) une forme quadratique non dégénérée sur $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = T_e\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur tout le groupe.

Définition. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, la *forme de Killing* sur $\mathfrak{g}$ est la forme bilinéaire K donnée par la trace de la matrice de composition de deux endomorphismes adjoints, autrement dit :
$K(x,y) =$tr$(ad_x \circ ad_y : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g})$.

On peut faire le calcul à la main pour trouver une expression de K sur SL$_2(\mathbb{C})$. Dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, on a : $K(x,y) = 2n.$tr$(xy) - 2$tr$(x).$tr(y). Mais, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})= Ker($tr: $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C})$, on conclut que $K(x,y) = 4.$tr(xy) dans $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. On peut aussi vérifier que la forme de Killing ainsi définie est bi-invariante par SL$_2(\mathbb{C})$ via la représentation adjointe Ad. En effet : $\forall g \in$ SL$_2(\mathbb{C})$, $\forall x,y \in \mathfrak{sl}_2()$, $K(Ad_g(x), Ad_g(y)) = K(x,y)$, puisque tr$(gxg^{-1}gyg^{-1})$ =tr$(gg^{-1}xygg^{-1})$ =tr(xy).
Nous sommes à présent capables de définir la *métrique riemannienne holomorphe de Killing*, en utilisant les remarques et définitions précedentes, nous avons :
$\forall g \in$SL$_2(\mathbb{C})$, $\forall x,y \in T_g$SL$_2(\mathbb{C})$, $K_g(x,y) = K(d_gL_{g^{-1}}(x), d_gL_{g^{-1}}(y)) = K_e(x,y) = K(x,y)$.
Comme la forme de Killing est SL$_2(\mathbb{C})$-invariante, la métrique induite sur SL$_2(\mathbb{C})$ peut être "descendue" sur la variété $M =$ SL$_2(\mathbb{C})/\Gamma$.

Corollaire. Il existe une métrique riemannienne holomorphe sur M.

Démonstration. Notons $d_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ la métrique de Killing sur SL$_2(\mathbb{C})$ et π : SL$_2(\mathbb{C}) \to$ SL$_2(\mathbb{C})/\Gamma$ la projection. Soient x et y deux éléments de SL$_2(\mathbb{C})$. Posons alors

$$d_M(\pi(x), \pi(y)) = inf_{g\in\Gamma}\ d_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(x, gy)$$

Comme $\Gamma \subset$ SL$_2(\mathbb{C})$, l'action est isométrique et la distance d_M est bien définie.
Il reste à voir que si $d_M(\pi(x), \pi(y)) = 0$ alors $\pi(x) = \pi(y)$. Si $d_M(\pi(x), \pi(y)) = 0$ alors il existe une suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de points de Γ tels que $g_ny \to x$. Comme l'action est propre, il existe une sous suite convergente de $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ayant g pour limite, on a finalement $gy = x$. □

Dans la suite, sauf contre-ordre, nous munissons SL$_2(\mathbb{C})$ ainsi que M de la métrique riemannienne holomorphe de Killing.

0.2.2 (G, X)-structure

Avant d'aller plus loin, rappelons la notion de (G, X)-structure :

Définition. Soient X une variété holomorphe et G un groupe de Lie agissant transitivement. Une (G, X)-structure sur une variété holomorphe M est un atlas maximal de cartes $\phi_i : U_i \to X$ tel que :

- les U_i recouvrent M,
- les ϕ_i soient des biholomorphismes sur leurs images,
- tous les changements de cartes $f_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ sur $\phi_i(U_i \cap U_j)$ soient localement la restriction de l'action d'un élément de G.

Remarque. La condition d'action transitive de G sur X implique que X est isomorphe à un quotient de G par un sous-groupe.

Avec cette définition, on voit que M est naturellement munie d'une (G, X)-structure, où $G =$SL$_2(\mathbb{C})$ agit par isométries (pour la métrique de Killing) sur $X =$SL$_2(\mathbb{C})$.

A présent, nous pouvons munir notre variété M d'une (G, X)-structure moins triviale :

Lemme 1. M peut être munie d'une (G, X)-structure avec $G =$SL$_2(\mathbb{C})\times$SL$_2(\mathbb{C})$ et $X =$SL$_2(\mathbb{C})$ (l'action de G est donnée par les translations à droite et à gauche).

Démonstration. Puisque la métrique de Killing est bi-invariante, les translations à gauche et à droite sont des isométries, ce qui achève la preuve. $\square$

Remarque. On pourrait renforcer le résultat en montrant que les translations à gauche et à droite forment le groupe complet des isométries de SL$_2(\mathbb{C})$ pour la métrique de Killing mais nous n'en avons pas l'utilité.

Chapitre 1

Déformations des structures complexes

1.1 Généralités et théorème de Kuranishi

Rappelons d'abord les définitions et principaux théorèmes (ou propositions) relatifs aux déformations des strutures complexes :

Définition. Soient M une variété complexe compacte et S un $\mathbb{C}$-espace analytique pointé en s, une *déformation* de M paramétrée par (S, s) est la donnée de (E, S, s, π, i) où :

- $\pi : E \longmapsto S$ est un morphisme lisse et propre d'un $\mathbb{C}$-espace analytique E à valeur dans S.
- $i : M \longmapsto \pi^{-1}(s)$ est un isomorphisme.

Pour simplifier, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité possible, nous noterons simplement (E, π). Pour voir la notion de $\mathbb{C}$-espace analytique, le lecteur peut se référer au chapitre suivant dans lequel nous l'introduisons accompagnée de plusieurs propriétés pour démontrer le théorème principal.

Définition. Deux déformations (E, S, s, π, i) et (E', S, s, π', i') de M sont dites *localement équivalentes* s'il existe U et U' qui sont respectivement deux voisinages de s dans S et un isomorphisme ψ de $\pi^{-1}(U)$ dans $\pi'^{-1}(U')$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

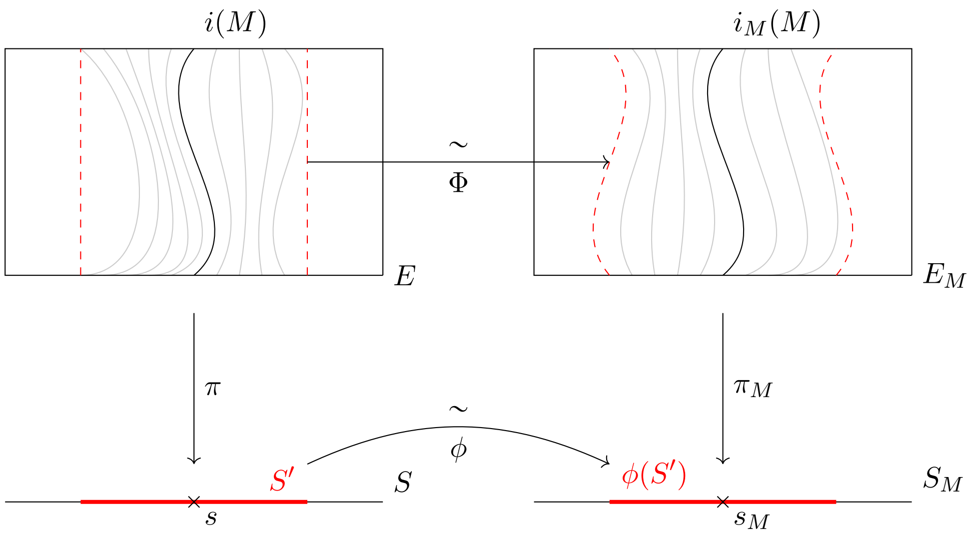
$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i'"] & \\ E \supset \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \pi'^{-1}(U') \subset E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Si on se donne un espace total E, l'ensemble des déformations dans E de M au dessus de (S, s) localement équivalentes forment un *germe de déformation*.

Théorème. [M. Kuranishi]

Pour toute variété complexe compacte M, il existe une déformation $(E_M, S_M, s_M, \pi_M, i_M)$ paramétrée par un espace $\mathbb{C}$-analytique S_M pointé en s_M telle que :
Pour toute déformation (π, i) paramétrée par (S, s), il existe un voisinage S' de s dans S, et un morphisme $\mathbb{C}$-analytique ϕ de (S', s) dans (S_M, s_M) et un isomorphisme Φ de $\pi^{-1}(S')$ dans $\pi_M^{-1}(\phi(S'))$ tel que $\pi_M \circ \Phi = \phi \circ \pi$ et $i_M = i \circ \Phi$ (Complétude).
Le morphisme ϕ n'est pas unique, cependant, sa différentielle $d\phi$ est quant à elle unique (Semi-universalité ou versalité). [Kur62]

Ce théorème est un des théorèmes centraux en théorie des déformations, que nous admettons ici. En voici, une représentation possible :



Définition. Le germe d'espace analytique pointé (S_M, s_M) est appelé l'*espace de Kuranishi*.

La notion de germe d'espace analytique correspond à l'ensemble des germes de déformation au dessus du $\mathbb{C}$-espace analytique S_M pointé en s_M. En effet, on appelle germe d'espace d'analytique, une classe d'équivalence de sous-espaces analytiques (l'équivalence de deux sous-espaces est donnée par l'existence d'un ouvert U voisin de s_M, tel que les intersections de ces deux sous-espaces avec U coïncident), ce qui correspond bien à la notion de germe de déformation lorsque l'on regarde l'espace S_M pointé en s_M.

Remarque. Le germe d'espace est unique puisque la propriété de versalité nous dit que si l'on a deux espaces de Kuranishi $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ alors il existe deux morphismes $\mathbb{C}$-analytiques $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ et $\psi : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ tels que $d\phi \circ d\psi^{-1}$ soit l'identité (versalité) et donc $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont localement isomorphes.

1.2 Existence de déformations des structures complexes de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$

Nous nous intéressons à présent aux déformations des structures complexes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$. Commençons par quelques définitions :

Définition. Soit $u : \Gamma \longmapsto \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ un morphisme quelconque de $\mathcal{R}_\Gamma$:=Hom(Γ,SL$_2(\mathbb{C})$). Nous dirons que u est *admissible* si l'action de Γ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ définie par

$$(x, \gamma) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \Gamma \to u(\gamma^{-1})x\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

est libre et totalement discontinue.
Si u est admissible nous désignerons l'espace quotient par $M(u, \Gamma)$ qui est donc une variété compacte complexe de dimension 3.

Définition. Soient Γ un sous-groupe discret de type fini d'un groupe de Lie G, S une partie génératrice de Γ et ρ_0, ρ deux morphismes de Γ dans G. On dit que ρ est *proche* de ρ_0 si les images de la partie génératrice S par ρ_0 et ρ sont proches. Ceci permet de définir une topologie induite par celle de G (par le théorème de Whitney, on sait que la variété G peut être plongée dans un $\mathbb{R}^n$, on peut donc avoir une norme induite sur G. On peut aussi plus simplement définir la topologie sur G via une métrique) sur l'ensemble $Hom(\Gamma, G)$ des morphismes de groupes de Γ dans G.

Définition. Soit Γ un sous-groupe discret d'un groupe topologique G. On dit que le morphisme de groupes $\rho_0 : \Gamma \mapsto G$ est *localement rigide* si $\exists\, U \subset Hom(\Gamma, G)$ voisinage de ρ_0 tel que $\forall \rho \in U,\ \exists g \in G$ tel que $\forall \gamma \in \Gamma,\ \rho(\gamma) = g\rho_0(\gamma)g^{-1}$.

Théorème A.

Si u est un morphisme suffisamment proche du morphisme trivial, alors il est admissible et la variété $M(u, \Gamma)$ est C^∞-difféomorphe à M.

La suite de ce chapitre sera dédiée à la démonstration de ce théorème.

1.2.1 Holonomie

Dans un premier temps, nous allons introduire certaines notions qui nous serviront par la suite, la plupart d'entre elles sont issues de [Thu97].

Reprenons notre variété M munie de sa (G, X)-structure et de sa métrique de Killing. On a vu plus haut que G agit holomorphiquement sur X, c'est à dire qu'un élément g de G est entièrement déterminé par une de ses restrictions sur n'importe quel ouvert de X.

Définition. Soient M et M' deux (G, X)-variétés (c'est à dire munies d'une (G, X)-structure). Un (G, X)-morphisme $f : M \to M'$ est un difféomorphisme local qui est donné dans les (G, X)-cartes par l'action d'un élément de G.

Proposition 5. Soient M une (G, X)-variété connexe, $\widetilde{M}$ son revêtement universel, $\pi_1(M)$ son groupe fondamental. Alors il existe un couple (D, h), où $D : \widetilde{M} \to X$ est un (G, X)-morphisme et $h : \pi_1(M) \to G$ est un morphisme de groupes tel que :

$$\forall \gamma \in \pi_1(M),\ \forall x \in \widetilde{M},\ D(\gamma.x) = h(\gamma).D(x)$$

De plus, ce couple est unique à composition par un élément de G près. Si (D, h) et (D', h') sont deux tels couples, alors il existe $g \in G$ tel que $D' = g \circ D$ et $h' = i_g \circ h$, où i_g est la conjugaison par g.

Démonstration.

- **Existence :**

L'idée pour construire l'application développante est de faire un prolongement analytique d'une carte le long d'un chemin.

Soient $x_0 \in M$ et (U_0, ϕ_0) une (G, X)-carte autour de x_0. Considérons un chemin $\alpha : [0, 1] \to M$ issu de x_0. Prenons un découpage $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 1$ tel que $\alpha([0, t_1]) \subset U_0$ et tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ il existe une carte (U_i, ϕ_i) telle que $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$. On demande aussi que les intersections successives $U_i \cup U_{i+1}$ soient connexes. Par construction on a : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha(t_i) \in U_{i-1} \cup U_i$ donc par compatibilité, $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists g_i \in G$ tel que $\phi_{i-1} = g_i \circ \phi_i$ sur $U_{i-1} \cup U_i$. On considère la suite d'application suivante :

$\psi_1 = g_1 \circ \phi_1 : U_1 \to X,$

$\psi_2 = g_1 \circ g_2 \circ \phi_2 : U_2 \to X,$

$\vdots$

$\psi_n = g_1 \circ \cdots g_n \circ \phi_n : U_n \to X.$

L'application

$$\hat{\alpha} : [0, 1] \to X,$$
$$t \in [t_i, t_{i+1}] \to \hat{\alpha}|_{[t_i, t_{i+1}]} = \psi_i \circ \alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$$

est un prolongement de $\phi_0 \circ \alpha|_{[0, t_1]}$ sur $[0, 1]$.

Le lecteur vérifiera que $\hat{\alpha}$ ne dépend pas du choix des cartes ni du découpage $\{t_i\}_{i \in [\![1, n]\!]}$ et que $\hat{\alpha}(1)$ est invariant par homotopie de α. On obtient alors l'application développante

$$D : \widetilde{M} \to X,$$
$$[\alpha] \to \hat{\alpha}(1)$$

en identifiant $\widetilde{M}$ à l'espace des classes d'homotopie de chemins dans M d'origine x_0. On vérifie que D est bien un (G, X)-morphisme en remarquant que sur un voisinage de $[\alpha]$, D coïncide avec $\psi_n \circ \pi$ (où π est la projection du revêtement universel $\widetilde{M}$ sur M).

Construisons maintenant l'holonomie.

Si α est un lacet, alors (U_n, ψ_n) est une carte contenant x_0. On peut supposer que $U_n = U_0$ et que $\phi_n = \phi_0$. Le changement de cartes de ϕ_0 à $\psi_n = g_1 \circ \cdots \circ g_n \circ \psi_0$ est une restriction de $g_1 \circ \cdots \circ g_n \in G$, qui ne dépend que de la classe d'homotopie relative de α et que l'on note $g_{[\alpha]}$.

