

Mémoire de Master 2 de Mathématiques Fondamentales

TOPOLOGIE DES SINGULARITÉS CUSPIDALES

Fabien KÜTLE

Sous la direction de Marco GOLLA et Vincent COLIN

AVRIL - JUIN 2018

UNIVERSITÉ DE NANTES

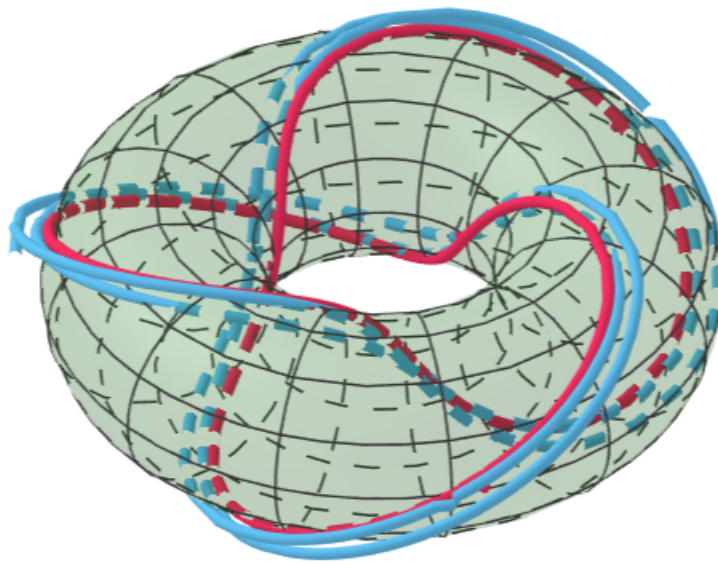


Table des matières

1	Paramétrisation locale d'une courbe algébrique plane	5
1.1	Définitions, notations	5
1.2	Le théorème de Puiseux	6
1.3	Branches	9
1.4	Suite caractéristique de Puiseux	11
2	Topologie d'une singularité	13
2.1	Rappels sur les champs de vecteurs	13
2.2	Nœuds et entrelacs	14
2.3	Géométrie de l'entrelacs	17
2.4	Nœuds câblés	19
2.5	Polynôme d'Alexander	25
3	Semi-groupe d'une branche	29
3.1	Propriétés des semi-groupes	29
3.2	Retour sur le polynôme d'Alexander	33
4	Courbes rationnelles cuspidales	37
4.1	Voisinage "tubulaire" d'une courbe rationnelle cuspidale	37
4.2	Structures Spin^c	38
4.3	Homologie de Heegaard Floer pour les nœuds	38
4.4	Complexe en escaliers	39
5	Contraintes sur les points singuliers des courbes rationnelles cuspidales	41
5.1	Théorème de Borodzik et Livingston	41
5.2	Lien entre le complexe en escaliers et le d -invariant	42
5.3	Démonstration du Théorème de Borodzik et Livingston	44
5.4	Généralisation du Théorème de Borodzik et Livingston	45
5.5	Reformulation du Théorème de Borodzik et Livingston	47
5.6	Applications	49

Introduction

Lors de mon stage, j'ai étudié l'article [1] de Maciej Borodzik et Charles Livingston sur les courbes rationnelles cuspidales et l'homologie de Heegaard Floer. Les auteurs y étudient des propriétés topologiques des points singuliers sur les courbes rationnelles cuspidales. Leur but est de démontrer un résultat, que j'ai nommé le Théorème de Borodzik et Livingston dans ce mémoire, permettant de calculer certains coefficients obtenus à partir du polynôme d'Alexander du nœud d'une singularité cuspidale. Pour ce faire, ils mettent en relation différents invariants issus de la géométrie de la singularité. Certains de ces invariants sont obtenus à partir d'une paramétrisation locale de la courbe au voisinage de la singularité, et d'autres sont issus de l'homologie de Heegaard Floer.

Mon objectif lors de la rédaction de ce mémoire était d'apporter le contenu mathématique nécessaire pour définir et mettre en relation la plupart de ces invariants, tout en utilisant l'homologie de Heegaard Floer comme une boîte noire, c'est-à-dire en admettant les résultats liés à cette théorie. Mon travail lors du stage a donc consisté à chercher, regrouper et organiser de manière cohérente les éléments mathématiques servant à définir et mettre en lien les différents invariants. J'ai également détaillé, complété ou modifié certaines preuves et j'ai apporté quelques corrections mineures à certaines d'entre elles. J'ai essayé de présenter de la manière la plus claire possible ce qui me semblait être indispensable à la compréhension de l'article tout en produisant un mémoire le plus "auto-suffisant" possible. À plusieurs reprises, j'ai choisi de contourner certaines notions quand elles n'étaient pas au cœur du sujet, et j'ai pour cela, parfois adopté une présentation différente ou conçu certaines preuves et afin qu'elles puissent servir de raccourcis dans une étude qui se voulait un peu plus générale.

Dans la première partie, on explique comment paramétrer localement les germes de courbes holomorphes de \mathbb{C}^2 au voisinage de $(0, 0)$, et on montre que cette paramétrisation est essentiellement unique dans un sens qu'on précisera plus tard. De cette paramétrisation, on extrait un invariant numérique : la suite caractéristique de Puiseux. Dans la seconde partie, on montre comment à germe de courbe irréductible, on peut associer un unique nœud (à isotopie près). Ce nœud possède un invariant qu'on appelle le polynôme d'Alexander, qu'on peut exprimer grâce à la caractéristique de Puiseux. Dans la troisième partie, on associe à un germe de courbe irréductible un semi-groupe dont on peut extraire un autre invariant : la suite de sauts. On exprime alors le polynôme d'Alexander en fonction de la suite des sauts. Chacune des deux dernières parties comporte un bilan expliquant en quoi les différents invariants qu'elles introduisent sont équivalents. Ces trois premières parties sont très centrées sur l'étude locale des singularités.

La quatrième partie aborde le problème sous un autre angle, en adoptant cette fois un point de vue plus global. On y introduit les résultats d'homologie de Heegaard Floer, dont on se servira de boîte noire, et qu'on utilisera dans la preuve du Théorème de Borodzik et Livingston.

Enfin, la cinquième et dernière partie est consacrée à la démonstration du Théorème telle qu'elle est décrite dans l'article [1]. Elle comporte une composante géométrique et une composante un peu plus combinatoire. Elle consiste à calculer certains invariants grâce aux résultats de l'homologie de Heegaard Floer. Les résultats des quatre parties précédentes s'y recourent.

Je tiens à remercier mes encadrants Marco Golla et Vincent Colin pour leur patience, pour leurs relectures attentives, ainsi que pour m'avoir guidé tout au long du stage et m'avoir prodigué de précieux conseils.

1 Paramétrisation locale d'une courbe algébrique plane

Dans cette première partie, on montre qu'on peut paramétrer localement une courbe algébrique plane de manière essentiellement unique. De cette paramétrisation, on extrait un certain nombre d'invariants numériques, notamment la suite caractéristique de Puiseux, qui joueront un rôle central tout au long de ce mémoire. Les théorèmes et démonstrations de cette partie peuvent être trouvés dans [2].

1.1 Définitions, notations

On commence par préciser le type de courbes sur lesquelles on travaille, et par introduire quelques définitions pour poser le cadre de notre étude.

Définition 1.1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un ensemble C de $\mathbb{C}P^2$ est une courbe algébrique plane de degré d s'il existe un polynôme $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ homogène de degré d tel que $C = \{[x : y : z] \in \mathbb{C}P^2 \mid F(x, y, z) = 0\}$. On dit de plus que C est irréductible si le polynôme F est irréductible.

Dans cette partie, on va s'intéresser aux propriétés locales des courbes planes. Pour cela, il suffit d'étudier nos courbes dans des cartes affines, c'est-à-dire les zéros de polynômes de $\mathbb{C}[x, y]$. On va donc principalement s'intéresser aux courbes définies dans un voisinage de $O = (0, 0)$ de $\mathbb{C}P^2$. Pour cette étude locale, il n'est pas important de faire la différence entre le fait que l'équation définissant la courbe soit définie par un polynôme ou par une fonction analytique. Dans la suite de ce mémoire on notera $C\{x\}$ l'ensemble des séries entières convergentes définies au voisinage de 0 et $C\{x, y\}$ l'ensemble des séries entières convergentes définies au voisinage de O . On rappelle qu'un élément de $C\{x, y\}$ s'écrit au voisinage de O sous la forme $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} x^i y^j$, et que l'ordre de cette série est le plus petit entier n tel que $a_{i,j}$ est non nul, avec $i + j = n$.

Un objet adapté à l'étude locale des courbes est le germe de courbe. On peut toujours se ramener au cas où on étudie la courbe au voisinage de O .

Définition 1.2. On dit que deux fonctions holomorphes définies sur un voisinage de O dans \mathbb{C}^2 définissent le même germe de courbes en O si elles coïncident sur un voisinage de O .

Soit U_1 et U_2 deux voisinages ouverts de O dans \mathbb{C}^2 . Soit X_1 et X_2 des sous-ensembles respectifs de U_1 et U_2 . On dit que X_1 et X_2 définissent le même germe en O si on dispose d'un ouvert $U \subset U_1 \cap U_2$ contenant O tel que $X_1 \cap U = X_2 \cap U$.

En pratique, plutôt que d'utiliser le terme "germe", on parlera de courbe définie au voisinage de O et on s'autorisera à réduire le voisinage sur lequel elle est définie.

Une autre approche pour étudier localement les courbes algébriques planes consiste à s'intéresser à leur paramétrisation.

Définition 1.3. Soit C une courbe algébrique plane. Une application φ définie au voisinage de 0 dans \mathbb{C} et à valeurs dans C est une paramétrisation locale de la courbe C en O s'il existe un voisinage U de 0 et un voisinage V de O tels que l'application $\varphi : U \rightarrow V \cap C$ est surjective.

On dit de plus que c'est une bonne paramétrisation si φ est bijective.

A de multiples reprises, on devra compter le nombre de points d'intersections entre deux courbes définies localement au voisinage de O , comptées avec multiplicités. On peut donner un sens précis à cette notion.

Définition 1.4. Soit C_1 une courbe algébrique plane définie au voisinage de 0 par l'équation $g(x, y) = 0$, et C_2 une courbe algébrique plane définie au voisinage de 0 par une bonne paramétrisation φ . Alors le nombre d'intersection de C_1 et C_2 en O est défini comme étant l'ordre de $g \circ \varphi$. On le note $(C_1 \cdot C_2)_O$.

On peut montrer que le nombre d'intersection est symétrique et qu'il ne dépend pas du choix des cartes (voir [2]).

1.2 Le théorème de Puiseux

On aborde à présent quelques théorèmes techniques qui vont nous permettre de montrer l'existence d'une bonne paramétrisation d'un germe de courbe en O .

Définition 1.5. Soit $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ et m un entier naturel. On dit que f est régulière d'ordre m en y s'il existe A une série entière convergente définie au voisinage de 0 , tels que $A(0) \neq 0$ et $f(0, y) = y^m A(y)$.

Théorème 1.6 (Théorème de préparation de Weierstrass). Soit $G \in \mathbb{C}\{x, y\}$ régulière d'ordre $s \in \mathbb{N}$ en y . Alors il existe $U \in \mathbb{C}\{x, y\}$ avec un terme constant non nul et pour tout $r \in \{0, \dots, s-1\}$, $A_r \in \mathbb{C}\{x\}$ telles qu'au voisinage de O on a

$$G(x, y) = U(x, y) \left(y^s + \sum_{r=0}^{s-1} A_r(x) y^r \right).$$

Théorème 1.7 (Théorème de division). Soit $s \in \mathbb{N}$ et $F \in \mathbb{C}\{x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_s\}$. Notons $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ et posons $P_s(y, \lambda) = y^s + \sum_{i=1}^s \lambda_i y^{s-i}$. Alors il existe $Q \in \mathbb{C}\{x, y, \lambda\}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, $A_i \in \mathbb{C}\{x, \lambda\}$ uniques telles qu'au voisinage de $(0, 0, \underline{0})$, on a

$$F(x, y, \lambda) = P_s(y, \lambda)Q(x, y, \lambda) + R(x, y, \lambda),$$

où $R(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^s A_i(x, \lambda) y^{s-i}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} P_s(z, \lambda) - P_s(y, \lambda) &= (z - y) \left(\sum_{i=1}^s z^{i-1} y^{s-i} + \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_j \sum_{k=1}^{s-j} z^{k-1} y^{s-j-k} \right) \\ &= (z - y) \left(\sum_{i=1}^s z^{i-1} y^{s-i} + \sum_{i=2}^s \sum_{\substack{k+j=i \\ i, j \geq 1}} \lambda_j z^{k-1} y^{s-i} \right) \\ &= (z - y) \left(P_0(z, \lambda) y^{s-1} + \sum_{i=2}^s y^{s-i} \left[z^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j z^{i-j-1} \right] \right) \\ &= (z - y) \sum_{i=1}^s P_{i-1}(z, \lambda) y^{s-i}, \end{aligned}$$

ainsi on obtient

$$\frac{1}{z - y} = \frac{P_s(y, \lambda)}{(z - y)P_s(z, \lambda)} + \sum_{i=1}^s \frac{P_{i-1}(z, \lambda)}{P_s(z, \lambda)} y^{s-i}.$$

Puisque qu'on ne s'intéresse qu'au voisinage de $(0, 0, \underline{0})$, on peut se restreindre au cas où λ est dans un voisinage compact de $\underline{0}$, les zéros de $z \mapsto P_s(z, \lambda)$ sont alors contenus dans un voisinage compact de 0 . On peut alors choisir un lacet γ d'indice 1 autour de 0 qui les encercle tous. Par la formule de Cauchy, on a alors au voisinage de 0 ,

$$F(x, y, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{F(x, y, \lambda)}{z - y} dz.$$

En posant au voisinage de $(0, 0, \underline{0})$,

$$Q(x, y, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{F(x, y, \lambda)}{(z - y)P_s(z, \lambda)} dz,$$

et pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$,

$$A_i(x, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{P_{i-1}(z, \lambda)F(x, y, \lambda)}{P_s(z, \lambda)} dz,$$

on obtient l'existence.

L'unicité est une conséquence immédiate du fait que le degré de $R(x, y, \lambda)$ en y est strictement plus petit que le degré de $P_s(y, \lambda)$ en y . \square

Démonstration du Théorème de Préparation de Weierstrass. Puisque $G(x, y)$ est régulière d'ordre s en y , le coefficient de y^s est un complexe non nul c . Appliquons le théorème de division à $F(x, y, \lambda) = G(x, y)$. En évaluant en $x = 0$, on obtient au voisinage de $(0, 0, \underline{0})$,

$$G(0, y) = P_s(y, \lambda)Q(0, y, \lambda) + \sum_{i=1}^s A_i(0, \lambda)y^{s-i}.$$

On commence tout d'abord par évaluer en $\lambda = \underline{0}$, on obtient alors au voisinage de 0 ,

$$G(0, y) = y^s Q(0, y, \underline{0}) + \sum_{i=1}^s A_i(0, \underline{0})y^{s-i}.$$

Puisque $G(x, y)$ est régulière d'ordre s en y , on déduit par identification des coefficients que $Q(0, 0, \underline{0}) = c$ et pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, $A_i(0, \underline{0}) = 0$.

Ensuite, pour $j \in \{1, \dots, s\}$, on différencie les deux côtés par rapport à λ_j et on évalue à nouveau en $\lambda = \underline{0}$. On obtient au voisinage de 0 ,

$$0 = y^{s-j} Q(0, y, \underline{0}) + y^s \frac{\partial Q}{\partial \lambda_j}(0, y, \underline{0}) + \sum_{i=1}^s \frac{\partial A_i}{\partial \lambda_j}(0, \underline{0})y^{s-i}.$$

Par identification des coefficients, on obtient alors que pour tous $i, j \in \{1, \dots, s\}$,

$$\frac{\partial A_i}{\partial \lambda_j}(0, \underline{0}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \\ -c & \text{si } j = i \end{cases}.$$

Puisque la matrice $\left(\frac{\partial A_i}{\partial \lambda_j}(0, \underline{0}) \right)_{1 \leq i, j \leq s}$ est inversible, on a d'après le théorème des fonctions implicites l'existence d'une fonction H holomorphe au voisinage de 0 et à valeurs dans \mathbb{C}^s telle que pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, on a au voisinage de 0 , $A_i(x, H(x)) = 0$. En remplaçant λ par $H(x)$ dans l'égalité donnée par le théorème de division, on obtient au voisinage de $(0, 0)$,

$$G(x, y) = Q(x, y, H(x))P_s(y, H(x)),$$

ce qui correspond à la forme voulue puisque $Q(0, 0, \underline{0})$ est non nul et

$$P_s(y, H(x)) = y^s + \sum_{i=1}^s H_i(x)y^{s-i}. \quad \square$$

Le théorème suivant utilise le Théorème de préparation de Weierstrass pour pouvoir montrer l'existence de la paramétrisation voulue.

Théorème 1.8. *Soit $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ telle que $f(0, 0) = 0$ et $y \mapsto f(0, y)$ n'est pas identiquement nulle. Alors on a les résultats suivants :*

1. *Il existe $g \in \mathbb{C}\{z\}$ et $m_1 \in \mathbb{N}^*$ tels que $x \mapsto \left(x, g\left(x^{\frac{1}{m_1}}\right)\right)$ est une solution de l'équation $f(x, y) = 0$ au voisinage de 0.*
2. *Si de plus f est régulière d'ordre $m \in \mathbb{N}$ et qu'on écrit $f = UA$, où U est inversible et A un polynôme unitaire de degré m en y , on dispose de m telles solutions $x \mapsto \left(x, g_j\left(x^{\frac{1}{m_j}}\right)\right)$, toutes distinctes, à moins que le discriminant de F soit identiquement nul, et on a au voisinage de $(0, 0)$,*

$$A(x, y) = \prod_{j=1}^m \left(y - g_j\left(x^{\frac{1}{m_j}}\right)\right).$$

Démonstration. On commence par supposer que $f(x, y)$ est régulière d'ordre m en y . D'après le Théorème de Préparation de Weierstrass, on dispose de $U \in \mathbb{C}\{x, y\}$ inversible et de $A \in (\mathbb{C}\{x\})[y]$ de degré m tel que

$$f(x, y) = U(x, y)A(x, y).$$

Puisque $U(0, 0) \neq 0$, il existe un voisinage de O sur lequel U ne s'annule pas. On dispose alors de $\epsilon > 0$ tel que si $|x| < 2\epsilon$ et $|y| < 2\epsilon$, toutes les séries considérées ci-dessus convergent. Ainsi, les lieux des zéros de f et de A coïncident sur ce voisinage.

La série $A(x, y)$ est un polynôme en y , son discriminant $D(A)$ appartient donc à $\mathbb{C}\{x\}$. Si $D(A)$ est identiquement nul, alors A a un facteur multiple. Notons h le plus grand diviseur commun de A et $\frac{\partial A}{\partial y}$. Alors $\frac{A}{h}$ possède le même lieu des zéros que A , mais n'a pas de facteur multiple. Quitte à remplacer A par $\frac{A}{h}$, on peut donc supposer que $D(A)$ n'est pas identiquement nul. Quitte à réduire ϵ , on peut supposer que pour $0 < |x| < 2\epsilon$, on a $D(A)(x) \neq 0$.

Ainsi, pour tout x vérifiant $0 < |x| < 2\epsilon$, on a une équation polynomiale $A(x, y) = 0$ en y avec m racines distinctes $y_1(x), \dots, y_m(x)$. On a donc pour tout $0 < |x| < 2\epsilon$ et $r \in \{1, \dots, m\}$, $A(x, y_r(x)) = 0$ ainsi que $D(A)(x) \neq 0$, donc $\frac{\partial A}{\partial y}(x) \neq 0$. On peut alors appliquer le Théorème des Fonctions Implicites pour affirmer l'existence d'une fonction holomorphe y_i au voisinage d'un tel point x_0 telle que pour x au voisinage de x_0 et y au voisinage de $y_i(x_0)$, on a $A(x, y) = 0$ si et seulement si $y = y_i(x)$.

Chaque fonction y_i est bien définie au voisinage de x_0 , de sorte qu'on peut prolonger par continuité y_i à tout chemin tracé dans la région $0 < |x| < 2\epsilon$. Si le chemin retourne à son point de départ, y_i se prolonge en une valeur y vérifiant $A(x, y) = 0$, mais qui n'est pas forcément égale à $y_i(x)$. Mais puisque (x, y) est un zéro de A , on dispose de $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que $y = y_j(x)$. On peut ainsi prolonger chaque y_i en une fonction définie sur la région $\{x \in \mathbb{C} \mid 0 < |x| < 2\epsilon\}$ privée de la demi-droite constituée des réels négatifs.

Posons $\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto \epsilon e^{i\theta}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, notons $\sigma(i)$ l'unique $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que $y_i(\gamma(2\pi)) = y_j(\gamma(0))$. On définit ainsi une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, qui peut être décomposée en produit de cycles disjoints. Posons $m_0 = 0$, quitte à ré-indexer les fonctions permutées, on peut supposer qu'il existe m_1, \dots, m_k avec $m_1 + \dots + m_k = m$ tels que pour tout $\ell \in \{1, \dots, k\}$, $\sigma(m_1 + \dots + m_{\ell-1} + 1) = m_1 + \dots + m_{\ell-1} + 2, \dots, \sigma(m_1 + \dots + m_{\ell} - 1) = m_1 + \dots + m_{\ell}, \sigma(m_1 + \dots + m_{\ell}) = m_1 + \dots + m_{\ell-1} + 1$. En particulier, pour un lacet γ_0 d'indice m_{ℓ} autour de l'origine, on a $y_{m_1 + \dots + m_{\ell-1} + 1}(\gamma_0(0)) = y_{m_1 + \dots + m_{\ell-1} + 1}(\gamma_0(2\pi))$. Notons que c'est le même comportement que la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{m_{\ell}}} = \exp\left(\frac{\text{Log}(x)}{m_{\ell}}\right)$, où Log désigne la détermination principale du logarithme. Ainsi la fonction $x \mapsto y_{m_1 + \dots + m_{\ell-1} + 1}\left(x^{\frac{1}{m_{\ell}}}\right)$ est bien définie dans la région $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < (2\epsilon)^{\frac{1}{m_{\ell}}}\right\}$.

