Modules des différentielles d'ordre n, et leur lien avec la normalité des hypersurfaces

Yann LE DRÉAU

1er juillet 2021

Stage encadré par Julien SEBAG

Introduction

Si B est une A algèbre et M est un B-module, une A-dérivation est une application A-linéaire $d : B \longrightarrow M$ vérifiant la règle de Leibniz

$$d(xy) = xd(y) + yd(x)$$

Cette notion amène à la notion plus générale de A-dérivation d'ordre n, ce sont les applications A-linéaires telles que

$$d(x_0 \cdots x_n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_s} d(x_0 \cdots \check{x}_{i_1} \cdots \check{x}_{i_s} \cdots x_n)$$

C'est notamment H. Osborn qui a développé cet outil en 1967. Dans son article il introduit le module des différentielles de Kähler d'ordre n.

Dans ce mémoire on s'appuiera notamment sur l'article de Nakaï [9] et sur l'article de Barajas et Duarte [1]. Le but sera d'en faire une sorte de résumé. Nakaï développe surtout des outils calculatoire autour des dérivations et donne quelques propriétés fonctorielles. Barajas et Duarte étudient le module des différentielles d'ordre n au cas des hypersurfaces. En particulier, et ce sera ce résultat qui nous guidera tout le long de ce mémoire, ils donnent un lien entre la normalité d'une hypersuface et la torsion du module des différentielles. Plus précisément le résultat est le suivant :

Théorème *Soient k un corps parfait, $A = k[X_1, \cdots, X_s]$, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et $f \in \mathfrak{p}$ supposé irréductible. On pose $B = A/(f)$ et $R = B_{\mathfrak{p}/(f)}$.*

$$R \textit{ est normal si et seulement si } (\Omega^n_{R/k})_{\text{tors}} = 0$$

Dans la première partie on définit le module des différentielles d'ordre 1 et on en verra quelques propriétés. On cherchera à ne pas trop s'attarder dessus pour pouvoir généraliser au plus vite ces notions. On regardera aussi quel est le lien entre les différentielles de Kähler introduites ici et les différentielles de la géométrie différentielle.

La seconde partie s'appuie pour beaucoup sur l'article de Nakaï. D'abord on donnera la définition du module des différentielles de Kähler d'ordre n et on montrera que la plupart des propriétés du module des différentielles d'ordre 1 s'étendent à l'ordre n. On finira par donner l'exemple important des anneaux de polynômes.

La troisième partie, un peu à part, a pour but de généraliser toutes les notions vu jusqu'alors au cas des faisceaux. On verra que, de manière analogue et naturelle au cas des anneaux, l'on peut définir les notions de dérivation et de module des différentielles, et que certaines propriétés se généralisent dans ce cadre.

La quatrième et dernière partie est essentiellement tirée de l'article de Barajas et Duarte. On commencera par rappeler quelques notions d'algèbre commutative : anneau normal, anneau local régulier... Ensuite on introduira la matrice Jacobienne d'ordre n qui généralise la matrice Jacobienne que l'on connaît. Cette matrice permet notamment de donner une présentation simple du module des différentielles dans le cas d'une hypersurface. On terminera par le preuve du théorème énoncé plus haut.

Table des matières

Les anneaux considérés seront toujours supposés commutatifs et unitaires. Dans la suite, sauf mention expresse, A est un anneau, B est une A-algèbre avec $i : A \longrightarrow B$ le morphisme d'anneaux canonique, et M est un B-module. Le morphisme i confère à M une structure de A-module naturelle, ainsi on peut parler d'application A-linéaire de B vers M.

Le produit tensoriel $B \otimes_A B$ jouera un rôle important ici, introduisons donc dès maintenant quelques notations. $B \otimes_A B$ est une A-algèbre, et même une B-algèbre puisqu'on a un morphisme $\nu : B \longrightarrow B \otimes_A B$ définit par $\nu(x) = x \otimes 1$. Une autre application naturelle est l'application produit $\mu : B \otimes_A B \longrightarrow B$ donnée par $\mu(x \otimes y) = xy$. Cette dernière est bien définie car elle est induite par passage au produit tensoriel par l'application A-bilinéaire $B \times B \longrightarrow B$ qui envoie (x, y) sur xy. Il est clair que μ est en fait un morphisme de B-algèbres.

Désormais $I_{B/A}$ désignera le noyau de μ, c'est un sous-B-module de $B \otimes_A B$. Ainsi, on a une suite exacte scindée de B-modules

$$0 \longrightarrow I_{B/A} \longrightarrow B \otimes_A B \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 0$$

car $\mu \circ \nu = \mathrm{Id}_B$, et par conséquent $B \otimes_A B = \mathrm{Im}\ (\nu) \oplus I_{B/A}$.

1 Modules des différentielles d'ordre 1

1.1 Dérivation

Une A-dérivation de B vers M est une application A-linéaire vérifiant la règle de Leibniz. Une définition équivalente est la suivante.

Définition 1. *Une A-dérivation (d'ordre 1) d'une A-algèbre B vers un B-module M est une application $d : B \longrightarrow M$ vérifiant*

$$\begin{aligned} d(xy) &= xd(y) + yd(x), \forall x, y \in B && \textit{règle de Leibniz} \\ d(x+y) &= d(x) + d(y), \forall x, y \in B && \textit{additivité} \\ d \circ i &= 0 \end{aligned}$$

où $i : A \longrightarrow B$ est le morphisme définissant la structure de A-algèbre sur B. On note $\mathrm{Der}_A(B, M)$ l'ensemble des A-dérivations de B dans M.

En toute rigueur on devrait plutôt parler de i-dérivation. Il est clair que $\mathrm{Der}_A(B, M)$ est un sous-B-module de $\mathrm{Hom}_A(B, M)$, le B-module des applications A-linéaires de B vers M. Lorsque l'on fixe une A-algèbre B on obtient un foncteur (covariant) $\mathrm{Der}_A(B, \cdot)$ de la catégorie des B-modules $\mathrm{Mod}(B)$ vers elle-même. Il apparaît que ce foncteur est représentable.