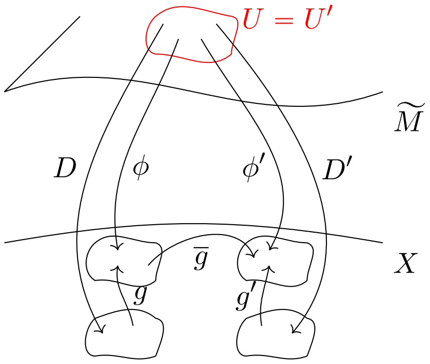
En identifiant un automorphisme de revêtement avec la classe correspondante dans $\pi_1(M, x_0)$, on obtient une application

$$h : \pi_1(M) \to G,$$
$$\gamma_{[\alpha]} \to g_{[\alpha]}$$

Ce h est bien un morphisme de groupe et le couple (D, h) vérifie bien la condition de la proposition.

- **Unicité :**

Supposons qu'il existe deux tels couples (D, h) et (D', h'). Les applications D et D' sont des (G, X)-morphismes donc ce sont des difféomorphismes locaux. Donc, pour tout $x \in \widetilde{M}$, il existe deux cartes (U, ϕ) et (U', ϕ') au voisinage de x et il existe $g,\ g' \in G$ tels que $D = g \circ \phi$ sur U et $D' = g' \circ \phi'$ sur U' (par définition des (G, X)-morphismes). On peut choisir U et U' assez petits tels qu'ils soient connexes et tels que $U = U'$. Par définition de (G, X)-structure, une fonction (holomorphe) de transition entre (G, X)-cartes, $\phi' \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \phi'(U)$ s'étend en un élément $\overline{g} \in G$. Donc, localement il existe $\overline{g} \in G$ tel que $D' = \overline{g} \circ D$.



La connexité de $\widetilde{M}$ permet d'affirmer que g est le même partout sur $\widetilde{M}$ et finalement $D' = g \circ D$ sur $\widetilde{M}$. En utilisant la condition de la proposition on a : $\forall \gamma \in \pi_1(M),\ \forall x \in \widetilde{M},\ g.h(\gamma).D(x) = h'(\gamma).g.D(x)$, et donc on conclut que $h' = i_g \circ h$. □

Définition. L'application D s'appelle *l'application développante*, le morphisme h s'appelle *le morphisme d'holonomie* (ou simplement *holonomie*) et $H = h(\pi_1(M))$ est le *groupe d'holonomie* de la structure géométrique.

L'intérêt de l'holonomie dans la théorie des déformations est dû au résultat suivant :

Proposition 6. [Principe d'Ehresmann-Thurston]
Soient M une variété compacte équipée d'une (G, X)-structure et h_0 son holonomie. Si h est un morphisme suffisamment proche de h_0 alors il existe une structure proche de la structure initiale dont l'holonomie est h. De plus, deux (G, X)-structures proches de la structure initiale sont isomorphes par un difféomorphisme proche de l'identité si et seulement si leurs holonomies sont conjuguées par un petit élément de G.

Démonstration. [BG04] □

Remarque. Le lecteur intéressé par ce sujet pourra se référer à [Thu97].

1.2.2 Application du résultat d'Ehresmann

Plaçons nous au morphisme trivial u_0 et regardons le morphisme d'holonomie h_0 associé. Remarquons d'abord que la simple connexité de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ nous donne immédiatement le groupe fondamental de notre variété M, $\pi_1(M) = \Gamma$.

Lemme 2. L'application développante est l'identité et l'holonomie h_0 est donnée par :

$$\begin{aligned} h_0 : & \Gamma \longrightarrow G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \\ & \gamma \longrightarrow (Id, \gamma) \end{aligned}$$

Démonstration. En reprenant l'action donnée de Γ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$: $(x, \gamma) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \Gamma \to u(\gamma^{-1}) x \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Au morphisme trivial u_0, on a $h_0(\gamma) = (u_0(\gamma^{-1}), \gamma) = (Id, \gamma)$.
On s'assure facilement que l'identité vérifie la condition pour être l'application développante : $\forall \gamma \in \Gamma,\ \forall X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),\ D(\gamma.X) = \gamma.X = (Id, \gamma).X = h_0(\gamma).D(X)$. □

La proposition d'Ehresmann montre que les (G, X)-structures proches sont (à isomorphisme proche de l'identité près) en bijection avec les classes de conjugaison de morphismes de Γ dans G, proches de h_0. Nous pouvons cependant préciser ce résultat en montrant que le plongement i de Γ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est rigide, ce qui implique qu'un morphisme proche de i sera exactement i. Cela revient à dire que :

Lemme 3. Un morphisme d'holonomie h proche de h_0 est de la forme : $h(\gamma) = (u(\gamma^{-1}), \gamma)$ où u est un morphisme suffisamment proche de u_0.

Démonstration. Pour démontrer ce fait, nous avons besoin de deux théorèmes dus à A. Weil, nous ne les démontrerons pas compte tenu de leur technicité, malgré leur apport majeur ici.

Proposition 7. [A. Weil] Soient $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un groupe algébrique (c'est à dire, un sous-groupe Zariski fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) et $\rho_0 \in Hom(\Gamma, G)$ avec Γ un sous-groupe de type fini. Si $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{\rho_0})$ est nul alors ρ_0 est localement rigide. [Wei64]

Proposition 8. [A. Weil] Soient G un groupe de Lie connexe semi-simple sans facteur compact et $\Gamma \subset G$ un réseau uniforme, on note $i : \Gamma \hookrightarrow G$ le plongement de Γ dans G. Si G n'est pas localement isomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, alors $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_i)$ est nul. [Wei62]

Ici, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est bien fermé pour la topologie de Zariski (puisqu'il est le lieu des zéros de la fonction polynomiale $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \ni X \to det(X) - 1 \in \mathbb{C}$), c'est donc un groupe algébrique. Nous avons déjà vu que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est aussi un groupe de Lie connexe simple sans facteur compact. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ n'est évidemment pas localement isomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (regarder par exemple les dimensions). Quant à Γ nous l'avons supposé discret et co-compact, ce qui en fait un réseau uniforme. □

Remarque. Notons ici que c'est ce théorème de rigidité d'A. Weil qui a suscité l'intérêt d'E. Ghys et mené à l'écriture de son article. En effet, l'existence de déformations des structures complexes est fortement surprenante au vu de la rigidité du plongement des réseaux co-compacts dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Nous pouvons noter que dans son article, Etienne Ghys parle de théorème de rigidité de Weil-Mostow en faisant référence à une série de résultats sur la rigidité, comme ceux énoncés par Weil, ceux de Mostow ou encore ceux de Raghunathan...

Finalement, les lemmes 2, 3 et la proposition de C. Ehresmann permettent d'affirmer que toute (G, X)-structure suffisamment proche de $M = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ est isomorphe à $M(u, \Gamma)$ et dont l'holonomie est $h(\gamma) = (u(\gamma^{-1}), \gamma)$.

1.2.3 Action de Γ sur SL$_2(\mathbb{C})$ via u

Dans cette section, on considère un sous-groupe Γ de SL$_2(\mathbb{C})$ fixé. On va maintenant montrer que :

Proposition 9. Si u est suffisamment proche de u_0 alors u est admissible. C'est à dire que l'action de Γ sur SL$_2(\mathbb{C})$ via u définie par : $(x,\gamma) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\Gamma \to u(\gamma^{-1})x\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est libre et proprement discontinue.

Lemme 4. Considérons la métrique riemannienne sur SL$_2(\mathbb{C})$, donnée par le produit scalaire hermitien $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\overline{K}(x,y) := 4\mathrm{tr}(x,\overline{y})$ et notons d la distance induite. Munissons d'autre part SL$_2(\mathbb{C})$ de la norme matricielle 1, c'est à dire $||(a_{i,j})|| = max_{j=1,2}\sum_i = 1^2|a_{i,j}|$. Alors il existe une constante $A \geqslant 1$ telle que la métrique de SL$_2(\mathbb{C})$ vérifie :

$$\forall x \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),\ A^{-1}d(x,Id) \leqslant ln(1+||x-Id||) \leqslant Ad(x,Id),$$

en particulier ces inégalités sont vérifiées pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Démonstration. Comme les géodésiques émanantes de l'élément neutre sont données par les courbes $t \in \mathbb{R} \to exp(tY)$, avec Y dans $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, on sait qu'il existe un élément $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ tel que la géodésique de x à Id est donnée par $t \in \mathbb{R} \to \gamma(t) = exp(tX)$ et vérifie $\gamma(0) = Id$ et $\gamma(1) = x$. Avec ces considérations, on peut écrire :

$$\begin{aligned} d(x,Id) &= \int_0^1 \sqrt{\overline{K}(\gamma'(t),\gamma'(t))}\,dt \\ &= \int_0^1 2\sqrt{\mathrm{tr}(tX\overline{tX})}\,dt \\ &= 2.\sqrt{\mathrm{tr}(X\overline{X})}\int_0^1 t\,dt \\ &= \sqrt{\mathrm{tr}(X\overline{X})} \end{aligned}$$

Supposons X diagonale, de diagonale $(\lambda,-\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$d(x,Id) = \sqrt{\mathrm{tr}(X\overline{X})} = \sqrt{2|\lambda|^2} = \sqrt{2}|\lambda|$$

et $ln(1+||x-Id||) = ln(1+||e^X-Id||) = ln(1+max\{|e^\lambda-1|,|e^{-\lambda}-1|\}) \geqslant ln(|1+e^\lambda-1|) \geqslant |\lambda|$

On a donc le résultat pour X diagonale.
Supposons maintenant X diagonalisable alors x est aussi diagonalisable, on se ramène au cas précédent en remarquant qu'un changement de base ne modifie pas ni la norme ni la trace d'une matrice puisque si P est la matrice qui diagonalise x, on a : $||PxP^{-1}-Id|| = ||P(x-Id)P^{-1}|| = ||x-Id||$ et tr$(PXP^{-1}\overline{PXP^{-1}})$ =tr$(PP^{-1}X\overline{X}\overline{PP^{-1}})$ = tr$(X\overline{X})$.
Enfin, par densité des matrices diagonalisables dans SL$_2(\mathbb{C})$ on en déduit le lemme. □

Démonstration. Fixons maintenant S une partie génératrice de Γ. Soient $\epsilon > 0$ et $u \in \mathcal{R}_\Gamma$ un morphisme tel que pour : $\forall\gamma \in S \cup S^{-1},\ ||u(\gamma)|| \leqslant \epsilon$.
Par co-compacité de Γ, il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour tout $x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, il existe un $\gamma \in \Gamma$ tel que l'on ait $d(\gamma,x) \leqslant C$. Cela montre que l'inclusion $i : \Gamma \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, est une quasi-isométrie et a fortiori est un plongement quasi-isométrique (le lecteur intéressé pourra (re)voir les notions élémentaires de théorie géométrique des groupes dans [Cou18]).

On a donc :

$$\exists B \geqslant 1,\ \exists C \geqslant 0,\ \text{tels que } \forall\gamma \in \Gamma,\ B^{-1}.l(\gamma) - C \leqslant d(\gamma, Id) \leqslant B.l(\gamma) + C$$

Où $l : \Gamma \to \mathbb{N}$ est la distance "des mots" (associée à S), c'est à dire que $l(\gamma) = m$, où m est le plus petit entier tel que γ s'écrive $s_0 \cdots s_m$ avec $s_i \in S$.
En combinant, on obtient : $A^{-1}(B^{-1}.l(\gamma) - C) \leqslant ln(1 + d(\gamma, Id))$.

Considérons K un compact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et notons $\Gamma_K = \{\gamma \in \Gamma | \exists x \in K$ tel que $u(\gamma^{-1})x\gamma \in K\}$, il s'agit là de montrer que $\#\Gamma_K < \infty$. Quitte à translater K, on peut supposer que $Id \in K$. Par compacité, on sait qu'il existe une constante D_K telle que $K \subset \overline{B(Id, D_K)} = \{x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \mid d(x, Id) \leqslant D_K\}$ qui ne dépend que de K.

Prenons $\gamma \in \Gamma_K$, il existe alors x et $y \in K$ tels que $u(\gamma)^{-1}x\gamma = y$, on a donc $||\gamma|| \leqslant ||x^{-1}u(\gamma)y|| \leqslant D_K^2||u(\gamma)||$. Pour simplifier on note $D'_K = D_K^2$, donc $||\gamma|| \leqslant D'_K||u(\gamma)||$. Et puisque $\forall\gamma \in S \cup S^{-1},\ ||u(\gamma)|| \leqslant \epsilon$, alors : $\forall\gamma \in \Gamma,\ ||u(\gamma)|| \leqslant \epsilon^{l(\gamma)}$ et finalement $||\gamma|| \leqslant D'_K\epsilon^{l(\gamma)}$. Donc, pour un tel γ, on obtient : $A^{-1}(B^{-1}.l(\gamma) - C) \leqslant ln(1 + d(\gamma, Id)) \leqslant ln(1 + ||\gamma|| + ||Id||) \leqslant ln(2 + D'_K.\epsilon^{l(\gamma)})$.
En posant $\eta = ln(\epsilon)$, on écrit $A^{-1}B^{-1}l(\gamma) - A^{-1}C \leqslant ln(2 + D'_K exp(\eta l(\gamma)))$ ce qui donne une borne supérieure pour $l(\gamma)$ en prenant $\eta < A^{-1}B^{-1}$ par croissance comparée lorsque $l(\gamma) \to \infty$. Puisqu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments γ dans Γ tels que $l(\gamma)$ soit inférieur à une constante, on sait que l'action de Γ via u est proprement discontinue.

Enfin, montrons que l'action n'a pas de point fixe. Prenons K un domaine fondamental compact pour l'action de Γ, il suffit de choisir η tel que la borne donnée au dessus de $l(\Gamma_K)$ soit strictement inférieure à 1 pour avoir $l(\gamma) = 0$ c'est à dire pour que γ soit l'élément trivial. □

1.2.4 Fibration d'Ehresmann et C^∞-difféomorphismes

Achevons la preuve du théorème A en montrant que $M(u, \Gamma)$ est C^∞-difféomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$. Pour cela, nous avons besoin d'un résultat fondamental en topologie différentielle, le théorème de fibration d'Ehresmann :

Lemme 5. [Théorème de fibration d'Ehresmann]
Soient M et N deux variétés différentielles au moins de classe C^2. Si $f : M \to N$ est propre et est une submersion surjective alors f est une fibration localement triviale.

Démonstration. [Ehr95] ou [MK06] □

Soit $u_t \subset \mathcal{R}_\Gamma$ une courbe paramétrée par $t \in [0, 1]$ reliant u_0 et u le morphisme considéré plus haut (possible par connexité par arc des ensembles algébriques) telle que

$$\forall t \in [0, 1],\ \forall\gamma \in S \cup S^{-1},\ ||u_t(\gamma)|| \leqslant \epsilon.$$

On définit une action de Γ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times [0, 1]$ via u_t. Par hypothèse, pour tout $t \in [0, 1]$ l'action est libre et proprement discontinue et le quotient admet une submersion sur $[0, 1]$. D'après le théorème d'Ehresmann, la fibration obtenue est localement triviale, en particulier en 0, ce qui permet de dire que toutes les fibres autour de 0 sont C^∞-difféomorphes à celle au dessus de 0, c'est à dire à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$. Ceci achève la démonstration du théorème A. □

1.3 Classification des déformations

Théorème B.

Soient $\Gamma_i,\ i = 1,2$ deux réseaux de SL$_2(\mathbb{C})$ et $u_i : \Gamma_i \to$SL$_2(\mathbb{C}),\ i = 1,2$ deux morphismes admissibles. Alors $M(u_1, \Gamma_1)$ est biholomorphiquement équivalente à $M(u_2, \Gamma_2)$ si et seulement si il existe une conjugaison interne θ de SL$_2(\mathbb{C})$ et un morphisme $\epsilon : \Gamma_1 \to \{\pm Id\}$ tels que $\Gamma_2 = (\epsilon.\theta)(\Gamma_1)$ et tels que pour tout $\gamma \in \Gamma_1$, $u_1(\gamma) = u_2(\epsilon(\gamma).\theta(\gamma))$

A l'instar des autres parties de ce mémoire, ce chapitre donnera lieu à une démonstration de ce théorème.