Soit $\ell \in \{1, \dots, k\}$, on peut développer $y_{m_1+\dots+m_{\ell-1}+1}$ en série de Laurent dans cette région, et les coefficients de la série de Laurent $y_{m_1+\dots+m_{\ell-1}+1}(z) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} a_{\ell,r} z^r$ vérifient pour tout $r \in \mathbb{Z}$,

$$a_{\ell,r} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{y_{m_1+\dots+m_{\ell-1}+1}(z)}{z^{r+1}} dz,$$

donc

$$|a_{\ell,r}| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \epsilon \frac{\sup_{\gamma} |y_{m_1+\dots+m_{\ell-1}+1}|}{\epsilon^{r+1}} = \epsilon^{-r} \sup_{\gamma} |y_{m_1+\dots+m_{\ell-1}+1}|.$$

Si $r \leq 0$, on a $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-r} \sup_{\gamma} |y_{m_1+\dots+m_{\ell-1}+1}| = 0$, donc $a_{\ell,r} = 0$. On a donc un développement en série entière de $y_{m_1+\dots+m_{\ell-1}+1}$ convergent au voisinage de l'origine en puissances positives de $z = x^{\frac{1}{m_{\ell}}}$. \square

Il existe aussi une approche plus constructive mais moins géométrique pour le théorème de Puiseux, par la méthode des polygones de Newton, qui donne les mêmes solutions mais pour laquelle la convergence n'est pas immédiate. J'ai choisi de ne pas la présenter par soucis de concision. Elle est détaillée dans [3].

1.3 Branches

On a vu dans la partie précédente qu'on disposait de plusieurs solutions d'une forme bien particulière pour l'équation $f(x, y) = 0$. Il peut être intéressant dans un premier temps d'étudier chacune des solutions de manière isolée.

Définition 1.9. Soit $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ régulière d'ordre m telle que $f(0, 0) = 0$. Une solution de l'équation $f(x, y) = 0$ admettant une paramétrisation de la forme $t \mapsto (t^{m_j}, \sum_{r \in \mathbb{N}^*} a_{j,r} t^r)$ au voisinage de 0 est appelée une *branche de la courbe* définie au voisinage de O par l'équation $f(x, y) = 0$.

Il est plus simple d'étudier la structure d'une branche que la structure de la courbe tout entière, il est donc intéressant de s'intéresser en premier lieu à ce cas là lorsqu'on étudie des singularités des courbes algébriques planes. Dans la suite de ce mémoire on s'intéressera presque exclusivement au cas où il y a une unique branche, puisqu'on s'intéresse aux courbes cuspidales.

Définition 1.10. Soit C une courbe algébrique plane. On dit qu'un point singulier z de la courbe C est une *singularité cuspidale*, si la courbe C admet une unique branche au voisinage de z .

On dit que C est une courbe cuspidale si tous ses points singuliers sont cuspidaux.

En introduisant quelques notions supplémentaires, il est possible généraliser la plupart des théorèmes qu'on présentera concernant les branches en des théorèmes concernant les germes de courbe. On le mentionnera le cas échéant.

On s'intéresse désormais aux propriétés des bonnes paramétrisations des branches. On montre notamment que ces bonnes paramétrisations sont essentiellement uniques.

Lemme 1.11. Pour une bonne paramétrisation d'une branche B , on peut trouver un équation irréductible telle qu'au voisinage de O , les solutions de l'équation correspondent exactement au points donnés par la paramétrisation.

Remarque 1.12. On parle dans ce cas là de germe de courbe irréductible.

Démonstration. Soit $t \mapsto (x(t), y(t)) = (t^m, \sum_{r \in \mathbb{N}^*} a_r t^r)$ une bonne paramétrisation de la branche B . Le cas $m = 1$ est trivial, on suppose donc par la suite que $m \neq 1$. On commence par regrouper tous les termes de la série dont les puissances sont dans la même classe de congruence modulo m . Au voisinage de 0, on a

$$y(t) = \sum_{s=0}^{m-1} t^s \sum_{q=0}^{+\infty} a_{mq+s} t^{mq}.$$

Pour tout $s \in \{0, \dots, m-1\}$, on définit alors au voisinage de 0, la série $\phi_s(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} a_{mq+s} x^q$, qui converge bien au voisinage de 0. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. On s'intéresse aux équations définies par pour tout $a \in \{0, \dots, m-1\}$,

$$t^a y = \sum_{s=0}^{m-a-1} t^{a+s} \phi_s(x) + \sum_{s=m-a}^{m-1} t^{a+s-m} x \phi_s(x),$$

qui forment un système de m équations linéaires d'inconnues $(t^b)_{0 \leq b \leq m-1}$. Si (x, y) est un point différent de $(0, 0)$ sur la branche B au voisinage de 0. On dispose de $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $(x(t_0), y(t_0)) = (t_0^m, \sum_{r \in \mathbb{N}^*} a_r t_0^r)$. Alors pour tout $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $(e^{\frac{2ik\pi}{m}} t_0^b)_{0 \leq b \leq m-1}$ est une solution du système. Puisque le système admet plusieurs solutions, son déterminant $D(x, y)$ s'annule. Si $(x, y) = (0, 0)$, il est clair que le déterminant s'annule également. On peut donc prendre pour équation de la branche, l'équation $D(x, y) = 0$.

Il reste à vérifier qu'au voisinage de 0, toute solution de cette équation appartient à l'image de la paramétrisation. Fixons $x \in \mathbb{C}$, et notons t_0 une racine m -ième de x . Par construction $D(x, y)$ est un polynôme unitaire de degré m en y , à coefficients dans \mathbb{C} . Si $x = 0$, le système d'équations nous donne que la seule racine de $D(x, y)$ est 0. Donc $D(x, y) = y^m$. Si $x \neq 0$, pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$, $(x, y(t_0 e^{\frac{2ik\pi}{m}}))$ appartient à B , on a donc $D(x, y(t_0 e^{\frac{2ik\pi}{m}})) = 0$. Puisque la paramétrisation est bonne, on a exhibé m racines distinctes du polynôme $D(x, y)$ en la variable y . On obtient donc l'égalité suivante, écrite en terme de séries formelles en les variables y et $x^{\frac{1}{m}}$:

$$D(x, y) = \prod_{k=0}^{m-1} \left(y - \sum_{r=1}^{+\infty} a_r e^{\frac{2\pi i k r}{m}} x^{\frac{r}{m}} \right).$$

On en déduit que dans un voisinage de O , toutes les solutions de $D(x, y) = 0$ sont données par l'annulation d'un des facteurs, donc données par la paramétrisation. De plus $D(x, y)$ est irréductible dans $\mathbb{C}\{x, y\}$, car si un élément de $\mathbb{C}\{x, y\}$ est divisible par un des $y - y \left(e^{\frac{2ij\pi}{m}} x^{\frac{1}{m}} \right)$ dans $\mathbb{C}\{x^{\frac{1}{m}}, y\}$, alors pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$, il est divisible par $y - y \left(e^{\frac{2ik\pi}{m}} x^{\frac{1}{m}} \right)$ (il suffit pour voir ça de remplacer $x^{\frac{1}{m}}$ par $e^{\frac{2i(k-j)\pi}{m}} x^{\frac{1}{m}}$). \square

Remarque 1.13. Dans la démonstration ci-dessus, en reprenant les mêmes notations, on a montré que tout branche admettait une équation holomorphe irréductible de la forme $D(x, y) = 0$, où D est d'ordre plus grand que m . Fixons un nombre complexe a non nul. Le nombre d'intersection entre la branche B et une ligne L paramétrée par $t \mapsto (t, at)$ en O est donc plus grand que m . Or par définition de $(B \cdot L)_O$, c'est également l'ordre de la fonction $t \mapsto t^m - a \sum_{r \in \mathbb{N}^*} a_r t^r$. On en déduit que dans la paramétrisation de la branche B , on a pour tout $r \leq m$, $a_r = 0$. On a alors une paramétrisation de la forme $t \mapsto (t^m, \sum_{r \geq m} a_r t^r)$. Par un changement de coordonnées très simple, on peut alors se ramener au cas où le coefficient a_m est nul. Par la suite, on supposera donc que toute branche admet une paramétrisation de la forme $t \mapsto (t^m, \sum_{r > m} a_r t^r)$.

On peut aussi remarquer que O est un point singulier de la courbe si et seulement si $m > 1$.

Lemme 1.14. *Si $t \mapsto (\phi_1(t), \psi_1(t))$ et $u \mapsto (\phi_2(u), \psi_2(u))$ sont deux bonnes paramétrisations d'une même branche B , alors on dispose de $\omega \in \mathbb{C}\{t\}$ telle que $\omega(0) = 0$, $\omega'(0) \neq 0$ et $(\phi_1(t), \psi_1(t)) = (\phi_2(\omega(t)), \psi_2(\omega(t)))$.*

Démonstration. Supposons que B admet pour équation $f(x, y) = 0$, où $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ est régulière d'ordre m en y . Notons $t \mapsto (\phi(t), \psi(t))$ une bonne paramétrisation de B . Le développement en série entière de ϕ au voisinage de 0 est de la forme $\phi(t) = at^n + \dots$, où $a \neq 0$ et n est l'ordre de ϕ en 0. On dispose alors de $\alpha \in \mathbb{C}\{t\}$ telle qu'au voisinage de 0, on a $\phi(t) = \alpha(t)^n$, et $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$.

On sait aussi qu'on dispose d'une bonne paramétrisation de B de la forme $t \mapsto (t^m, \sum_{r \in \mathbb{N}^*} a_r t^r)$. Il s'ensuit que pour tout point (x, y) de B au voisinage de 0 tel que x est non nul, on a m valeurs distinctes de t telles que $x = t^m$. Puisque α est inversible, on en déduit que $m = n$. Au voisinage de 0, on a alors $\phi(\alpha^{-1}(t)) = t^m$.

Soit t au voisinage de 0 et $(x, y) \in B$ tels que $(\phi(\alpha^{-1}(t)), \psi(\alpha^{-1}(t))) = (x, y)$. Puisque $x = \phi(\alpha^{-1}(t)) = t^m$, on dispose de $k \in \{0, \dots, m-1\}$ tel que

$$\psi(\alpha^{-1}(t)) = y = \sum_{r \in \mathbb{N}^*} a_r \left(t e^{\frac{2ik\pi}{m}} \right)^r.$$

Quitte à remplacer α par $e^{-\frac{2ik\pi}{m}} \alpha$, on peut supposer qu'au voisinage de 0,

$$(\phi(\alpha^{-1}(t)), \psi(\alpha^{-1}(t))) = \left(t^m, \sum_{r \in \mathbb{N}^*} a_r t^r \right).$$

Enfin, puisque la fonction $\psi \circ \alpha^{-1}$ est continue et par injectivité de la bonne paramétrisation $t \mapsto (t^m, \sum_{r \in \mathbb{N}^*} a_r t^r)$, on obtient que k ne dépend pas de t . Ce qui conclut la preuve. \square

1.4 Suite caractéristique de Puiseux

On peut maintenant extraire des invariants numériques à partir de bonnes paramétrisations des branches.

Définition 1.15. *Soit B une branche d'un germe de courbe holomorphe de \mathbb{C}^2 en O . On suppose que la fonction définissant son équation est régulière d'ordre m en y . Alors on dispose d'une bonne paramétrisation de B , $t \mapsto (t^m, \sum_{r=m}^{\infty} a_r t^r)$, c'est-à-dire telle que le plus grand diviseur commun de m avec les indices r tels que $a_r \neq 0$ est égal à 1. On définit*

$$\beta_1 = \min\{k \in \mathbb{N}_{\geq m} \mid a_k \neq 0 \text{ et } m \nmid k\}, \quad e_1 = \text{ppcm}(m, \beta_1),$$

puis par récurrence pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, tant que $e_i \neq 1$,

$$\beta_{i+1} = \min\{k \in \mathbb{N}_{\geq m} \mid a_k \neq 0 \text{ et } e_i \nmid k\}, \quad e_{i+1} = \text{pgcd}(e_i, \beta_{i+1}).$$

Notons qu'il existe bien $g \in \mathbb{N}^*$ tel que $e_g = 1$, puisque la paramétrisation choisie est bonne. On appelle $(m; \beta_1, \dots, \beta_g)$ la suite caractéristique de Puiseux de la branche B , et β_1, \dots, β_g les puissances caractéristiques de Puiseux.

Remarque 1.16. *D'après le Lemme 1.14, la suite caractéristique de Puiseux ne dépend pas de la bonne paramétrisation choisie, du moment qu'elle est bien de la forme $t \mapsto (t^m, \sum_{r=m}^{\infty} a_r t^r)$.*

Par convention, on posera $\beta_0 = e_0 = m$. Tout au long de ce mémoire, les notations β_i et e_i désigneront les nombres définis ci-dessus pour une branche B donnée. Pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$, β_i est le plus petit exposant apparaissant dans la série $\sum_{r=m}^{\infty} a_r t^r$ qui n'appartient pas au groupe additif engendré par $\beta_0, \dots, \beta_{i-1}$.

On va montrer dans les parties suivantes que la suite caractéristique de Puiseux est indépendante du choix des cartes, mais aussi qu'elle contient de informations intéressantes sur la branche choisie.

On introduit alors une relation d'équivalence sur les branches.

Définition 1.17. *Soit B, B' deux branches. On dit que les branches B et B' sont équisingulières si elles possèdent les mêmes suites caractéristiques de Puiseux.*

Remarque 1.18. *Attention, cela ne veut pas dire que deux branches équisingulières sont identiques à changement de cartes près.*

Terminons cette partie en introduisant certaines notations qui se révéleront être très pratiques plus tard.

Définition 1.19. *Soit B une branche dont la suite caractéristique de Puiseux est $(m; \beta_1, \dots, \beta_g)$. Alors on définit la fonction de Herbrand H de la branche B par pour tout $t \geq 0$, $H(t) = t$ si $t \leq \beta_1$, et $H(t) = \frac{1}{m}(m\beta_1 + e_1(\beta_2 - \beta_1) + \dots + e_{i-1}(\beta_i - \beta_{i-1}) + e_i(t - \beta_i))$ s'il existe $i \in \{1, \dots, g\}$ tel que $\beta_i \leq t < \beta_{i+1}$, où $\beta_{g+1} = +\infty$.*

Remarque 1.20. *La fonction de Herbrand est continue, affine par morceaux et strictement croissante. Elle définit une bijection de \mathbb{R}_+ dans lui-même.*

On introduit certains entiers qui nous seront utiles par la suite. Pour B une branche dont la suite caractéristique de Puiseux est $(m; \beta_1, \dots, \beta_g)$. On pose $\bar{\beta}_0 = m$ et pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$,

$$\bar{\beta}_i = \frac{m}{e_{i-1}} H(\beta_i).$$

On conservera cette notation tout au long du mémoire.

Puisque pour tout $i \in \{1, \dots, g-1\}$, la pente de la fonction de Herbrand H de B dans l'intervalle $[\beta_i, \beta_{i+1}]$ est égale à $\frac{e_i}{m}$, on a

$$\frac{e_i \bar{\beta}_{i+1}}{m} - \frac{e_{i-1} \bar{\beta}_i}{m} = H(\beta_{i+1}) - H(\beta_i) = \frac{e_i}{m} (\beta_{i+1} - \beta_i).$$

On obtient donc pour tout $i \in \{1, \dots, g-1\}$, la formule suivante, qui interviendra régulièrement par la suite :

$$\bar{\beta}_{i+1} - \frac{e_{i-1}}{e_i} \bar{\beta}_i = \beta_{i+1} - \beta_i. \quad (1)$$

Puisque $\bar{\beta}_0$ est un entier et pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$, $\frac{e_{i-1}}{e_i} \in \mathbb{Z}$, on obtient par récurrence que pour tout $i \in \{0, \dots, g\}$, $\bar{\beta}_i$ est un entier.

2 Topologie d'une singularité

On peut maintenant s'intéresser à la topologie des points singuliers d'une courbe algébrique plane. On va associer à chaque singularité cuspidale un nœud, unique à isotopie près. Puis on va étudier les propriétés des nœuds obtenus de cette manière. Enfin, on mettra en lien certains invariants de ce nœud avec les invariants qu'on a défini dans la partie précédente. Les théorèmes et démonstrations de cette partie proviennent de [2], à l'exception de la démonstration de la Proposition 2.22, que j'ai élaborée en m'inspirant des techniques et des indications de [2]. Les propriétés et définitions en rapport avec la théorie des nœuds peuvent être trouvés dans [4].

2.1 Rappels sur les champs de vecteurs

Comme nous allons le voir au cours de cette sous-partie, les champs de vecteurs constituent un outil très pratique pour construire des difféomorphismes. On introduit donc ici quelques propriétés sur les champs de vecteurs qui nous seront utiles lors de l'étude des propriétés topologiques des singularités.

Théorème 2.1. *Soit ξ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^∞ sur une variété compacte M . Alors on dispose d'une application $G : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ qui est l'unique solution de l'équation*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(G(x, t)) = \xi(f) \\ G(x, 0) = x \end{cases} .$$

Pour tout réel t , l'application $x \mapsto G(x, t)$ réalise un \mathcal{C}^∞ difféomorphisme de M sur M .

Grâce aux champs de vecteurs, on peut donc partir d'un difféomorphisme et le déformer en une famille à un paramètre de difféomorphismes. Le prochain théorème va nous permettre de construire des champs de vecteurs globaux sur une variété satisfaisant les propriétés voulues à partir de champs de vecteurs définis localement au voisinage de chaque point de la variété.

On rappelle que pour un espace topologique X recouvert par une famille d'ouverts (U_α) , une partition de l'unité associée à ce recouvrement est une famille d'applications continues (ϕ_α) de X dans \mathbb{R}_+ telle que pour tout α , l'adhérence de l'ensemble $\{x \in U_\alpha \mid \phi_\alpha(x) \neq 0\}$ est incluse dans U_α , et pour tout $x \in X$, $\sum_\alpha \phi_\alpha(x) = 1$. Si de plus, X est une variété lisse, on peut supposer que les ϕ_α sont de classe \mathcal{C}^∞ et qu'au voisinage de tout $x \in X$, il y a un nombre fini de α pour lesquels $\phi_\alpha(x)$ est non nul (on dit dans ce cas que la partition de l'unité est *localement finie*).

Théorème 2.2. *Soit X une variété lisse, et pour tout point $x \in X$ un sous-espace convexe A_x de l'espace $T_x X$ des vecteurs tangents à X en x . Soit $(U_k)_{k \in I}$ un recouvrement ouvert de X , et pour tout $k \in I$, un champ de vecteurs ξ_k de classe \mathcal{C}^∞ défini sur U_k tel que pour tout $x \in U_k$, $\xi_k(x) \in A_x$. Alors il existe un champ de vecteurs ξ de classe \mathcal{C}^∞ sur X tel que pour tout $x \in X$, $\xi(x) \in A_x$.*

Démonstration. On choisit une partition \mathcal{C}^∞ de l'unité localement finie $(\phi_k)_{k \in I}$ associée à $(U_k)_{k \in I}$ telle que pour tout $k \in I$, la fonction ϕ_k est nulle en dehors d'un compact de U_k . Alors pour tout $k \in I$, le produit $\phi_k \xi_k$ et un champ de vecteur de classe \mathcal{C}^∞ sur U_k qui s'annule au voisinage du bord de U_k . On peut donc l'étendre en un champ de vecteur de classe \mathcal{C}^∞ sur X en lui imposant d'être nul en dehors de U_k . La somme $\sum_{k \in I} \phi_k \xi_k$ définit une application de classe \mathcal{C}^∞ puisqu'au voisinage de chaque point, la somme est finie. Enfin, puisque pour tout $x \in X$, la somme $\sum_k \phi_k(x) \xi_k(x)$ est une combinaison convexe de vecteurs de A_x , on obtient par convexité de A_x que $\sum_k \phi_k(x) \xi_k(x)$ appartient à A_x . \square

Définition 2.3. *Soit X et Y deux variétés compactes lisses. Une isotopie de X à Y est un plongement de classe \mathcal{C}^∞ $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1]$ de la forme pour tout $x \in X$, pour tout*

$t \in [0, 1]$, $F(x, t) = (f_t(x), t)$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, f_t est un plongement de classe C^∞ de X dans Y .

On dit également que les plongements f_0 et f_1 sont isotopes.

Remarque 2.4. On peut faire le lien entre isotopies et champs de vecteurs de la manière suivante. Étant donnée une isotopie F de X à lui-même, en reprenant les mêmes notations que dans la définition ci-dessus, on obtient que pour tout point $x \in X$, la fonction $t \mapsto f_t(x)$ définit une courbe tracée sur X , qui admet un vecteur tangent en chaque point. On définit de cette manière un champ de vecteur à paramètre de classe C^∞ sur X . Réciproquement, si on se donne un champ de vecteur à paramètre de classe C^∞ sur une variété lisse X , on peut sous certaines conditions l'intégrer, et le flot ainsi obtenu nous définit une isotopie de X à lui-même. Un tel champ de vecteur à paramètre est appelé générateur infinitésimal de l'isotopie. Certaines conditions sur l'isotopie peuvent alors être transposées en des conditions équivalentes sur le champ de vecteurs à paramètre. Il est plus beaucoup plus facile de construire des champs de vecteurs que des difféomorphismes : on peut construire des champs de vecteurs à paramètre localement satisfaisant les conditions voulues, puis obtenir un champ de vecteurs à paramètre global grâce aux partitions de l'unité.

Un exemple d'application de ce théorème est le Théorème d'extension des isotopies, qui nous sera d'une grande utilité dans l'étude de la géométrie des singularités.

Théorème 2.5 (Théorème d'extension des isotopies). Soit X et Y deux variétés compactes lisses, et $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1]$ une isotopie. Écrivons pour tout $(x, t) \in X \times [0, 1]$, $F(x, t) = (f_t(x), t)$. Alors il existe un difféomorphisme de classe C^∞ H de $Y \times I$ de la forme $(h_t(y), t)$ tel que pour tout $(x, t) \in X \times I$, $f_t(x) = h_t(f_0(x))$.

En particulier le difféomorphisme h_1 envoie le plongement f_0 sur le plongement f_1 .

Démonstration. On procède en construisant un champ de vecteurs ξ sur $Y \times [0, 1]$ adapté à la situation. On cherche ξ tel que pour tout $x \in X$, pour tout $t \in [0, 1]$, $\xi(f_t(x), t) = d_{(x,t)}F \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$. Il suffit donc de le construire sur $F(X \times [0, 1])$. Le théorème précédent nous montre alors qu'il suffit de le construire au voisinage de chaque point de $F(X \times [0, 1])$.