Théorème 1. *Il existe un B-module $\Omega^1_{B/A}$ et une A-dérivation $d_{B/A} : B \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$ qui vérifient la propriété universelle suivante :*

> *Pour tout B-module M et toute A-dérivation $D : B \longrightarrow M$ il existe une unique application B-linéaire $\varphi : \Omega^1_{B/A} \longrightarrow M$ telle que $D = \varphi \circ d_{B/A}$.*

De plus, $\Omega^1_{B/A}$ est engendré par $\mathrm{Im}\ (d_{B/A})$ en tant que B-module.

On appelle $\Omega^1_{B/A}$ le module des différentielles (de Kähler) et $d_{B/A}$ est la différentielle de B relativement à A.

Le B-module $\Omega^1_{B/A}$ est donc unique à un unique isomorphisme près. On va se servir du lemme suivant :

Lemme 1. *Soient $f : B \longrightarrow C$, $g : B' \longrightarrow C$ deux morphismes de A-algèbres et on suppose que $N = \ker f$ vérifie $N^2 = 0$. On note X l'ensemble des morphismes de A-algèbres $h : B' \longrightarrow B$ vérifiant $g = f \circ h$. Si X est non vide, alors :*

- *N est un B'-module, l'action étant donnée par $b' \cdot x = h(b')x$ pour $b' \in B'$, $x \in N$ et $h \in X$.*
- *Pour $h_0 \in X$ fixé, l'application* $\begin{array}{ccc} \mathrm{Der}_A(B', N) & \longrightarrow & X \\ d & \longmapsto & h_0 + d \end{array}$ *est bijective.*

Autrement dit l'action de B' sur N ne dépend pas du $h \in X$ choisi, et si $h_1, h_2 \in X$ alors $h_2 - h_1$ est une A-dérivation de B' dans N.

Comme $I_{B/A}^2 \subset I_{B/A} = \ker \mu$, le morphisme μ passe au quotient ce qui nous donne une application A-linéaire $f : B \otimes_A B/I_{B/A}^2 \longrightarrow B$, où $I_{B/A} = \ker \mu$. On définit alors $\Omega_{B/A}^1 = \ker f = I_{B/A}/I_{B/A}^2$, c'est un idéal de $B \otimes_A B$ dont le carré est nul. On définit aussi $h_1, h_2 : B \longrightarrow \Omega_{B/A}^1$ par $h_1(x) = x \otimes 1 + I_{B/A}^2$ et $h_2(x) = 1 \otimes x + I_{B/A}^2$. Par construction h_1 et h_2 vérifient $Id_B = f \circ h_i$. D'après le lemme $d_{B/A} = h_2 - h_1$ est une A-dérivation de B dans $\Omega_{B/A}^1$.

Soulignons que la structure de B-algèbre standard de $B \otimes_A B/I_{B/A}^2$ est celle induite par passage au quotient, c'est-à-dire par multiplication sur le facteur de gauche. C'est donc la même structure de B-algèbre que celle induite par h_1. On aurait pu également se concentrer sur la structure de B-algèbre induite par h_2, c'est-à-dire par multiplication sur le facteur de droite. Cependant, d'après le lemme h_1 et h_2 donnent la même structure de B-module sur $\Omega_{B/A}^1$, autrement dit :

$$b \cdot (u + I_{B/A}^2) = \sum (bx_i) \otimes y_i + I_{B/A}^2 = \sum x_i \otimes (by_i) + I_{B/A}^2$$

pour tous $b \in B, u = \sum x_i \otimes y_i \in I_{B/A}$.

Soit $D : B \longrightarrow M$ une A-dérivation. L'application $(x, y) \longmapsto xDy$ induit par passage au produit tensoriel une application A-linéaire $\Phi : I \hookrightarrow B \otimes_A B \longrightarrow M$. Cette application est même B-linéaire : $\Phi(b(x \otimes y)) = \Phi((bx) \otimes y) = bxDy$. Si $u = \sum x_i \otimes y_i, v = \sum x_j' \otimes y_j' \in I$ (ie $\sum x_i y_i = \sum x_i' y_i' = 0$) alors

$$\Phi(uv) = \sum_{i,j} x_i x_j' D(y_i y_j') = \sum_{i,j} (x_i y_i x_j' D(y_j') + x_j' y_j' x_i D(y_i)) = 0$$

et donc $I_{B/A}^2 \subset \ker \Phi$. Ainsi Φ passe au quotient pour donner une application B-linéaire $\varphi : \Omega_{B/A}^1 \longrightarrow M$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, two heads] & M \\ \Omega_{B/A}^1 \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

On calcule $\varphi(d_{B/A}(x)) = \Phi(1 \otimes x - x \otimes 1) = Dx - xD1 = Dx$, d'où $D = \varphi \circ d_{B/A}$. Prenons $\sum x_i \otimes y_i \in I_{B/A}$, on remarque que $x_i \otimes y_i = (x_i \otimes 1)(1 \otimes y_i - y_i \otimes 1) + x_i y_i \otimes 1$. Or $\sum (x_i y_i \otimes 1) = (\sum x_i y_i) \otimes 1 = 0$, d'où l'égalité $\sum x_i \otimes y_i + I_{B/A}^2 = \sum x_i d_{B/A}(y_i) + I_{B/A}^2$. On vient de montrer que la famille $(d_{B/A}(y))_{y \in B}$ engendre le B-module $\Omega_{B/A}^1$ ce qui suffit pour dire que φ est unique.

Démonstration du lemme. Le fait que, à $h \in X$ fixé, les relations $b' \cdot x = h(b')x$ définissent une structure de B'-module sur N est clair car h est un morphisme d'anneaux et N est un idéal. Prenons $h_1, h_2 \in X$, alors $f(h_1(b') - h_2(b')) = g(b') - g(b') = 0$ donc $h_1(b') - h_2(b') \in N$. Par hypothèse $N^2 = 0$ donc $h_1(b')x = h_2(b')x$ pour tous $b' \in B', x \in N$.