1.3.1 Rigidité et condition suffisante

A condition d'avoir le théorème de rigidité de Mostow dans notre boîte à outils, la condition suffisante du théorème B est assez évidente.

Proposition 10. [Rigidité de Mostow]
Soit G et G' deux groupes de Lie connexes non-compacts semi-simples, sans centres et qui ne soient pas localement isomorphes à SL$_2(\mathbb{R})$. Soient Γ et Γ' deux sous-groupes discrets co-compacts respectivement de G et G'. Alors, tout isomorphisme $\theta : \Gamma \to \Gamma'$ se prolonge en un unique isomorphisme $\widetilde{\theta}$ de G dans G'.

Démonstration. [Mos73] □

Ici, on considère $G = G'$ =SL$_2(\mathbb{C})$, on a déjà vu la non-compacité et la semi-simplicité de SL$_2(\mathbb{C})$. Le centre de SL$_2(\mathbb{C})$ n'est par contre pas trivial il est formé de deux éléments : $\{\pm I_2\}$. Qu'à cela ne tienne, on remplace $G = G'$ par SL$_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\}$. Le théorème appliqué dans ce cas nous dit qu'un isomorphisme θ de Γ_1 dans Γ_2 se prolonge en un automorphisme $\widetilde{\theta}$ de PSL$_2(\mathbb{C})$. Comme SL$_2(\mathbb{C})$ est le revêtement universel de PSL$_2(\mathbb{C})$, on peut relever l'automorphisme $\widetilde{\theta}$ en un automorphisme de continu de SL$_2(\mathbb{C})$ en multipliant $\widetilde{\theta}$ par un morphisme $\epsilon : \Gamma \to \{\pm I_2\}$, cela revient à écrire $\theta = \epsilon.\widetilde{\theta}|_{\Gamma_1}$.
Donc, si l'on considère deux morphismes admissibles $u_1 : \Gamma_1 \to$ SL$_2(\mathbb{C})$ et $u_2 : \Gamma_2 \to$ SL$_2(\mathbb{C})$ tels que $u_1 = u_2 \circ \epsilon.\theta$ alors $\widetilde{\theta}$: SL$_2(\mathbb{C}) \to$ SL$_2(\mathbb{C})$ passe au quotient en un difféomorphisme $\overline{\theta}$ de $M(u_1, \Gamma_1)$ vers $M(u_2, \Gamma_2)$.

Lemme 6. Le groupe d'automorphismes continus de PSL$_2(\mathbb{C})$ (que l'on notera Aut_{C^0}(PSL$_2(\mathbb{C})$)) est constitué de ($\overline{*} : x \to \overline{x}$) et des automorphismes intérieurs $\{i_g : x \to gxg^{-1}\}_{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$.

Démonstration. [Die71] □

On sait donc que $\overline{\theta}$ sera holomorphe ou antiholomorphe si $\widetilde{\theta}$ est holomorphe ou antiholomorphe (c'est à dire, selon que $\widetilde{\theta}$ soit composé ou non par l'automorphisme continu $\overline{*}$).
Nous pouvons résumer cette partie dans ce diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_1 \arrow[rrr, hook] \arrow[dr, "p"] \arrow[dddd, "\theta"', "\wr"] & & & \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dddd, "\epsilon.\widetilde{\theta}"', "\wr"] & M(u_1,\Gamma_1) \arrow[dddd, "\overline{\theta}"', "\wr"] \\
& \Gamma_1/\{\pm Id\} \arrow[r, hook] \arrow[dd, "p\circ\theta"'] & \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \arrow[dd, "\widetilde{\theta}"', "\wr"] & & \\
& {} \arrow[r, Rightarrow, "\text{Rigidité de}", "\text{Mostow}"'] & {} & & \\
& \Gamma_2/\{\pm Id\} \arrow[r, hook] & \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) & & \\
\Gamma_2 \arrow[rrr, hook] \arrow[ur, "p"] & & & \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[ul] & M(u_2,\Gamma_2)
\end{tikzcd}$$

La condition suffisante étant établie, le reste de cette section donnera la nécessité et avec elle, l'entièreté de la démonstration du théorème B.

1.3.2 Structure des isomorphismes et condition nécessaire

Pour la suite, on considère donc deux sous-groupes discret co-compacts Γ_1 et Γ_2 et deux morphismes admissibles $u_1 : \Gamma_1 \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $u_2 : \Gamma_2 \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ tels qu'il existe un biholomorphisme ψ entre $M(u_1,\Gamma_1)$ et $M(u_2,\Gamma_2)$.

En relevant l'application ψ aux revêtements universels de $M(u_1,\Gamma_1)$ et $M(u_2,\Gamma_2)$ on obtient un biholomorphisme Ψ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

De surcroît, nous obtenons un isomorphisme θ entre Γ_1 et Γ_2 de sorte que θ et Ψ vérifient :

$$\forall x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),\ \forall \gamma \in \Gamma_1,\ \Psi(u_1(\gamma^{-1})x\gamma) = u_2(\theta(\gamma^{-1}))\Psi(x)\theta(\gamma).$$

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_1 \arrow[rr, "\theta"] & & \Gamma_2 \\
\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \arrow[loop above] \arrow[rr, leftrightarrow, bend left=10, "\Psi"] \arrow[dd, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, pos=0.4, "\circlearrowleft"] & & \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \arrow[loop above] \arrow[dd, "p_2"] \arrow[dl, phantom, pos=0.4, "\circlearrowleft"] \\
& {} & \\
M(u_1,\Gamma_1) \arrow[uurr] \arrow[rr, bend right=10, "\psi"'] & & M(u_2,\Gamma_2) \arrow[uull] \arrow[ll, bend right=10, "\psi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Ψ étant holomorphe, il est clair que l'automorphisme $\widetilde{\theta} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (le prolongement de l'isomorphisme $\theta : \Gamma_1 \to \Gamma_2$) sera lui aussi holomorphe. En reprenant le lemme caractérisant les automorphismes continus de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, on sait donc que $\widetilde{\theta}$ est un automorphisme intérieur (c'est à dire, qu'il existe $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ tel que $\widetilde{\theta} = i_g$). Quitte à composer $\psi : M(u_1,\Gamma_1) \to M(u_2,\Gamma_2)$ par un biholomorphisme construit précédemment, on peut donc supposer $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ et $\theta = Id$.
Finalement, sans pertes, on peut supposer que Ψ vérifie :

$$\forall x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),\ \forall \gamma \in \Gamma,\ \Psi(u_1(\gamma^{-1})x\gamma) = u_2(\gamma)^{-1}\Psi(x)\gamma.$$

A présent, considérons l'ensemble $\mathcal{T}$ des fonctions holomorphes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ vers $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

Considérons aussi l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{T}$ suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \ \times \ \mathcal{T} &\to \mathbb{C}^4 \\ ([g_1, g_2, g_3], f) &\to [g_1, g_2, g_3].f \end{aligned}$$

définie par : $\forall x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),\ [g_1, g_2, g_3].f(x) = g_1 f(g_2^{-1} x g_3) g_3^{-1}$

Puisque $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, le biholomorphisme Ψ est clairement un élément de $\mathcal{T}$, on a pour tout $\gamma \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} (u_2(\gamma), u_1(\gamma), \gamma)).\Psi(x) &= u_2(\gamma)\Psi(u_1(\gamma)^{-1} x\gamma)\gamma^{-1} \\ &= u_2(\gamma)u_2(\gamma)^{-1}\Psi(x)\gamma\gamma^{-1} \\ &= \Psi(x). \end{aligned}$$

Ψ est donc fixe par le sous-groupe $H := \{(u_2(\gamma), u_1(\gamma), \gamma),\ \gamma \in \Gamma\}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Lemme 7. Si un élément de $\mathcal{T}$ est fixe par un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, alors il l'est aussi pour sa clôture de Zariski.

Démonstration. On commence par plonger $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^4$, comme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est une variété de Stein, toute fonction holomorphe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ se prolonge en une fonction holomorphe globalement définie sur $\mathbb{C}^4$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la restriction de chaque élément de $\mathcal{T}$ au sous-espace $\mathbb{C}^k[x, y, z, t]$ de $\mathbb{C}[x, y, z, t]$ des polynômes homogènes de degré k. Si on appelle π_k la projection de $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{C}^k[x, y, z, t]$ alors, si un élément $f \in \mathcal{T}$ est invariant par un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, ces projections $\pi_k(f)$ sont aussi invariantes. De plus, comme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est un groupe algébrique, son action est algébrique donc le groupe d'isotropie d'un vecteur est un sous-groupe algébrique et on a finalement le lemme. □

Il résulte de ce lemme que Ψ est fixe par la clôture de Zariski de H. De plus, nous avons :

Lemme 8. La clôture de Zariski de H, notée $\overline{H}$, contient le sous-groupe $\{Id\} \times \{Id\}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Démonstration. Comme Γ est contenu dans la projection p_3 de $\overline{H} \subset\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur le troisième facteur, on sait que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ tout entier est contenu aussi dans $p_3(\overline{H})$ (puisqu'un sous-groupe co-compact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est dense au sens de Zariski). Il existe donc un morphisme algébrique $\tau = (\tau_1, \tau_2) : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, tel que $\{(\tau_1(g), \tau_2(g), g),\ g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\}$ soit dans $\overline{H}$.

Comme de plus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est semi-simple, il n'a pas de sous-groupes normaux connexes non triviaux, il en résulte que τ_1 et τ_2 sont soit triviaux soit des conjugaisons internes.

- Si τ_1 et τ_2 sont triviaux, la preuve s'achève puisque
  $$\{(\tau_1(g), \tau_2(g), g),\ g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\} = \{Id\} \times \{Id\} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \subset \overline{H}.$$
- Si τ_1 n'est pas trivial et τ_2 l'est, alors on a :
  $$(\tau_1(g), Id, g).\Psi(x) = \Psi(x).$$
  Et en particulier,
  $$(\tau_1(g^{-1}), Id, g^{-1}).\Psi(xg) = \tau_1(g^{-1})\Psi(x)g = \Psi(xg).$$
  Ce qui est impossible, puisque l'action $(g, x) \to \Psi(xg)$ est libre alors que $(g, x) \to \tau_1(g^{-1})\Psi(x)g$ ne l'est pas. En effet, si τ_1 n'est pas trivial, on a déjà vu que c'est une

conjugaison, il existe donc $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ tel que

$$\begin{aligned} \tau_1 = i_g : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) &\to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \\ x &\to gxg^{-1} \end{aligned}$$

Donc l'action est donnée par $(g', x) \to gg'^{-1}g^{-1}\Psi(x)g'$, en particulier pour $g' = g$, $(g, x) \to g\Psi(x)g^{-1}$ ne fournit pas une action libre.

- Si τ_1 est trivial et τ_2 ne l'est pas, alors, de la même façon on a :

$$(Id, \tau_2(g), g).\Psi(\tau_2(g)xg^{-1}) = \Psi(x)g = \Psi(\tau_2(g)xg^{-1})$$

Par le même argument, on voit que ce n'est pas possible.

Si τ_1 et τ_2 ne sont pas triviaux, ce sont donc des isomorphismes. Et $\overline{H}$ est semi-simple, en effet, les projections de $\overline{H}$ sur chaque facteur sont surjective et donc les projections du radical (le plus grand sous-groupe fermé, connexe, résoluble et distingué) de $\overline{H}$ sont des sous-groupes normaux résolubles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, donc triviaux (c'est à dire $\{Id\}$ ou $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$). On a donc plusieurs cas :

- Si $\overline{H} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, encore une fois la preuve s'arrête là, puisque $\{Id\} \times \{Id\} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \subset \overline{H}$.
- Si $\overline{H}$ est isomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$: supposons que $\{Id\} \times \{Id\} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $\overline{H}$ se rencontrent trivialement. Par semi-simplicité, la projection de $\overline{H}$ sur le produit des deux premiers facteurs est injective (donc un isomorphisme). Il existe donc un automorphisme τ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ tel que $\overline{H} = \{(g, h, \tau(g)),\ g, h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\ \}$ ou $\overline{H} = \{(g, h, \tau(h)),\ g, h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\ \}$. On a donc choisi τ_1 et τ_2 mais on aurait pu faire un autre choix pour lequel τ_1 ou τ_2 serait trivial.
- Si $\overline{H}$ est isomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on a : $\overline{H} = \{(\tau_1(g), \tau_2(g), g),\ g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\}$ et en particulier $\forall\gamma \in \Gamma,\ u_i(\gamma) = \tau_i(\gamma),\ i = 1, 2$. Donc u_1 (resp. u_2) est une conjugaison interne. A conjugaison près on devrait avoir un biholomorphisme de $M(u_1, \Gamma_1)$ (resp. $M(u_2, \Gamma_2)$) dans $M(Id, \Gamma)$. Or, l'action de Γ_1 (resp. Γ_2) sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ donnée par $(\gamma, x) \to \gamma^{-1}x\gamma$ n'est évidemment pas libre et u_1 (resp. u_2) n'est donc pas admissible.

On conclut que $\{Id\} \times \{Id\} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \subset \overline{H}$. □

Dans notre cas, cela signifie que Ψ est fixe par les éléments de $\{Id\} \times \{Id\}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \forall g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),\ (Id, Id, g).\Psi(x) = \Psi(xg)g^{-1} = \Psi(x)$$

Cela traduit la commutativité de Ψ avec toutes les translations à droite. Or, les seuls éléments qui commutent avec toutes les translations à droite sont les translations à gauche.

En conclusion, si Ψ est le relevé au revêtement universel d'un biholomorphisme ψ entre $M(u_1, \Gamma_1)$ et $M(u_2, \Gamma_2)$ alors, quitte à composer ψ par un biholomorphisme construit dans la partie précédente, nous venons de montrer que Ψ est une translation à gauche. Avec ces considérations, nous pouvons affirmer que (par passage au quotient) $\psi : M(u_1, \Gamma_1) \to M(u_2, \Gamma_2)$ est aussi une translation à gauche et donc, quitte à composer $\theta : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ par la translation à gauche inverse, nous avons ramené ψ à l'identité. Ceci équivaut au fait que tout biholomorphisme entre $M(u_1, \Gamma_1)$ et $M(u_2, \Gamma_2)$ est donné par un biholomorphisme construit auparavant, ce qui achève la démonstration du théorème B. □

Nous pouvons aussi caractériser d'autres applications holomorphes entre deux variétés de type $M(u,\Gamma)$ non nécessairement biholomorphiquement équivalentes :

Proposition 11. Soient $\Gamma_1 \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (resp. Γ_2) et u_1 (resp. u_2) un morphisme admissible de sorte que $M(u_1,\Gamma_1)$ (resp. $M(u_2,\Gamma_2)$) ait un sens. S'il existe une application holomorphe surjective ψ de $M(u_1,\Gamma_1)$ dans $M(u_2,\Gamma_2)$ alors ψ est un revêtement.

Démonstration. On considère le pullback de la métrique K de Killing définie sur $M(u_2,\Gamma_2)$. La métrique obtenue est non dégénérée en tous les points où dψ est de rang maximal (de rang 3) mais comme ψ est surjective il existe au moins un tel point. On sait donc que ψ^*K est non dégénérée en un point. Enfin, par translations, on sait que la métrique est non dégénérée partout et la différentielle de ψ est donc de rang maximal partout. Ceci fait de ψ une application étale et par compacité de $M(u_1,\Gamma_1)$ et $M(u_2,\Gamma_2)$ un revêtement. □

Chapitre 2

Espace de Kuranishi

Le théorème A nous donne l'existence de déformations de $M(u_0, \Gamma)$ =SL$_2(\mathbb{C})/\Gamma = M$ paramétrées par un voisinage de u_0 dans $\mathcal{R}_\Gamma$ et de fibres C^∞-difféomorphes à M. Le théorème de Kuranishi permet d'assurer l'existence d'un morphisme $\mathbb{C}$-analytique ϕ de cette famille de déformations dans l'espace de Kuranishi $\mathcal{H}_\Gamma$.