Pour un point (y, t) de $Y \times [0, 1]$ n'appartenant pas à $F(X \times [0, 1])$, on peut simplement poser $\xi(y, t) = \frac{\partial}{\partial t}$.

Pour un point (y, t) dans $F(X \times [0, 1])$, on choisit des coordonnées locales (y_1, \dots, y_{p+q}, t) dans un voisinage V de (y, t) dans $Y \times [0, 1]$, telles que $F(X \times [0, 1])$ est localement donnée par l'équation $y_{p+1} = \dots = y_{p+q} = 0$. Sur $V \cap F(X \times [0, 1])$, on définit le champ de vecteurs ξ par pour tout $(x, t) \in F^{-1}(F(X \times [0, 1]) \cap V)$, $\xi(f_t(x), t) = d_{(x,t)}F \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$. On obtient alors un champ de vecteurs de la forme pour tout $(y, t) \in V \cap F(X \times [0, 1])$, $\xi(y, t) = \sum_{i=1}^p a_i(y_1, \dots, y_p, t) \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial t}$. On utilise cette même formule pour définir le champ de vecteur sur V tout entier.

Par le Théorème 2.2, on a donc l'existence d'un champ de vecteurs ξ avec les propriétés souhaitées. On remarque alors que la deuxième composante de ξ est égale à $\frac{\partial}{\partial t}$, ainsi le flot H de ξ , qui est un difféomorphisme de $Y \times [0, 1]$, est de la forme $H(y, t) = (h_t(y), t)$. Par unicité de la solution, et puisque $(f_0(x), 0) = H(f_0(x), 0) = (h_0(f_0(x)), 0)$, on a bien pour tout $(x, t) \in X \times [0, 1]$, $h_t(f_0(x)) = f_t(x)$. \square

2.2 Nœuds et entrelacs

A tout germe de courbe holomorphe, on peut associer un entrelacs. Cet entrelacs consiste en une union disjointe de cercles plongés dans S^3 , un cercle pour chaque branche du germe de courbe holomorphe de S^3 . On va montrer que cet entrelacs est unique à isotopie près.

Par la suite, on notera pour tout $\epsilon > 0$, $D_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 \leq \epsilon^2\}$ le disque centré en O et de rayon ϵ et $S_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = \epsilon^2\}$ la sphère centrée en O et de rayon ϵ .

Lemme 2.6. *Soit C un germe de de courbe holomorphe défini en $O \in \mathbb{C}^2$. Pour ϵ suffisamment petit, $K = C \cap S_\epsilon$ est un variété lisse de dimension 1 plongée dans S_ϵ . De plus, il y a un homéomorphisme de la paire $(D_\epsilon, C \cap D_\epsilon)$ sur le cône sur $(S_\epsilon, C \cap S_\epsilon)$ (défini par $(S_\epsilon, C \cap S_\epsilon) \times [0, \epsilon] / (x, 0) \sim (y, 0)$) tel que pour $\delta \in [0, \epsilon]$, les points $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $|x|^2 + |y|^2 = \delta^2$ sont envoyés sur les points du cône de hauteur δ .*

Ce lemme montre en particulier que l'intersection $C \cap D_\epsilon$ ne dépend pas de ϵ si celui-ci est suffisamment petit. Pour le démontrer, on utilise les techniques de la partie précédente.

Démonstration. Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on cherche à construire un champ de vecteurs ξ de classe \mathcal{C}^∞ sur $D_\epsilon \setminus O$ vérifiant :

1. pour tout point x de $D_\epsilon \setminus O$, le produit scalaire de $\xi(x)$ avec le vecteur radial $\frac{x}{\|x\|}$ est égal à 1,
2. en tout point x de la courbe C , le vecteur $\xi(x)$ est tangent à C .

Pour construire un tel champ de vecteurs, on procède de la manière suivante. Pour tout $x \in D_\epsilon \setminus O$, on note

$$A_x = \left\{ v \in \mathbb{C}^2 \mid \left\langle v, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right\} \cap \{v \in \mathbb{C}^2 \mid v \in T_x C\}.$$

On rappelle que puisque les singularités de la courbe C sont isolées, la courbe C admet un espace tangent (en tant que variété lisse) en tout point différent de O . Pour tout $x \in D_\epsilon \setminus O$, l'ensemble A_x est convexe car pour tous $v, w \in A_x$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $\langle tv + (1-t)w, \frac{x}{\|x\|} \rangle = 1$ et $tv + (1-t)w$ est tangent à C car $T_x C$ est un espace vectoriel. Par le Théorème 2.2, il suffit de construire un champ de vecteurs satisfaisant les conditions souhaitées au voisinage de chaque point de $D_\epsilon \setminus O$.

Au voisinage des points de $D_\epsilon \setminus O$ qui ne sont pas sur C , on prend simplement le champ de vecteurs radial, qui à un point $x \in D_\epsilon \setminus O$ associe le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$.

Au voisinage des points x de $(D_\epsilon \setminus O) \cap C$ où le champs de vecteurs radial en x n'est pas orthogonal au vecteur tangent de $(D_\epsilon \setminus O) \cap C$ en x , on procède de la manière suivante.

On choisit des coordonnées locales (x_1, x_2) dans un voisinage V de x dans $D_\epsilon \setminus O$, telles que C est localement donnée par l'équation $x_2 = 0$. Sur V , on définit le champ de vecteurs par pour tout $y \in V$, $\xi(y) = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Puis on normalise le vecteur pour que son produit scalaire avec le vecteur radial soit égal à 1 (ce qui est possible, quitte à réduire V , par continuité des champs de vecteurs et du produit scalaire et puisque par hypothèse, le champ de vecteurs radial en x n'est pas orthogonal au vecteur tangent de $(D_\epsilon \setminus O) \cap C$ en x).

Avant de continuer la démonstration, expliquons pourquoi on peut toujours se ramener au cas où en tout point x de $(D_\epsilon \setminus O) \cap C$, le champ de vecteurs radial en x n'est pas orthogonal au vecteur tangent de $(D_\epsilon \setminus O) \cap C$ en x . On note $\varphi : t \mapsto (t^m, y(t))$ une bonne paramétrisation locale de C . Soit $x \in (D_\epsilon \setminus O) \cap C$ et $t \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi(t) = x$. On veut montrer que pour tout t non nul suffisamment proche de 0, on a $\operatorname{Re}\langle \varphi'(t), \varphi(t) \rangle \neq 0$, c'est-à-dire $\operatorname{Re}\left(mt^{m-1}\bar{t}^m + y'(t)\overline{y(t)}\right) \neq 0$. Or cette dernière assertion est vraie pour t non nul suffisamment petit, car l'ordre de la fonction y est strictement plus grand que m . Ceci montre au passage que l'intersection entre C et S_ϵ est transverse.

Soit $0 < \epsilon_1 < \epsilon$. Une fois le champ de vecteurs ξ ainsi construit, on intègre le champ de vecteurs $-\xi$ sur le compact $K_{\epsilon_1, \epsilon} = \{x \in \mathbb{C}^2 \mid \epsilon_1 \leq \|x\| \leq \epsilon\}$. Puisque le produit scalaire de ξ avec le champ de vecteurs radial est égal à 1 en tout point, le flot obtenu est de la forme :

$$G : \begin{array}{ccc} S_\epsilon \times [0, \epsilon - \epsilon_1] & \longrightarrow & D_\epsilon \\ (x, t) & \longmapsto & c_x(t), \end{array}$$

où pour tous $x \in S_\epsilon$, $t \in [0, \epsilon - \epsilon_1]$, $c_x(t)$ appartient à $S_{\epsilon-t}$. Quand on fait tendre t vers ϵ , la famille $(c_x)_{x \in S_\epsilon}$ converge uniformément vers la fonction constante égale à O . On peut donc étendre G en une application continue de $S_\epsilon \times [0, \epsilon]$ dans D_ϵ . Chaque courbe intégrale rencontre chaque sphère

concentrique S_t en un unique point, et pour chaque point de chaque sphère, il existe une unique courbe intégrale passant par ce point. Ainsi, $G : S_\epsilon \times [0, \epsilon[\rightarrow D_\epsilon \setminus O$ est bijective, et $S_\epsilon \times \{\epsilon\}$ est envoyé sur O . On a donc un homéomorphisme de D_ϵ sur le cône sur S_ϵ .

Puisque ξ est tangent à C en tout point de C , chaque courbe intégrale qui rencontre C reste dans C . Donc notre homéomorphisme envoie $D_\epsilon \cap C$ sur le cône sur $S_\epsilon \cap C$.

Enfin, pour ϵ suffisamment petit, l'intersection de C avec S_ϵ est transverse. On en déduit que c'est une variété compacte lisse de dimension 1, c'est donc une union disjointe de plongements du cercle S^1 dans S_ϵ . Dans le cas où C n'a qu'une branche, cette variété est connexe et c'est donc un plongement du cercle S^1 dans S_ϵ . \square

Définition 2.7. *On appelle nœud le plongement d'un cercle S^1 dans S^3 , la sphère de dimension 3. On appelle entrelacs le plongement d'une union disjointe de copies du cercle S^1 dans S^3 . En particulier, un nœud est un entrelacs avec une seule composante connexe. On dit qu'un entrelacs (ou un nœud) est algébrique s'il est obtenu comme l'intersection d'un germe de courbe algébrique avec une sphère de rayon suffisamment petit (comme dans le Lemme 2.6).*

Remarque 2.8.

1. Le terme "plongement" doit être compris au sens différentiable du terme.
2. Pour classer les nœuds on peut choisir différentes relations d'équivalence. On peut par exemple considérer que deux nœuds sont équivalents si leurs complémentaires dans S^3 sont homéomorphes, ou bien décider que deux nœuds sont équivalents s'ils sont isotopes. En ce qui nous concerne, on utilisera les deux relations d'équivalences précédemment citées, et on montrera que dans le cadre de notre étude, elles sont en fait équivalentes.
3. À chaque germe de courbe on peut associer un unique entrelacs (en envoyant S_ϵ sur S^3 par la projection centrale). Par ce qu'on a montré ci-dessus, dans le cas d'une branche l'entrelacs possède une unique composante connexe, on obtient donc un nœud. On parlera alors de l'entrelacs (resp. du nœud) du germe de courbe (resp. de la branche). On peut aussi remarquer qu'une singularité est cuspidale si et seulement si son entrelacs est un nœud.

Dans le cas d'une branche B , il est commode d'effectuer une légère modification à la sphère S_ϵ . On choisit une carte dans laquelle une bonne paramétrisation de B est donnée par $t \mapsto (t^m, y(t))$, où y est d'ordre strictement plus grand que m . Puisque la fonction $t \mapsto t^{-m}y(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0, on peut choisir $\epsilon > 0$ tel que pour tout t au voisinage de 0, $|x(t)| < \epsilon$ implique $|y(t)| < \frac{\epsilon}{100}$. On remplace alors S_ϵ par une variété proche S'_ϵ telle que pour tout $x, y \in S'_\epsilon$, si $|y| < \frac{|x|}{100}$, alors $|x| = \epsilon$. On gardera cette notation jusqu'à la fin de cette partie. Cette modification est avantageuse car elle permet trouver une paramétrisation explicite de la forme $\theta \mapsto \left(\epsilon e^{im\theta}, y \left(\epsilon \frac{1}{m} \right) \right)$ pour le nœud $C \cap S'_\epsilon$. Le lemme suivant montre que ce changement n'influence pas la topologie du nœud. On le démontre avec une preuve similaire à celle du Lemme 2.6.

Lemme 2.9. *Soit B une branche en $O \in \mathbb{C}^2$. Pour ϵ suffisamment petit, les paires $(S_\epsilon, B \cap S_\epsilon)$ et $(S'_\epsilon, B \cap S'_\epsilon)$ sont homéomorphes.*

On introduit ensuite des invariants importants pour les nœuds et les entrelacs.

Définition 2.10. *Soit K un nœud. Le minimum des genres des surfaces connexes orientables de S^3 dont le bord est K est appelé le genre de K . On le note $g(K)$.*

Définition 2.11. *Soit K_1 et K_2 deux nœuds disjoints. Soit X une 2-chaîne de S^3 dont le bord est le nœud K_2 . Quitte à déformer légèrement cette surface, on peut supposer qu'elle intersecte K_1 transversalement. Le nombre d'intersection de X avec K_1 est un entier qu'on appelle l'enlacement de K_1 et K_2 . On le note $\text{Enl}(K_1, K_2)$.*

Remarque 2.12. *Ce nombre ne dépend pas de la 2-chaîne X choisi, puisque si X' est une autre telle 2-chaîne, l'union de X et X' (avec changement d'orientation) forme une 2-chaîne sans bord dans S^3 , qui possède nécessairement un nombre d'intersection nul avec la courbe fermée K_1 .*

Une autre manière de calculer l'enlacement est de trouver deux 2-chaînes dont les bords respectifs sont K_1 et K_2 dans le disque D^4 . On peut aussi supposer qu'elles sont transverses, et calculer leur nombre d'intersection. Comme ci-dessus, on voit que le résultat ne dépend pas du choix des surfaces. On voit également aisément que $\text{Enl}(K_1, K_2) = \text{Enl}(K_1, K_2)$. Si la 2-chaîne X ci-dessus est déformée très légèrement vers l'intérieur de D^4 , on voit que les intersections avec K_1 deviennent des intersections avec la 2-chaîne dont le bord est K_1 . Ainsi ce nombre d'intersection est bien égal à l'enlacement $\text{Enl}(K_1, K_2)$. On obtient alors le lemme suivant.

Lemme 2.13. *Soit B et B' deux branches en O . On note K et K' leurs nœuds respectifs. Alors on a $(B.B')_O = \text{Enl}(K, K')$.*

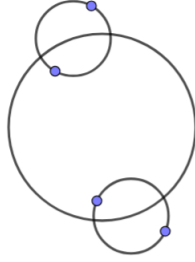
De par sa définition, une isotopie de l'entrelacs formé par les deux nœuds ne change pas l'enlacement.

2.3 Géométrie de l'entrelacs

On décrit dans cette partie un modèle géométrique explicite pour les nœuds introduits dans la sous-partie précédente. On montre ensuite que la classe d'isotopie du nœud ne dépend que la suite caractéristique de la branche. Le modèle ressemble à la description du système solaire puisqu'elle consiste en des points sur des cercles dont les centres sont sur d'autres cercles, etc, le tout étant en rotation.

On s'intéresse tout d'abord à l'exemple paramétré par $t \mapsto (t^4, t^6 + t^7)$. On commence par étudier la courbe plus simple, dont une bonne paramétrisation est $t \mapsto (t^2, t^3)$. Le nœud correspondant admet pour paramétrisation $\theta \mapsto (x(\theta), y(\theta)) = (\epsilon e^{i2\theta}, \epsilon^{\frac{3}{2}} e^{i3\theta})$ pour ϵ suffisamment petit. Chaque valeur de $x(\theta)$ détermine alors deux valeurs de θ , et donc deux valeurs de $y(\theta)$ puisque la paramétrisation est bonne. Ces deux valeurs vivent sur le cercle de centre 0 et de rayon $\epsilon^{\frac{3}{2}}$. Quand x parcourt le cercle de centre 0 et de rayon ϵ une fois, les deux valeurs de y correspondantes parcourent le cercle de centre 0 et de rayon $\epsilon^{\frac{3}{2}}$ une fois et demie, échangeant ainsi leurs positions au cours du procédé. Pour la courbe de départ, le nœud correspondant est paramétré par $\theta \mapsto (x(\theta), y(\theta)) = (\epsilon e^{i4\theta}, \epsilon^{\frac{3}{2}} e^{i6\theta} + \epsilon^{\frac{7}{4}} e^{i7\theta})$. Pour chaque valeur de x , on a 4 valeurs de y . Puisque $\epsilon^{\frac{7}{4}}$ est petit devant $\epsilon^{\frac{3}{2}}$, il est naturel de considérer que ces points sont proches des deux points du cas simplifié. On peut en effet tracer deux cercles de rayon $\epsilon^{\frac{7}{4}}$ centrés autour des deux points correspondants à la courbe simplifiée. On a alors deux points sur chacun des petits cercles, et quand x parcourt le cercle de centre 0 et de rayon ϵ une fois, et que nos points du cas simplifié parcourent le cercle de centre 0 et de rayon $\epsilon^{\frac{3}{2}}$, nos quatre points parcourent sept quarts de tour sur les petits cercles de rayon $\epsilon^{\frac{7}{4}}$.

Cette représentation sous forme de cercles successifs, chaque petits cercles étant centré sur un cercle plus gros et tournant tous au rythme approprié est appelé un *carrousel*. On va voir qu'un carrousel permet de décrire le comportement qualitatif de toute branche.



Carrousel de l'exemple ci-dessus

Proposition 2.14. *Deux branches avec les mêmes suites caractéristiques de Puiseux déterminent des nœuds isotopes dans S'_ϵ pour ϵ suffisamment petit.*

Avant de rentrer dans les détails, on commence par décrire le principe de la démonstration.

Soit B une branche dont une bonne paramétrisation est donnée par $t \mapsto (t^m, \sum_{r=m}^{\infty} a_r t^r)$. On définit une famille de branches par pour tout $k \geq n$, B_k est la branche définie par la paramétrisation (pas nécessairement bonne) $t \mapsto (x(t), y_k(t)) = (t^m, \sum_{r=m}^k a_r t^r)$. On va s'intéresser à ce qui arrive à B_k , et à son nœud associé $K_k = B_k \cap S'_\epsilon$ quand on augmente k . Notons $(m; \beta_1, \dots, \beta_m)$ la suite caractéristique de Puiseux de B .

Si $k < \beta_1$, la fonction y_k est polynomiale en x . Pour chaque valeur de x , on a une unique valeur de y_k . La paramétrisation de la branche B_k réalise alors un biholomorphisme local. On en déduit que K_k est le nœud trivial.

Si $k = \beta_1$, la fonction $\theta \mapsto y_k(\epsilon^{\frac{1}{m}} e^{i\theta})$ décrit un cercle de centre $y_{k-1}(\epsilon^{\frac{1}{m}} e^{i\theta})$ et de rayon $|a_{\beta_1}| \epsilon^{\frac{\beta_1}{m}}$. Pour chaque valeur de $x = \epsilon e^{im\theta}$, on a $\frac{m}{e_1}$ valeurs possibles pour y_k .

Quand x parcourt le cercle centré en 0 de rayon ϵ , y_k est en rotation autour de y_{k-1} . Chacune des $\frac{m}{e_1}$ valeurs possibles pour y_k correspond à e_1 valeurs de x .

Pour $\beta_1 < k < \beta_2$, on est dans une situation similaire au cas $k < \beta_1$: la fonction y_k est un polynôme en $x^{\frac{e_1}{m}}$. On a donc toujours $\frac{m}{e_1}$ points, et puisque ϵ est suffisamment petit, les termes de degrés strictement supérieurs à β_1 apportent une contribution négligeable par rapport au rayon des cercles qu'on a déjà représentés. Les nœuds K_{β_1} et K_k sont donc isotopes. Un isotopie explicite est de la forme :

$$\begin{aligned} S^1 \times [0, 1] &\longrightarrow S'_\epsilon \\ (\theta, s) &\mapsto \left(\epsilon e^{\frac{im\theta}{e_1}}, \sum_{r=1}^{\beta_1} a_r \epsilon^{\frac{e_1}{m} \cdot \frac{r}{e_1}} e^{\frac{ir\theta}{e_1}} + \sum_{r=\beta_1+1}^k s a_r \epsilon^{\frac{e_1}{m} \cdot \frac{r}{e_1}} e^{\frac{ir\theta}{e_1}} \right). \end{aligned}$$

Le schéma général est maintenant clair. Quand k augmente de 1, le nœud K_k est changé par une isotopie, sauf quand k atteint un β_q ; dans ce dernier cas, chaque point se sépare en $\frac{e_q-1}{e_q}$ points qui vivent sur un petit cercle qui entoure le point de départ.

Maintenant, on démontre tout ça de manière plus précise.

Démonstration. Soit B une branche et K le nœud associé à cette branche. Ce nœud admet une paramétrisation de la forme

$$\theta \mapsto \left(\epsilon e^{im\theta}, \sum_{r=n}^{+\infty} a_r \epsilon^{\frac{r}{m}} e^{ir\theta} \right).$$

On va montrer que pour ϵ suffisamment petit, l'application suivante est une isotopie

$$\begin{aligned} S^1 \times [0, 1] &\longrightarrow S'_\epsilon \\ (\theta, s) &\mapsto \left(\epsilon e^{im\theta}, \sum_{r=n}^{+\infty} s_r a_r \epsilon^{\frac{r}{m}} e^{ir\theta} \right), \end{aligned}$$

où

$$s_r = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un entier } q \text{ tel que } r = \beta_q, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

On définit bien ainsi une famille de fonctions $(f_s)_{s \in [0, 1]}$ de S^1 dans S^3 qui dépend d'un paramètre s de manière C^∞ . Il reste à montrer que pour s dans $[0, 1]$, la fonction f_s est un plongement C^∞ . C'est-à-dire que f_s est injective et que pour tout $\theta \in S^1$, $f'_s(\theta) \neq (0, 0)$. Puisque la première coordonnée de $f'_s(\theta)$ est égale à $im\epsilon e^{im\theta} \neq 0$, la deuxième condition est remplie.

Montrons que pour tout $k \in \left\{0, \dots, \frac{2\pi(m-1)}{m}\right\}$, on a $y \left(\epsilon^{\frac{1}{m}} e^{i\theta}\right) \neq y \left(\epsilon^{\frac{1}{m}} e^{i\left(\theta + \frac{2k\pi}{m}\right)}\right)$. Par le travail qu'on a effectué plus haut, il suffit de montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, la somme des contributions des termes de degrés compris strictement entre β_q et β_{q+1} est petite comparée à la distance entre deux points sur le q -ième petit cercle, qui est du même ordre de grandeurs que $\epsilon^{\frac{\beta_q}{m}}$. Pour faire cela, on raisonne par récurrence.