Fixons $h_0 \in X$, on veut montrer que l'application $\mathrm{Der}_A(B', N) \longrightarrow X$ est bijective. Montrons d'abord qu'elle est bien définie. Si $d \in \mathrm{Der}_A(B', N)$ alors $h_0 + d : B' \longrightarrow B$ est A-linéaire, et de plus

$$\begin{aligned} (h_0 + d)(b_1' b_2') &= h_0(b_1')h_0(b_2') + b_1' \cdot d(b_2') + b_2' \cdot d(b_1') \\ &= h_0(b_1')h_0(b_2') + h_0(b_1')d(b_2') + h_0(b_2')d(b_1') \\ &= ((h_0 + d)(b_1'))\,((h_0 + d)(b_2')) \end{aligned}$$

Ainsi $h_0 + d$ est un morphisme de A-algèbres. De plus, il est clair que $f \circ (h_0 + d) = g$, ce qui implique que $h_0 + d \in X$. L'injectivité de l'application est immédiate. Si $h \in X$, on pose $d = h - h_0$, c'est une application A-linéaire de B' vers N car $f \circ d = 0$. En utilisant le fait que $b' \cdot x = h(b')x = h_0(b')x$ pour tous $b' \in B', x \in N$ on obtient :

$$d(b_1' b_2') = h(b_1')h(b_2') - h_0(b_1')h_0(b_2') = h(b_1')d(b_2') - h_0(b_2')d(b_1') = b_1' \cdot d(b_2') - b_2' \cdot d(b_1')$$

et donc d est une A-dérivation telle que $h_0 + d = h$, ce qui termine la preuve. □

En corollaire immédiat :

Corollaire 1. *Si B est une A-algèbre, alors pour tout B-module M l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_A(B, M) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ d_{B/A} \end{array}$$

est un isomorphisme de B-modules.

1.2 Propriétés fonctorielles

Dans cette partie on donne quelque propriétés fondamentales concernant le module des différentielles de Kähler. On verra que ces propriétés se généralisent au cas des dérivations d'ordre n. C'est pourquoi, pour éviter trop de redondance on se contentera de montrer ces résultats dans le cas général et il n'y aura donc que très peu de preuves ici. On pourra cependant retrouver ces résultats dans [7] à la section 6.1.1, on renvoie également à [3] (chap. 16) et à [8] (chap. 9).

Proposition 1. *Étant donné un carré commutatif de morphismes d'anneaux*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r, "i'"] & B' \end{tikzcd}$$

il existe une unique application B-linéaire $\rho : \Omega^1_{B/A} \longrightarrow \Omega^1_{B'/A'}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "d_{B/A}"] \arrow[d, "\beta"'] & \Omega^1_{B/A} \arrow[d, "\rho"] \\ B' \arrow[r, "d_{B'/A'}"] & \Omega^1_{B'/A'} \end{tikzcd}$$

Théorème 2. *Soient $A \longrightarrow B$ et $j : B \longrightarrow C$ deux morphismes d'anneaux. On a une suite exacte de C-modules*

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{C/A} \xrightarrow{\beta} \Omega^1_{C/B} \to 0 \tag{1}$$

où α et β sont définies respectivement par $\alpha(d_{B/A}(x) \otimes a) = a d_{C/A}(j(x))$, $\beta(d_{C/A}(y)) = d_{C/B}(y)$.

Si de plus j est surjective et $J = \ker j$ alors on a une autre suite exacte

$$J/J^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{C/A} \to 0 \tag{2}$$

avec δ telle que $\delta(x + J^2) = d_{B/A}(x) \otimes 1$.

Remarque Il faut noter que J/J^2 est bien un C-module d'après le lemme 1. On peut se demander quand les suites

$$0 \to \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{C/A} \xrightarrow{\beta} \Omega^1_{C/B} \to 0$$

et

$$0 \to J/J^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{B/A} \otimes_B (B/J) \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{(B/J)/A} \to 0$$

Une condition suffisante est donnée de dans [8] (théorèmes 25.1 et 25.2) : il suffit que C soit 0-lisse sur B (resp. sur A).

On dit qu'une A-algèbre B est 0-lisse sur A si pour tout morphisme de A-algèbres $B \longrightarrow C/N$, où C est une A-algèbre et $N \subset C$ est un idéal tel que $N^2 = 0$, il existe un morphisme de A-algèbres $u : B \longrightarrow C$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr, "u"] & C/N \\ A \arrow[u] \arrow[r] & C \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Lemme 2. *Soit $i : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux, $T \subset B$ une partie multiplicative et M un $T^{-1}B$-module. Toute A-dérivation $d : B \longrightarrow M$ s'étend de manière unique en une A-dérivation $d_T : T^{-1}B \longrightarrow M$, cette dérivation est définie par*

$$d_T\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{td(x) - xd(t)}{t^2}$$

Démonstration. L'application d_T est nécessairement unique, en effet la condition $d_T(\frac{x}{1}) = d(x)$ impose que $d(x) = d_T(t\frac{x}{t}) = \frac{t}{1}d_T(\frac{x}{t}) + \frac{x}{t}d(t)$ et donc $d_T(\frac{x}{t}) = \frac{td(x)-xd(t)}{t^2}$.

La seule difficulté est de montrer que d_T est bien définie, les propriétés caractéristiques d'une A-dérivation se vérifient aisément en utilisant le fait que d est une A-dérivation. Dans un premier temps on suppose que $M = T^{-1}\Omega^1_{B/A}$ et $d = d_{B/A}$. Si $u(tx - sy) = 0$ avec $s, t, u \in T$ et $x, y \in B$ alors

$$\begin{aligned} &u^2\left(t^2(sd_{B/A}(x) - xd_{B/A}(s)) - s^2(td_{B/A}(y) - yd_{B/A}(t))\right) \\ &\quad = u^2t^2(s \otimes x - x \otimes s + I^2_{B/A}) - u^2s^2(t \otimes y - y \otimes t + I^2_{B/A}) \\ &\quad = stu \otimes tux - tux \otimes stu - stu \otimes suy + suy \otimes stu + I^2_{B/A} = 0 \end{aligned}$$