L'objectif de ce chapitre sera de montrer que l'espace de Kuranishi de M est la base de cette famille :

Théorème C.

L'espace de Kuranishi $\mathcal{H}_\Gamma$ de SL$_2(\mathbb{C})/\Gamma$ est le germe de l'espace $\mathcal{R}_\Gamma$ pointé au morphisme trivial.

Pour démontrer ce théorème nous allons montrer que l'application $\phi : \mathcal{R}_\Gamma \longmapsto \mathcal{H}_\Gamma$ est un isomorphisme au voisinage de u_0. Les différentes étapes de la preuve peuvent se résumer comme suit :

- Nous démontrerons l'injectivité locale de ϕ en exhibant l'isomorphisme entre les espaces tangents de Zariski induit par la différentielle de ϕ au morphisme trivial u_0 :
  $d_{u_0}\phi : T^{Zar}_{u_0}\mathcal{R}_\Gamma \overset{\sim}{\longrightarrow} T^{Zar}_{s_M}\mathcal{H}_\Gamma$ où s_M est le point base de l'espace de Kuranishi.

- Enfin, nous vérifierons que tous les germes de déformations de M paramétrés par l'espace $\mathbb{C}$-analytique pointé (S_M, s_M) donné par le théorème de Kuranishi se retrouvent dans $\mathcal{R}_\Gamma$. Pour ce faire, nous allons montrer que les germes en 0 de courbes holomorphes à valeurs dans $\mathcal{H}_\Gamma$ se relèvent en des courbes dans $\mathcal{R}_\Gamma$, ce qui nous donnera la surjectivité locale de ϕ.

Remarque. Le théorème C implique que toute structure complexe sur SL$_2(\mathbb{C})/\Gamma$ suffisamment proche de la structure initiale est biholomorphiquement équivalente à un $M(u, \Gamma)$, avec $u \in \mathcal{R}_\Gamma$ assez proche de u_0 le morphisme trivial.

2.1 Injectivité locale de ϕ

2.1.1 Espaces analytiques complexes

Avant d'entamer la démonstration, remarquons que les espaces $\mathcal{R}_\Gamma$ et $\mathcal{H}_\Gamma$ ne sont pas des variétés et qu'il est par conséquent impossible de travailler dans des cartes, ce qui rend le travail plus difficile. Nous avons besoin d'une notion plus générale que celle de variété pour parler d'isomorphisme local entre ces espaces. Nous donnons ici une (rapide) introduction tirée de [GR09] aux espaces $\mathbb{C}$-analytiques généralisant la notion de variété.

Définition. Un *espace annelé* $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace Hausdorff X muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ contenu dans l'ensemble des fonctions continues (que l'on appelle faisceau structural), sur X. L'espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ est simplement noté X s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le faisceau $\mathcal{O}_X$.

Définition. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces annelés. Une fonction continue $f : X \to Y$ est un *morphisme d'espaces annelés* si pour tout $x \in X$ et pour tout $h \in \mathcal{O}_{Y,f(x)}$ on a $f^*(h) := h \circ f \in \mathcal{O}_{X,x}$. On dit que c'est un isomorphisme si f est un homéomorphisme et si pour tout $x \in X,\ f^* : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}$.

Définition. Un *ensemble analytique* X est donné par le lieu des zéros communs à un ensemble fini de fonctions holomorphes $f_1, , \cdots , f_k$, c'est à dire $X = V(f_1, \cdots , f_k)$.

Sur un tel ensemble analytique $X \subset \mathbb{C}^n$, on définit le faisceau $\mathcal{O}_X$ comme le quotient de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ par $\mathcal{I}_X =< f_1, \cdots , f_k >$ l'idéal engendré par les $f_1, \cdots , f_k$ restreint à X.

Définition. Un $\mathbb{C}$-*espace analytique* est un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que tout $x \in X$ admette un voisinage ouvert U dans X tel que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ soit isomorphe à un ensemble analytique Y muni de son faisceau $\mathcal{O}_Y$.

La notion de variété complexe se retrouve en demandant que X ne soit pas localement mais globalement un ensemble analytique et que $\mathcal{O}_X$ soit le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X.

Remarque. On définit un faisceau sur Y comme suit :
Puisque Y est une sous-variété d'un domaine D de $\mathbb{C}^n$, il existe $f_1, \cdots , f_k$, k fonctions holomorphes telles que $Y = V(f_1, \cdots , f_k)$ (lieu des zéros communs à $f_1, \cdots , f_k$). On considère $\mathcal{I}_Y$ comme étant l'idéal engendré par les fonctions f_i et $\mathcal{O}$ un faisceau sur D. Alors, un faisceau sur Y est le quotient $\mathcal{O}/\mathcal{I}_Y$ restreint à Y.

Définition. On entendra par espace tangent T_xX à X au point $x \in X$ l'ensemble des dérivations de $\mathcal{O}_X$ en x. C'est à dire l'ensemble des applications $t : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{C}$ telles que :
$\forall a, b \in \mathbb{C},\ \forall f, g \in \mathcal{O}_{X,x},\ t(af + bg) = at(f) + bt(g)$ et $t(fg) = f(x)t(g) + g(x)t(f)$.

Proposition 12. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces $\mathbb{C}$-analytiques et (f, ϕ) un morphisme holomorphe. Pour tout $x \in X$, f induit une application linéaire $f_* : T_xX \to T_{f(x)}Y$. De plus, si f

est injective (resp. biholomorphe) en x, alors f_* est injective (resp. isomorphe) en x. f_* est appelée *différentielle* de f.

Démonstration. On définit f_* comme suit :
Pour $t \in T_xX,\ f_*(t) = t \circ f^*$. Alors si $h \in \mathcal{O}_{Y,f(x)}$, on a $f_*(t)(h) = t(h \circ f)$. Si f^* est surjective, clairement f_* est injective et si f est biholomorphe alors $(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$ est inverse de f_*. □

Le théorème d'inversion locale échoue dans le cadre des espaces $\mathbb{C}$-analytiques, cependant nous en avons une version plus faible :

Proposition 13. [Théorème d'inversion pour les $\mathbb{C}$-espaces analytiques]
Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces $\mathbb{C}$-analytiques et f un morphisme d'espaces $\mathbb{C}$-analytiques. Si pour un $x \in X,\ f_*(x)$ est inversible, alors f est localement injective au voisinage de x.

Démonstration. [GR09] □

2.1.2 Cohomologie de M

On aura besoin de : $H^1(M, \mathcal{O}) \simeq H^1(\Gamma, \mathcal{H}) \simeq H^1(\Gamma, \mathbb{C}) \simeq H^1(M, \mathbb{C})$
où $\mathcal{O}$ désigne le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur M et $\mathcal{H}$ est l'espace des fonctions holomorphes globalement définies sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Ici $H^1(\Gamma, X)$ fait référence à la cohomologie des groupes (confère annexe A) où X est un Γ-module (nous verrons plus tard comment $\mathcal{H}$ peut être muni d'une structure de Γ-module). Sauf mention contraire, la seule autre cohomologie que nous utiliserons sera la cohomologie à valeur dans un faisceau.

Lemme 9. [D. Mumford] $H^1(M, \mathcal{O})$ et $H^1(\Gamma, \mathcal{H})$ sont canoniquement isomorphes.

Démonstration. [Mum08] On veut construire $\phi_p : C^p(\Gamma, \mathcal{H}) \longmapsto C^p(M, \mathcal{O})$ et montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme. Soit π :$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longmapsto M$ la projection naturelle. On choisit un recouvrement $\{V_i\}_{i \in I}$ de M vérifiant :

- $\pi^{-1}(V_i) = \underset{\gamma \in \Gamma}{\cup} \gamma(U_i)$, avec $U_i \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ouvert et tel que $\pi_{|_{U_i}} : U_i \xrightarrow{\sim} V_i$.
- $\forall i, j \in I$, tels que $V_i \cap V_j \neq \emptyset,\ \exists! \gamma_{ij} \in \Gamma$ tel que $U_i \cap \gamma_{ij} U_j \neq \emptyset$.

Quelques remarques d'abord :

- L'ensemble des sections $\Gamma(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^*\mathcal{O}) = H^0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^*\mathcal{O})$ coïncide avec $\mathcal{H}$.
- L'action de Γ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ par translation à droite fait de $\mathcal{H}$ est un Γ-module.
- $\gamma_{ij} \cdot \gamma_{jk} = \gamma_{ik},\ \gamma_{ij}^{-1} = \gamma_{ji}$.

Soit $f \in C^p(\Gamma, \mathcal{H})$, pour plus de clarté, on note $f_{\gamma_0, \cdots, \gamma_p} \in \mathcal{H}$ la fonction $f(\gamma_0, \cdots, \gamma_p)$: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longmapsto \mathbb{C}$.
On définit : $(\phi_p f)_{i_0, \cdots, i_p} = r_{i_0 \cdots i_p} \circ f_{\gamma_{i_0 i_1}, \cdots, \gamma_{i_{p-1} i_p}} \circ (\pi_{|_{U_{i_0}}})^{-1}$
où $r_{i_0 \cdots i_p}$ est l'opérateur de restriction $res_{\ V_{i_0} \cap \cdots \cap V_{i_p}} : \Gamma(M, \mathcal{O}) \longmapsto \Gamma(V_{i_0} \cap \cdots \cap V_{i_p}, \mathcal{O})$.

On vérifie alors que :

$$\phi_{p+1} \circ (\delta f)_{i_0,\cdots,i_{p+1}} =$$

$$= \phi_{p+1}[\gamma_{i_0 i_1}.f_{\gamma_{i_1 i_2},\cdots,\gamma_{i_p i_{p+1}}} + \sum_{j=1}^{p}(-1)^j f_{\gamma_{i_0 i_1},\cdots,\gamma_{i_{j-1} i_j}.\gamma_{i_j i_{j+1}},\cdots,\gamma_{i_p i_{p+1}}} + (-1)^{p+1} f_{\gamma_{i_0 i_1},\cdots,\gamma_{i_{p-1} i_p}}]$$

$$= \phi_{p+1}[f_{\gamma_{i_1 i_2},\cdots,\gamma_{i_p i_{p+1}}} \circ R_{\gamma_{i_0 i_1}} + \sum_{j=1}^{p}(-1)^j f_{\gamma_{i_0 i_1},\cdots,\gamma_{i_{j-1} i_{j+1}},\cdots,\gamma_{i_p i_{p+1}}} + (-1)^{p+1} f_{\gamma_{i_0 i_1},\cdots,\gamma_{i_{p-1} i_p}}]$$

$$= r_{i_1 \cdots i_{p+1}} \circ f_{\gamma_{i_1 i_2},\cdots,\gamma_{i_p i_{p+1}}} \circ R_{\gamma_{i_0 i_1}} \circ (\pi_{|_{U_{i_0}}})^{-1} + \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^j \, r_{i_0 \cdots \check{i}_j \cdots i_{p+1}} \circ f_{\gamma_{i_0 i_1},\cdots,\gamma_{i_j \check{i}_{j+1}},\cdots,\gamma_{i_p i_{p+1}}} \circ (\pi_{|_{U_{i_0}}})^{-1}$$

$$= r_{i_1 \cdots i_{p+1}} \circ f_{\gamma_{i_1 i_2},\cdots,\gamma_{i_p i_{p+1}}} \circ (\pi_{|_{U_{i_1}}})^{-1} + \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^j \, r_{i_0 \cdots \check{i}_j \cdots i_{p+1}} \circ f_{\gamma_{i_0 i_1},\cdots,\gamma_{i_j \check{i}_{j+1}},\cdots,\gamma_{i_p i_{p+1}}} \circ (\pi_{|_{U_{i_0}}})^{-1}$$

$$= \delta_{\check{C}ech} \circ (\phi_p f)$$

Il vient :

$$\begin{tikzcd}
C^0(\Gamma, \mathcal{H}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & C^1(\Gamma, \mathcal{H}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & C^2(\Gamma, \mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
C^0(\Gamma, H^0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^*\mathcal{O})) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\phi_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C^1(\Gamma, H^0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^*\mathcal{O})) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C^2(\Gamma, H^0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^*\mathcal{O})) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_2"'] & \cdots \\
C^0(\{V_i\}, \mathcal{O}) \arrow[r, "\delta_{\check{C}ech}"'] & C^1(\{V_i\}, \mathcal{O}) \arrow[r, "\delta_{\check{C}ech}"'] & C^2(\{V_i\}, \mathcal{O}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ce qui induit une application naturelle $\Phi : H^p(\Gamma, \pi^*\mathcal{O}) \to H^p(M, \mathcal{O})$. □

Lemme 10. [D. Mumford] Si de plus $H^i(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^*\mathcal{O}) = (0),\ \forall i \geqslant 1$ alors Φ est un isomorphisme.

Démonstration. On trouvera une preuve dans [Mum08]. □

Dans le cas qui nous intéresse, le théorème (B) de Cartan [Car53] (ou théorème fondamental de Oka-Cartan) et une remarque suffisent à vérifier que $H^i(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^*\mathcal{O}) = (0),\ \forall i \geqslant 1$. En effet, le théorème de Cartan (admis ici) affirme que si X est une variété de Stein et que $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X alors $H^i(X, F) = 0,\ \forall i \geqslant 1$. Ici, on peut voir que les conditions sont bien vérifiées. En effet, toute sous-variété fermée d'une variété de Stein est aussi une variété de Stein. En remarquant que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \simeq F^{-1}(\{0\})$ où $F(a,b,c,d) = ad - bc - 1$ (en faisant l'identification $M(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^4$) et que $\mathbb{C}^4$ est une variété de Stein, on a bien la première hypothèse. Enfin, en notant que $\mathcal{O}$ est un faisceau cohérent sur M il vient que $\pi^*\mathcal{O}$ est aussi un faisceau cohérent sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, ce qui achève la preuve. □

Profitons de cet instant pour citer le résultat de C.L. Wang qui affirme que, si Γ est un sous-groupe discret co-compact d'un groupe de Lie complexe connexe N alors la variété N/Γ est kählérienne si et seulement si N est abélien. Dans le cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, ce théorème justifie que M n'est pas kählérienne. Cette remarque permet de mieux cibler le contexte de ce mémoire.

Lemme 11. $H^1(\Gamma, \mathbb{C}) \simeq H^1(M, \mathbb{C})$.

Démonstration. Considérons une représentation ρ. Soit ω une 1-forme sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathfrak{sl}_\rho(2, \mathbb{C})$ qui soit ρ-equivariante.
On fixe un point $x_0 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, comme le $\pi_1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ est trivial, on sait que tous chemins de mêmes extrémités sont homotopes et on peut poser :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \ f(\gamma) = \int_{x_0}^{\gamma x_0} \omega$$

Nous allons montrer que si ω est fermée alors f est un 1-cocycle.
Supposons donc ω fermée. Par équivariance de ω, si $u \in T_x M$, alors $\gamma^*(\omega)_x(u) = \omega_{\gamma x}(d_x \gamma(u)) = \rho(\gamma)(\omega_x(u))$.
Il s'en suit :

$$\begin{aligned} f(\gamma\gamma') = \int_{x_0}^{\gamma\gamma' x_0} \omega &= \int_{x_0}^{\gamma x_0} \omega + \int_{\gamma x_0}^{\gamma\gamma' x_0} \omega \\ &= f(\gamma) + \int_{x_0}^{\gamma' x_0} \gamma^* \omega = f(\gamma) + \int_{x_0}^{\gamma' x_0} \rho(\gamma)\omega \\ &= f(\gamma) + \rho(\gamma) \int_{x_0}^{\gamma' x_0} \omega = f(\gamma) + \rho(\gamma) f(\gamma') \end{aligned}$$

Finalement, on a prouvé que $f(\gamma\gamma') = f(\gamma) + \rho(\gamma)f(\gamma')$ et donc que f est un 1-cocycle. □

Remarque. Par le même raisonnement, on pourrait étendre ce résultat aux groupes de cohomologies supérieurs si les $\pi_i(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ étaient triviaux (ce qui n'est pas le cas). En fait on a même le théorème de S. Eilenberg :
Soit Γ un groupe discret, soit k un anneau muni de l'action triviale de Γ. Soit M un espace topologique tel que $\pi_1(M) = \Gamma$ et ayant un revêtement universel contractile (espace d'Eilenberg-MacLane $K(\Gamma, 1)$). Alors

$$H^*(M, k) = Ext^*_{k[\Gamma]}(k, k) = H^*(\Gamma, k).$$

Proposition 14. $H^1(M, \mathcal{O}) \simeq H^1(M, \mathbb{C})$.