Traitons par exemple, le cas $q = g$. On choisit $R > 0$ de sorte que la suite $(|a_r| R^r)_{r \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée par une constante $M \in \mathbb{R}_+$. On obtient alors les inégalité suivantes

$$\begin{aligned} \sum_{r=\beta_g+1}^{+\infty} s_r |a_r| \epsilon^{\frac{r}{m}} &\leq \sum_{r=\beta_g+1}^{+\infty} M R^{-r} \epsilon^{\frac{r}{m}} \\ &\leq \frac{M \epsilon^{\frac{\beta_g+1}{m}}}{R^{\beta_g+1} \left(1 - \frac{\epsilon^{\frac{1}{m}}}{R}\right)} \\ &\leq \frac{M \epsilon^{\frac{\beta_g+1}{m}}}{R^{\beta_g} \left(R - \epsilon^{\frac{1}{m}}\right)}, \end{aligned}$$

$$\text{donc } \sum_{r=\beta_g+1}^{+\infty} s_r |a_r| \epsilon^{\frac{r}{m}} = o\left(\epsilon^{\frac{\beta_g}{m}}\right). \quad \square$$

Remarque 2.15. *Il existe un théorème similaire dans le cas où on considère des germes de courbes qui ont potentiellement plusieurs branches. Mais pour l'énoncer et le montrer, il faudrait introduire certaines notions supplémentaires. On renvoie le lecteur intéressé à [2].*

2.4 Nœuds câblés

On cherche maintenant à décrire de manière plus précise les nœuds algébriques. On va montrer qu'ils peuvent être obtenus en itérant un processus, qu'on appelle câblage, permettant de construire un nœud à partir d'un autre. On reliera ensuite des invariants de ce processus de câblage aux invariants qu'on a défini dans la première section.

Définition 2.16. *Soit K un nœud donné par le plongement $f : S^1 \rightarrow S^3$. On peut trouver un voisinage tubulaire de ce nœud donné par un plongement $F : S^1 \times D^2 \rightarrow S^3$ tel que pour tout $x \in S^1$, $F(x, 0) = f(x)$. Toute courbe fermée simple tracée sur $S^1 \times S^1$ est envoyée par F sur le bord du voisinage tubulaire, ce qui définit un autre nœud K' . On dit que K' est un nœud câblé autour de K , ou que K' est obtenu par câblage autour de K .*

Avant de continuer, on a besoin d'expliquer certaines propriétés topologiques du tore $S^1 \times S^1$, qu'on peut considérer comme étant le bord du tore plein $M = S^1 \times D^2$. On note $i : T \rightarrow M$ l'inclusion. Le cercle S^1 possède une orientation canonique, qu'on peut considérer comme étant définie par la rotation dans le sens trigonométrique, ou de manière équivalente, par la paramétrisation $\theta \mapsto e^{i\theta}$: cela définit une classe fondamentale d'homologie dans $H_1(S^1)$. On peut paramétrer M par

$$\begin{aligned} [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 1] &\longrightarrow M \\ (\theta, \phi, \rho) &\longmapsto (e^{i\theta}, \rho e^{i\theta}). \end{aligned}$$

Les plongements naturels de S^1 dans T en tant que $S^1 \times \{1\}$ et $\{1\} \times S^1$ nous donnent respectivement deux classes fondamentales d'homologie u et v dans $H_1(T)$. Le groupe $H_1(T)$ est un groupe abélien libre engendré par u et v : chaque élément de ce groupe peut s'écrire de manière unique sous la forme $au + bv$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

Le tore plein M se rétracte par déformation sur le cercle S^1 , donc $H_1(M)$ est un groupe cyclique infini. L'application naturelle $i_* : H_1(T) \rightarrow H_1(M)$ envoie u sur un générateur et v sur 0. On dit que la courbe $\{1\} \times S^1$ ou de manière équivalente la classe v est un *méridien* du tore T . Un méridien est défini au signe près comme étant un générateur du noyau de i_* . Le choix la classe de u est un peu plus arbitraire. On a en effet pour tout $r \in \mathbb{Z}$, des homéomorphismes de M de la forme pour tous $(w, z) \in S^1 \times D^2$, $h_r(w, z) = (w, w^r z)$. Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, l'application h_r entortille M r fois, et on a $h_{r*}(u) = u + rv$: on pourrait appeler chacune de ses classes un parallèle. On va s'intéresser au fait d'en choisir un de manière canonique.

Les nombres d'intersection sur la variété T sont facilement déterminés. On a $u.u = 0$, $u.v = 1$, $v.u = -1$, $v.v = 0$. Par bilinéarité, on a alors pour tous $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$, $(au + bv).(a'u + b'v) = ab' - ba'$. Si a et b sont premiers entre eux, l'application $\theta \mapsto (e^{ia\theta}, e^{ib\theta})$ est une paramétrisation d'une courbe fermée simple sur T dont la classe d'homologie est $au + bv$.

Lemme 2.17. *Soit K un nœud. Soit j un plongement du tore plein M dans S^3 . On a les résultats suivants :*

1. *si l'image de T par j est disjointe de K , alors l'application*

$$\begin{aligned} \phi : H_1(T) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ w &\longmapsto \text{Enl}(K, w) \end{aligned}$$

définit un morphisme de groupe,

2. *si K est le nœud $j(S^1 \times \{0\})$ et v est un méridien, on a $\phi(v) = 1$.*

Démonstration.

1. Soit x et y deux courbes homologues dans le tore T . Leur différence borde une surface Y sur $j(T) : \partial Y = y - x$. Soit X une surface de S^3 dont le bord est x . On a $\partial(X + Y) = y$, donc y est le bord de la surface $X \cup Y$. Par hypothèse, Y est disjointe de K . On a donc $(X \cup Y) \cap K = X \cap K$, et les signes associés à chaque point d'intersection sont les mêmes. On en déduit que $\text{Enl}(x, K) = \text{Enl}(y, K)$. Ainsi l'application $\phi : H_1(T) \rightarrow \mathbb{Z}$ est bien définie. Prenons désormais x et x' deux éléments de $H_1(T)$. Soit X et X' deux surfaces telles que $\partial X = x$ et $\partial X' = x'$. On a $\partial(X + X') = x + x'$, et $(X \cup X') \cap K = (X \cap K) \cup (X' \cap K)$, et les signes associés à chaque point d'intersection sont les mêmes dans les deux cas. Puisqu'on a également pour tout $x \in H_1(T)$, $\text{Enl}(-x, K) = -\text{Enl}(x, K)$ et $\text{Enl}(0, K) = 0$, on en déduit que ϕ est un morphisme de groupes.
2. Le nœud $K = j(S^1 \times \{0\})$ est disjoint de $j(T)$, donc l'application $\phi : H_1(T) \rightarrow \mathbb{Z}$ décrite ci-dessus est bien définie. Si v est un méridien de T , la surface $X = j(\{1\} \times D^2)$ est une

surface dont le bord est v . Cette surface rencontre K une unique fois au point $j(1,0)$, et l'intersection est transversale. On a donc $\phi(v) = 1$. □

Dans la situation du deuxième point du lemme, puisque $\phi(v) = 1$, on dispose d'un unique $r \in \mathbb{Z}$ ($r = -\phi(u)$) tel que $\phi(u + rv) = 0$. La classe fondamentale d'homologie $u + rv$, ou une courbe représentative sur $j(T)$ est appelée un *parallèle* du tore $j(T)$ dans S^3 . Un tel parallèle x est caractérisé, au signe près, par le fait que $\text{Enl}(x, K) = 0$. En effet, pour toute courbe fermée simple γ tracée sur $j(T)$ dont la classe d'homologie est de la forme $[\gamma] = ax + bv$, on a $\text{Enl}(\gamma, K) = \phi([\gamma]) = b$, et puisque C est une courbe fermée simple, si $b = 0$, on a nécessairement $a = 1$.

Définition 2.18. Soit K un nœud, et K' un nœud câblé autour de K . Le nœud K' est une courbe tracée sur le bord d'un voisinage tubulaire de K donné par un plongement $j : T \rightarrow S^3$. Notons x un parallèle de T et v un méridien de T . On dispose d'entiers a et b tels que la classe d'homologie de K' est donnée par $ax + bv$.

On appelle a le nombre d'enroulement de K' autour de K , et (a, b) l'invariant de câblage.

Remarque 2.19. Puisque le groupe fondamental du tore est abélien, la classe $ax + bv$ détermine la courbe tracée sur T à homotopie près. Puisque les nœuds qui nous intéressent sont construits par itération de câblages successifs en partant du nœud trivial, ils sont déterminés à isotopies près par les invariants de câblage correspondants.

Théorème 2.20. En reprenant les notations utilisées au début de cette sous-section, on a pour tout $q \in \{1, \dots, g\}$,

$$\text{Enl}(K^q, K^{q-1}) = \frac{\bar{\beta}_q}{e_q}.$$

Démonstration. Soit $q \in \{1, \dots, g\}$. Le nœud K^q est paramétré par $\theta \mapsto (e^{im\theta}, \sum_{r=1}^q \epsilon_r e^{i\beta_r \theta})$ (ici, un bon paramètre est $e^{ie_q \theta}$). Ce nœud est tracé sur le tore

$$T_{q-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid \exists \theta \in [0, 2\pi], x = e^{im\theta}, \left| y - \sum_{r=1}^{q-1} \epsilon_r e^{i\beta_r \theta} \right| = \epsilon_q \right\}.$$

On remarque au passage que T_{q-1} est le bord d'un voisinage tubulaire de K^{q-1} . Une paramétrisation de T_{q-1} est donnée par

$$(\theta, \phi) \mapsto \left(e^{\frac{im\theta}{e_q}}, \sum_{r=1}^{q-1} \epsilon_r e^{\frac{i\beta_r \theta}{e_q}} + \epsilon_q e^{i\phi} \right).$$

Celle-ci permet de munir le tore d'une orientation cohérente.

La bonne paramétrisation $\phi \mapsto \left(1, \sum_{r=1}^{q-1} \epsilon_r + \epsilon_q e^{i\phi} \right)$ définit un méridien de T_{q-1} puisqu'il borde le disque dans le tore donnée par

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = 1, \left| y - \sum_{r=1}^{q-1} \epsilon_r \right| \leq \epsilon_q \right\}.$$

On note v_{q-1} la classe fondamentale de ce méridien dans $H_1(T_{q-1})$.

La courbe K^q admet une bonne paramétrisation de la forme $\psi \mapsto \left(e^{\frac{im\psi}{e_q}}, \sum_{r=1}^q \epsilon_r e^{\frac{i\beta_r \psi}{e_q}} \right)$.

On définit la classe fondamentale d'homologie u_{q-1} par un de ses représentants paramétré par $\theta \mapsto \left(e^{\frac{im\theta}{e_{q-1}}}, \sum_{r=1}^{q-1} \epsilon_r e^{\frac{i\beta_r\theta}{e_{q-1}}} + \epsilon_q \right)$. Les classes u_{q-1} et v_{q-1} engendrent $H_1(T_{q-1})$ car les courbes qui les définissent s'intersectent en un unique point.

Enfin, on définit la classe w_{q-1} dont un représentant est donné par la bonne paramétrisation $\theta \mapsto \left(e^{\frac{im\theta}{e_{q-1}}}, \sum_{r=1}^{q-2} \epsilon_r e^{\frac{i\beta_r\theta}{e_{q-1}}} + (\epsilon_{q-1} - \epsilon_q) e^{\frac{i\beta_{q-1}\theta}{e_{q-1}}} \right)$.

On obtient donc les relations suivantes entre les classes d'homologies de ces différentes courbes sur T^{q-1} :

$$[K^q] = \frac{e_{q-1}}{e_q} u_{q-1} + \frac{\beta_q}{e_q} v_{q-1},$$

et

$$w_{q-1} = u_{q-1} + \frac{\beta_{q-1}}{e_{q-1}} v_{q-1}.$$

On va montrer le théorème par récurrence sur l'entier q . Pour l'initialisation, on s'intéresse au nœud K^0 , qui est le nœud donnée par la paramétrisation $\theta \mapsto (e^{i\theta}, 0)$ et au nœud K^1 , qui est tracé sur le tore T_0 . Les relations entre les classes d'homologie ci-dessus déterminent l'invariant de câblage $\left(\frac{m}{e_1}, \frac{\beta_1}{e_1} \right)$. Puisqu'on a $\text{Enl}(u_0, K^0) = 0$, et $\text{Enl}(v_0, K^0) = 1$ par le Lemme 2.17, on obtient $\text{Enl}(K^1, K^0) = \frac{\beta_1}{e_1} = \frac{\bar{\beta}_1}{e_1}$.

On suppose désormais le résultat vrai au rang $q-1$. Puisque v_{q-1} est un méridien de T^{q-1} , par le Lemme 2.17, on a $\text{Enl}(v_{q-1}, K^{q-1}) = 1$.

On cherche maintenant à calculer $\text{Enl}(w_{q-1}, K^{q-1})$. Pour cela, on remarque que le bord de la surface X_q paramétrée par

$$\begin{aligned} [0, 2\pi] \times [0, 1] &\longrightarrow S^3 \\ (\theta, s) &\longmapsto \left(e^{\frac{im\theta}{e_{q-1}}}, \sum_{r=1}^{q-2} \epsilon_r e^{\frac{i\beta_r\theta}{e_{q-1}}} + s(\epsilon_{q-1} - \epsilon_q) e^{\frac{i\beta_{q-1}\theta}{e_{q-1}}} \right) \end{aligned}$$

est donné d'un côté par w_{q-1} (pour $s = 1$) et de l'autre par K^{q-2} pris $\frac{e_{q-2}}{e_{q-1}}$ fois (pour $s = 0$). Puisque cette surface n'intersecte pas K^{q-1} , on a

$$\begin{aligned} \text{Enl}(w_{q-1}, K^{q-1}) &= \frac{e_{q-2}}{e_{q-1}} \text{Enl}(K^{q-2}, K^{q-1}) \\ &= \frac{e_{q-2}}{e_{q-1}} \frac{\bar{\beta}_{q-1}}{e_{q-1}} \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Puisqu'on a $[K^q] = \frac{e_{q-1}}{e_q} w_{q-1} + \frac{\beta_q - \beta_{q-1}}{e_q} v_{q-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Enl}(K^q, K^{q-1}) &= \frac{e_{q-1}}{e_q} \text{Enl}(w_{q-1}, K^{q-1}) + \frac{\beta_q - \beta_{q-1}}{e_q} \text{Enl}(v_{q-1}, K^{q-1}) \\ &= \frac{e_{q-1}}{e_q} \frac{e_{q-2}}{e_{q-1}} \frac{\bar{\beta}_{q-1}}{e_{q-1}} + \frac{\beta_q - \beta_{q-1}}{e_q} \\ &= \frac{\bar{\beta}_q}{e_q} \quad \text{par la relation (1).} \end{aligned}$$

□

Remarque 2.21. On peut désormais calculer l'invariant de câblage (a_{q-1}, b_{q-1}) de K^q autour de K^{q-1} . En effet si x_{q-1} est un parallèle et v_{q-1} un méridien de T_{q-1} , on a

$$[K^q] = \frac{e_{q-1}}{e_q} u_{q-1} + \frac{\beta_q}{e_q} v_{q-1} = a_{q-1} x_{q-1} + b_{q-1} v_{q-1}.$$

On rappelle que par le Lemme 2.17, on a $\text{Enl}(v_{q-1}, K^{q-1}) = 1$, et par définition d'un parallèle, on a $\text{Enl}(x_{q-1}, K^{q-1}) = 0$. Par le Théorème 2.20, on obtient donc $b_{q-1} = \text{Enl}(K^q, K^{q-1}) = \frac{\bar{\beta}_q}{e_q}$. Puisque

$$[K^q] = \frac{e_{q-1}}{e_q} \left(u_{q-1} + \frac{\beta_q - \bar{\beta}_q}{e_{q-1}} v_{q-1} \right) + \frac{\bar{\beta}_q}{e_q} v_{q-1},$$

on a alors $x = u_{q-1} + \frac{\beta_q - \bar{\beta}_q}{e_{q-1}}$ et $a_{q-1} = \frac{e_{q-1}}{e_q}$.

Donc l'invariant de câblage (a_{q-1}, b_{q-1}) de K^q autour de K^{q-1} est égal à $\left(\frac{e_q}{e_{q-1}}, \frac{\bar{\beta}_q}{e_q} \right)$.

On profite de ce résultat pour trouver un moyen de calculer le nombre d'intersection de deux branches en O .

Proposition 2.22. Soit B, B' deux branches en O , dont les suites caractéristiques de Puiseux sont $(m; \beta_1, \dots, \beta_g)$ et $(m'; \beta'_1, \dots, \beta'_g)$. Notons K et K' leurs nœuds respectifs. On pose $\tilde{m} = \text{ppcm}(m, m')$. On suppose que B et B' admettent pour paramétrisations respectives

$$t \mapsto \left(t^{\tilde{m}}, \sum_{r=1}^{+\infty} a_r t^{r \frac{\tilde{m}}{m}} \right) \quad \text{et} \quad t \mapsto \left(t^{\tilde{m}}, \sum_{r=1}^{+\infty} a'_r t^{r \frac{\tilde{m}}{m'}} \right),$$

et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $r < \lambda$, $a_r = a'_r$ et $a_\lambda \neq a'_\lambda$.

Alors on a

$$(B.B')_O = \text{Enl}(K, K') = m' H \left(m \frac{\lambda}{\tilde{m}} \right),$$

où H désigne la fonction de Herbrand de B .

Définition 2.23. Soit B, B' deux branches en O , en reprenant les notations de la proposition précédente, appelle $\kappa := \frac{\lambda}{\tilde{m}}$, l'exposant de contact des branches B et B' .

Démonstration. On reprend les notations utilisées au cours de cette section. Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit. Grâce au Théorème 2.14 et au Théorème d'extension des isotopies, qui à appliquer un homéomorphisme de S'_ϵ , on peut supposer que les nœuds K et K^q sont respectivement donnés par les paramétrisations

$$\theta \mapsto \left(\epsilon e^{i\tilde{m}\theta}, \sum_{r=1}^g \epsilon^{\frac{\beta_r}{m}} e^{i \frac{\beta_r \theta \tilde{m}}{m}} \right) \quad \text{et} \quad \theta \mapsto \left(\epsilon e^{i\tilde{m}\theta}, \sum_{r=1}^q \epsilon^{\frac{\beta_r}{m'}} e^{i \frac{\beta_r \theta \tilde{m}}{m'}} \right).$$

Grâce au Lemme 2.13, il suffit de calculer $\text{Enl}(K, K')$, et pour ce faire, on va se ramener au calcul de l'enlacement entre deux nœuds plus simples.

On dispose de $q \in \{-1, \dots, m\}$ tel que $\frac{\beta_q \tilde{m}}{m} < \lambda \leq \frac{\beta_{q+1} \tilde{m}}{m}$ (en posant $\beta_{-1} = -\infty$ et $\beta_{g+1} = +\infty$). On remarque que pour tout $r \leq q$, on a $\frac{\beta_r \tilde{m}}{m} = \frac{\beta'_r \tilde{m}}{m'}$. Alors le nœud K' admet une paramétrisation de la forme

$$\theta \mapsto \left(e^{i\tilde{m}\theta}, \sum_{r=1}^q \epsilon^{\frac{\beta'_r}{m'}} e^{i \frac{\beta'_r \theta \tilde{m}}{m'}} + a_\lambda \epsilon^{\frac{\lambda}{\tilde{m}}} e^{i \frac{\lambda \theta \tilde{m}}{m'}} + \sum_{r>\lambda} a_r \epsilon^{\frac{r}{\tilde{m}}} e^{i \frac{r \theta \tilde{m}}{m'}} \right),$$

avec $a_\lambda \neq 0$. La 2-chaîne paramétrée par

$$(\theta, s) \mapsto \left(e^{im\theta}, \sum_{r=1}^q \epsilon^{\frac{\beta_r}{m}} e^{i\beta_r\theta} + s \sum_{r=g+1}^g \epsilon^{\frac{\beta_r}{m}} e^{i\beta_r\theta} \right)$$

n'intersecte pas le nœud K' pour ϵ suffisamment petit (car $a_\lambda \neq 0$), et possède comme bords K d'un côté, et K_q compté e_q fois de l'autre. Donc

$$\text{Enl}(K, K') = e_q \text{Enl}(K', K_q).$$

On considère désormais la 2-chaîne (de S_ϵ) paramétrée par

$$(\theta, s) \mapsto \left(e^{im'\theta}, \sum_{r=1}^q \epsilon^{\frac{\beta'_r}{m'}} e^{i\beta'_r\theta} + a_\lambda \epsilon^{\frac{\lambda}{m}} e^{i\frac{\lambda\theta m'}{m}} + s \sum_{r>\lambda} a_r \epsilon^{\frac{r}{m}} e^{i\frac{r\theta m'}{m}} \right),$$

qui n'intersecte pas K_q pour ϵ suffisamment petit (car $a_\lambda \neq 0$), et possède comme bords K' d'un côté et e'_q fois le nœud K'' paramétré par

$$\theta \mapsto \left(e^{i\frac{m'\theta}{e'_q}}, \sum_{r=1}^q \epsilon^{\frac{\beta'_r}{m'}} e^{i\frac{\beta'_r\theta}{e'_q}} + a_\lambda \epsilon^{\frac{\lambda}{m}} e^{i\frac{\lambda\theta m'}{m e'_q}} \right),$$

de l'autre côté. Donc

$$\text{Enl}(K', K^q) = e'_q \text{Enl}(K'', K^q) = e_q \frac{m'}{m} \text{Enl}(K'', K^q).$$

Calculons désormais $\text{Enl}(K'', K^q)$. Le nœud K'' est câblé autour du nœud K^q . On cherche à trouver l'invariant de câblage pour pouvoir en déduire $\text{Enl}(K'', K^q)$. Pour cela, on utilise une méthode similaire à celle utilisée lors de la démonstration du Théorème 2.20. Le nœud K' est tracé sur le tore

$$T_q = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| = 1, \exists \theta \in \mathbb{R}, \left| y - \sum_{r=1}^q \epsilon^{\frac{\beta_r}{m}} e^{i\beta_r\theta} \right| = \left| a_\lambda \epsilon^{\frac{\lambda}{m}} \right| \right\}.$$

Un méridien v_q de T_q est donné par la paramétrisation

$$\psi \mapsto \left(1, a_\lambda \epsilon^{\frac{\lambda}{m}} e^{i\psi} \right),$$

et un élément u_q tel que v_q et u_q engendrent $H_1(T_q)$ est donné par la paramétrisation

$$\theta \mapsto \left(e^{i\frac{m\theta}{e_q}}, \sum_{r=1}^q \epsilon^{\frac{\beta_r}{m}} e^{i\frac{\beta_r\theta}{e_q}} + a_\lambda \epsilon^{\frac{\lambda}{m}} \right).$$

On remarque alors qu'au niveau de classes d'homologie on a

$$[K''] = [u_q] + \frac{\lambda m'}{e'_q \tilde{m}} [v_q] = \frac{\lambda m}{e_q \tilde{m}} [v_q].$$

On définit la courbe w_q sur T_q par la paramétrisation

$$\theta \mapsto \left(e^{i\frac{m\theta}{e_q}}, \sum_{r=1}^{q-1} \epsilon^{\frac{\beta_r}{m}} e^{i\frac{\beta_r\theta}{e_q}} + \left(\epsilon^{\frac{\beta_q}{m}} - a_\lambda \right) \epsilon^{\frac{\lambda}{m}} e^{i\frac{\beta_q\theta}{e_q}} \right).$$

De la même manière que la démonstration du Théorème 2.20, on peut trouver une 2-chaîne (de S'_ϵ) n'intersectant pas K_q dont un bords est K_{q-1} compté $\frac{e_{q-1}}{e_q}$ fois et l'autre est w_q . On a alors

$$\text{Enl}(K^q, w_q) = \frac{e_{q-1}}{e_q} \text{Enl}(K^q, K^{q-1}) = \frac{e_{q-1} \bar{\beta}_q}{e_q^2}.$$

Puisque $[w_q] = [u_q] + \frac{\beta_q}{e_q} [v_q]$, on a

$$[K''] = [w_q] + \frac{\frac{\lambda m}{\tilde{m}} - \beta_q}{e_q} [v_q].$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Enl}(K'', K^q) &= \text{Enl}(K^q, w_q) + \frac{\frac{\lambda m}{\tilde{m}} - \beta_q}{e_q} \text{Enl}(K^q, v_q) \\ &= \frac{e_{q-1} \bar{\beta}_q}{e_q^2} + \frac{\frac{\lambda m}{\tilde{m}} - \beta_q}{e_q}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \text{Enl}(K, K') &= e_q^2 \frac{m'}{m} \left(\frac{e_{q-1} \bar{\beta}_q}{e_q^2} + \frac{\frac{\lambda m}{\tilde{m}} - \beta_q}{e_q} \right) \\ &= \frac{m'}{m} \left(e_{q-1} \bar{\beta}_q + e_q \left(\frac{\lambda m}{\tilde{m}} - \beta_q \right) \right). \end{aligned}$$

□

2.5 Polynôme d'Alexander

On rappelle que le polynôme d'Alexander du nœud K , obtenu à partir de $\pi_1(S^3 \setminus K)$, est un invariant de K . C'est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2g(K)$, où $g(K)$ désigne le genre du nœud K . Puisque les nœuds algébriques sont obtenus par itération du processus de câblage, il est possible de montrer que pour ce type de nœuds, le degré du polynôme d'Alexander est égal à $2g(K)$. Le polynôme d'Alexander possède également une propriété de symétrie, qui s'écrit de la manière suivante dans le cas d'un nœud algébrique : $\Delta_K(t) = t^{2g(K)} \Delta_K(t^{-1})$. Le lecteur désirant approfondir ces notions pourra s'intéresser à [4] ou à [5].