Donc $(d_{B/A})_T$ est bien définie. Si d est une A-dérivation quelconque on écrit $d = \varphi \circ d_{B/A}$ où $\varphi : \Omega^1_{B/A} \longrightarrow M$ est B-linéaire. En localisant on obtient une application $T^{-1}B$-linéaire $\varphi_T : T^{-1}\Omega^1_{B/A} \longrightarrow M$ telle que $\varphi = \varphi_T \circ \psi$ où $\psi : \Omega^1_{B/A} \longrightarrow T^{-1}\Omega^1_{B/A}$ est le morphisme canonique. Finalement $\varphi_T \circ (d_{B/A})_T$ est une A-dérivation de $T^{-1}B$ vers M qui prolonge d. $\square$

Corollaire 2. *Soit $i : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux et T une partie multiplicative de B. En notant $S = i^{-1}(T)$ on a des isomorphismes*

$$T^{-1}\Omega^1_{B/A} \simeq \Omega^1_{T^{-1}B/S^{-1}A} \simeq \Omega^1_{T^{-1}B/A}$$

Proposition 2. *On a les isomorphismes suivants :*

1. *$\Omega^1_{B/A} \otimes_B B' \simeq \Omega^1_{B'/A'}$ où A' et B sont des A-algèbres et $B' = B \otimes_A A'$.*
2. *$\Omega^1_{B\otimes_A C/A} \simeq \Omega^1_{B\otimes_A C/B} \oplus \Omega^1_{B\otimes_A C/C} \simeq (\Omega^1_{B/A} \otimes_B (B \otimes_A C)) \oplus (\Omega^1_{C/A} \otimes_C (B \otimes_A C))$ où B et C sont des A-algèbres.*
3. *$\operatorname{colim} \Omega^1_{B_i/A_i} = \Omega^1_{B/A}$ où $A \longrightarrow B$ est la colimite d'un système inductif de morphismes d'anneaux $A_i \longrightarrow B_i$.*

Démonstration. On va se contenter de montrer 2. D'après 1. on a des isomorphismes de $B \otimes_A C$-modules $\Omega^1_{B\otimes_A C/B} \simeq \Omega^1_{C/A} \otimes_C (B \otimes_A C)$ et $\Omega^1_{B\otimes_A C/C} \simeq \Omega^1_{B/A} \otimes_B (B \otimes_A C)$. Le théorème 2 nous donne deux suites exactes

$$\Omega^1_{B\otimes_A C/B} \xrightarrow{\alpha_1} \Omega^1_{B\otimes_A C/A} \xrightarrow{\beta_1} \Omega^1_{B\otimes_A C/C} \longrightarrow 0$$

et

$$\Omega^1_{B\otimes_A C/C} \xrightarrow{\alpha_2} \Omega^1_{B\otimes_A C/A} \xrightarrow{\beta_2} \Omega^1_{B\otimes_A C/B} \longrightarrow 0$$

De plus α_1 est une section de β_2 et α_2 est une section de β_1, d'où l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \Omega^1_{B\otimes_A C/B} \oplus \Omega^1_{B\otimes_A C/C} & \longrightarrow & \Omega^1_{B\otimes_A C/A} \\ (u, v) & \longmapsto & \alpha_1(u) + \alpha_2(v) \end{array}$$

dont l'inverse est (β_2, β_1). $\square$

1.3 Exemples et lien avec les différentielles de la géométrie différentielle

Exemple Soient A un anneau et Λ un ensemble non vide, on pose $B = A[X_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$. On munit le B-module libre $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} B\ dX_\lambda$ de la A-dérivation

$$\begin{array}{rcl} d : B & \longrightarrow & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} B\ dX_\lambda \\ f & \longmapsto & \sum \frac{\partial f}{\partial X_\lambda} dX_\lambda \end{array}$$

qui est bien définie puisque l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que f n'est pas constant en X_λ est fini. On va montrer que $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} B\ dX_\lambda$ est canoniquement isomorphe à $\Omega^1_{B/A}$.

On commence par étudier le cas où Λ est un singleton. Soient M un $A[X]$-module et $D : A[X] \longrightarrow M$ une A-dérivation. Remarquons que pour tout polynôme $f = \sum a_k X^k$ on a $D(f) = \sum a_k D(X^k) = \sum k a_k X^{k-1} D(X) = f'(X)D(X)$. Donc l'application $\varphi : A[X]\ dX \longrightarrow M$ définie par $\varphi(dX) = D(X)$ est l'unique application $A[X]$-linéaire telle que $\varphi \circ d = D$. Ainsi on a bien $\Omega^1_{A[X]/A} \simeq A[X]\ dX$.

On suppose maintenant que Λ est fini. Dans ce cas $B = \bigotimes_{\lambda\in\Lambda} A[X_\lambda]$ donc d'après la seconde propriété de la proposition 2 : $\Omega^1_{B/A} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (\Omega^1_{A[X_\lambda]/A} \otimes_{A[X_\lambda]} B) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (A[X_\lambda]\ dX_\lambda \otimes_{A[X_\lambda]} B) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} B\ dX_\lambda$ et $d = d_{B/A}$.

On prend maintenant Λ quelconque. L'égalité $B = \operatorname*{colim}_{\Delta\subset\Lambda \text{ fini}} A[X_\lambda]_{\lambda\in\Delta}$ induit d'après la proposition 2 :

$$\Omega^1_{B/A} = \operatorname*{colim}_{\Delta\subset\Lambda \text{ fini}} \Omega^1_{A[X_\lambda]_{\lambda\in\Delta}/A} = \operatorname*{colim}_{\Delta\subset\Lambda \text{ fini}} \bigoplus_{\lambda\in\Delta} A[X_\lambda]_{\lambda\in\Delta}\ dX_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} B\ dX_\lambda$$

Exemple Soit A un anneau et $f_1, ..., f_r \in B = A[X_1, ..., X_n]$ des polynômes. On pose $J = (f_1, ..., f_r)$ et $C = B/J = A[X_1, ..., X_n]/(f_1, ..., f_r)$. On va montrer que $\Omega^1_{C/A} = (\bigoplus_{i=1}^n CdX_i)/\sum_{i=1}^r Bdf_i$.