Démonstration. En utilisant les deux lemmes précédents, il suffit en fait de démontrer que $H^1(\Gamma, \mathcal{H}) \simeq H^1(\Gamma, \mathbb{C})$.

Pour commencer, le plongement naturel de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{H}$ est invariant par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, ce qui nous donne l'injectivité de $H^1(\Gamma, \mathbb{C}) \longmapsto H^1(\Gamma, \mathcal{H})$.
Pour montrer la surjectivité, on va "découper" comme précédemment l'espace $\mathcal{H}$ en une suite croissante d'espaces $\{\mathcal{P}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ avec $\mathcal{P}_0 = \mathbb{C}$ telle que tout élément c de $\mathcal{H}$ s'écrive $c = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ avec $c_k \in \mathcal{P}_k, \ \forall k \in \mathbb{N}$ et démontrer que $\forall k \geqslant 1, \ c_k$ est un cobord. Cela montrera que c est cohomologue à $c_0 \in \mathcal{P}_0 = \mathbb{C}$ et donc la surjectivité attendue.
Remarquons en premier lieu que l'ensemble $\mathcal{H}$ des fonctions holomorphes globalement définies sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ s'identifie naturellement au quotient de l'anneau des fonctions holomorphes définies

sur $\mathbb{C}^4$ de coordonnées (x, y, z, t) par l'idéal $(xt - yz - 1)$.
De plus, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit sur $M_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^4$ par multiplication à droite, ce qui permet de définir une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}[X, Y, Z, T]$ par

$$\mathbb{C}[X, Y, Z, T] \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}[X, Y, Z, T]$$

$$\left(P(X, Y, Z, T), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \to P(aX + cY, bX + dY, aZ + cT, bZ + dT)$$

Considérons maintenant $\mathcal{P}_k$ le sous-espace de $\mathcal{H}$ des fonctions polynomiales de $\mathbb{C}[X, Y, Z, T]/(XT - YZ - 1)$ de degré exactement égal à k, on observe que $\overline{\oplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k} = \mathcal{H}$.
L'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ laisse invariant le sous-ensemble $\mathcal{P}_k$ puisque tous changements de coordonnées par combinaisons linaires ne modifient pas le degré.

Lemme 12. $H^1(\Gamma, \mathcal{P}_k) = \{0\}, \ \forall k \geqslant 1$

Démonstration. [Rag65] □

Achevons la démonstration de la proposition 14.
Remarquons d'abord que le premier groupe de cohomologie $H^1(M, \Theta)$ est de dimension finie, il en est donc de même pour $H^1(M, \mathcal{O})$. D'après le lemme 9, qui affirme $H^1(M, \mathcal{O}) \simeq H^1(\Gamma, \mathcal{H})$ on conclut que $dim H^1(\Gamma, \mathcal{H}) < +\infty$.
Ensuite, comme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est un espace métrisable, il est possible de définir une distance (par exemple *distance uniforme*) sur l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions holomorphes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. On peut donc maintenant définir une topologie sur l'ensemble des cocycles $Z^1(\Gamma, \mathcal{H})$ au moyen de la convergence uniforme.
Il vient de ces deux considérations qu'une suite de cocycles $\{c_k\} \subset Z^1(\Gamma, \mathcal{H})$ qui tend vers 0, alors la classe qu'il représente dans $H^1(\Gamma, \mathcal{H})$ est nulle et on a :
Si $c \in Z^1(\Gamma, \mathcal{H})$ est un cocycle et $\{c_k\}$ les projections de c sur les sous-espaces $\mathcal{P}_k$, alors la suite de cocycles $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \ \tau_i = c - \sum_{k=0}^{i} c_k$ tend vers 0. Mais d'après le lemme 12, $H^1(\Gamma, \mathcal{P}_k) = (0), \ \forall k \geqslant 1$, ainsi, tous les c_k sont des cobords sauf c_0 et finalement, on obtient que $c - c_0$ est cohomologue à la classe nulle ce qui est équivalent à dire que c est cohomologue à c_0. □

2.1.3 Isomorphisme entre espaces tangents

Utilisons le théorème de Kuranishi au cas de notre variété M pour garantir l'existence d'un espace analytique pointé (S_M, s_M) qui paramètre les petites déformations de M. L'espace tangent de Zariski à S_M en s_M s'identifie naturellement au premier groupe de cohomologie $H^1(M, \Theta)$ (confère [MK06]), où Θ est les faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur M. En utilisant, le travail effectué dans la partie précédente nous avons :

Proposition 15. $H^1(M, \Theta) \simeq H^1(M, \mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Démonstration. La variété M étant holomorphiquement parallélisable, son fibré tangent est isomorphe à $M \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et donc $\Theta \simeq \mathcal{O} \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

On a $H^1(M,\Theta) \simeq H^1(M,\mathcal{O}\otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \simeq H^1(M,\mathcal{O})\otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq H^1(M,\mathbb{C})\otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. □

Lemme 13. $T_{u_0}\mathcal{R}_\Gamma \simeq H^1(\Gamma,\mathbb{C})\otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Démonstration. Avant de lire cette preuve, le lecteur aurait tout intérêt à consulter l'annexe B des rappels sur la cohomologie des groupes.
Etant donné une représentation $u : \Gamma \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, nous pouvons munir l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ d'une structure de Γ-module via la représentation adjointe :

$$\begin{aligned} Ad : \Gamma \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) &\to \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \\ (\gamma, g) &\to Ad_{u(\gamma)}g = u(\gamma)gu(\gamma)^{-1} \end{aligned}$$

On fera référence au Γ-module ainsi défini par $\mathfrak{sl}_{2,u}(\mathbb{C})$.
Soit $u_0 \in \mathcal{R}_\Gamma$ (ici, u_0 n'est pas forcément le morphisme trivial) et soit u_t, $t > 0$ un chemin émanant de u_0 que l'on suppose différentiable en t. On définit,

$$\forall \gamma \in \Gamma,\ d_0(t)(\gamma) = u_t(\gamma)u_0(\gamma)^{-1} \text{ et } h_0(\gamma) = \frac{\partial d_0(t,\gamma)}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

Pour tout $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, on a :

$$\begin{aligned} d_0(t)(\gamma\gamma') &= u_t(\gamma\gamma')u_0(\gamma\gamma')^{-1} \\ &= u_t(\gamma)u_t(\gamma')u_0(\gamma')^{-1}u_0(\gamma)^{-1} \\ &= \big(u_t(\gamma)u_0(\gamma)^{-1}\big)\big(u_0(\gamma)u_t(\gamma')u_0(\gamma')^{-1}u_0(\gamma)^{-1}\big) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h_0(\gamma\gamma') &= \frac{\partial d_0(t,\gamma\gamma')}{\partial t}\Big|_{t=0} \\ &= h_0(\gamma)\big(u_0(\gamma)u_0(\gamma')u_0(\gamma')^{-1}u_0(\gamma)^{-1}\big) + \big((u_0(\gamma)u_0(\gamma)^{-1}\big)u_0(\gamma)h_0(\gamma')u_0(\gamma)^{-1} \\ &= h_0(\gamma) + Ad_{u_0(\gamma)}h_0(\gamma'). \end{aligned}$$

Considérons le cas particulier d'un chemin (encore de classe C^1) $g_t \in G$ avec $g_0 = e$ et prenons $\forall \gamma \in \Gamma,\ u_t(\gamma) = g_t u_0(\gamma) g_t^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} d_0(t)(\gamma) &= g_t u_0(\gamma) g_t^{-1} u_0(\gamma)^{-1} \\ h_0(\gamma) &= X - u_0(\gamma)Xu_0(\gamma)^{-1} \\ &= X - Ad_{u_0(\gamma)}X \end{aligned}$$

où, $X = \frac{dg_t}{dt}\Big|_{t=0} \in \mathfrak{sl}_{2,u_0}(\mathbb{C})$.
On voit donc qu'à une représentation u_0, il est possible d'associer un 1-cocycle $h_0 \in Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_{2,u_0}(\mathbb{C}))$.
Le lecteur pourra vérifier l'isomorphisme donné par la construction.
De plus, au morphisme trivial u_0, l'ensemble des cobords est nul, il en résulte que $H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_{2,u_0}(\mathbb{C})) = Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_{2,u_0}(\mathbb{C}))$. □

Remarque. En fait, il est possible d'étendre la proposition à n'importe quelle représentation $u \in \mathcal{R}_\Gamma$ et avoir $T_u\mathcal{R}_\Gamma \simeq H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_{2,u}(\mathbb{C}))$, mais ce résultat n'est pas nécessaire pour la suite.

Proposition 16. $\phi : \mathcal{R}_\Gamma \longmapsto \mathcal{H}_\Gamma$ est injective au voisinage de u_0.

Démonstration. Reprenons quelques éléments : dans le chapitre précédent nous avons explicitement donné une déformation de M paramétrée par $\mathcal{R}_\Gamma$ pointé au morphisme trivial u_0. Par la

propriété verselle (théorème de Kuranishi), on associe à cette déformation un germe de morphisme $\mathbb{C}$-analytique $\phi : \mathcal{R}_\Gamma \to \mathcal{H}_\Gamma$ (avec $\phi(u_0) = s_M$, où s_M est le point base de l'espace de Kuranishi).
De plus, on a déjà montrer que :
$T_{u_0}\mathcal{R}_\Gamma \underset{\text{lemme 13.}}{\simeq} H^1(\Gamma,\mathbb{C})\otimes\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \underset{\text{lemme 11.}}{\simeq} H^1(M,\mathbb{C})\otimes\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \underset{\text{prop. 15.}}{\simeq} H^1(M,\Theta) \underset{\text{[MK06]}}{\simeq} T_{s_M}\mathcal{H}_\Gamma$
Ainsi, le plongement $i : \mathbb{C}\otimes\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \Theta$, du faisceau des germes de champs vecteurs constants dans le faisceau Θ des champs holomorphes induit un isomorphisme $\widetilde{i}$ au niveau des premiers groupes de cohomologie de M.
Par la propriété verselle, la différentielle de ϕ étant unique, elle coïncide forcément avec $\widetilde{i}$. Ainsi, la différentielle de ϕ en u_0 est donnée par l'isomorphisme $\widetilde{i}$ entre les espaces tangents de Zariski à $\mathcal{R}_\Gamma$ en u_0 et $\mathcal{H}_\Gamma$ en s_M, par le théorème d'inversion pour les $\mathbb{C}$-espaces analytiques ϕ est donc injective au voisinage de u_0. □

2.2 Surjectivité locale de ϕ

Nous allons maintenant construire un faisceau $\mathcal{F}$ et identifier l'ensemble des classes de germes de déformations de M paramétrées par l'espace $\mathbb{C}$-analytique pointé (S_M, s_M) au premier groupe de cohomologie $H^1(M,\mathcal{F})$. Puis nous allons montrer que les éléments de $H^1(M,\mathcal{F})$ s'identifient à des courbes formelles de $\mathcal{R}_\Gamma$ issues de u_0, ce qui assurera la surjectivité locale de ϕ.

2.2.1 Germes de déformations de M

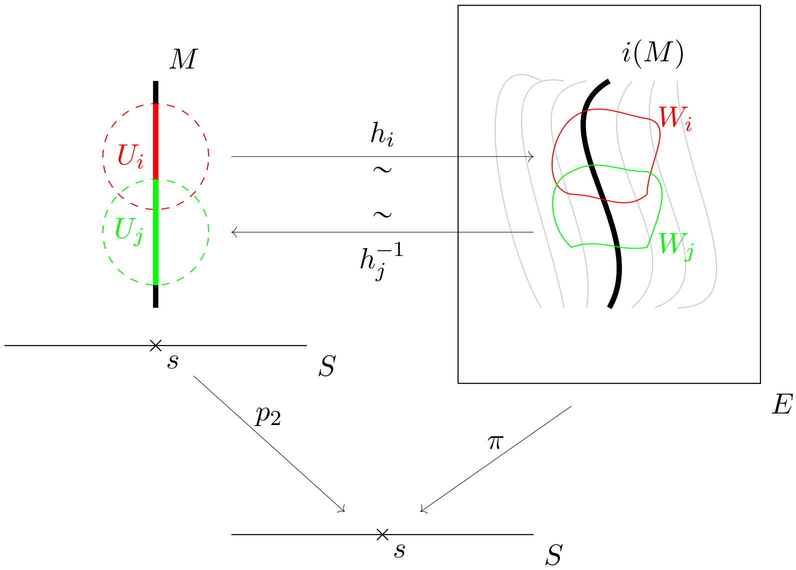
Considérons l'espace analytique $E = M \times S_M$ et construisons le faisceau $\mathcal{F}$ comme suit :
Pour tout ouvert $U \subset M$, considérons l'ensemble $F(U)$ des biholomorphismes $f : W \xrightarrow{\sim} W'$, où W et W' sont des ouverts de $M \times S_M$ contenant $U \times \{s_M\}$, préservant chaque fibre $U \times \{s\}$ et tels que $f\big|_{U\times\{s_M\}} = Id$.
On pose $\mathcal{F}(U) = F(U)/_\sim$, avec $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1$ et f_2 ont le même germe (c'est à dire qu'il existe W voisinage de $U \times \{s_M\}$ tel que $f_1\big|_W = f_2\big|_W$).
Le lecteur vérifira aisément que pour tout ouvert $U \subset M$, $(\mathcal{F}(U), \circ)$ est un groupe non abélien.
Nous noterons par la suite indifférement $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}$ et $U_{i_0\cdots i_n}$.

Lemme 14. [A. Douady] $H^1(M,\mathcal{F})$ s'identifie naturellement à l'ensemble des classes de germes de déformations de M paramétrées par (S_M, s_M). [Dou62]

Démonstration. L'idée de cette preuve est de construire des cocycles à partir d'une déformation de M et de montrer qu'ils ne dépendent que du germe de cette déformation. Réciproquement, on se donne un cocycle et on établit une déformation, ce qui terminera la preuve.

Soit (E, S, s, π, i) une déformation de M, on choisit un recouvrement d'ouverts $\{U_i\}$ de M et un recouvrement d'ouverts $\{W_i\}$ de $i(M)$ dans E tel qu'il existe des holomorphismes $\{h_i\}$ vérifiant :

- $\forall i,\ \exists\ V_i$ voisinage de $U_i \times \{s\}$ dans $M \times S$ tels que $h_i : V_i \xrightarrow{\sim} W_i$.
- $h_i\big|_{U_i\times\{s\}} = i\big|_{U_i}$.
- $\pi \circ h_i : M \times S \longrightarrow S$ soit la projection naturelle.



On pose $f_{ij} = h_i^{-1} \circ h_j$. On vérifie que f_{ij} définit une section de $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ et que $f_{ij} \circ f_{jk} = h_i^{-1} \circ h_j \circ h_j^{-1} \circ h_k = f_{ik}$. Les $\{f_{ij}\}$ ainsi définis forment alors un cocycle $f \in Z^1(M, \mathcal{F})$, que l'on dira associé à la déformation (S, s, π, i). On vérifie que si $\{U'_i\} < \{U_i\}$ est un raffinement, le cocycle $f = \{f_{ij}\}$ reste associé au nouveau recouvrement $\{U'_i\}$.