Un cas qui va nous intéresser est le cas des nœuds toriques.

Définition 2.24. Notons $T = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = |w| = 1\}$. Soit m et p deux entiers premiers entre eux. Un nœud équivalent à un nœud admettant pour paramétrisation $\theta \mapsto (e^{im\theta}, e^{ip\theta})$ est appelé un nœud torique.

On peut montrer grâce au Théorème de Van Kampen que le groupe fondamental du complémentaire d'un tel nœud torique admet une présentation de la forme $\langle x, y \mid x^m = y^p \rangle$. On peut alors trouver que son polynôme d'Alexander est égal à

$$\Delta_{(m,p)}(t) = \frac{(t^{mp} - 1)(t - 1)}{(t^m - 1)(t^p - 1)}.$$

C'est une propriété cruciale pour le théorème suivant, dont une démonstration est donnée dans [5].

Théorème 2.25. Soit K un nœud, et K' un nœud câblé autour de K , avec invariant de câblage (m, p) . Alors on a

$$\Delta_{K'}(t) = \Delta_K(t^m) \Delta_{(m,p)}(t).$$

On va pouvoir utiliser ce théorème pour calculer par récurrence les polynômes d'Alexander des nœuds algébriques. En effet, on a obtenu ces derniers par câblage successifs et on a calculé les invariants de câblage.

Lemme 2.26. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a

$$\Delta_{K^q}(t) = \frac{(t-1) \prod_{r=1}^q \left(t^{\frac{e_{r-1}\bar{\beta}_r}{e_r e_q}} - 1 \right)}{\left(t^{\frac{m}{e_q}} - 1 \right) \prod_{r=1}^q \left(t^{\frac{\bar{\beta}_r}{e_q}} - 1 \right)}.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur l'entier $q \in \mathbb{N}$. Si $q = 0$, le nœud K^q est le nœud trivial, et le polynôme d'Alexander est égal à 1. L'initialisation est donc vérifiée.

Supposons désormais que le résultat vrai au rang q . Par le Théorème 2.25, on a

$$\begin{aligned} \Delta_{K^{q+1}}(t) &= \Delta_{K^q} \left(t^{\frac{e_{q-1}}{e_q}} \right) \Delta_{\left(\frac{e_q}{e_{q-1}}, \frac{\bar{\beta}_q}{e_q} \right)}(t) \\ &= \frac{\left(t^{\frac{e_q}{e_{q+1}}} - 1 \right) \prod_{r=1}^q \left(t^{\frac{e_{r-1}\bar{\beta}_r}{e_r e_q} \frac{e_q}{e_{q+1}}} - 1 \right)}{\left(t^{\frac{m}{e_q} \frac{e_q}{e_{q+1}}} - 1 \right) \prod_{r=1}^q \left(t^{\frac{\bar{\beta}_r}{e_q} \frac{e_q}{e_{q+1}}} - 1 \right)} \frac{\left(t^{\frac{e_q}{e_{q+1}}} - 1 \right) (t-1)}{\left(t^{\frac{e_q}{e_{q+1}}} - 1 \right) \left(t^{\frac{\bar{\beta}_{q+1}}{e_{q+1}}} - 1 \right)} \\ &= \frac{(t-1) \prod_{r=1}^{q+1} \left(t^{\frac{e_{r-1}\bar{\beta}_r}{e_r e_{q+1}}} - 1 \right)}{\left(t^{\frac{m}{e_{q+1}}} - 1 \right) \prod_{r=1}^{q+1} \left(t^{\frac{\bar{\beta}_r}{e_{q+1}}} - 1 \right)}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.27. On a

$$\deg \Delta_{K^q}(t) = \frac{\frac{e_{q-1}\bar{\beta}_q}{e_q} - \beta_q - m + e_q}{e_q}.$$

Démonstration. Par le Lemme 2.26, on a

$$\begin{aligned} \deg \Delta_{K^q}(t) &= 1 + \sum_{r=1}^q \frac{e_{r-1}\bar{\beta}_r}{e_r e_q} - \frac{m}{e_q} - \sum_{r=1}^q \frac{\bar{\beta}_r}{e_q} \\ &= \frac{1}{e_q} \left(\frac{e_{q-1}\bar{\beta}_q}{e_q} + \sum_{r=1}^{q-1} \left(\frac{e_{r-1}\bar{\beta}_r}{e_r} - \bar{\beta}_{r+1} \right) - \bar{\beta}_1 - m + e_q \right) \\ &= \frac{1}{e_q} \left(\frac{e_{q-1}\bar{\beta}_q}{e_q} + \sum_{r=1}^{q-1} (\beta_r - \beta_{r+1}) - \beta_1 - m + e_q \right) \quad \text{par la formule (1),} \\ &= \frac{1}{e_q} \left(\frac{e_{q-1}\bar{\beta}_q}{e_q} - \beta_q - m - e_q \right). \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.28. Soit B une branche dont la suite caractéristique de Puiseux est $(m; \beta_1, \dots, \beta_g)$, et K le nœud associé à la branche B . Notons Δ_K le polynôme d'Alexander de K . Alors on a

$$\Delta_K(t) = \frac{(t-1) \prod_{r=1}^g \left(t^{\frac{e_{r-1} \bar{\beta}_r}{e_r}} - 1 \right)}{(t^m - 1) \prod_{r=1}^g \left(t^{\bar{\beta}_r - 1} \right)},$$

et son degré est

$$\deg \Delta_{K^g}(t) = e_{g-1} \bar{\beta}_g - \beta_g - m + 1.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente et du lemme précédent. Il suffit de remarquer que $e_g = 1$. \square

Théorème 2.29. Soit K le nœud d'une branche B . Le polynôme d'Alexander, et par conséquent le groupe fondamental du complémentaire du nœud $G = \pi(S^3 \setminus K)$, détermine la suite caractéristique de Puiseux $(m; \beta_1, \dots, \beta_g)$ de la branche B .

Ce théorème est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 2.30. Soit $N \in \mathbb{N}$, et $(a_n)_{1 \leq n \leq N}$, $(b_n)_{1 \leq n \leq N}$ des familles d'entier naturels. Supposons que les polynômes $\prod_{n=1}^N (t^n - 1)^{a_n}$ et $\prod_{n=1}^N (t^n - 1)^{b_n}$ sont égaux. Alors pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, on a $a_n = b_n$.

Démonstration. On procède par récurrence sur l'entier $N \in \mathbb{N}$. Si $N = 0$, le résultat est évident. Supposons désormais que $N > 0$ et que le résultat vrai au rang $N - 1$. Soit $(a_n)_{1 \leq n \leq N}$, $(b_n)_{1 \leq n \leq N}$ des familles d'entier naturels. Supposons que les polynômes $\prod_{n=1}^N (t^n - 1)^{a_n}$ et $\prod_{n=1}^N (t^n - 1)^{b_n}$ sont égaux. Quitte à diviser les deux côtés de l'égalité par une certaine puissance de $t^N - 1$ et à échanger le rôle des familles $(a_n)_{1 \leq n \leq N}$ et $(b_n)_{1 \leq n \leq N}$, on peut supposer que $a_N \geq b_N = 0$. Puisque le côté droit de l'égalité ne s'annule pas en $t = e^{\frac{2i\pi}{N}}$, il en est de même du côté gauche. On a alors $a_N = 0 = b_N$. On conclut grâce à l'hypothèse de récurrence. \square

On conclut en présentant un bilan des résultats obtenus au cours de cette partie. Il regroupe des caractérisations pour la notion d'équisingularité.

Théorème 2.31. Soit B et B' deux branches. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) B et B' sont équisinguliers ;
- (ii) les nœuds K et K' de B et B' ont le même polynôme d'Alexander ;
- (iii) les groupes fondamentaux $\pi_1(S^3 \setminus K)$ et $\pi_1(S^3 \setminus K')$ sont isomorphes ;
- (iv) les branches B et B' sont topologiquement équivalentes, c'est-à-dire les paires $(D_\epsilon^4, D_\epsilon^4 \cap B)$ et $(D_\epsilon^4, D_\epsilon^4 \cap B')$ sont homéomorphes pour ϵ suffisamment petit ;
- (v) les nœuds K et K' sont isotopes.

Démonstration. Par le Théorème d'extension des isotopies, le point (v) implique qu'on a un homéomorphisme entre les paires $(S_\epsilon^3, S_\epsilon^3 \cap B)$ et $(S_\epsilon^3, S_\epsilon^3 \cap B')$, ce qui implique à son tour le point (iv) grâce au Lemme 2.6. L'implication (iv) \Rightarrow (iii) est immédiate, il suffit de regarder ce qu'il se passe au niveau des bords. L'implication (iii) \Rightarrow (ii) découle de la définition du polynôme d'Alexander. L'implication (ii) \Rightarrow (i) est une conséquence du Théorème 2.29. Enfin l'implication (i) \Rightarrow (v) est donnée par le Théorème 2.14. \square

Remarque 2.32. *Ce théorème montre, entre autres, que dans le cadre des nœuds algébriques, les deux relations d'équivalences qu'on a introduites sur les nœuds fournissent les mêmes classes d'équivalence.*

Pour avoir un aperçu d'un théorème plus général, traitant le cas où le germe de courbe possède plusieurs branches (mais dont l'énoncé et la démonstration nécessitent l'introduction de notions supplémentaires), on renvoie à [2].

3 Semi-groupe d'une branche

L'objectif de cette partie est d'introduire un invariant supplémentaire : le semi-groupe d'une branche. On met ensuite en lien cet invariant avec la suite caractéristique de Puiseux. Grâce aux propriétés trouvées dans la première sous-partie, on s'intéresse dans la deuxième sous-partie à mettre le polynôme d'Alexander du nœud d'une branche sous une forme bien spécifique, qui nous permettra d'énoncer le Théorème de Borodzik et Livingston lors de la dernière partie. Le semi-groupe d'une branche jouera un rôle crucial dans la démonstration de ce théorème.

3.1 Propriétés des semi-groupes

Dans cette section, la notion de semi-groupe désignera un sous-ensemble de \mathbb{N} stable par addition et contenant 0. Si $S \neq \{0\}$, on notera $d(S)$ le plus grand diviseur commun des éléments de S . On commence par énoncer une propriété importante des semi-groupes de \mathbb{N} . Les théorèmes et démonstrations de cette sous-partie proviennent de [2].

Lemme 3.1. *Un semi-groupe S contient tous les multiples positifs de $d(S)$ sauf un nombre fini.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $d(S) = 1$. Soit $r \in S \setminus \{0\}$. Notons H le sous-groupe de \mathbb{Z} engendré par S . Puisque $d(S) = 1$, on dispose par le Théorème de Bézout de $a_1, \dots, a_k \in S$ et de $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Z}$ tels que $1 = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$. Quitte à réordonner les indices, on peut supposer sans perte de généralité qu'on dispose de $\ell \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell < 0$ et $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_k > 0$. Posons alors $s = \sum_{i=1}^{\ell} -\lambda_i a_i$, on a $s \in S$ et $s + 1 = \sum_{i=\ell+1}^k \lambda_i a_i \in S$. Soit $n \geq (s-1)(s+1)$. Montrons que n appartient à S . La division euclidienne de n par s nous donne l'existence de $q, r \in \mathbb{N}$ tels que $n = qs + r$, avec $0 \leq r < s$. Puisque $n = qs + r \geq (s-1)s + (s-1)$, on a $q \geq s-1 \geq r$. D'où $n = qs + r = (rs + r) + (q-r)s = r(s+1) + (q-r)s \in S$. On a donc montré que tout entier plus grand que $(s-1)(s+1)$ appartient à S . En d'autres termes, S contient tous les multiples positifs de $d(S) = 1$ sauf un nombre fini d'entre eux. \square

Dans cette section, nous noterons par la suite $N(S)$ le plus grand multiple de $d(S)$ n'appartenant pas à S . Par exemple, si pour $d \in \mathbb{N}$, $S = d\mathbb{N}$, alors $N(S) = -d$.

Définition 3.2. *Soit B une branche paramétrée par $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{C}\{t\}$. On définit le semi-groupe de B par*

$$S(B) = \{\text{ord}(t \mapsto \phi(x(t), y(t))) \mid \phi \in \mathbb{C}\{x, y\} \text{ telle que } t \mapsto \phi(x(t), y(t)) \text{ n'est pas nulle}\},$$

la suite de sauts de B par

$$G(B) = \mathbb{N} \setminus S(B),$$

et le nombre de sauts de B par

$$\delta(B) = \#G(B).$$

Remarque 3.3. *Par définition, il est immédiat que $S(B)$ et $\delta(B)$ sont invariants par changements de cartes holomorphe en $O \in \mathbb{C}^2$. Ils sont également indépendants du choix d'une bonne paramétrisation par le Lemme 1.14. Il est clair que $S(B)$ est un semi-groupe puisque pour $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}\{x, y\}$, on a $\text{ord}\phi_1\phi_2 = \text{ord}\phi_1 + \text{ord}\phi_2$.*

On va relier ces invariants à la suite caractéristique de Puiseux d'une branche.

Lemme 3.4. *Soit B une branche dont la suite caractéristique de Puiseux est $(m; \beta_1, \dots, \beta_g)$. On a les résultats suivants :*

1. l'ensemble $S(B)$ est l'ensemble des nombres d'intersection de B avec les germes de courbes holomorphes C en $(0,0)$ ne contenant pas B ,
2. pour tout q , $\bar{\beta}_q$ appartient à $S(B)$,
3. le nombre d'éléments de la suite de sauts $\delta(B)$ est fini.

Démonstration.

1. Le résultat découle du fait que le nombre d'intersection en $(0,0)$ entre un germe de courbe holomorphe C et une branche B est obtenu comme l'ordre de la série entière définie en insérant une bonne paramétrisation de B dans la fonction définissant l'équation de C .
2. On suppose que B est paramétrée par $t \mapsto (t^m, \sum_{r=1}^{\infty} a_r t^r)$, avec les notations des sections précédentes. Pour tout $q \in \{1, \dots, g\}$, on définit la branche B_q^- par la paramétrisation $t \mapsto (t^m, \sum_{1 \leq r < \beta_q} a_r t^r)$. Tous les termes sont des puissances de t^{e_q-1} . Par le Théorème 2.22, on a $(B \cdot B_q^-)_O = \frac{m}{e_q-1} H(\beta_q) = \bar{\beta}_q$. Le premier point permet alors de conclure.
3. On rappelle qu'on a par définition pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$,

$$\bar{\beta}_i = \frac{1}{e_{i-1}} (m\beta_1 + e_1(\beta_2 - \beta_1) + \dots + e_{i-1}(\beta_i - \beta_{i-1})),$$

et pour tout $i \in \{1, \dots, g-1\}$ la relation,

$$\bar{\beta}_{i+1} - \frac{e_{i-1}}{e_i} \bar{\beta}_i = \beta_{i+1} - \beta_i.$$

On a alors $\text{pgcd}(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g) = \text{pgcd}(\beta_0, \dots, \beta_g) = 1$. En effet, prenons un entier d tel que pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$, $d \mid \beta_i$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$ et pour tout $k \in \{1, \dots, i-1\}$, on a $d \mid \frac{e_k}{e_{i-1}}(\beta_{k+1} - \beta_k)$ et $d \mid \frac{m}{e_{i-1}}\beta_1$, donc $d \mid \bar{\beta}_i$. Réciproquement, si on dispose d'un entier d tel que pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$, $d \mid \bar{\beta}_i$, alors on a $d \mid \beta_0 = \bar{\beta}_0$, et $d \mid \beta_1 = \bar{\beta}_1$. La relation énoncée ci-dessus nous permet de montrer par récurrence que $i \in \{1, \dots, g\}$, $d \mid \beta_i$.

Par le Lemme 3.1, puisque $d(S(B)) = 1$, on a bien que $S(B)$ contient tous les entiers naturels sauf un nombre fini, ce qui revient à dire que $\delta(B)$ est fini .

□

Définition 3.5. Soit S un semi-groupe. On dit que S est un semi-groupe dual si pour tout r multiple de $d(S)$, on a $r \in S$ si et seulement si $(N(S) - r) \notin S$.

Exemple 3.6. Pour $d \in \mathbb{N}$, $S = d\mathbb{N}$ est un semi-groupe dual.

Lemme 3.7. Soit S un semi-groupe dual et $b \in \mathbb{N}$. Posons $S_1 = S + \mathbb{N}b$ et $q = \frac{d(S)}{d(S_1)}$. Supposons que $qb > N(S)$. Alors S_1 est un semi-groupe dual et on a $N(S_1) = N(S) + b(q-1)$.

Démonstration. Commençons par remarquer que $d(S_1) = \text{pgcd}(b, d(S))$ et que q est plus petit entier naturel non nul tel que qb est divisible par $d(S)$.

Puisque $qb > N(S)$, on a $qb \in S$. Ainsi tout élément de S_1 peut être écrit de manière unique sous la forme $s + nb$, avec $0 \leq n < q$ et $s \in S$.

Soit x un multiple de $d(S_1) = \text{pgcd}(b, d(S))$. Par le Théorème de Bézout, on dispose de $r, u \in \mathbb{Z}$ uniques tels que $x = rd(S) + ub$ et $0 \leq u < q$.

Montrons qu'on a $x \in S_1$ si et seulement si $rd(S) \in S$. En effet, si $x \in S_1$, écrivons $x = s + nb$, avec $0 \leq n < q$ et $s \in S$. On a $n \equiv u \pmod{q}$, donc $n = q$ et $rd(S) = s \in S$. La réciproque est évidente.

Posons $M = N(S) + b(q - 1)$. Montrons que $x \in S_1$ si et seulement si $M - x \in S_1$. On a $M - x = (N(S) - rd(S)) + (q - 1 - u)b$, avec $0 \leq q - 1 - u < q$. Par ce qu'on a montré précédemment, on a $(M - x) \in S_1$ si et seulement si $(N(S) - rd(S)) \in S$. Mais puisque S est un semi-groupe dual, ceci est équivalent à $rd(S) \notin S$, c'est-à-dire à $x \notin S_1$ par ce qui précède.

Puisque 0 est plus petit élément de S_1 , on a alors que M est le plus grand multiple de $d(S_1)$ qui n'est pas dans S_1 , et ainsi que $N(S_1) = M$ et que S_1 est un semi-groupe dual. \square

Exemple 3.8. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$ et notons $d = \text{pgcd}(a, b)$. Considérons le semi-groupe $S_1 = a\mathbb{N} + b\mathbb{N}$ et $S = a\mathbb{N}$. Le semi-groupe S est dual, avec $d(S) = a$, et $N(S) = -a$, et on a $q = \frac{a}{d}$. Puisque $N(S) < 0$, les hypothèses du lemme sont vérifiées. Le semi-groupe S_1 est alors un semi-groupe dual, et

$$N(S_1) = -a + b \left(\frac{a}{d} - 1 \right) = \frac{ab}{d} - a - b.$$

En particulier, si a et b sont premiers entre eux, le plus grand entier qui n'appartient pas à $a\mathbb{N} + b\mathbb{N}$ est $ab - a - b$.