D'après l'exemple précédent on sait que $\Omega^1_{B/A} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} B\ dX_i$, ainsi le C-module $\Omega^1_{B/A} \otimes_B C$ est isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^r CdX_i$. D'après le théorème 2 on a une suite exacte

$$J/J^2 \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i=1}^r CdX_i \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \longrightarrow 0$$

où δ est définie par $\delta(f + J^2) = \sum \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i =: df$. Comme $J = (f_1, ..., f_n)$ on a $\mathrm{Im}\ (\delta) = (df_1, ..., df_n)$, d'où l'isomorphisme $\Omega^1_{C/A} \simeq (\bigoplus_{i=1}^n CdX_i)/\sum_{i=1}^r Bdf_i$ souhaité.

Pour finir on va regarder quel est le lien entre le module des différentiels de Kähler et module des différentielles usuelles pour une variété lisse ou complexe ou complexe au sens de la géométrie différentielle. On renvoie à [11] pour les définitions des termes utilisés ici.

Soit M une variété lisse, on prend $A = \mathcal{C}^\infty(M)$ le module des fonctions lisses (au sens de la géométrie différentielle) de M sur R et on note $\Omega(M)$ le A-module des 1-formes différentielles, c'est-à-dire le module des sections du fibré cotangent $T^*M \longrightarrow M$. On note $d : C^\infty(M) \longrightarrow M$ la différentielle extérieure. On sait (cf par exemple [11] p. 220) que d est une $\mathbb{R}$-dérivation et que $\Omega^1(M)$ est engendré par l'image de d en tant que $\mathcal{C}^\infty(M)$-module. Il existe donc une application canonique

$$\Omega^1_{\mathcal{C}^\infty(M)/\mathbb{R}} \longrightarrow \Omega(M)$$

qui est surjective. Ainsi $\Omega(M)$ est un quotient de $\Omega^1_{\mathcal{C}^\infty(M)/\mathbb{R}}$, cependant cette application n'a pas de raison d'être injective.

Des considérations analogues peuvent être faites dans le cas où M est une variété complexe. On va voir que dans le cas où $M = \mathbb{C}$ l'application

$$\Omega^1_{\mathcal{H}(\mathbb{C})/\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega(\mathbb{C})$$

n'est pas injective.

Définition 2. *Soit $k \longrightarrow K$ une extension de corps. On dit qu'une sous-famille $B \subset K$ est une base différentielle de K sur k si la famille $(d(x))_{x \in B}$ forme une K-base de $\Omega^1_{K/k}$.*

Théorème 3. *Soit $k \longrightarrow K$ une extension de corps de caractéristique nulle. Les bases différentielles de K sur k sont exactement les bases de transcendance de K sur k.*

En caractéristique $p > 0$ les bases différentielles amènent à la notion de p-base, on pourra par exemple voir le théorème 16.14 et l'appendice 1 de [3]. En rappelant que toute famille algébriquement indépendante est contenue dans une base de transcendance, le résultat suivant en découle.

Corollaire 3. *Soit $k \longrightarrow K$ une extension de corps de caractéristique nulle. Si $x_1, \cdots, x_r \in K$ sont algébriquement indépendants sur k alors $d(x_1), \cdots, d(x_r)$ sont linéairement indépendants dur K.*

Revenons à notre exemple. L'anneau $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ est intègre par le principe des zéros isolés, et son corps des fractions est l'ensemble des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$, notés $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. En notant $S = \mathcal{H}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ on a un morphisme de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$-modules

$$\Omega^1_{\mathcal{H}(\mathbb{C})/\mathbb{C}} \longrightarrow S^{-1}\Omega^1_{\mathcal{H}(\mathbb{C})/\mathbb{C}} = \Omega^1_{\mathcal{M}(\mathbb{C})/\mathbb{C}}$$

Les applications $Id_{\mathbb{C}}$ et exp sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, la famille $(d_{\mathcal{M}(\mathbb{C})/\mathbb{C}}(Id_{\mathbb{C}}), d_{\mathcal{M}(\mathbb{C})/\mathbb{C}}, (\exp))$ est donc libre et *a fortiori* la famille $(d_{\mathcal{H}(\mathbb{C})/\mathbb{C}}(Id_{\mathbb{C}}), d_{\mathcal{H}(\mathbb{C})/\mathbb{C}}, (\exp))$ est libre également. Or il est bien connu que $d(e^x) = e^x dx$, ce qui prouve que la non injectivité de l'application

$$\Omega^1_{\mathcal{H}(\mathbb{C})/\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega(\mathbb{C})$$

2 Modules des différentielles d'ordre n

2.1 Dérivations d'ordre n

Définition 3. *Soient B une A-algèbre et M un B-module. Une A-dérivation d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de B vers M est une application A-linéaire $d : B \longrightarrow M$ vérifiant*

$$d(x_0 \cdots x_n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_s} d(x_0 \cdots \check{x}_{i_1} \cdots \check{x}_{i_s} \cdots x_n)$$

pour tous $x_0, ..., x_n \in B$, avec la notation $x_0 \cdots \check{x}_{i_1} \cdots \check{x}_{i_s} \cdots x_n = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i_1, \cdots, i_s}} x_j$.

On note $\mathrm{Der}_A^{(n)}(B, M)$ le B-module des A-dérivations d'ordre n.

Si on note $i : A \longrightarrow B$ le morphisme d'anneaux canonique, alors comme pour les dérivations d'ordre 1 on a $d \circ i = 0$:

$$d(1) = d(1^{n+1}) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n} d(1) = \left(\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \binom{n+1}{s} \right) d(1) = \left(1 + (-1)^{n+1}\right) d(1)$$

En distinguant les cas sur la parité de n on obtient l'égalité $d(1) = 0$ et par A-linéarité on a bien $d \circ i = 0$. En particulier les A-dérivations d'ordre 1 sont les A-dérivation définies dans la première partie de ce mémoire (i.e. $\mathrm{Der}_A^{(1)}(B, M) = \mathrm{Der}_A(B, M)$).