Vérifions que le cocycle ainsi défini ne dépend que du germe de cette déformation.
Prenons alors une deuxième déformation (E, S, s, π', i') de M localement équivalente à la première et un cocycle f' associé à cette déformation. On peut supposer, quitte à raffiner les recouvrements, que f et f' sont relatifs au même recouvrement $\{U_i\}$. Les deux déformations étant équivalentes, il existe un isomorphisme ψ d'un voisinage $T \subset E$ de $\pi^{-1}(s)$ dans un voisinage $T' \subset E$ de $\pi'^{-1}(s)$ (cf définition d'équivalence de déformation).
Posons $f_i = h_i'^{-1} \circ \psi \circ h_i$.
On a : $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ et $f_i \circ f_{ij} = h_i'^{-1} \circ \psi \circ h_i \circ h_i^{-1} \circ h_j = h_i'^{-1} \circ h'_j \circ h_j'^{-1} \circ \psi \circ h_j = f'_{ij} \circ f_j$.
Ce qui nous permet de conclure que les cocycles associés à une déformation forment une classe de cohomologie qui ne dépend que du germe de cette déformation.

Réciproquement, prenons un recouvrement localement fini $\{U_i\}$ de M et un cocycle $f \in Z^1(M, \mathcal{F})$. Pour chaque paire (i, j) telle que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe alors deux voisinages V_{ij} et V_{ji} de $(U_i \cap U_j) \times \{s\}$ dans $M \times S$ tels que f_{ij} réalise un biholomorphisme de V_{ij} dans V_{ji}. Raffinons le recouvrement $\{U_i\}$ en un recouvrement $\{U'_i\}$ et prenons un voisinage S' de s dans S de telle sorte que $U'_{ij} \times S' \subset V_{ij}$ et que $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$ ait un sens sur $U_{ijk} \times S'$. En recollant les $U'_i \times S'$ selon les f_{ij} on obtient une déformation (S', s, π_2, Id) de M au dessus de (S', s) où π_2 est la projection sur la deuxième coordonnée et $E = \bigsqcup_i (U'_i \times S')/_\sim$, où $(z, \zeta) \sim (z', \zeta') \Leftrightarrow \exists (i, j)$ tels que $(z, \zeta) \in U'_j \times S'$, $f_{ij}(z, \zeta) = (z', \zeta')$. □

2.2.2 Pseudogroupe, filtration et relèvement de biholomorphismes locaux

Définition. Un *pseudogroupe* sur une variété X (cette définition est vraie si X est un espace topologique) est une collection $\mathcal{P}$ d'homéomorphismes entre ouverts de X satisfaisants :

- $Id \in \mathcal{P}$.
- Si $f \in V$, alors $f^{-1} \in \mathcal{P}$.
- Si $f \in \mathcal{P}$, alors pour tout ouvert U de X, $f|_U \in \mathcal{P}$.
- Si $U = \cup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de X et f est un homéomorphisme de U dans X tel que $\forall i \in I,\ f|_{U_i} \in \mathcal{P}$, alors $f \in \mathcal{P}$.
- Si $f : U \to U'$ et $g : V \to V'$ sont dans $\mathcal{P}$ avec $U' \cap V \neq \emptyset$, alors $g \circ f|_{f^{-1}(U' \cap V)} \in \mathcal{P}$.

On peut aussi considérer un pseudogroupe en ne prenant que les biholomorphismes plutôt que tous les homéomorphismes.

Définition. Soit $\mathcal{P}$ un sous-pseudogroupe du pseudogroupe des biholomorphismes locaux de M. On introduit un sous-faisceau $\mathcal{F}^{\mathcal{P}}$ comme suit :
Un élément $f \in \mathcal{F}(U)$ est dans $\mathcal{F}^{\mathcal{P}}(U)$ si la restriction de f à chaque fibre $M \times \{z\}$ est dans $\mathcal{P}$, (i.e. : $\forall z \in S_M,\ f|_{U \times \{z\}} \in \mathcal{P}$).

Corollaire. $H^1(M, \mathcal{F}^{\mathcal{P}})$ s'identifie naturellement à l'ensemble des classes de germes de déformations de M dans $\mathcal{P}$ paramétrées par (S_M, s_M).

Dans la suite, considérons $\mathcal{P}^g$ (respectivement $\mathcal{P}^d$) (respectivement $\mathcal{P}^{gd}$) le pseudogroupe des biholomorphismes locaux de M qui se relèvent dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ en une translation à gauche (respectivement à droite) (respectivement composée d'une translation à gauche et à droite) ainsi que les faisceaux associés.

Lemme 15. $H^1(M, \mathcal{F}^{\mathcal{P}^{gd}}) \simeq H^1(M, \mathcal{F}^{\mathcal{P}^g})$ et $H^1(M, \mathcal{F}^{\mathcal{P}^d}) = 0$

Démonstration. La deuxième affirmation résulte du fait que les déformations de M qui se relèvent en des translations à droite sont triviales puisqu'elles sont données par le plongement du sous-groupe Γ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ qui est rigide d'après le théorème de rigidité de G.D. Mostow [Mos73].
Le reste de la preuve découle immédiatement du chapitre 1 et en particulier du morphisme d'holonomie décrit à cet endroit, faisons cependant quelques remarques :
L'action de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $X = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est donnée par des translations à gauche et à droite. Il vient que les 1-cocycles de M dans $\mathcal{P}^{gd}$ correspondent exactement aux déformations de la (G, X)-structure. Par le théorème A, on sait que ces déformations sont paramétrées par le germe de $\mathcal{R}_\Gamma$ pointé au morphisme trivial. Les déformations de M qui se relèvent en des translations à gauche étant paramétrées par le germe de $\mathcal{R}_\Gamma$ en u_0, on déduit la première assertion $H^1(M, \mathcal{F}^{\mathcal{P}^{gd}}) \simeq H^1(M, \mathcal{F}^{\mathcal{P}^g})$. $\square$

Pour terminer la preuve de la surjectivité de ϕ, on commence par équiper notre faisceau $\mathcal{F}$ d'une filtration.
D'après sa définition les éléments de $\mathcal{F}$ coïncident avec l'identité sur $U \times \{s_M\}$, ainsi tous ses éléments sont tangents à l'identité au moins à l'ordre 0. Avec cette remarque, la filtration que l'on va construire apparaît assez naturellement. On considère, pour tout $k \geqslant 1$ le sous-faisceau $\mathcal{F}_k$ constitué des biholomorphismes tangents à l'identité sur tout $U \times \{s_M\}$ à l'ordre $k - 1$ (c'est à dire que l'on considère les biholomorphismes qui admettent un développement en série entière sur tout $U \times \{s_M\}$

du type $f(z_1, \cdots, z_n) = (z_1, \cdots, z_n) + \sum_{\alpha,\ |\alpha|=k} (z_1 - z_1^0)^{\alpha_1} \cdots (z_n - z_n^0)^{\alpha_n} g_\alpha(z_1, \cdots, z_n),\ g_\alpha \in \mathcal{F}$). On a donc construit une filtration décroissante de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{F}_k \supset \cdots$.
On introduit également :
$Q_k = \mathcal{F}/\mathcal{F}_{k+1}$ et $G_k = \mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1}$.
On remarque immédiatement que $G_k = ker : Q_k \to Q_{k-1}$, ce qui nous donne la suite exacte courte suivante : $0 \to G_{k+1} \to Q_{k+1} \to Q_k \to 1$
On peut équiper les sous-faisceaux $\mathcal{F}^{\mathcal{P}^g}$, $\mathcal{F}^{\mathcal{P}^d}$ et $\mathcal{F}^{\mathcal{P}^{gd}}$ de la même filtration et obtenir les mêmes résultats. Pour simplifier les notations, notons $Q_k^g = \mathcal{F}^{\mathcal{P}^g}/\mathcal{F}_{k+1}^{\mathcal{P}^g}$ et $G_k^g = \mathcal{F}_k^{\mathcal{P}^g}/\mathcal{F}_{k+1}^{\mathcal{P}^g}$.

Corollaire. En cohomologie on obtient deux suites exactes longues et en particulier on a :
$H^0(M, Q_k) \to H^1(M, G_{k+1}) \to H^1(M, Q_{k+1}) \to H^1(M, Q_k) \to H^2(M, G_{k+1})$
De même avec G^g et Q^g.

On va maintenant montrer que toutes les déformations de M peuvent se réaliser dans $\mathcal{P}^g$, ce qui achèvera la démonstration du théorème C.

Lemme 16. $H^0(M, Q_k^g) \simeq H^0(M, Q_k)$.

Démonstration. D'après la classification des déformations (partie 1.3) tous les biholomorphismes globaux de M se relèvent en des translations à gauche de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Ce qui permet d'affirmer que les sections globales de Q_k^g se retrouvent dans Q_k. □

Lemme 17. $H^1(M, G_k)$ est naturellement isomorphe à $H^1(M, \Theta)$ et $H^1(M, G_k^g)$ est isomorphe à $H^1(M, \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.

Démonstration. La construction de l'isomorphisme est faite dans [MK06]. □

Lemme 18. $H^1(M, \mathcal{O}) \simeq H^2(M, \mathcal{O})^*$.

Démonstration. Rappelons la dualité de Serre, telle qu'elle est énoncée dans [MK06] :
Soit M une variété compacte complexe de dimension $dim_{\mathbb{C}} M = n$ et soit F un fibré vectoriel holomorphe sur M. Alors :

$$H^q(M, \Omega^p(F)) \simeq (H^{n-q}(M, \Omega^{n-p}(F)))^*.$$

Ici, comme M est holomorphiquement parallélisable, son fibré tangent est isomorphe à $M \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Le faisceau des germes des 3-formes holomorphes sur M est donc isomorphe à $\mathcal{O}$, puisque le fibré canonique est le déterminant du fibré cotangent [GH94]. La dualité de Serre ici permet de conclure que $H^1(M, \Omega^3) \simeq (H^2(M, \mathcal{O})^*$. □

Lemme 19. $H^1(M, \mathbb{C}) \simeq H^2(M, \mathbb{C})^*$.

Démonstration. Ceci découle de la dualité de Poincaré (voir proposition 22.). □

Corollaire. $H^2(M, G_k^g) \simeq H^2(M, G_k)$.

Démonstration. D'après le lemme 17 et la dualité de Poincaré, on a $H^2(M, G_k^g) \simeq (H^1(M, G_k^g))^*$. De la même manière, on trouve $H^2(M, G_k) \simeq (H^1(M, G_k))^*$. Puis, par le lemme 17, nous avons $H^1(M, G_k^g) \simeq H^1(M, \mathbb{C} \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \simeq H^1(M, \Theta) \simeq H^1(M, G_k)$.
Finalement,

$$H^2(M, G_k^g) \simeq (H^1(M, G_k^g))^* \simeq (H^1(M, G_k))^* \simeq H^2(M, G_k)$$

□

Proposition 17. $\forall k \geqslant 1,\ H^1(M, Q_k^g) \simeq H^1(M, Q_k)$.

Démonstration. Pour $k = 1$, c'est exactement la proposition 13. (qui affirme $H^1(M, \mathcal{O}) \simeq H^1(M, \mathbb{C})$) puisque $Q_1 = \mathcal{O}$ et $Q_1^g = \mathbb{C}$.
Supposons le résultat vrai pour un entier $k > 1$, on a :

$$\begin{tikzcd} H^0(M, Q_k^g) \arrow[r] \arrow[d, "\text{lemme 16}"', "\wr"] & H^1(M, G_{k+1}^g) \arrow[r] \arrow[d, "\text{lemme 17}"', "\wr"] & H^1(M, Q_{k+1}^g) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(M, Q_k^g) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"', "\text{hypothèse}"] & H^2(M, G_{k+1}^g) \arrow[d, "\wr"', "\text{corollaire}"] \\ H^0(M, Q_k) \arrow[r] & H^1(M, G_{k+1}) \arrow[r] & H^1(M, Q_{k+1}) \arrow[r] & H^1(M, Q_k) \arrow[r] & H^2(M, G_{k+1}) \end{tikzcd}$$

Le lemme des cinq permet donc de conclure que $H^1(M, Q_{k+1}^g) \simeq H^1(M, Q_{k+1})$. □

Chapitre 3

Structure des variétés complexes $M(u,\Gamma)$

Dans ce chapitre, nous fixons un sous-groupe Γ discret co-compact agissant librement et de façon proprement discontinue et un morphisme u admissible. Nous allons ici, donner tous les tenseurs holomorphes (de rang 1 et 2) sur les variétés compactes complexes $M(u,\Gamma)$.

3.1 Tenseurs holomorphes

Avant d'énoncer le résultat important et ses corollaires, il est important de rappeler le cadre général dans lequel nous nous plaçons.

3.1.1 Généralités

Nous ne rappelons pas la définition de fibré vectoriel, néanmoins celle de fibré vectoriel holomorphe mérite sa place ici :

Définition. Un *fibré vectoriel holomorphe* de rang k sur une variété complexe M est la donnée d'une variété complexe E et d'une submersion holomorphe $p : E \to M$ localement triviale dont les fibres ont une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
C'est à dire qu'il existe un recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ de M et des biholomorphismes $\Phi_i : p_i^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^k$ appelés trivialisations locales, tels que les changements de trivialisations

$$\Psi_{i,j} := \Psi_j \circ \Psi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^k \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^k$$

soient de la forme $\Psi_{i,j}(x, v) = (x, g_{i,j}(x)(v))$, avec $g_{i,j} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^k$ holomorphe.

Nous allons définir la notion de tenseur sur une variété et les étudier sur $M(u,\Gamma)$, mais avant cela voici quelques rappels :

Définition. Soit E un K-espace vectoriel. Un *tenseur* sur V est une application multilinéaire

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{\text{p fois}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\text{q fois}} \to K$$

L'*ordre* (ou le *type*) du tenseur T est le couple (p, q) et le *rang* est donné par $p + q$.

Et sur une variété nous avons :

Définition. Soit M une variété complexe. Un *tenseur holomorphe* sur M est une section holomorphe de $TM^{\otimes p} \otimes TM^{\otimes q}$.

Remarque. Un tenseur (holomorphe) est un outil très général, selon le cas, il peut représenter un champ de vecteurs, des formes différentielles, des métriques etc.
Par exemple, si l'on considère une variété M complexe compacte sans bord et E le fibré vectoriel holomorphe donné par le produit tensoriel du fibré cotangent $(\otimes T^*(M))^p$, alors les sections holomorphes (resp. différentiables) de E sont des p-formes holomorphes (resp différentiables).

3.1.2 Cas des variétés $M(u, \Gamma)$

Comme $\pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to M(u, \Gamma)$ est le revêtement universel de $M(u, \Gamma)$. Il induit aussi un revêtement au niveau des espaces tangents $\tilde{\pi} : T\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to TM(u, \Gamma)$, où $\tilde{\pi}(x, v) = (\pi(x), d_x\pi(v))$. De plus, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est holomorphiquement parallélisable de fibré tangent

$$T\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3$$

Enfin, comme $M(u, \Gamma)$ est une variété complexe son fibré tangent est holomorphiquement parallélisable [Voi14] et on peut le définir comme quotient du fibré tangent à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ par l'action de Γ. Deux éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ seront envoyés sur le même élément dans $M(u, \Gamma)$ si et seulement s'il existe un élément $\gamma \in \Gamma$ tel que $x = u(\gamma)^{-1} y \gamma$ et deux vecteurs u et v tangent à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ respectivement en x et y seront envoyés sur le même vecteur tangent à $\pi(x) = \pi(y)$ si et seulement si l'un est égal à l'autre conjugué par $u(\gamma)$, où ce γ est le même que celui qui relie x à y.
Considérons une représentation linéaire $\sigma : \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$, avec $d \geqslant 1$. On définit le fibré vectoriel holomorphe E_σ par :

$$E_\sigma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^d / \sim$$

où $(x, u) \sim (y, v) \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma,\ x = u(\gamma)^{-1} y \gamma$ et $u = \sigma \circ Ad_{u(\gamma)^{-1}}(v)$.

Pour résumer, on a $TM(u, \Gamma) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3 / \sim$, pour la relation citée ci-dessus où $\sigma = Id$. On voit alors qu'un tenseur holomorphe de type (p, q) sur $M(u, \Gamma)$ est une section holomorphe de $(E_{Id})^{\otimes p} \otimes (E_{Id}^*)^{\otimes q}$.