Théorème 3.9. Soit B une branche. Notons $\{m; \beta_1, \dots, \beta_g\}$ la suite caractéristique de Puiseux de B . Alors

1. le semi-groupe $S(B)$ est engendré par $\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g$,
2. cet ensemble de générateurs est minimal : $\bar{\beta}_q$ est le plus petit élément de $S(B)$ non divisible par e_{q-1} ,
3. $S(B)$ est un semi-groupe dual.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant dont la démonstration s'effectue par récurrence.

Lemme 3.10. Soit B une branche. Notons $\{m; \beta_1, \dots, \beta_g\}$ la suite caractéristique de Puiseux de B . Pour tout $q \in \{1, \dots, g\}$, notons S_q le semi-groupe engendré par $\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_q$. On a pour tout $q \in \{1, \dots, g\}$,

1. $d(S_q) = e_q$,
2. $N(S_q) = -m - \beta_q + \frac{e_{q-1}}{e_q} \bar{\beta}_q = -\bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_{q+1} - \beta_{q+1}$ (la deuxième égalité n'étant valable que si $q \leq g - 1$),
3. $\frac{e_{q-1}}{e_q} \bar{\beta}_q > N(S_q) > N(S_{q-1})$,
4. S_q est un semi-groupe dual.

Remarque 3.11. Le troisième point montre que l'hypothèse du Lemme 3.7 est vérifiée quand on ajoute $\bar{\beta}_q$ au semi-groupe S_{q-1} .

Démonstration. Commençons par rappeler que par définition on a $\bar{\beta}_0 = m$, $\bar{\beta}_1 = \beta_1$, et pour $q \in \{1, \dots, g - 1\}$,

$$\frac{e_q}{m} \bar{\beta}_{q+1} - \frac{e_{q-1}}{m} \bar{\beta}_q = H(\beta_{q+1}) - H(\beta_q) = \frac{e_q}{m} (\beta_{q+1} - \beta_q),$$

ce qui montre que les deux formules pour $N(S_q)$ sont équivalentes.

Les assertions sont toutes vraies pour le cas $q = 1$ puisque S_1 possède deux générateurs m et β_1 , et on a traité le cas des semi-groupes à deux générateurs plus haut.

On suppose désormais les assertions vraies pour un élément q de $\{1, \dots, g - 1\}$, montrons qu'elles sont également vraies pour $q + 1$. Par définition, on a $\bar{\beta}_{q+1} - \beta_{q+1} = \frac{e_{q-1}}{e_q} \bar{\beta}_q - \beta_q$, donc e_q

divise $\bar{\beta}_{q+1} - \beta_{q+1}$. Ainsi on a $\text{pgcd}(\bar{\beta}_{q+1}, e_q) = \text{pgcd}(\beta_{q+1}, e_q) = e_{q+1}$, ce qui démontre le premier point.

Pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$, on définit $A_i = -m - \beta_i + \frac{e_{i-1}}{e_i} \bar{\beta}_i$. On a

$$\begin{aligned} A_q + \left(\frac{e_q}{e_{q+1}} - 1 \right) \bar{\beta}_{q+1} &= N(S_q) + \left(\frac{e_q}{e_{q+1}} - 1 \right) \bar{\beta}_{q+1} \\ &= -\bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_{q+1} - \beta_{q+1} + \left(\frac{e_q}{e_{q+1}} - 1 \right) \bar{\beta}_{q+1} \\ &= -\bar{\beta}_0 - \beta_{q+1} + \frac{e_q}{e_{q+1}} \bar{\beta}_{q+1} \\ &= A_{q+1}. \end{aligned}$$

En particulier, on a $\frac{e_q}{e_{q+1}} \bar{\beta}_{q+1} > A_{q+1} > A_q$. On peut alors appliquer le Lemme 3.7 pour adjoindre le générateur $\bar{\beta}_{q+1}$ à S_q , ce qui démontre le quatrième point. Le calcul ci-dessus montre alors que $N(S_{q+1}) = A_{q+1}$, ce qui prouve le deuxième point et le troisième point. \square

Démonstration du Théorème 3.9. D'après le Lemme 3.10, les deux derniers points découlent directement du premier point. On a déjà vu que pour tout $q \in \{1, \dots, g\}$, on a $\bar{\beta}_q \in S(B)$.

D'après le premier point du Lemme 3.4, il suffit de montrer que pour toute branche B' , le nombre d'intersection $(B.B')_O$ appartient au semi-groupe S_g . On suppose qu'on dispose d'un entier q tel que l'exposant de contact κ de B et B' vérifie $\beta_q < m\kappa \leq \beta_{q+1}$. On va montrer que $(B.B')_O \in S_q$. Par le Théorème 2.22, on a alors

$$\begin{aligned} (B.B')_O &= m'H(m\kappa) \\ &= \frac{m'}{m} \left(e_{q-1} \bar{\beta}_q + e_q \left(\frac{\lambda m}{\tilde{m}} - \beta_q \right) \right) \\ &= e'_{q-1} \bar{\beta}_q + e_q (m'\kappa - \beta'_q). \end{aligned}$$

On a alors que e_q divise $(B.B')_O$, puisque e_q divise $\bar{\beta}_q$. Et on a également

$$\begin{aligned} (B.B')_O &\geq \frac{e'_{q-1}}{e'_q} \bar{\beta}_q \\ &\geq \frac{e_{q-1}}{e_q} \bar{\beta}_q \\ &\geq N(S_q) \quad \text{par le lemme précédent.} \end{aligned}$$

On en déduit alors que $(B.B')_O$ appartient à $S_q \subset S_g$. \square

Corollaire 3.12. *Soit B une branche et $S(B)$ son semi-groupe. On a $2\delta(B) = 1 + N(S(B))$.*

Démonstration. D'après le Lemme 3.10, on a $d(S(B)) = e_g = 1$. Ainsi par définition de $N(S(B))$, on a que tout entier $n > N(S(B))$ appartient à $S(B)$.

D'après le Théorème 3.9, le semi-groupe $S(B)$ est un semi-groupe dual. On a donc pour tout $n \in \{0, \dots, N(S(B))\}$, $n \in S(B)$ si et seulement si $(N(S(B)) - n) \notin S(B)$. De plus, puisque $S(B)$ admet un ensemble de générateurs minimal de cardinal supérieur ou égal à 2, la formule du Lemme 3.10 nous donne que $N(S(B))$ est impair. On en déduit qu'il y a exactement la moitié des éléments de $\{0, \dots, N(S(B))\}$ qui n'appartiennent pas à $S(B)$, ce qui prouve le théorème. \square

On termine cette sous-partie par un bilan récapitulant les liens entre les différents invariants ayant joué un rôle au cours de cette partie.

Proposition 3.13. *Pour une branche, chacune des informations suivantes détermine les autres :*

- La suite caractéristique de Puiseux,
- La fonction de Herbrand,
- La suite $\{\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_q\}$,
- Le semi-groupe $S(B)$.

En particulier, chacune d'entre elles est indépendante du choix des cartes ou de la paramétrisation.

Démonstration. De par sa définition, la fonction de Herbrand de B est déterminée par la suite caractéristique de Puiseux de B . Réciproquement, puisque la pente de H est $\frac{1}{m}$ sur l'intervalle $]\beta_g, +\infty[$, et que les points où la fonction de Herbrand n'est pas dérivable sont précisément les autres éléments de la suite caractéristique de Puiseux, on a que la fonction de Herbrand détermine la suite caractéristique de Puiseux.

Par définition, la suite caractéristique de Puiseux détermine $\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g$. Réciproquement, les éléments $\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g$ déterminent pour tout $q \in \{1, \dots, g\}$, $e_q = \text{pgcd}(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g)$. Puisque $\beta_0 = \bar{\beta}_0$, on peut alors montrer par récurrence qu'ils déterminent les autres éléments de la suite caractéristique de Puiseux grâce à la formule (1).

D'après le premier point Théorème 3.9, le semi-groupe $S(B)$ est déterminé par $\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_g$. D'après le deuxième point de ce même théorème, on peut retrouver ces éléments par récurrence à partir de $S(B) : \bar{\beta}_0 = e_0$ est le plus petit élément non nul de $S(B)$, et pour tout $q \in \{1, \dots, g\}$, $\bar{\beta}_q$ est le plus petit élément de $S(B)$ non divisible par e_{q-1} , et e_q est le plus grand diviseur commun de e_{q-1} et $\bar{\beta}_q$.

Puisque le semi-groupe $S(B)$ ne dépend pas de la paramétrisation choisie ou du choix des cartes, on en déduit qu'il en est de même des autres informations. \square

3.2 Retour sur le polynôme d'Alexander

On utilise dans cette sous-partie les résultats trouvés dans la partie précédente pour mettre le polynôme d'Alexander d'un nœud algébrique sous une autre forme, qui sera adaptée à l'énoncé du Théorème de Borodzik et Livingston. Les démonstrations de cette sous-partie étaient laissées à titre d'exercices dans [2].

Proposition 3.14. *Soit B une branche, et K le nœud de cette branche. Le degré du polynôme d'Alexander de K est égal à $2g(K) = N(S(B)) + 1 = 2\delta(B)$.*

Démonstration. La preuve est une conséquence immédiate du Corollaire 2.28, du Lemme 3.10 et du Corollaire 3.12. \square

On introduit maintenant un outil intermédiaire pour changer la forme du polynôme d'Alexander d'un nœud algébrique, et le mettre en lien avec la suite de sauts.

Définition 3.15. *Soit S un semi-groupe. On appelle série de Poincaré de S la série formelle $G_S(t) = \sum_{i \in S} t^i$.*

Lemme 3.16. *Soit S un semi-groupe dual non trivial et $b \in \mathbb{N}$. Posons $S_1 = S + \mathbb{N}b$, et $q = \frac{d(S)}{d(S_1)}$. Supposons que $qb > N(S)$. On a la relation suivante entre les séries de Poincaré de S et S_1 :*

$$G_{S_1}(t) = G_S(t) \frac{1 - t^{qb}}{1 - t^b}.$$

Démonstration. D'après le Lemme 3.7, l'ensemble S_1 est un semi-groupe dual vérifiant $N(S_1) = N(S) + b(q-1)$.

On a $S_1 + b \subset S_1$, et $S + qb \subset S$ (car qb est un élément de S). Montrons qu'on a $S_1 \setminus (S_1 + b) = S \setminus (S + qb)$. Si b est nul, l'égalité est évidemment vraie, on suppose donc pour la suite que b n'est pas nul.

Soit x un élément de $S + qb$. L'élément x appartient bien à S_1 . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x_1 \in S_1$ tel que $x = x_1 + b$. Puisque x_1 appartient à S_1 , on dispose de $x' \in S$ et d'un entier naturel k tels que $x_1 = x' + kb$. On a alors $x = x' + (k+1)b$. On a donc $d(S) \mid (k+1)b$, et puisque qb appartient à S , on a aussi $d(S) \mid qb$. On écrit ensuite la division euclidienne de $k+1$ par q : on dispose d'un entier naturel a et de $r \in \{0, \dots, q-1\}$ tels que $k+1 = aq + r$, donc $d(S)$ divise rb . Puisque r est strictement plus petit que q , et que par définition de q , q est le plus petit entier naturel non nul tel que qb est divisible par $d(S)$, on a nécessairement $r = 0$. Mais on a alors $x = x' + aqb \in S + qb$ ce qui est absurde!

Réciproquement, prenons x_1 un élément de $S_1 \setminus (S_1 + b)$. On dispose d'un élément x de S et d'un entier naturel k tels que $x_1 = x + kb$. Mais puisque x est aussi un élément de S_1 et que x_1 n'appartient pas à $S_1 + b$, on a $k = 0$, donc x_1 est bien un élément de S . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'on dispose d'un élément y de S tel que $x_1 = y + bq = y + (b-1)q + q$. On a l'inégalité $y + (b-1)q > N(S) + (b-1)q$, où $y + (b-1)q$ est un multiple de $d(S_1)$ et $N(S) + (b-1)q$ d'après le Lemme 3.7. Comme b n'est pas nul, on a $y + (b-1)q$ appartient à S_1 , ce qui contredit la définition de x_1 .

Par définition de la série de Poincaré, on obtient alors l'égalité suivante

$$G_{S_1}(t) - G_{S_1}(t)t^b = G_S(t) - t^{qb}G_S(t),$$

ce qui démontre le lemme. \square

Corollaire 3.17. *Soit B une branche dont la suite caractéristique de Puiseux est $(\beta_0, \dots, \beta_g)$. Notons S le semi-groupe de B , et G_S la série de Poincaré de S .*

Alors on a l'égalité suivante

$$G_S(t) = \frac{1}{1 - t^{\bar{\beta}_0}} \prod_{i=1}^g \frac{1 - t^{\bar{\beta}_i \frac{e_i-1}{e_i}}}{1 - t^{\bar{\beta}_i}}.$$

Démonstration. Par le Théorème 3.9, on a $S = \bar{\beta}_0\mathbb{N} + \bar{\beta}_1\mathbb{N} + \dots + \bar{\beta}_g\mathbb{N}$. Posons $q_0 = 0$, et pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$, $q_i = \frac{d(S_{i-1})}{d(S_i)} = \frac{e_i-1}{e_i}$. Puisqu'on a $G_{\bar{\beta}_0\mathbb{N}}(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^{\bar{\beta}_0 k} = \frac{1}{1 - t^{\bar{\beta}_0}}$, on obtient aisément par récurrence, en utilisant le lemme précédent (dont les hypothèses sont bien vérifiées d'après le Lemme 3.10), l'égalité suivante

$$G_S(t) = \prod_{i=0}^g \frac{1 - t^{\bar{\beta}_i q_i}}{1 - t^{\bar{\beta}_i}}.$$

\square

Lemme 3.18. *Soit B une branche. On note K son nœud et S son semi-groupe. On a $\Delta_K(t) = (1-t)G_S(t)$.*

Démonstration. D'après Corollaire 2.28, on a

$$\Delta_K(t) = \frac{(t-1) \prod_{r=1}^g \left(t^{\frac{e_{r-1}\bar{\beta}_r}{e_r}} - 1 \right)}{(t^m - 1) \prod_{r=1}^g \left(t^{\bar{\beta}_r - 1} \right)}.$$

Puisqu'on a $\overline{\beta_0} = m$, le corollaire précédent permet d'aboutir au résultat souhaité. \square

Le corollaire suivant nous donne enfin la forme désirée pour le polynôme d'Alexander d'un nœud algébrique.

Corollaire 3.19. *Soit B une branche. On note K son nœud et g le genre de K . Alors on a les résultats suivants :*

1. *On dispose d'une famille strictement croissante d'entiers $(n_i)_{0 \leq i \leq 2\ell}$ vérifiant $n_0 = 0$ et $n_{2\ell} = 2g$ telle que le polynôme d'Alexander de K est de la forme*

$$\Delta_K(t) = \sum_{i=0}^{2\ell} (-1)^i t^{n_i}.$$

2. *Écrivant pour tout $i \in \{0, \dots, \ell\}$,*

$$t^{n_{2i}} - t^{n_{2i-1}} = (t-1)(t^{n_{2i}-1} + t^{n_{2i}-2} + \dots + t^{n_{2i-1}}),$$

on peut écrire le polynôme d'Alexander sous la forme

$$\Delta_K(t) = 1 + (t-1) \sum_{j=1}^k t^{g_j},$$

où les entiers $0 < g_1 < \dots < g_k$ sont exactement les éléments de la suite de sauts de B .

Démonstration. 1. On note S le semi-groupe associé à la branche B . D'après le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} \Delta_K(t) &= (1-t) \sum_{i \in S} t^i \\ &= \sum_{i \in S} t^i - \sum_{i \in S} t^{i+1} \end{aligned}$$

Mais d'après le Lemme 3.4, le nombre $\delta(B)$ d'entiers naturels qui ne sont pas dans S est fini. On dispose alors d'un entier naturel M tel que tout entier $n \geq M$ appartient à S . On a alors

$$\Delta_K(t) = \sum_{i \in S, i \leq M} t^i - \sum_{i \in S, i < M} t^{i+1},$$

ce qui correspond à la forme voulue puisqu'on sait que le polynôme d'Alexander est de degré $2g$. On peut même être un petit peu plus précis. Écrivons $\Delta_K(t) = \sum_{n \leq M} a_n t^n$. On a $a_0 = 1$, et pour tout entier naturel i ,

- $a_{i+1} = 0$ si $i \in S$ et $i+1 \in S$,
- $a_{i+1} = -1$ si $i \in S$ et $i+1 \notin S$,
- $a_{i+1} = 1$ si $i \notin S$ et $i+1 \in S$,
- $a_{i+1} = 0$ si $i \notin S$ et $i+1 \notin S$.

2. Par le premier point, on dispose d'une famille strictement croissante d'entiers $(n_j)_{0 \leq j \leq 2\ell}$ vérifiant $n_0 = 0$ et $n_{2\ell} = 2g$ telle que

$$\Delta_K(t) = \sum_{j=0}^{2\ell} (-1)^j t^{n_j}.$$

Par la discussion effectuée ci-dessus, on a pour tout $j \in \{1, \dots, 2\ell\}$,

- $n_j - 1 \notin S$ et $n_j \in S$ si j est pair,
- $n_j - 1 \in S$, et $n_j \notin S$ si j est impair.

Toujours grâce à la même discussion, on en déduit aisément grâce à un raisonnement par récurrence que pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$ les entiers compris entre n_{2i-1} et $n_{2i} - 1$ n'appartiennent pas à S , et que $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ les entiers compris entre n_{2i} et $n_{2i+1} - 1$ sont dans S .

En reprenant les notations de l'énoncé, puisqu'on a

$$\{g_1, \dots, g_k\} = \{n_1, \dots, n_2 - 1, n_3, \dots, n_4 - 1, \dots, n_{2\ell-1}, \dots, n_{2\ell} - 1\},$$

on en déduit que les éléments g_1, \dots, g_k sont précisément les entiers naturels qui n'appartiennent pas à S , c'est-à-dire les éléments de la suite des sauts de S .

□

4 Courbes rationnelles cuspidales

Dans cette partie, on applique les méthodes de l'homologie de Heegaard Floer pour identifier des propriétés topologiques de certaines courbes complexes de $\mathbb{C}P^2$. Comme mentionné en introduction, l'homologie de Heegaard Floer a servi de "boîte noire" lors de mon stage. On présentera donc sans démonstration les théorèmes et propositions dont on aura besoin. Le document [6] fournit une introduction au sujet. On pourra aussi consulter [7], [8] et [9].

On considère C une courbe algébrique irréductible de $\mathbb{C}P^2$. Par compacité, et puisque les singularités sont des points isolés de la courbe, la courbe possède un nombre fini de points singuliers z_1, \dots, z_n . Comme on l'a vu dans la partie précédente, à chacun de ces points singuliers on peut associer un entrelacs. Un problème sur lequel il est intéressant de se pencher serait de connaître les différentes configurations possibles pour les entrelacs associés à chacun de ses points singuliers. Mais ce problème étant trop difficile à traiter en toute généralité, on s'intéresse à un cas plus simple, dans lequel tous ces entrelacs sont des nœuds, c'est-à-dire le cas où la courbe C est cuspidale. On supposera également que la courbe est rationnelle. Dans le langage du géomètre algébriste, cela veut dire qu'elle est birationnellement équivalente à $\mathbb{C}P^1$. Dans le langage du topologue (dans le cas où la courbe est supposée cuspidale), cela revient à dire que C est homéomorphe à la sphère S^2 .

4.1 Voisinage "tubulaire" d'une courbe rationnelle cuspidale

Soit $C \subset \mathbb{C}P^2$ une courbe rationnelle cuspidale de degré d . Notons z_1, \dots, z_n ses points singuliers, et K_1, \dots, K_n les nœuds associés à ces singularités. Dans un premier temps, on va construire un voisinage tubulaire de C . On le construit en trois étapes :

1. On prend tout d'abord des petites boules fermées autour des points singuliers z_1, \dots, z_n .
2. On relie ensuite les points singuliers successifs deux à deux par $n - 1$ arcs disjoints plongés dans C et on prend un voisinage tubulaire fermé de ces arcs. Le tout forme alors une boule B de dimension 4.
3. L'ensemble $C \setminus B$ est un disque, donc un voisinage tubulaire fermé de $C \setminus B$ forme une 2-anse. On remarque que cette 2-anse est attachée à la boule B le long de la courbe formée par la somme connexe $K = K_1 \# \dots \# K_n$.

On a ainsi construit un voisinage de C , qu'on qualifiera de voisinage tubulaire. On le notera Y dans toute la suite du mémoire. Posons $M = \partial Y$ et $W = \overline{\mathbb{C}P^2} \setminus Y$.

La variété Y est construite en attachant une 2-anse $D^2 \times D^2$ à la boule B^4 , via une application d'attachement $f : S^1 \times D^2 \rightarrow B^4$ vérifiant $f(S^1 \times \{0\}) = K$. Le bord de Y est S^3 privé du tore plein $f(S^1 \times D^2)$, auquel on attache une copie de $D^2 \times S^1$ ajoutée via $f|_{S^1 \times S^1}$.

On obtient un espace qu'on note $S_{d^2}^3(K)$, qui est l'espace obtenu par chirurgie de S^3 sur K avec "framing" d^2 .

La paire $(\mathbb{C}P^2, C)$ nous donne une suite exacte longue qui va nous permettre de calculer les groupes d'homologie relative.

On a clairement $H_0(\mathbb{C}P^2, C) = 0$.

On a la suite exacte $0 = H_1(\mathbb{C}P^2) \rightarrow H_1(\mathbb{C}P^2, C) \rightarrow H_0(C) \rightarrow H_0(\mathbb{C}P^2) \rightarrow \dots$. Puisque la troisième application est injective, on a que l'image de la deuxième application est nulle. Le noyau de la deuxième application est donc égal à $H_1(\mathbb{C}P^2, C)$. Mais ce noyau est aussi l'image de la première application. On a alors $H_1(\mathbb{C}P^2, C) = 0$.

On montre exactement de la même manière que $H_3(\mathbb{C}P^2, C) = 0$.

On a alors la suite exacte $0 = H_3(\mathbb{C}P^2, C) \rightarrow H_2(C) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_2(\mathbb{C}P^2) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_2(\mathbb{C}P^2, C) \rightarrow H_1(C) = 0$. Le noyau de la quatrième application est égal à $H_2(\mathbb{C}P^2, C)$, ainsi qu'à l'image de la troisième application. Or le noyau de la troisième application est égal à l'image de la deuxième. Pour

calculer cette image, il suffit de remarquer que l'image de la classe fondamentale $[C]$ dans $H_1(\mathbb{C}P^2)$ est égale à $d[\mathbb{C}P^1]$. Par le théorème d'isomorphisme, on obtient finalement $H_2(\mathbb{C}P^2, C) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Enfin, on a la suite exacte $0 = H_4(C) \rightarrow H_4(\mathbb{C}P^2) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_4(\mathbb{C}P^2, C) \rightarrow H_3(C) = 0$, grâce à laquelle on obtient $H_4(\mathbb{C}P^2, C) \simeq \mathbb{Z}$.