Introduisons quelques notations. Si $d : B \longrightarrow M$ est une application A-linéaire on note $d^{\otimes} : B \otimes_A B \longrightarrow B$ l'application définie par $d^{\otimes}(x \otimes y) = xd(y)$, notons que cette application est B-linéaire. Si $x \in B$ on introduit l'application A-linaire

$$\begin{array}{rcl} [d, x] : B & \longrightarrow & M \\ y & \longmapsto & d(xy) - xd(y) - yd(x) \end{array}$$

On obtient ainsi pour tout $x \in B$ une application B-linéaire $[\cdot, x] : \mathrm{Hom}_A(B, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(B, M)$. Naturellement il est possible d'itérer cette opérateur, pour faciliter les notations on écrira $[d, x_1, \cdots, x_r] = [\cdots[[d, x_1], x_2] \cdots, x_r]$. Si $x_1 = \cdots = x_r = x$ on écrit $[d, x^{(r)}] = [d, x_1, \cdots, x_r]$.

Lemme 3. *Soit $f : B \longrightarrow M$ une application A-linéaire. Pour tous $x_0, \cdots, x_r \in B$ on a*

$$[f, x_1, \cdots, x_r](x_0) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq r} x_{i_1} \cdots x_{i_s} f(x_0 \cdots \check{x}_{i_1} \cdots \check{x}_{i_s} \cdots x_r)$$

Démonstration. Pour éviter trop de lourdeur dans les notations on écrira ici $E_s^r = \{(i_1, \cdots, i_s) \in \mathbb{N}^s : 0 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq r\}$ $(r, s \in \mathbb{N}, 0 \leq s \leq r)$ et

$$F_{(i_1, \cdots, i_s)}^{(z_1, \cdots, z_r)} = z_{i_1} \cdots z_{i_s} f(z_0 \cdots \check{z}_{i_1} \cdots \check{z}_{i_s} \cdots z_r)$$

pour tous $z_0, \cdots, z_r \in B$ $(i_1, \cdots, i_s) \in E_s^r$, on veut donc montrer l'égalité

$$[f, x_1, \cdots, x_r](x_0) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \sum_{(i_1, \cdots, i_s) \in E_s^r} F_{(i_1, \cdots, i_s)}^{(x_0, \cdots, x_r)} \tag{3}$$

Remarque Si on fixe σ une permutation de $\{0, \cdots, r\}$ on constate qu'on obtient une bijection $E_s^r \longrightarrow E_s^r$ qui envoie $(i_1, \cdots, i_s)$ sur le s-uplet composé des éléments de $\{\sigma(i_1), \cdots, \sigma(i_s)\}$, d'où l'égalité

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \sum_{(i_1, \cdots, i_s) \in E_s^r} F_{(\sigma(i_1), \cdots, \sigma(i_s))}^{(x_0, \cdots, x_r)} = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \sum_{(i_1, \cdots, i_s) \in E_s^r} F_{(i_1, \cdots, i_s)}^{(x_0, \cdots, x_r)}$$

En particulier on voit que si (3) est vraie alors $[f, x_1, \cdots, x_r](x_0) = [f, x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(r)}](x_{\sigma(0)})$ pour toute permutation σ de $\{0, \cdots, n\}$.

On procède par récurrence sur r. Si $r = 1$ on retrouve la définition de $[f, x]$. En supposant la récurrence établie au rang $r-1$ et en posant $(y_0, ..., y_{r-1}) = (x_0 x_r, x_1, ..., x_{r-1})$ on calcule

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{r}(-1)^s \sum_{(i_1,\cdots,i_s)\in E_s^r} F_{(i_1,\cdots,i_s)}^{(x_0,\cdots,x_r)} =& \sum_{s=2}^{r}(-1)^s \sum_{\substack{i_1=0\\ i_s=r}} F_{(0,i_2,\cdots,i_{s-1},r)}^{(x_0,\cdots,x_r)} + \sum_{s=1}^{r}(-1)^s \sum_{\substack{i_1=0\\ i_s\neq r}} F_{(0,i_2,\cdots,i_s)}^{(x_0,\cdots,x_r)} \\
&+ \sum_{s=1}^{r}(-1)^s \sum_{\substack{i_1\neq 0\\ i_s=r}} F_{(i_1,\cdots,i_{s-1},r)}^{(x_0,\cdots,x_r)} + \sum_{s=0}^{r-1}(-1)^s \sum_{\substack{i_1\neq 0\\ i_s\neq r}} F_{(i_1,\cdots,i_s)}^{(x_0,\cdots,x_r)} \\
=& \sum_{s=1}^{r-1}(-1)^s \sum_{i_1=0} F_{(0,i_2,\cdots,i_s)}^{(y_0,\cdots,y_{r-1})} - x_0 \sum_{s=0}^{r-1}(-1)^s \sum F_{(i_1,\cdots,i_s)}^{(x_1,\cdots,x_r)} \\
&- x_r \sum_{s=0}^{r-1}(-1)^s \sum F_{(i_1,\cdots,i_s)}^{(x_0,\cdots,x_{r-1})} + \sum_{s=1}^{r-1}(-1)^s \sum_{i_1\neq 0} F_{(i_1,\cdots,i_s)}^{(y_0,\cdots,y_{r-1})} \\
=& \sum_{s=0}^{r-1}(-1)^s \sum F_{(i_1,\cdots,i_s)}^{(y_0,\cdots,y_{r-1})} - x_0 \sum_{s=0}^{r-1}(-1)^s \sum F_{(i_1,\cdots,i_s)}^{(x_r,x_1,\cdots,x_{r-1})} \\
&- x_r[f, x_1, \cdots, x_{r-1}](x_0) \\
=&[f, x_1, \cdots, x_{r-1}](x_0 x_r) - x_0[f, x_1, \cdots, x_{r-1}](x_r) \\
&- x_r[f, x_1, \cdots, x_{r-1}](x_0) \\
=&[f, x_1, \cdots, x_r](x_0)
\end{aligned}$$

□

On peut maintenant donner une nouvelle manière de définir les A-dérivations d'ordre n :