Remarque. Dans notre cas, $Ad : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \simeq \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ (puisque $dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = 3$).

S'il existe un vecteur $v \in \mathbb{C}^d$ qui soit fixe par $\sigma \circ Ad_{u(\Gamma)}$ alors on obtient une section holomorphe de E_σ en posant $s : M(u, \Gamma) \to E_\sigma,\ s(x) = (x, v)$ et donc un tenseur holomorphe sur $M(u, \Gamma)$. Lorsque l'on relève ce genre de tenseur à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, les tenseurs obtenus sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sont invariants à droite. On pourrait donc penser qu'ils ne sont pas tous atteints avec cette construction, cependant, nous avons le théorème suivant :

Théorème D.

Tout tenseur holomorphe sur $M(u, \Gamma)$ se relève dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ en un tenseur invariant à droite par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et à gauche par $u(\Gamma)$.

Démonstration. Fixons une représentation $\sigma : \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$. Remarquons qu'en fixant σ, nous fixons aussi le type de tenseur (par exemple, nous verrons plus tard que si $\sigma = Id$, les tenseurs obtenus sont des champs de vecteurs).
On se donne un tenseur

$$\begin{aligned} s : M(u, \Gamma) &\to E_\sigma \\ x &\to (x, s'(x)) \end{aligned}$$

(attention, dans la littérature, la section s est souvent abusivement amalgamée avec s' et réciproquement).
Ce tenseur définit, en se relevant, une application $\Psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^d$ et a fortiori un tenseur $\Psi' = (Id, \Psi) : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^d$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^d \arrow[r] \arrow[loop above, "\Gamma"] \arrow[d, bend left, "p_1"] & E_\sigma \arrow[d, bend right, "p"'] \\
\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \arrow[u, bend left, "(Id,\Psi)"] \arrow[r, "\pi"'] \arrow[loop below, "\Gamma"] & M(u,\Gamma) \arrow[u, bend right, "(Id,s')"']
\end{tikzcd}$$

Selon ce diagramme, pour être correctement défini, Ψ doit vérifier la condition d'équivariance suivante :

$$\forall \gamma \in \Gamma,\ \Psi(u(\gamma)^{-1} x \gamma) = \sigma \circ Ad_{u(\gamma)^{-1}} \Psi(x)$$

Reprenons maintenant la même idée de démonstration que dans la deuxième partie du chapitre précédent :
On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ des fonctions holomorphes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^d$ muni de l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{T}$ suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \ \times \ \mathcal{T} &\to \mathbb{C}^d \\ ([g_1, g_2], f) &\to [g_1, g_2].f \end{aligned}$$

définie par : $\forall x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),\ [g_1, g_2].f(x) = \sigma \circ Ad_{g_1} f(g_1^{-1} x g_2)$
Encore une fois, la condition d'équivariance de Ψ définie plus haut, équivaut à l'invariance de Ψ par le sous-groupe $H = \{(u(\gamma), \gamma),\ \gamma \in \Gamma\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Lemme 20. La clôture de Zariski de H, notée $\overline{H}$, contient $\{Id\} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Démonstration. Supposons, au contraire, que $\overline{H} \cap \{Id\} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) = \{Id\} \times \{Id\}$.
Puisque la projection de $\overline{H}$ sur le deuxième facteur est un sous-groupe algébrique qui contient Γ, elle est forcément surjective. Et comme nous avons supposé l'intersection triviale, la projection sur le premier facteur doit être injective. A conjugaison près nous pouvons donc nous ramener au cas où $u(\gamma) = \gamma$, ce qui est impossible puisqu'un tel u n'est pas admissible. □

En utilisant ce lemme et en adaptant le lemme 7 qui affirme qu'un élément de $\mathcal{T}$ fixé par un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est aussi fixé par sa clôture de Zariski, on obtient ici que Ψ est fixé par $\{Id\} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et donc :

$$\forall x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),\ \forall \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),\ \Psi(x\gamma) = \Psi(x)$$

Ce qui achève la preuve du théorème B. □

3.2 Tenseurs de rang 1 et 2

3.2.1 Champs de vecteurs holomorphes

On veut maintenant étudier les champs de vecteurs sur $M(u, \Gamma)$, on place donc notre étude des tenseurs au cas où $\sigma : \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}),\ \sigma = Id$. On a alors :

$$E_\sigma = E_{Id} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3 / \sim$$

où $(x, u) \sim (y, v) \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma,\ x = u(\gamma)^{-1} y \gamma$ et $u = Ad_{u(\gamma)^{-1}}(v)$, autrement dit x et y coïncident dans $M(u, \Gamma)$ et u et v définissent le même vecteur tangent à x (ou y) dans $M(u, \Gamma)$. Donc E_{Id} est le fibré tangent à $M(u, \Gamma)$.

Reprenons un moment le morphisme de groupes $Ad : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ où G est un groupe de Lie. Par le théorème d'isomorphisme, Ad induit un isomorphisme entre $G/Ker(Ad)$ et $Ad(G)$. En prenant $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, le noyau de Ad est exactement $\{\pm Id\}$. On peut le vérifier à la main :
Les éléments dans le noyau de Ad sont les éléments qui commutent avec $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ tout entier, en particulier, en considérant la base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ donnée par

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

si $X \in Ker(Ad)$, alors $Xe_i = e_i X$, après calcul on voit que X est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Mais $X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, donc $a = \pm 1$.
Finalement, on a $Ad(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm Id\} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. A fortiori, $Ad(u(\Gamma)) \simeq u(\Gamma)/\{\pm Id\} = p \circ u(\Gamma)$, où p est la projection de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.
Avec ces considérations, voici un corollaire du théorème D :

Corollaire. Notons Ξ l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur $M(u, \Gamma)$.

- Si $p \circ u(\Gamma)$ est trivial alors $dim\Xi = 3$.
- Si $p \circ u(\Gamma)$ est abélien mais non trivial alors $dim\Xi = 1$.
- Si $p \circ u(\Gamma)$ n'est pas abélien alors $dim\Xi = 0$

Lemme 21. Le centralisateur $C_{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}(X)$ d'un élément non nul $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est au plus de dimension 1.

Démonstration. Soit X un élément de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Reprenons la base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\{e_1, e_2, e_3\}$.
Après calcul, on voit que s'il existe une paire $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, $i \neq j$ telle que $e_i,\ e_j \in C_{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}(X)$, alors X est nécessairement nul. □

Démonstration.

- Si $p \circ u(\Gamma)$ est trivial, alors $\Xi \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{Ad_{u(\Gamma)}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

- Si $p \circ u(\Gamma)$ est abélien mais non trivial alors c'est un groupe monogène donc de dimension 1 et il est le centraliseur d'un seul élément non nul.
- Si $p \circ u(\Gamma)$ n'est pas abélien alors sa dimension est nécessairement supérieure à 1 et $p \circ u(\Gamma)$ ne peut être le centralisateur d'aucun élément non nul.

□

3.2.2 Métriques holomorphes

Intéressons nous aux métriques holomorphes sur $M(u, \Gamma)$. Comme nous l'avons déjà vu, cela revient à regarder les formes quadratiques sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ invariantes par $Ad \circ u(\Gamma)$, c'est à dire que les métriques holomorphes sont des sections holomorphes de $Sym(T^*M \otimes T^*M)$. Ici aussi le théorème D s'applique et nous avons :

Corollaire.

- Si $p \circ u(\Gamma)$ est trivial alors toutes les formes bilinéaires symétriques sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sont invariantes par $Ad \circ u(\Gamma)$. Donc toute forme bilinéaire symétrique non dégénérée q sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ définit une métrique sur $M(u, \Gamma)$.
- Si $p \circ u(\Gamma)$ n'est pas trivial mais contenu dans un sous-groupe à un paramètre (il existe donc un vecteur $0 \neq v \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ tel que le sous-groupe soit donné par la géodésique émanant de l'élément neutre avec pour vecteur tangent v), les formes bilinéaires symétriques sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ invariantes par $Ad \circ u(\Gamma)$ forment un espace de dimension 2, constitué des formes du type :
$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \ \forall x, y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \ q_{\alpha,\beta}(x, y) = \alpha K(x, y) + \beta K(x, v)K(y, v).$$
- Si $p \circ u(\Gamma)$ n'est pas abélien alors, les multiples de la forme de Killing sont les seules formes qui définissent des métriques holomorphes.

Démonstration.

- Si $p \circ u(\Gamma)$ est trivial alors le résultat est évident.
- On sait déjà que les formes bilinéaires de la forme $q_\alpha(x, y) = \alpha K(x, y)$, avec $x, y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ définissent une métrique sur $M(u, \Gamma)$, mais nous avons mieux, nous savons aussi que $exp(tv)$ est stabilisé par $Ad \circ u(\Gamma)$. Ceci nous permet de dire que la forme $q(x, y) = K(x, v)K(y, v)$ est une forme quadratique non dégénérée ainsi que ses multiples. Comme précédemment, par argument de dimension, on voit que toutes les métriques sont données par somme des deux métriques définies, c'est à dire que les métriques sont données par les formes quadratiques
$$q_{\alpha,\beta}(x, y) = \alpha K(x, y) + \beta K(x, v)K(y, v).$$
- Si $p \circ u(\Gamma)$ n'est pas abélien alors il n'est le centralisateur d'aucun élément non nul et les multiples de la forme de Killing sont les seules à être invariantes par $Ad \circ u(\Gamma)$.

□

Chapitre 4

Structure de la variété algébrique $\mathcal{R}_\Gamma$

L'objectif de ce chapitre est de regarder la structure de la variété algébrique $\mathcal{R}_\Gamma$, au voisinage du morphisme trivial, pour essayer récupérer quelques caractéristiques des morphismes admissibles voisins de u_0, définissant les variétés $M(u, \Gamma)$.

4.1 Nombres de Betti

Définition. Soit X une variété complexe, le *n-ième nombre de Betti*, noté $b_i(X)$ ($\in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) est le rang du n-ième groupe d'homologie de X à valeurs dans $\mathbb{Z}$, formellement, c'est la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H_n(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ (en tensorisant par $\mathbb{Q}$, on fait une réduction modulo torsion et on obtient ainsi le rang).

Remarque. Cette définition peut bien sûr être généralisée à des espaces topologiques en prenant l'homologie singulière mais dans notre situation, les espaces considérés sont des variétés donc les homologies coïncident et la suite des nombres de Betti est beaucoup plus "raisonnable" (par exemple, si X est une variété compacte de dimension n, tous ces nombres de betti sont finis et même nuls à partir du rang n).

Nous avons vu dans le chapitre "Espace de Kuranishi" que l'espace tangent de Zariski à notre variété algébrique $\mathcal{R}_\Gamma$, s'identifie au premier groupe de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_{2,u_0}(\mathbb{C})) = H^1(\Gamma, \mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Nous aurons besoin de la dualité de Poincaré, que l'on rappelle ici :

Proposition 18. [Dualité de Poincaré] Soit M une variété fermée (c'est à dire compacte et sans bord) orientée de dimension n, alors :

$$H^k(M, \mathbb{Z}) \simeq H_{n-k}(M, \mathbb{Z}).$$

Remarque. En fait, l'anneau des coefficients $\mathbb{Z}$ pourrait être remplacé par d'autres anneaux, mais nous n'utiliserons que $\mathbb{Z}$ ici.

Corollaire. les k-ième et $(n-k)$-ième nombres de Betti d'une variété fermée, orientable et de dimension n, sont égaux.

Remarque. En fait, à l'origine, le théorème de dualité qu'avait démontré H. Poincaré était ce corollaire. Dans la littérature, on voit souvent ce théorème sous la forme de *perfect pairing* [Hat02].

Ce corollaire affirme dans notre cas que

$$b_1(M(u,\Gamma)) = b_5(M(u,\Gamma)) = \dim H_5(M(u,\Gamma)) = \dim H^1(M(u,\Gamma)).$$

De plus, nous avons montré que $H^1(M(u,\Gamma),\mathbb{C}) = H^1(\Gamma,\mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Théorème E. Caractérisation des morphismes proches de u_0

Si $b_1(\Gamma) = 0$ alors u_0 est un point isolé (c'est à dire que tout morphisme proche de u_0 lui est égal).
Si $b_1(\Gamma) = 1$ alors tout morphisme u proche de u_0, $p \circ u(\Gamma)$ est abélien.
Enfin, pour chaque entier $k \geqslant 2$, il existe un sous-groupe Γ tel que $b_1(\Gamma) = k$ et il existe des éléments de $\mathcal{R}_\Gamma$ à images non abéliennes, arbitrairement proches de u_0.

Démonstration.
$\mathbf{b_1(\Gamma) = 0}$:
Avec les précédentes remarques, le cas où $b_1(\Gamma) = 0$ est facile. En effet, d'après le lemme au voisinage de u_0, la variété algébrique $\mathcal{R}_\Gamma$ se plonge dans son espace tangent de Zariski (par définition du tangent, c'est une "approximation" de la variété en un point, localement on peut donc plonger la variété dans son tangent) identifié à $H^1(\Gamma,\mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (confère lemme 13) qui est donc de dimension $b_1(\Gamma) = 0$. Donc le morphisme u_0 est isolé.

$\mathbf{b_1(\Gamma) = 1}$:
Soit $A : \Gamma \to \mathbb{C}$ un morphisme non trivial, comme $dim\ H^1(\Gamma,\mathbb{C}) = b_1(\Gamma) = 1$, tout autre morphisme de Γ dans $\mathbb{C}$ sera un multiple de A.
On commence par montrer (par récurrence) que si u_t est un germe de courbe holomorphe dans $\mathcal{R}_\Gamma$ (avec en $t = 0,\ u_t = u_0$ le morphisme trivial), alors u_t s'écrit :

$$\gamma \in \Gamma,\ u_t(\gamma) = exp(A(\gamma)(ta_1 + t^2 a_2 + \cdots + t^k a_k) + o(t^k))$$

avec $a_i \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}),\ i = 1, \cdots k$.
Pour $k = 1$, on a par surjectivité de exp : $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (puisque l'on est dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$) :

$$u_t(\gamma) = exp(tB(\gamma) + o(t)).$$

avec $B : \Gamma \to \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.
Puisque pour tout t dans un voisinage de 0, u_t est un morphisme de Γ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on sait que B est un morphisme de Γ dans $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Donc, il existe $a_1 \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ tel que $B = a_1 A$.
Supposons maintenant que l'on ait le résultat jusqu'à $k-1$.
On écrit alors :

$$\gamma \in \Gamma,\ u_t(\gamma) = exp(A(\gamma)(ta_1 + t^2 a_2 + \cdots + t^{k-1} a_{k-1}) + t^k B(\gamma) + o(t^k))$$

Utilisons encore le fait que u_t soit un morphisme, on a donc :

$$u_t(\gamma\gamma') = exp(A(\gamma\gamma')\sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i + t^k B(\gamma\gamma') + o(t^k))$$

$$= u_t(\gamma)u_t(\gamma') = exp(A(\gamma)\sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i + t^k B(\gamma) + o(t^k))\ .\ exp(A(\gamma')\sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i + t^k B(\gamma') + o(t^k))$$

En posant

$$X = A(\gamma)\sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i + t^k B(\gamma) + o(t^k) \text{ et } Y = A(\gamma')\sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i + t^k B(\gamma') + o(t^k)$$

On a :

$$\begin{aligned}
[X,Y] =& XY - YX \\
=& (A(\gamma)\sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i + t^k B(\gamma) + o(t^k)).(A(\gamma')\sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i + t^k B(\gamma') + o(t^k)) \\
&- (A(\gamma')\sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i + t^k B(\gamma') + o(t^k)).(A(\gamma)\sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i + t^k B(\gamma) + o(t^k)) \\
=& A(\gamma)A(\gamma')\big(\sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i\big)^2 - A(\gamma')A(\gamma)\big(\sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i\big)^2 \\
&+ A(\gamma)\big(\sum_{i=1}^{k-1} t^{k+i} a_i\big)B(\gamma') - A(\gamma')\big(\sum_{i=1}^{k-1} t^{k+i} a_i\big)B(\gamma) + t^{2k}(B(\gamma)B(\gamma') - B(\gamma')B(\gamma)) + o(t^k) \\
=& o(t^k)
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Campbell-Hausdorff on a :

$$\begin{aligned}
u_t(\gamma)u_t(\gamma') &= exp(X).exp(Y) \\
&= exp(X + Y + o(t^k)) \\
&= exp((A(\gamma) + A(\gamma'))\sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i + t^k(B(\gamma) + B(\gamma')) + o(t^k)) \\
= u_t(\gamma\gamma') &= exp((A(\gamma\gamma'))\sum_{i=1}^{k-1} t^i a_i + t^k B(\gamma\gamma') + o(t^k))
\end{aligned}$$

On conclut donc que B est un morphisme et finalement qu'il existe un $a_k \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ tel que $B = Aa_k$. De ceci résulte que si γ est dans $[\Gamma, \Gamma]$ alors $\gamma \in Ker(A)$ (puisque dans ce cas, il existe γ_0 et γ_1 tels que $\gamma = \gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}$, ainsi $A(\gamma) = A(\gamma_0)A(\gamma_1)A(\gamma_0)^{-1}A(\gamma_1)^{-1} = 0$) donc $u_t(\gamma) = Id$. Finalement, $u_t([\Gamma,\Gamma]) = [u_t(\Gamma), u_t(\Gamma)] = Id$ ce qui équivaut au fait que $u_t(\Gamma)$ est abélien.