Par le théorème d'excision, on a $H_*(\mathbb{C}P^2, C) \simeq H_*(\mathbb{C}P^2 \setminus \dot{Y}, Y \setminus \dot{Y}) = H_*(W, \partial Y)$. Puisqu'on a $\partial W = \partial Y$, le théorème de dualité de Lefschetz nous donne pour tout $k \in \{0, \dots, 4\}$, $H_k(W, \partial Y) \simeq H^{4-k}(W)$. Donc $H^0(W) \simeq \mathbb{Z}$, $H^1(W) = 0$, $H^2(W) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $H^3(W) = 0$ et $H^4(W) = \{0\}$. On applique ensuite le théorème des coefficients universels pour obtenir que $H_0(W) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(W) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, et que les autres groupes d'homologie sont nuls.

Enfin, la suite exacte longue associée à la paire (W, M) nous donne

$$0 \rightarrow H_2(W, M) \rightarrow H_1(M) \rightarrow H_1(W) \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/d^2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Par dualité, on a $H^2(W) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $H^2(M) \simeq \mathbb{Z}/d^2\mathbb{Z}$.

4.2 Structures Spin^c

Les structures Spin^c sont des structures géométriques qui existent sur toutes les variétés de dimension 3 ou 4. Pour toute variété X de dimension 3 ou 4, on dispose d'une action de groupe transitive de $H^2(X)$ sur l'ensemble $\text{Spin}^c(X)$ des structures Spin^c sur X . Par les résultats obtenus lors de la sous-partie précédente, on obtient alors que W possède d structures Spin^c et que $M = \partial W$ en possède d^2 . Ces d^2 structures Spin^c sur ∂W sont notées \mathfrak{s}_m , pour $m \in \left[-\frac{d^2}{2}, \frac{d^2}{2}\right] \cap \mathbb{Z}$.

La définition précise d'une structure Spin^c dépasse le cadre de ce mémoire. Cet objet interviendra néanmoins dans la démonstration du Théorème de Borodzik et Livingston, et on utilisera le résultat suivant, qui est démontré dans [1] grâce à un résultat de [10].

Lemme 4.1. *Soit C une courbe rationnelle cuspidale de degré d . Notons Y un voisinage de C dans $\mathbb{C}P^2$ construit comme dans la sous-partie précédente, et posons $W^4 = \mathbb{C}P^2 \setminus Y$. Alors :*

- *Dans le cas où d est impair, la structure $\text{Spin}^c \mathfrak{s}_m$ sur ∂W^4 s'étend sur W^4 s'il existe un entier k compris entre $\frac{-d}{2}$ et $\frac{d}{2}$ tel que $m = kd$.*
- *Dans le cas où d est pair, la structure $\text{Spin}^c \mathfrak{s}_m$ sur ∂W^4 s'étend sur W^4 s'il existe un entier k impair compris entre $-d$ et d tel que $m = \frac{kd}{2}$.*

4.3 Homologie de Heegaard Floer pour les nœuds

La théorie de Heegaard Floer associe à une variété M de dimension 3 munie d'une structure $\text{Spin}^c \mathfrak{s}$, un complexe de chaînes filtré, gradué $CF^\infty(M, \mathfrak{s})$ sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, défini à homotopie de chaîne filtrée près. Un invariant important de la paire (M, \mathfrak{s}) est le terme de correction, aussi appelé d -invariant, $d(M, \mathfrak{s}) \in \mathbb{Q}$. Il est déterminé par le complexe $CF^\infty(M, \mathfrak{s})$. Un nœud K dans M nous donne une deuxième filtration sur $CF^\infty(M, \mathfrak{s})$. En particulier, pour un nœud K de S^3 , on a un complexe de chaînes gradué bifiltré $CFK^\infty(K)$ sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si K est un nœud algébrique, ce complexe est entièrement déterminé par le polynôme d'Alexander de K . Si $q > 2g(K)$, le calcul du d -invariant $d(S_q^3(K), \mathfrak{s})$ à partir de $CFK^\infty(K)$ peut être réalisé de manière simple par une méthode décrite dans [10].

4.4 Complexe en escaliers

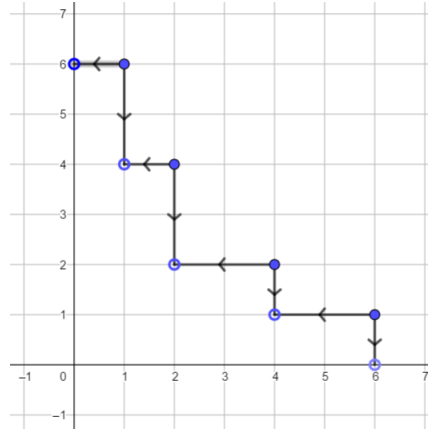
Dans cette partie, on introduit une manière très pratique de représenter le complexe $CFK^\infty(K)$. On se place dans \mathbb{Z}^2 . On représente chaque générateur au niveau de filtration (i, j) par un point de coordonnées (i, j) . L'application de bord envoie un générateur sur la somme de deux générateurs ou sur 0. On la représente par deux flèches, chacune étant issue du générateur de départ et pointant vers un des générateurs intervenant dans la somme. On obtient alors un complexe qu'on appellera complexe en escaliers. Le complexe admet une graduation absolue qui n'est pas indiquée sur le diagramme : les générateurs dans le creux des marches sont ceux qui sont au niveau de graduation 0, et ceux sur le nez des marches sont ceux qui sont au niveau de graduation 1. On les appellera respectivement les sommets de type **A** et les sommets de type **B**.

Définition 4.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $v \in \mathbb{Z}^{n-1}$. On appelle complexe en escaliers de longueur n le complexe $\text{St}(v)$ défini, en utilisant la représentation dans \mathbb{Z}^2 décrite ci-dessus, de la manière suivante :

- les coordonnées de v représentent la longueur des segments reliant deux sommets successifs, en partant d'en haut à gauche et en se déplaçant en bas à droite en alternant des déplacements vers la droite et vers le bas,
- on requiert que le premier sommet appartienne à l'axe des abscisses et que le dernier appartienne à l'axe des ordonnées.

On définit une graduation absolue sur $\text{St}(v)$ en imposant une graduation 0 au générateur situé en haut à gauche, et en imposant le fait que l'application de bord diminue la graduation de 1.

On notera $\text{Vert}(\text{St}(K))$ l'ensemble des sommets de $\text{St}(K)$.



Complexe en escaliers $\text{St}(1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1)$

Soit K un nœud algébrique. D'après le Théorème 3.19, on dispose d'une famille strictement croissante d'entiers $(n_i)_{0 \leq i \leq 2\ell}$ vérifiant $n_0 = 0$ et $n_{2\ell} = 2g$ telle que le polynôme d'Alexander de K est de la forme

$$\Delta_K(t) = \sum_{i=0}^{2\ell} (-1)^i t^{n_i}.$$

A un tel nœud, on peut associer le complexe $\text{St}(K) = \text{St}((n_{i+1} - n_i)_{0 \leq i \leq 2\ell-1})$.

Étant donné un complexe gradué, bifiltré et finiment engendré S sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on peut créer un complexe plus grand $S \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U, U^{-1}]$ avec des différentielles définies par pour tout entier

k , $\partial(x \otimes U^k) = (\partial x) \otimes U^k$, et la graduation définie par pour tout entier k , $gr(x \otimes U^k) = gr(x) - 2k$. De même, si x est au niveau de filtration (i, j) , alors $x \otimes U^k$ est au niveau de filtration $(i - k, j - k)$.

Dans le cas où K est un nœud algébrique, on a un isomorphisme entre $St(K) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U, U^{-1}]$ et $CFK^\infty(K)$.

5 Contraintes sur les points singuliers des courbes rationnelles cuspidales

Dans cette partie on présente le Théorème de Borodzik et Livingston, qui constitue l'objet principal de ce mémoire. On y donne un énoncé précis avant d'y exposer la démonstration donnée dans [1]. Une fois les outils nécessaires introduits, on présente une généralisation de ce théorème, ainsi qu'une reformulation plus adaptée à l'étude de certains problèmes. On conclura cette partie en présentant quelques applications du théorème.

5.1 Théorème de Borodzik et Livingston

Une motivation du Théorème de Borodzik et Livingston vient de la conjecture suivante proposée par Fernández de Bobadilla, Luengo, Melle-Hernandez et Némethi.

Conjecture 5.1. *Soit C une courbe rationnelle cuspidale de degré d . Notons z_1, \dots, z_n ses points singuliers, K_1, \dots, K_n les nœuds associés à ces points singuliers, et $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ les polynômes d'Alexander de ces nœuds. Posons $\Delta = \Delta_1 \dots \Delta_n$ et écrivons ce polynôme sous la forme suivante :*

$$\Delta(t) = 1 + \frac{(d-1)(d-2)}{2}(t-1) + (t-1)^2 \sum_{j=0}^{2g-2} k_j t^j.$$

Alors pour tout $j \in \{0, \dots, d-3\}$, $k_{d(d-j-3)} \leq \frac{(j+1)(j+2)}{2}$, avec égalité pour $n = 1$.

Le Théorème de Borodzik et Livingston, dans sa version non généralisée, implique le cas $n = 1$ de la conjecture. Ce Théorème sera néanmoins généralisé dans le cas $n > 1$. L'avantage du Théorème de Borodzik et Livingston sur la conjecture est qu'il donne les valeurs précises des coefficients $k_{d(d-j-3)}$. On mentionne également qu'il a été montré que la conjecture était fautive en général dans le cas $n > 2$.

Avant d'énoncer le théorème, effectuons encore quelques petites manipulations sur le polynôme d'Alexander d'un nœud algébrique K . On note S le semi-groupe de la branche concernée. On rappelle que d'après le Théorème 3.19, il est de la forme

$$\Delta_K(t) = 1 + (t-1) \sum_{j=1}^k t^{g_j},$$

où les entiers $0 < g_1 < \dots < g_k$ sont exactement les éléments de la suite de sauts de B . Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, on écrit $t^{g_j} - 1 = (t-1)(t^{g_j-1} + t^{g_j-2} + \dots + t + 1)$. D'après la Proposition 3.14, le nombre k d'éléments de la suite de sauts est égal au genre du nœud $g(K)$, on a donc

$$\Delta_K(t) = 1 + (t-1)g(K) + (t-1)^2 \sum_{j=0}^{2g(K)-2} k_j t^j,$$

où pour tout $j \in \{0, \dots, 2g(K) - 2\}$, $k_j = \#\{m \in \mathbb{N} \mid m > j \text{ et } m \notin S\}$.

On peut maintenant énoncer le Théorème de Borodzik et Livingston, qui fait l'objet de l'article [1] (de manière plus générale, les résultats de cette section proviennent tous de [1]).

Théorème 5.2. *Soit C une courbe rationnelle cuspidale de degré d avec un point singulier z . Notons K le nœud associé à z , Δ_K le polynôme d'Alexander du nœud K , et g le genre de K . Écrivons ce polynôme sous la forme suivante :*

$$\Delta_K(t) = 1 + \frac{(d-1)(d-2)}{2}(t-1) + (t-1)^2 \sum_{j=0}^{2g-2} k_j t^j.$$

Alors pour tout $j \in \{0, \dots, d-3\}$, $k_{d(d-j-3)} = \frac{(j+1)(j+2)}{2}$.

La forme du polynôme d'Alexander décrite ci-dessus, et les coefficients qu'elle fait apparaître motivent la définition suivante.

Définition 5.3. Soit G une suite finie d'entiers positifs. La fonction définie par pour tout entier m ,

$$I_G(m) = \#\{k \in G \cup \mathbb{Z}_{\leq 0} \mid k \leq m\},$$

est appelée la fonction de sauts de G .

Remarque 5.4. On appelle cette fonction ainsi car dans la plupart des applications, l'ensemble G sera la suite des sauts d'un semi-groupe.

Il est important de bien remarquer que $j \in \{0, \dots, 2g(K)-2\}$, on a $I_G(j+1) = k_j$ en reprenant les notations du Théorème 5.2.

Pour un point singulier de nœud K , on notera I_K la fonction de sauts de la suite de sauts G_K du point singulier.

5.2 Lien entre le complexe en escaliers et le d -invariant

On introduit une autre fonction, qui va nous permettre de faire le lien entre le complexe en escalier et le d -invariant.

Définition 5.5. Soit K un nœud algébrique et $\text{St}(K)$ le complexe en escaliers associé à K . On définit pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$J_K(m) = \min_{(v_1, v_2) \in \text{Vert}(\text{St}(K))} \max(v_1, v_2 - m).$$

La fonction J_K ainsi définie sera parfois appelée la fonction J de K .

Remarque 5.6. On peut observer que le minimum peut toujours être pris sur l'ensemble des sommets de type **A**. Pour tout entier m , $J_K(m)$ est le plus petit entier r tel que la région $\{i \leq 0, j \leq m\}$ intersecte $\text{St}(K) \otimes U^r$ de manière non trivial. Il est clair que la fonction J_K est décroissante et que pour tout entier m plus grand que g , on a $J_K(m) = 0$.

On va vouloir mettre en lien la fonction J_K avec la fonction I_K définie dans la sous-partie précédente. Pour ce faire, on va commencer par étudier de manière plus précise la décroissance de la fonction J_K .

Lemme 5.7. Soit K un nœud algébrique de genre g . Soit $m \leq g$. En reprenant les notations du Théorème 3.19 et en posant $n_{-1} = -\infty$, on a

$$J_K(m+1) - J_K(m) = \begin{cases} -1 & \text{s'il existe } i \text{ tel que } n_{2i-1} - g \leq m < n_{2i} - g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. Le preuve est purement combinatoire. On note $v_0 = (v_{01}, v_{02}), \dots, v_\ell = (v_{\ell 1}, v_{\ell 2})$ les sommets de type **A** de $\text{St}(K)$, ordonnés de sorte que $v_{01} < v_{11} < \dots < v_{\ell 1}$.

Fait 1 : Pour tout $i \in \{0, \dots, \ell\}$, on a $\max(v_{i1}, v_{i2} - m) = v_{i1}$ si et seulement si $m \geq v_{i2} - v_{i1}$.

En effet on a $\max(v_{i1}, v_{i2} - m) = v_{i1}$ si et seulement si $v_{i1} \geq v_{i2} - m$.

Fait 2 : Pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, on a $\max(v_{i1}, v_{i2} - m) \geq \max(v_{i-1,1}, v_{i-1,2} - m)$ si et seulement si $m \geq v_{i-1,2} - v_{i,1}$.

Pour démontrer ce fait, on commence par remarquer que puisque $v_i > v_{i-1}$, on a $v_{i2} - m > v_{i-1,2} - m$. Pour le sens direct, il suffit alors de remarquer que $\max(v_{i1}, v_{i2} - m) \geq v_{i-1,2} - m$,

d'où $v_{i1} \geq v_{i-1,2} - m$. Pour le sens réciproque, on remarque qu'on a $v_{i1} \geq v_{i-1,2} - m$, ainsi que $v_{i1} > v_{i-1,1}$. Donc $v_{i1} \geq \max(v_{i-1,1}, v_{i-1,2} - m)$.

Fait 3 : Pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, on a $v_{i1} - v_{i2} = n_{2i} - g$ et $v_{i1} - v_{i-1,2} = n_{2i-1} - g$.

Pour démontrer ce fait, on commence par remarquer que $v_0 = (0, g)$, et pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $v_i - v_{i-1} = (n_{2i-1} - n_{2i-2}, -(n_{2i} - n_{2i-1}))$ par définition du complexe en escalier. On a donc pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$,

$$v_{i1} = \sum_{j=1}^i n_{2j-1} - n_{2j-2},$$

et

$$v_{i2} = g - \sum_{j=1}^i n_{2j} - n_{2j-1}.$$

On a donc

$$v_{i1} - v_{i2} = \sum_{j=1}^i n_{2j-1} - n_{2j-2} - g + \sum_{j=1}^i n_{2j} - n_{2j-1} = n_{2i} - g,$$

et

$$v_{i1} - v_{i-1,2} = \sum_{j=1}^i n_{2j-1} - n_{2j-2} - g + \sum_{j=1}^{i-1} n_{2j} - n_{2j-1} = n_{2i-1} - g.$$

On peut maintenant démontrer le lemme. D'après le deuxième fait, on a alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$, pour tout $i \in \{0, \dots, \ell\}$ (en notant par convention pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $v_i = +\infty$ et $n_{2i} = -\infty$ si $i < 0$, et $v_i = -\infty$ et $n_{2i} = +\infty$ si $i > \ell$),

$$\begin{aligned} J_K(m) = \max(v_{i1}, v_{i2} - m) &\Leftrightarrow v_{i-1,2} - v_{i1} \geq m \geq v_{i2} - v_{i+1,1}, \\ &\Leftrightarrow g - n_{2i-1} \geq m \geq g - n_{2i+1} \text{ par le troisième fait,} \\ &\Leftrightarrow n_{2(\ell-i)+1} - g \geq m \geq n_{2(\ell-i)-1} - g, \end{aligned}$$

la dernière équivalence étant une conséquence de la propriété de symétrie du polynôme d'Alexander.

On peut désormais évaluer la croissance de J_K .

Supposons dans un premier temps qu'il existe $j \in \{0, \dots, \ell\}$ tel que $n_{2j-1} - g \leq m < n_{2j} - g (< n_{2j+1} - g)$. Par les équivalences précédentes, en posant $i = \ell - j$, on obtient $J_K(m) = \max(v_{i1}, v_{i2} - m)$ et $J_K(m+1) = \max(v_{i1}, v_{i2} - (m+1))$. Mais on a

$$\begin{aligned} m &< n_{2j} - g \\ &< g - n_{2i} \text{ par symétrie du polynôme d'Alexander} \\ &< v_{i2} - v_{i1} \text{ par le troisième fait,} \end{aligned}$$

et de même, on a $m+1 \leq v_{i2} - v_{i1}$. Par le premier fait, on a alors $\max(v_{i1}, v_{i2} - m) = v_{i2} - m$ et $\max(v_{i1}, v_{i2} - (m+1)) = v_{i2} - (m+1)$. Donc $J_K(m-1) - J_K(m) = -1$.

Si on n'est pas dans ce cas là, alors il existe $j \in \{0, \dots, \ell\}$ tel que $n_{2j} - g \leq m < n_{2j+1} - g (< n_{2j+1} - g)$. Par les équivalences précédentes, en posant $i = \ell - j$, on obtient $J_K(m) = \max(v_{i1}, v_{i2} - m)$ et $J_K(m+1) = \max(v_{i1}, v_{i2} - (m+1))$. Mais on a

$$\begin{aligned} m &\geq n_{2j} - g \\ &\geq g - n_{2i} \text{ par symétrie du polynôme d'Alexander} \\ &\geq v_{i2} - v_{i1} \text{ par le troisième fait,} \end{aligned}$$

Par le premier fait, on a alors $\max(v_{i1}, v_{i2} - m) = v_{i1} = \max(v_{i1}, v_{i2} - (m+1))$. Donc $J_K(m-1) - J_K(m) = 0$. \square

La propriété suivante met en lien la fonction J_K et le d -invariant.

Proposition 5.8. *Soit K un nœud algébrique de genre g . Soit $q > 2g$ et $m \in [-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}] \cap \mathbb{Z}$. Alors*

$$d(S_q^3(K), \mathfrak{s}_m) = \frac{(-2m + q)^2 - q}{4q} - 2J(m).$$

5.3 Démonstration du Théorème de Borodzik et Livingston

Pour démontrer le Théorème de Borodzik et Livingston, il ne nous reste plus qu'à mettre en lien la fonction de sauts I_K avec la fonction J_K .

Proposition 5.9. *Soit K le nœud d'un point singulier. Alors pour tout $m \in \{-g, \dots, g\}$, on a $J_K(m) = I_K(m + g)$.*

Démonstration. Notons G_K la suite des sauts du point singulier. Pour tout $m \geq -g$, on a

$$\begin{aligned} I_K(m + g + 1) - I_K(m + g) &= \begin{cases} -1 & \text{si } m + g \in G_K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1 & \text{s'il existe } i \text{ tel que } n_{2i-1} \leq m + g < n_{2i} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc les fonctions $m \mapsto J_K(m)$, et $m \mapsto I_K(m + g)$ ont les mêmes propriétés de croissance. De plus, puisque le plus grand élément de la suite de sauts est $n_{2m} - 1 = 2g - 1$, on a $I_K(2g) = 0 = J_K(g)$, ce qui permet de conclure. \square

Démonstration du Théorème de Borodzik et Livingston 5.2. D'après le Lemme 4.1, l'ensemble des structures Spin^c sur $S_d^3(K)$ qui s'étendent sur le complémentaire W de Y est

$$\left\{ \mathfrak{s}_{kd} \mid k \in \mathbb{Z}, -\frac{d}{2} \leq k \leq \frac{d}{2} \right\},$$

si d est impair, et

$$\left\{ \mathfrak{s}_{kd} \mid k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, -\frac{d}{2} \leq k \leq \frac{d}{2} \right\},$$

si d est pair. Un résultat de la théorie de Heegaard Floer (voir [11]) nous dit que puisque W est une boule d'homologie rationnelle (par le Théorème des coefficients universels et par les calculs effectués à la partie 4), les d -invariants associés sont nuls. Soit k tel que \mathfrak{s}_{kd} appartienne à un des deux ensemble ci-dessus. Commençons par vérifier que les hypothèses de la Proposition 5.8 sont bien remplies :

- Par la formule de Plücker, on a $2g(K) = (d - 1)(d - 2) = d^2 - 3d + 2$. Puisque $d \geq 1$, on a alors $d^2 > 2g(K)$.
- Puisque $-\frac{d}{2} \leq k \leq \frac{d}{2}$, on a $-\frac{d^2}{2} \leq kd \leq \frac{d^2}{2}$. Donc m est un entier compris entre $-\frac{q}{2}$ et $\frac{q}{2}$.