Proposition 3. *Soit $d : B \longrightarrow M$ une application A-linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *d est une A-dérivation d'ordre n*
2. *$d(1) = 0$ et $d^{\otimes}\left(\prod_{k=0}^{n}(1 \otimes x_k - x_k \otimes 1)\right) = 0$ pour tous $x_1, ..., x_n \in B$*
3. *$d^{\otimes}$ s'annule sur* $\mathrm{Im}\ (\nu) \oplus I^{n+1}$
4. *$[d, x_1, \cdots, x_n] = 0$ pour tous $x_1, ..., x_n \in B$*
5. *Si $n \geq 2$, $[d, x]$ est une A-dérivation d'ordre $n-1$ pour tout $x \in B$.*

Démonstration. Remarquons les égalités

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{n+1}(-1)^s \sum_{0\leq i_1<\cdots<i_s\leq n} (x_{i_1}\cdots x_{i_s}) \otimes (x_0 \cdots \check{x}_{i_1} \cdots \check{x}_{i_s} \cdots x_n) \\
&\quad = \sum_{s=1}^{n+1}(-1)^s \sum_{0\leq i_1<\cdots<i_{s-1}\leq n-1} (x_{i_1}\cdots x_{i_{s-1}} x_n) \otimes (x_0 \cdots \check{x}_{i_1} \cdots \check{x}_{i_s} \cdots x_{n-1}) \\
&\quad\quad + \sum_{s=0}^{n}(-1)^s \sum_{0\leq i_1<\cdots<i_s\leq n-1} (x_{i_1}\cdots x_{i_s}) \otimes (x_0 \cdots \check{x}_{i_1} \cdots \check{x}_{i_s} \cdots x_{n-1} x_n) \\
&\quad =(1 \otimes x_n - x_n \otimes 1) \sum_{s=0}^{n}(-1)^s \sum_{0\leq i_1<\cdots<i_s\leq n-1} (x_{i_1}\cdots x_{i_s}) \otimes (x_0 \cdots \check{x}_{i_1} \cdots \check{x}_{i_s} \cdots x_{n-1})
\end{aligned}$$

Par récurrence on obtient

$$\prod_{k=0}^{n+1}(1\otimes x_k - x_k\otimes 1) = \sum_{s=0}^{n+1}(-1)^s \sum_{0\le i_1<\cdots<i_s\le n}(x_{i_1}\cdots x_{i_s})\otimes(x_0\cdots \check{x}_{i_1}\cdots\check{x}_{i_s}\cdots x_n)$$

et l'équivalence entre les deux premiers points s'en déduit.

L'équivalence entre la première assertion et la quatrième découle de l'égalité

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s \sum_{0\le i_1<\cdots<i_s\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_s} d(x_0\cdots\check{x}_{i_1}\cdots\check{x}_{i_s}\cdots x_n) = [d,x_1,\cdots,x_n](x_0)$$

que l'on a montrée au lemme 5.

Il est trivial que 3. implique 2., réciproquement le fait que $d(1)=0$ implique que $d^{\otimes}\circ\nu=0$ et si $u=\sum_{k=0}^{r} x_i\otimes y_i \in I = \ker\mu$ alors $u = u-\nu\mu(u) = \sum_{k=1}^{r}(x_i\otimes y_i - x_iy_i\otimes 1) = \sum_{k=1}^{r} x_i\cdot(1\otimes y_i - y_i\otimes 1)$, donc I est le B-module engendré par les éléments de la forme $1\otimes x - x\otimes 1$ et par conséquent I^{n+1} est engendré par les éléments de la forme $\prod_{k=0}^{n}(1\otimes x_k - x_k\otimes 1)$, d'où le fait que 2. implique 3.

Le fait que 4. et 5. sont équivalents provient de l'équivalence entre 1. et 4. à l'ordre $n-1$, ce que l'on a déjà montré. □

De la quatrième caractérisation des dérivations on tire qu'une A-dérivation d'ordre n est aussi une A-dérivation de tout ordre supérieur à n, ainsi on a une filtration croissante

$$\mathrm{Der}_A^{(1)}(B,M)\subset \mathrm{Der}_A^{(2)}(B,M)\subset\cdots\subset\mathrm{Der}_A^{(n)}(B,M)\subset\cdots$$

Corollaire 4. *Soient $d,d' : B\longrightarrow B$ deux A-dérivations respectivement d'ordres r et s.*

Alors $d\circ d'$ est une A-dérivation d'ordre $r+s$ et $[d,d'] = d\circ d' - d'\circ d$ est une A-dérivation d'ordre $r+s-1\ge 1$.

Démonstration. On procède par récurrence sur $n=r+s\ge 2$. Lorsque $n=2$ (i.e. $r=s=1$) on a

$$[dd',x](y) = dd'(xy) - xdd'(y) - ydd'(x) = d(xd'(y)+yd'(x)) - xdd'(y) - ydd'(x) = d(x)d'(y)+d'(x)d(y)$$

pour tous $x,y\in B$ et donc $[d\circ d',x] = d(x)d' + d'(x)d$ est une A-dérivation d'ordre 1 et $d\circ d'$ est une A-dérivation d'ordre 2.

$$\begin{aligned}[d,d'](xy) &= d(xd'(y)) + d(yd'(x)) - d'(xd(y)) - d'(yd(x)) = xdd'(y) + ydd'(x) - xd'd(y) - yd'd(x)\\ &= x[d,d'](y) + y[d,d'](x)\end{aligned}$$

donc $[d,d']$ est une A-dérivation d'ordre 1.

Remarquons que

$$\begin{aligned}[dd',x](y) =& dd'(xy) - xdd'(y) - ydd'(x)\\ =& d(d'(xy) - xd'(y) - yd'(x)) + [d(xd'(y)) - xdd'(y) - d'(y)d(x)]\\ &+ [d(yd'(x)) - d'(x)d(y) - ydd'(x)] + d(x)d'(y) + d'(x)d(y)\end{aligned}$$

donc

$$[d\circ d',x] = d\circ[d',x] + [d,x]\circ d' + [d,d'(x)] + d(x)d' + d'(x)d$$

pour tout $x\in B$. Par hypothèse de récurrence c'est une combinaison linéaire de dérivées d'ordres (inférieurs) à $n-1$, ce qui implique d'après la proposition précédente que $d\circ d'$ est une A-dérivation d'ordre n.