$\mathbf{b_1(\Gamma) \geqslant 2}$:

Dans son article, Etienne Ghys donne une construction explicite de morphismes u_λ à image non abélienne. Par manque de temps, nous ne traiterons pas ce cas, cependant le lecteur pourra consulter son article [Ghy95] pour voir cette construction.

□

Parmis les résultats sur la structure de la variété algébrique $\mathcal{R}_\Gamma$, il en est un qu'il est important de donner. Nous n'aurons pas le temps d'en faire la démonstration mais voici son énoncé :

Proposition 19. Si $b_1(\Gamma) \geqslant 1$ alors la variété $\mathcal{R}_\Gamma$ peut présenter une singularité en son point base.

Annexe A

Cohomologie de groupes

Le lecteur trouvera plus de détails pour cette section dans [Mum08] ou bien [Bro94].

Soient Γ un groupe de type fini et V un Γ-module. On considère le complexe de chaînes suivant :

$$\cdots \to C^k(\Gamma, V) \xrightarrow{d} C^{k+1}(\Gamma, V) \to \cdots$$

où $C^0(\Gamma, V) = V$ et $C^k(\Gamma, V) = \{f : \overbrace{\Gamma \times \cdots \times \Gamma}^{\text{k fois}} \to V\}$
Et l'application de cobord d est donnée par :
$df(\gamma_0, \cdots, \gamma_k) = \gamma_0.f(\gamma_1, \cdots, \gamma_k) + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i f(\gamma_0, \cdots, \gamma_i\gamma_{i+1}, \cdots, \gamma_k) + (-1)^k f(\gamma_0, \cdots, \gamma_{k-1})$.
Comme d'habitude, on appelle k-cocycle, un élément de $Ker(d : C^k \to C^{k+1})$ et k-cobord, un élément de $Im(d : C^{k-1} \to C^k)$.

On définit alors le k-ième groupe de cohomologie $H^k(\Gamma, V)$ comme le quotient de l'ensemble des k-cocycles par l'ensemble des k-cobords. On consultera une des références données pour vérifier que ceci a bien un sens.

Nous nous intéresserons dans ce mémoire plus particulièrement aux cas, $k = 0, 1$. Nous avons donc :

$k = 0$ **:**
Pour $v \in V = C^0(\Gamma, V),\ \forall\gamma \in \Gamma,\ dv(\gamma) = \gamma.v - v$. Donc $H^0(\Gamma, V)$ est l'ensemble des éléments de V invariants sous l'action de Γ. En bref, pour tout Γ-module V, on a montré que

$$H^0(\Gamma, V) = V^\Gamma$$

$k = 1$ **:**
Pour $f \in C^1(\Gamma, V),\ \forall\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma,\ df(\gamma_0, \gamma_1) = \gamma_0.f(\gamma_1) - f(\gamma_0\gamma_1) + f(\gamma_0)$.
Un 1-cocycle est donc un élément $f : \Gamma \to V$ tel que $f \in Ker(d : C^1 \to C^2)$, c'est à dire : $\forall\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma,\ f(\gamma_0\gamma_1) = f(\gamma_0) + \gamma_0.f(\gamma_1)$.

Annexe B

Fibré des repères d'une variété hyperbolique

Mis à part l'intérêt de répondre par l'affirmative à la question de l'existence de déformations des espaces homogènes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (alors que le théorème de rigidité de Mostow laisse à croire l'inverse), il en est un autre qu'il est important de citer. En effet, nous verrons dans ce paragraphe que notre variété $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ peut être vue comme le fibré des répères d'une variété hyperbolique réelle compacte de dimension 3.
Nous donnerons donc dans cette annexe, quelques résultats intéressants mais pas nécessaires pour la compréhension de ce mémoire.

B.1 Variétés hyperboliques

Définition. Une *variété hyperbolique* est une n-variété riemannienne de courbure constante négative.

Il vient alors que si V est une variété hyperbolique connexe et simplement connexe alors elle est isométrique à $\mathbb{H}^3$. En particulier, si V n'est pas simplement connexe, son revêtement est $\mathbb{H}^3$ donc on peut écrire V comme le quotient de $\mathbb{H}^3$ par un sous-groupe discret des isométries de $\mathbb{H}^3$.

Proposition 20. Le groupe des isométries de $\mathbb{H}^3$ préservant l'orientation (isométries directes), noté $Isom^+(\mathbb{H}^3)$ est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Démonstration. [MR03] □

Corollaire. Si V est une variété hyperbolique réelle de dimension 3, on a :

$$V \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma, \text{ où } \Gamma \text{ est un sous groupe discret agissant librement sur } \mathbb{H}^3 \text{ de } \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

B.2 La variété M vue comme fibré

B.2.1 Fibrés des repères

Soit V une variété riemannienne de dimension 3 et soit $\pi : E \to V$ un fibré vectoriel de rang k sur V. En chaque point $x \in V$ on peut donner une base de l'espace vectoriel $E_x = \pi^{-1}(x)$, de façon équivalente, se donner une base de E_x revient à avoir un isomorphisme linéaire entre $\mathbb{R}^k$ et E_x. Si, étant donné un $x \in V$, on considère l'ensemble des repères F_x (qui est donc homéomorphe, comme espace topologique, à $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$), alors on voit qu'il est possible de munir l'union disjointe $F(E) = \bigsqcup_{x \in V} F_x$ d'une structure de fibré induite par celle de E. Voici une construction de trivialisation locale :
Soit (U_i, ϕ_i) une trivialisation locale du fibré E. Comme nous l'avons vu, pour chaque $x \in V$, $\phi_i|_x : E_x \to \mathbb{R}^k$ est un isomorphisme linéaire, ceci nous donne

$$\begin{aligned} \psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to & U_i \times \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \\ (x, p) \to & \psi_i(x, \psi_i|_x \circ p) \end{aligned}$$

où $(x, p) \in F(E)$ est une paire composée d'un point $x \in V$ et d'un repère pris dans F_x.

Proposition 21. Soit V une variété hyperbolique réelle compacte de dimension 3. Son fibré des repères orthonormés directs M est naturellement identifié à une variété de la forme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$, où Γ est un sous-groupe discret co-compact.

Démonstration. $Isom^+(\mathbb{H}^3) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ agit librement transitivement sur les repères orthonormés directs de $\mathbb{H}^3$ de sorte que l'espace homogène $M \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ est le fibré des repères de ce revêtement, où Γ est le groupe fondamental de ce revêtement. □

B.2.2 Structure presque complexe et courbure

Lemme 22. Soient V une variété hyperbolique réelle de dimension 3, M le fibré de ses repères orthonormés directs (c'est à dire de fibre $SO_3(\mathbb{R})$). Alors, le fibré tangent à M est trivial et s'écrit :

$$M \times (\mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}^3)$$

où $\mathfrak{so}(3)$ est l'algèbre de Lie de $SO_3(\mathbb{R})$ constituée des matrices antisymétriques.

Démonstration. [KN96] □

On rappelle qu'une structure presque complexe sur une variété différentielle réelle est la donnée d'une structure d'espace vectoriel complexe sur chaque espace tangent.

Lemme 23. On peut munir notre $SO_3(\mathbb{R})$-fibré principal M d'une structure presque-complexe.

Démonstration. Considérons l'isomorphisme I qui, à un vecteur de $\mathbb{R}^3$, associe l'endomorphisme du produit vectoriel avec celui-ci sous sa forme matricielle, c'est à dire :

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R}^3 \to & \mathfrak{so}(3) \\ r : (x, y, z) \to & \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'application J donnée par :

$$J : \mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}^3$$
$$r : (x, y) \to (-I(y), I^{-1}(x))$$

permet de munir chaque espace tangent d'une structure espace vectoriel complexe, en effet :

$$\forall (x, y) \in T_pM \simeq (\mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}^3),\ J \circ J(x, y) = (-I(I^{-1}(x)), I^{-1}(-I(y))) = (-x, -y)$$

□

Pour énoncer le prochain résultat, nous avons besoin de la notion de courbure. Nous n'allons pas trop rentrer dans la théorie mais simplement utiliser la connexion de Levi-Civita pour définir le tenseur de courbure.

Définition. Soit M une variété complexe. Notons $C^\infty(M, TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M (ce qui correspond à l'espace des sections holomorphes du tangent TM). Une *connexion affine* sur M est la donnée d'une application bilinéaire

$$\nabla : C^\infty(M, TM) \times C^\infty(M, TM) \to C^\infty(M, TM)$$
$$(X, Y) \to \nabla_X Y$$

telle que pour toute application $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ et pour tout couple de champs de vecteurs (X, Y) on ait :

- $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
- ∇ satisfasse la règle de Leibniz sur la deuxième variable, c'est à dire : $\nabla_X(fY) = df(X)Y + f\nabla_X Y$

Définition. Une connexion affine ∇ sur une variété complexe M munie d'une métrique riemanienne g est appelée *connexion de Levi-Civita* si :

- elle est compatible avec la métrique, c'est à dire $\nabla g = 0$
- elle est symétrique, c'est à dire si pour tous champs de vecteurs X et Y on a : $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

Définition. On appelle *tenseur de courbure* R, le tenseur associé à la connexion de Levi-Civita donné par la formule :

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Si X, Y sont deux vecteurs unitaires orthogonaux, on appelle *courbure sectionnelle* déterminée par X et Y la quantité :

$$< R(X, Y)X, Y >$$

Proposition 22. La structure presque complexe J sur M est *intégrable*, c'est à dire qu'elle munie M d'un atlas holomorphe (ce qui en fait une variété complexe) si et seulement si la variété V est à courbure sectionnelle constante -1.

Démonstration. Si V est de courbure constante négative alors V est une variété hyperbolique et nous l'avons vu plus haut, $M \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ est munie d'une structure complexe donc J est intégrable.

Supposons maintenant la structure presque complexe J intégrable. Prenons la base canonique de $\mathbb{R}^3$, (e_1, e_2, e_3) et formons la base de $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}^3$ par $(e_1, e_2, e_3) \oplus (I(e_1), I(e_2), I(e_3))$. Remarquons que $SO_3(\mathbb{R})$ agit via la représentation adjointe sur $\mathfrak{so}(3)$ et sur $\mathbb{R}^3$ par composition de I^{-1} et de Ad. Cette action préserve la structure presque complexe J. Prenons $X \in SO_3(\mathbb{R}),\ (x, y) \in (\mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}^3)$, nous avons :

$$\begin{aligned} J(Ad_X(x), Ad_{I^{-1}(X)}(y)) =& (-I(Ad_{I^{-1}(X)}(y)), I^{-1}(Ad_X(x))) \\ =& (Ad_X(-I(y)), Ad_{I^{-1}(X)}(I^{-1}(x))) \end{aligned}$$

Ainsi, comme nous avons supposé la structure J intégrable, les 3 vecteurs $I(e_1), I(e_2), I(e_3)$ définissent des champs de vecteurs holomorphes sur M. Par isomorphisme, e_1, e_2, e_3 sont aussi des champs de vecteurs holomorphes. Le calcul de la courbure sectionnelle déterminée par e_1 et e_2 est fait dans [Mil63] et dans ce cas on trouve pour $i \neq j$: $[e_i, e_j] = -[I(e_i), I(e_j)]$ il vient donc :

$$< R(e_i, e_j)e_i, e_j >= (R(e_i, e_j)e_i).e_j = (-(e_i \wedge e_j) \wedge e_i).e_j = -||e_i \wedge e_j||^2 = -1$$

□

Bibliographie

[BG04] N. Bergeron and T. Gelander. A note on local rigidity. *Geom. Dedicata*, 107 :111–131, 2004.

[Bro94] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1982 original.

[Car53] Henri Cartan. Variétés analytiques complexes et cohomologie. In *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, tenu à Bruxelles, 1953*, pages 41–55. Georges Thone, Liège ; Masson & Cie, Paris, 1953.

[Cou18] Rémi Coulon. *Théorie géométrique des groupes*. 2018. Cours de Master 2 suivi à Rennes au deuxième semestre en 2018.

[Die71] Jean A. Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. Troisième édition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 5.

[Dou62] A. Douady. Obstruction primaire à la déformation. Familles d'Espaces Complexes et Fondements de la Geom. Anal., Sem. H. Cartan 13 (1960/61), No.4, 19 p. (1962)., 1962.

[Ehr95] Charles Ehresmann. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 1*, pages Exp. No. 24, 153–168. Soc. Math. France, Paris, 1995.

[GH94] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.

[Ghy95] Étienne Ghys. Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$. *J. Reine Angew. Math.*, 468 :113–138, 1995.

[GR09] Robert C. Gunning and Hugo Rossi. *Analytic functions of several complex variables*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009. Reprint of the 1965 original.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[KN96] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Kur62] M. Kuranishi. On the locally complete families of complex analytic structures. *Ann. of Math. (2)*, 75 :536–577, 1962.

[Mil63] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

[MK06] James Morrow and Kunihiko Kodaira. *Complex manifolds*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2006. Reprint of the 1971 edition with errata.

[Mos73] G. D. Mostow. *Strong rigidity of locally symmetric spaces*. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1973. Annals of Mathematics Studies, No. 78.

[MR03] Colin Maclachlan and Alan W. Reid. *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*, volume 219 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[Mum08] David Mumford. *Abelian varieties*, volume 5 of *Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics*. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Hindustan Book Agency, New Delhi, 2008. With appendices by C. P. Ramanujam and Yuri Manin, Corrected reprint of the second (1974) edition.

[Rag65] M. S. Raghunathan. On the first cohomology of discrete subgroups of semisimple Lie groups. *Amer. J. Math.*, 87 :103–139, 1965.

[Rag66] M. S. Raghunathan. Vanishing theorems for cohomology groups associated to discrete subgroups of semisimple Lie groups. *Osaka J. Math.*, 3 :243–256, 1966.

[Ser01] Jean-Pierre Serre. *Complex semisimple Lie algebras*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Translated from the French by G. A. Jones, Reprint of the 1987 edition.

[Thu97] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.

[Voi14] Claire Voisin. *Géométrie différentielle complexe, faisceaux et cohomologie*. 2014. Cours à polytechnique.

[Wei62] André Weil. On discrete subgroups of Lie groups. II. *Ann. of Math. (2)*, 75 :578–602, 1962.

[Wei64] Andre Weil. Remarks on the cohomology of groups. *Annals of Mathematics*, 80(1) :149–157, 1964.