Par la Proposition 5.8, en posant $q = d^2$, et $m = kd$ (on remarque au passage que m est un entier), on a alors

$$2J_K(md) = \frac{(-2kd + d^2)^2 - d^2}{4d^2}.$$

Par la Proposition 5.9, on obtient

$$\begin{aligned} 8I_K(kd + g) &= (-2k + d)^2 - 1 \\ &= (d - 2k - 1)(d - 2k + 1). \end{aligned}$$

Comme $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{d^2-3d+2}{2} = \frac{d(d-3)}{2} + 1$, en posant $j = k + \frac{d-3}{2}$ (remarquons qu'on a $j \in \{0, \dots, d-3\}$), on obtient

$$\begin{aligned} 8I_k(jd+1) &= \left(d-2\left(j-\frac{d-3}{2}\right)-1\right)\left(d-2\left(j-\frac{d-3}{2}\right)+1\right) \\ &= (2d-2j-3-1)(2d-2j-3+1) \\ &= 4(d-j-2)(d-j-1). \end{aligned}$$

On rappelle qu'on a $k_{jd} = I_K(jd+1)$, d'où pour tout $j \in \{0, \dots, d-3\}$,

$$k_{jd} = \frac{(d-j-2)(d-j-1)}{2}.$$

En réalisant le changement de variables $i = d-j-3$, on obtient alors pour tout $i \in \{0, \dots, d-3\}$,

$$\begin{aligned} k_{d(d-i-3)} &= \frac{(d-d+i+3-2)(d-d+i+3-1)}{2} \\ &= \frac{(i+1)(i+2)}{2}. \end{aligned}$$

□

5.4 Généralisation du Théorème de Borodzik et Livingston

On généralise désormais le Théorème de Borodzik et Livingston et s'intéressant au cas où la courbe admet plus d'un point singulier cuspidal. Notons z_1, \dots, z_n ces points singuliers, et K_1, \dots, K_n leurs nœuds associés. On pose $K = K_1 \# \dots \# K_n$. D'après [1], pour un tel nœud, le complexe $CFK^\infty(K)$ est égal à $CFK^\infty(K_1) \otimes \dots \otimes CFK^\infty(K_n)$. On va donc s'intéresser au produit tensoriel des complexes en escaliers $\text{St}(K_1) \otimes \dots \otimes \text{St}(K_n)$. On notera $\text{Vert}(\text{St}(K_1) \otimes \dots \otimes \text{St}(K_n))$ l'ensemble des sommets du complexe correspondant. Ses éléments sont de la forme $v_1 + \dots + v_n$, où pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $v_j \in \text{St}(K_j)$.

Commençons par redéfinir une fonction J_K adaptée à la situation.

Définition 5.10. *Soit C une courbe rationnelle cuspidale de degré d . Notons z_1, \dots, z_n ses points singuliers, K_1, \dots, K_n les nœuds associés à ces points singuliers, $K = K_1 \# \dots \# K_n$. On définit pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $J_K(m)$ comme étant le minimum des $\max(\alpha, \beta - m)$ pris sur tous les éléments de la forme $a_1 \otimes \dots \otimes a_n \in \text{St}(K_1) \otimes \dots \otimes \text{St}(K_n)$, où (α, β) désigne le niveau de filtration de l'élément correspondant. On l'appellera parfois la fonction J du nœud K .*

De la même manière que pour le Théorème 5.8, on a le résultat suivant.

Proposition 5.11. *Soit C une courbe rationnelle cuspidale de degré d . Notons z_1, \dots, z_n ses points singuliers, K_1, \dots, K_n les nœuds associés à ces points singuliers, $K = K_1 \# \dots \# K_n$ et g le genre du nœud K . Soit $q > 2g - 1$, et $m \in \left[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right]$. Alors on a*

$$d(S_q^3(K), \mathfrak{s}_m) = -2J_K(m) + \frac{(-2m+q)^2 - q}{4q}.$$

De la même manière que dans la démonstration du Théorème de Borodzik et Livingston, on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.12. Soit C une courbe rationnelle cuspidale de degré d . Notons z_1, \dots, z_n ses points singuliers, K_1, \dots, K_n les nœuds associés à ces points singuliers et $K = K_1 \# \dots \# K_n$. Alors pour tout $k \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}] \cap \mathbb{Z}$ si d est impair, et pour tout $k \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}] \cap (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ si d est pair, on a

$$J_K(kd) = \frac{(d - 2k - 1)(d - 2k + 1)}{8}.$$

Pour deux fonctions I, I' de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} admettant une borne inférieure, on définit l'opération suivante : pour tout s entier,

$$I \diamond I'(s) = \min_{m \in \mathbb{Z}} I(m) + I'(s - m).$$

Comme dans la partie précédente, on met en lien les fonctions de sauts avec la fonction J_K .

Théorème 5.13. Soit C une courbe rationnelle cuspidale de degré d . Notons z_1, \dots, z_n ses points singuliers, K_1, \dots, K_n les nœuds associés à ces points singuliers, I_1, \dots, I_n les fonctions de saut associées à ces points singuliers et $K = K_1 \# \dots \# K_n$. Posons $I_K = I_1 \diamond I_2 \diamond \dots \diamond I_n$. Alors pour tout $m \in \{-g, \dots, g\}$, on a $J_K(m) = I_K(m + g)$.

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 5.14. Pour tous entiers w, x, y, z , on a

$$\max(x + y, z + w) = \min_{k \in \mathbb{Z}} (\max(x, z - k) + \max(y, w + k)).$$

Démonstration. Soit w, x, y, z des entiers. Pour k un entier, on a $\max(x, z - k) + \max(y, w + k) \geq x + y$ et $\max(x, z - k) + \max(y, w + k) \geq z + w$. Donc

$$\min_{k \in \mathbb{Z}} (\max(x, z - k) + \max(y, w + k)) \geq \max(x + y, z + w).$$

De plus, pour $k = z - x$, on a

$$\begin{aligned} \max(x, z - k) + \max(y, w + k) &= \max(x, x) + \max(y, w + z - x) \\ &= x + \max(y, w + z - x). \end{aligned}$$

On distingue deux cas :

- Si $x + y \geq w + z$, alors $y \geq w + z - x$, d'où $\max(x, z - k) + \max(y, w + k) = x + y$.
- Si $x + y \leq w + z$, alors $y \leq w + z - x$, d'où $\max(x, z - k) + \max(y, w + k) = x + w + z - x = w + z$.

Donc $\max(x, z - k) + \max(y, w + k) = \max(x + y, w + z)$, ce qui montre que

$$\min_{k \in \mathbb{Z}} (\max(x, z - k) + \max(y, w + k)) \leq \max(x + y, z + w).$$

□

Démonstration du Théorème 5.13. On procède par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$.

L'initialisation est déjà démontrée par le Théorème 5.9.

On fixe désormais un entier $n > 1$, et on suppose le résultat vrai au rang $n - 1$. Notons $K' = K_1 \# \dots \# K_{n-1}$, et $J_{K'}$, la fonction J associée à K' . Prenons un sommet $v \in \text{Vert}(\text{St}(K_1) \otimes \dots \otimes \text{St}(K_n))$. Écrivons le $v = v' + v_n$, avec $v' \in \text{Vert}' := \text{Vert}(\text{St}(K_1) \otimes \dots \otimes \text{St}(K_{n-1}))$ et $v_n \in \text{Vert}_n := \text{St}(K_n)$. On note $v = (v_1, v_2)$, $v' = (v'_1, v'_2)$ et $v_n = (v_{n1}, v_{n2})$, de sorte qu'on a $v_1 = v'_1 + v_{n1}$ et $v_2 = v'_2 + v_{n2}$.

En appliquant le Lemme 5.14 à $v'_1, v'_2, v_{n1}, v_{n2}$, et en prenant le minimum sur tous les sommets v de $\text{Vert}(\text{St}(K_1) \otimes \cdots \otimes \text{St}(K_n))$, on obtient

$$\begin{aligned} J_K(m) &= \min_{v \in \text{Vert}(\text{St}(K_1) \otimes \cdots \otimes \text{St}(K_n))} \max(v_1, v_2 - m) \\ &= \min_{v' \in \text{Vert}'} \min_{v_n \in \text{Vert}_n} \min_{k \in \mathbb{Z}} (\max(v'_1, v'_2 - k) + \max(v_{n1}, v_{n2} + k - m)) \\ &= \min_{k \in \mathbb{Z}} (J_{K'}(k) + J_{K_n}(m - k)). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a alors

$$\begin{aligned} J_K(m) &= \min_{k \in \mathbb{Z}} (I_{K'}(k + g(K')) + I_{K_n}(m - k + g(K_n))) \\ &= \min_{k \in \mathbb{Z}} (I_{K'}(k) + I_{K_n}(m - k + g(K') + g(K_n))) \\ &= I_{K'} \diamond I_{K_n}(m + g) \quad \text{car } g = g(K') + g(K_n), \\ &= I_K(m + g). \end{aligned}$$

□

On peut maintenant énoncer et démontrer le Théorème de Borodzik et Livingston dans sa version généralisée, ce qui constitue le résultat principal de l'article [2].

Théorème 5.15. *Soit C une courbe rationnelle cuspidale de degré d . Notons I_1, \dots, I_n les fonctions de saut associées aux points singuliers de C . Alors pour tout $j \in \{-1, \dots, d - 2\}$, on a*

$$I_1 \diamond I_2 \diamond \cdots \diamond I_n(jd + 1) = \frac{(j - d + 1)(j - d + 2)}{2}.$$

Démonstration. Grâce au Théorème 5.12 et au Théorème 5.13, on démontre le résultat en procédant exactement de la même manière que lors de la démonstration du Théorème 5.2. □

5.5 Reformulation du Théorème de Borodzik et Livingston

On reformule maintenant le Théorème 5.15, pour l'exprimer en fonction de fonctions comptant le nombre d'éléments des semi-groupes inférieurs ou égaux à un certain entier.

Définition 5.16. *Pour S un semi-groupe, on définit la fonction R par pour tout $m \in \mathbb{N}$,*

$$R(m) = \#\{j \in S \mid 0 \leq j < m\}.$$

Lemme 5.17. *La fonction R et la fonction de saut I d'un point singulier cuspidal vérifient pour tout entier $m \geq 0$, $R(m) = m - g + I(m)$, où g désigne le genre du nœud du point singulier.*

Démonstration. Notons G la suite de sauts du point singulier. On introduit une fonction auxiliaire $f : m \mapsto \#(G \cap \{0, \dots, m - 1\})$. On a pour tout $m \in \mathbb{N}$, $f(m) = g - I(m)$ et $R(m) + f(m) = m$. On en déduit alors que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m - R(m) = g - I(m)$. □

La formule du lemme ci-dessus permet d'étendre la fonction R à \mathbb{Z} tout entier. On a alors pour tout entier m , si $m > \sup G$, alors $R(m) = m - g$ et si $m < 0$, alors $R(m) = 0$. En particulier, la fonction R est positive et croissante.

Lemme 5.18. *Soit S_1, \dots, S_n des semi-groupes de \mathbb{N} , et I_1, \dots, I_n les fonctions de sauts associées. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on note $g_j = \#\mathbb{N} \setminus S_j$, et on pose $g = g_1 + \cdots + g_n$. Enfin on note R_1, \dots, R_n les fonctions R définies comme au début de la sous-section. Alors on a pour tout $m \in \mathbb{Z}$,*

$$R_1 \diamond \cdots \diamond R_n(m) = m - g + I_1 \diamond \cdots \diamond I_n(m).$$

Démonstration. On procède par récurrence soit l'entier $n \in \mathbb{N}^*$. L'initialisation est démontrée par le lemme précédent.

On fixe alors un entier $n > 1$, et on suppose le résultat vrai au rang $n - 1$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} R_1 \diamond \cdots \diamond R_n(m) &= \min_{k \in \mathbb{Z}} (R_1 \diamond \cdots \diamond R_{n-1}(k) + R_n(m - k)) \\ &= \min_{k \in \mathbb{Z}} (k - g_1 - \cdots - g_{n-1} + I_1 \diamond \cdots \diamond I_{n-1}(k) + m - k - g_n + I_n(m - k)) \\ &= m - g + I_1 \diamond \cdots \diamond I_n(m). \end{aligned}$$

□

On peut maintenant reformuler le Théorème 5.15.

Théorème 5.19. *Soit C une courbe rationnelle cuspidale de degré d . Notons z_1, \dots, z_n ses points singuliers, et R_1, \dots, R_n les fonctions R définies comme précédemment. On a pour tout $j \in \{-1, \dots, d - 2\}$,*

$$R_1 \diamond \cdots \diamond R_n(jd + 1) = \frac{(j + 1)(j + 2)}{2}.$$

Démonstration. Par le Théorème 5.15, on a pour tout $j \in \{-1, \dots, d - 2\}$,

$$I_1 \diamond I_2 \diamond \cdots \diamond I_n(jd + 1) = \frac{(j - d + 1)(j - d + 2)}{2}.$$

Par le lemme précédent, on obtient alors pour tout $j \in \{-1, \dots, d - 2\}$,

$$\begin{aligned} R_1 \diamond \cdots \diamond R_n(jd + 1) &= jd + 1 - g + \frac{(j - d + 1)(j - d + 2)}{2} \\ &= jd + 1 - \frac{(d - 1)(d - 2)}{2} + \frac{(j - d + 1)(j - d + 2)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(-d^2 + 3d - 2) + jd + 1 + \frac{1}{2}(j^2 - 2jd + 3j + d^2 - 3d + 2) \\ &= \frac{j^2 + 3j + 2}{2} \\ &= \frac{(j + 1)(j + 2)}{2}. \end{aligned}$$

□

Remarque 5.20. *On remarque que par définition, on a*

$$R_1 \diamond \cdots \diamond R_n(k) = \min_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \\ k_1 + \cdots + k_n = k}} R_1(k_1) + \cdots + R_n(k_n).$$

Puisque pour des valeurs strictement négatives de k , on a pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $R_j(k) = 0$, et que R_j est un fonction croissante, le minimum est toujours atteint pour $k_1, \dots, k_n \geq -1$.

5.6 Applications

Grâce au Théorème 5.19, on peut trouver plusieurs résultats généraux sur les courbes rationnelles cuspidales.

Proposition 5.21. *Soit C une courbe rationnelle cuspidale de degré d . Notons z_1, \dots, z_n ses points singuliers. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $(m_i; \beta_{i1}, \dots, \beta_{ik_i})$ la suite caractéristique de Puiseux du point singulier z_i , rangés de telle sorte que $m_1 \geq \dots \geq m_n$. On a*

$$m_1 > \frac{d}{3}.$$

Lors de la démonstration de ce théorème, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 5.22. *Pour tous nombres réels a et b , on a $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \geq \lfloor a + b \rfloor - 1$.*

Démonstration. Soit deux réels a et b . On a $a - 1 < \lfloor a \rfloor$ et $b - 1 < \lfloor b \rfloor$, donc $(a + b - 1) - 1 < \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$. Or on a $\lfloor a + b \rfloor - 1 \leq a + b - 1$. Ainsi on obtient bien $\lfloor a + b \rfloor - 2 < \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$. \square

Démonstration de la proposition 5.21. On commence par remarquer que, puisque z_1 est un point singulier, on a $m_1 > 1$. Le cas où $d \leq 5$ est donc vérifié. Dans la suite de la preuve, on suppose $d > 5$.

On raisonne par l'absurde et on suppose que $3m_1 \leq d$. On a alors pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $3m_j \leq d$. On choisit des entiers $k_1, \dots, k_n \leq -1$ tels que $\sum_{j=1}^n k_j = d + 1$. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on a $m_j \mathbb{N} \in S_j$ et $R_j(k_j)$ correspond au nombre d'éléments de S_j strictement inférieurs à k_j . On a donc pour tout $\epsilon > 0$,

$$R_j(k_j) \geq 1 + \left\lfloor \frac{k_j - \epsilon}{m_j} \right\rfloor.$$

On distingue plusieurs cas. Si $k_j = -1$ ou $k_j = 0$, on a pour tout $\epsilon > 0$,

$$0 = R_j(k_j) \geq 1 + \left\lfloor \frac{3k_j - 3\epsilon}{d} \right\rfloor.$$

Si $k_j \geq 1$, on commence par remarquer que puisque $3m_j \leq d$, on a $\frac{1}{m_j} \leq \frac{3}{d}$. On a alors pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit,

$$\left\lfloor \frac{k_j - \epsilon}{m_j} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{3k_j - 3\epsilon}{d} \right\rfloor,$$

donc

$$R_j(k_j) \geq 1 + \left\lfloor \frac{3k_j - 3\epsilon}{d} \right\rfloor.$$

Posons

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{si } d \mid 3k_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Puisque $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, quitte à le réduire, on a

$$R_j(k_j) \geq 1 + \left\lfloor \frac{3k_j}{d} \right\rfloor - \delta_j.$$

En effet, si $d \mid 3k_j$, il suffit de remarquer que pour ϵ suffisamment petit, $\frac{3k_j}{d} > \frac{3k_j - \epsilon}{d} \geq \frac{3k_j}{d} - 1$. Si $d \nmid 3k_j$, on a $\frac{3k_j}{d} > \left\lfloor \frac{3k_j}{d} \right\rfloor$, donc quitte à prendre ϵ suffisamment petit, $\frac{3k_j - 3\epsilon}{d} \geq \left\lfloor \frac{3k_j}{d} \right\rfloor$. Puisqu'ils sont en nombre fini, on peut prendre le même ϵ pour tous les $j \in \{1, \dots, n\}$.

On obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq n, d|k_j} R_j(k_j) &\geq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ d|k_j}} \left\lfloor \frac{3k_j}{d} \right\rfloor \\ &\geq \left\lfloor \sum_{1 \leq j \leq n, d|k_j} \frac{3k_j}{d} \right\rfloor \quad \text{car on somme sur des entiers.} \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 5.22, on obtient également

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq n, d \nmid k_j} R_j(k_j) &\geq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ d \nmid k_j}} 1 + \sum_{1 \leq j \leq n, d \nmid k_j} \left\lfloor \frac{3k_j}{d} \right\rfloor \\ &\geq \sum_{1 \leq j \leq n, d \nmid k_j} 1 + \left\lfloor \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ d \nmid k_j}} \frac{3k_j}{d} \right\rfloor - (\#\{1 \leq j \leq n \mid d \nmid k_j\} - 1) \\ &\geq 1 + \left\lfloor \sum_{1 \leq j \leq n, d \nmid k_j} \frac{3k_j}{d} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Puisqu'on a $\sum_{j=1}^n k_j = d + 1$, on dispose de $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $d \nmid 3k_j$. En effet, on aurait sinon l'existence d'un entier u tel que $ud = 3 \sum_{k=1}^n k_j = 3(d + 1)$. Puisque d et $d + 1$ sont premiers entre eux, on aurait alors $d \mid 3$, ce qui contredirait le fait que $d > 3$.

En sommant les deux inégalités ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} R_1(k_1) + \dots + R_n(k_n) &\geq \left\lfloor \sum_{1 \leq j \leq n, d|k_j} \frac{3k_j}{d} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \sum_{1 \leq j \leq n, d \nmid k_j} \frac{3k_j}{d} \right\rfloor \\ &\geq 1 + \left\lfloor \sum_{j=1}^n \frac{3k_j}{d} \right\rfloor \quad \text{car } \left\lfloor \sum_{1 \leq j \leq n, d|k_j} \frac{3k_j}{d} \right\rfloor \text{ est un entier,} \\ &\geq 1 + \left\lfloor \frac{3d + 3}{3} \right\rfloor \\ &\geq 4. \end{aligned}$$

Mais d'après le Théorème 5.19, on a

$$\min_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \\ k_1 + \dots + k_n = k}} R_1(k_1) + \dots + R_n(k_n) = R_1 \diamond \dots \diamond R_n(d + 1) = \frac{3 \times 2}{2} = 3.$$

On aboutit donc à une contradiction puisque d'après la remarque à la fin de la partie précédente, le minimum est censé être atteint pour des entiers $k_1, \dots, k_n \geq -1$ tels que $\sum_{j=1}^n k_j = d + 1$. \square

On obtient également le résultat simple suivant, qu'on peut trouver dans [1].

Proposition 5.23. *Soit C une courbe rationnelle cuspidale de degré d . Notons z_1, \dots, z_n ses points singuliers. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $(m_i; \beta_{i1}, \dots, \beta_{ik_i})$ la suite caractéristique de Puiseux du point singulier z_i . On suppose que $m_1 > \frac{d+n-1}{2}$. Alors on a $\beta_{11} < d + n - 1$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons $m_1 > \frac{d+n-1}{2}$ et $\beta_{11} \geq d+n-1$. En reprenant les notations du Théorème 5.19, on a alors $R_1(d+n) = \#S_1 \cap \{0, \dots, d+n-1\} \leq \#\{0, m_1\} \leq 2$. Posons alors $k_1 = d+n$ et $k_2 = \dots = k_n = -1$. On a

$$\sum_{j=1}^n R_j(k_j) = R_1(d+n) \leq 2.$$

D'où $R_1 \diamond \dots \diamond R_n(d+1) \leq 2$, ce qui contredit le Théorème 5.19. □

Références

- [1] M. Borodzik and C. Livingston. Heegaard Floer homology and rational cuspidal curves. 2014.
- [2] C.T.C. Wall. *Singular Points of Plane Curves*. London Mathematical Society St. Cambridge University Press, 2004.
- [3] E. Brieskorn and H. Knörrer. *Plane algebraic curves*. Birkhäuser Verlag, 1986.
- [4] D. Rolfsen. *Knots and links*. Mathematics lecture series. Publish or Perish, 1976.
- [5] G. Burde and H. Zieschang. *Knots*. De Gruyter studies in mathematics. Walter de Gruyter, 2003.
- [6] A. Baranowski, M. Borodzik, and J. Serrano De Rodrigo. Heegaard Floer homologies and rational cuspidal curves. Lecture notes. 2016.
- [7] P. Ozsváth and Z. Szabó. An introduction to Heegaard Floer homology.
- [8] P. Ozsváth and Z. Szabó. Lectures on Heegaard Floer Homology. 2005.
- [9] P. Ozsváth and Z. Szabó. Heegaard diagrams and holomorphic disks.
- [10] P. Ozsváth and Z. Szabó. Holomorphic disks and knot invariants. 2004.
- [11] P. Ozsváth and Z. Szabó. Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary. 2003.
- [12] B. Martelli. *An Introduction to Geometric Topology*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016.