Aussi

$$\begin{aligned}[][d,d'],x] =&[d\circ d',x]-[d'\circ d,x]\\ =&d\circ[d',x]+[d,x]\circ d'+[d,d'(x)]-d'\circ[d,x]-[d',x]\circ d-[d',d(x)]\\ =&[d,[d',x]]-[d',[d,x]]+[d,d'(x)]-[d',d(x)]\end{aligned}$$

est une A-dérivation d'ordre $n-2$ pour tout $x\in B$, d'où le résultat. □

Exemple On considère la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R}^n)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'un ouvert $U\subset\mathbb{R}^m$ vers $\mathbb{R}^n$. Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_i}: f\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont des $\mathbb{R}$-dérivations d'ordre 1 et donc pour tout multi-indice $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_m)\in\mathbb{N}^m\setminus\{0\}$ l'opérateur $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$ est une $\mathbb{R}$-dérivation d'ordre $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_m$.

On définit maintenant le module des différentielles de Kähler d'ordre n.

Théorème 4. *Il existe un B-module $\Omega^n_{B/A}$ et une A-dérivation d'ordre n $d^n_{B/A}: B\longrightarrow\Omega^n_{B/A}$ qui vérifient la propriété universelle suivante :*

> *Pour tout B-module M et toute A-dérivation d'ordre n $D: B\longrightarrow M$ il existe une unique application B-linéaire $\varphi:\Omega^1_{B/A}\longrightarrow M$ telle que $D=\varphi\circ d^n_{B/A}$.*

De plus, $\Omega^1_{B/A}$ est engendré par Im $(d^n_{B/A})$ *en tant que B-module.*

On en donne deux construction.

Première construction. On prend les B-modules libres $B^{(B^{n+1})}$, $B^{(B\times B)}$, $B^{(B)}$ et $B^{(A)}$ dont on note respectivement $(e_{(x_0,\cdots,x_n)})_{(x_0,\cdots,x_n)\in B^{n+1}}$, $(e_{(x,y)})_{(x,y)\in B\times B}$, $(e_x)_{x\in B}$ et $(e_a)_{a\in A}$ les bases canoniques. On définit $\Omega^n_{B/A}$ comme le conoyau de l'application

$$\begin{array}{rccl}\Psi: B^{(B^{n+1})}\oplus B^{(B\times B)}\oplus B^{(A)} & \longrightarrow & B^{(B)} \\ (e_{(x_0,\cdots,x_n)},e_{(x,y)},e_a) & \longmapsto & \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\sum_{0\le k_1<\cdots<k_s\le n} x_{k_1}\cdots x_{k_s}e_{x_0\cdots\check{x}_{k_1}\cdots\check{x}_{k_s}\cdots x_n} \\ & & +e_{i(a)x+y}-i(a)e_x-e_y\end{array}$$

Par construction, l'application $d^n_{B/A}: B\longrightarrow\Omega^n_{B/A}$ définie par $d^n_{B/A}(x)=e_x+\mathrm{Im}\,(\Psi)$ est une A-dérivation d'ordre n et Im $(d^n_{B/A})$ engendre $\Omega^n_{B/A}$ en tant que B-module. Soit M un B-module munit d'une A-dérivation d'ordre n $D: B\longrightarrow M$. Le noyau de l'application B-linéaire

$$\begin{array}{rcl} B^{(B)} & \longrightarrow & M \\ e_x & \longmapsto & D(x)\end{array}$$

contient Im (Ψ) car D est une A-dérivation, donc cette application passe au quotient pour donner l'application B-linéaire $\varphi:\Omega^n_{B/A}\longrightarrow M$ voulue. L'applicationφ est nécessairement unique car Im $(d^n_{B/A})$ engendre $\Omega^n_{B/A}$.

Deuxième construction. De manière analogue au cas des dérivations d'ordre 1 on prend $\Omega^n_{B/A}=I_{B/A}/I^{n+1}_{B/A}$ et on définit $d^n_{B/A}: B\longrightarrow\Omega^n_{B/A}$ par $d^n_{B/A}(x)=1\otimes x-x\otimes 1+I^{n+1}_{B/A}$. Pour simplifier les notations on va poser $d=d^n_{B/A}$. On a $d(1)=0$ et si $u=\sum x_i\otimes y_i\in I^{n+1}_{B/A}\subset I_{B/A}$ alors

$$d^\otimes(u)=\sum x_i d(y_i)=\sum(x_i\otimes y_i-x_iy_i\otimes 1)+I^{n+1}_{B/A}=u-\mu(u)\otimes 1+I^{n+1}_{B/A}=0$$

D'après la proposition 3, d est bien une A-dérivation d'ordre n.

Soit $D: B\longrightarrow M$ une A-dérivation d'ordre n. On a donc $\ker D^\otimes\subset I^{n+1}_{B/A}$ et l'existence et l'unicité de φ en découle immédiatement.

Corollaire 5. *Pour tout B-module M l'application*

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Hom}_B(\Omega^n_{B/A},M) & \longrightarrow & \mathrm{Der}^{(n)}_A(B,M) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi\circ d^n_{B/A}\end{array}$$

est un isomorphisme de B-modules.

On finit par un lemme qui nous resservira plus tard.

Lemme 4. *Soient $d : B \longrightarrow M$ une A-dérivation d'ordre n. On a les identités suivantes :*

1. $[d, x_1 \cdots x_r] = \sum\limits_{k=0}^{r-1} \sum\limits_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq r} x_{i_1} \cdots x_{i_k} [d, x_1, \cdots, \check{x}_{i_1}, \cdots, \check{x}_{i_k}, \cdots, x_r]$
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} x^k d(x^{n+1-k}) = 0$
3. $\sum\limits_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+1}{r} (xy)^r [d, x^{n+1-r}](y^{n-r}) = 0$

Démonstration. 1. Le résultat pour $r = 1$ est trivial. En utilisant la remarque qui suit le lemme 3, pour $r = 2$ on a bien :

$$[d, x, y](z) = [d, z, x](y) = [d, z](xy) - x[d, z](y) - y[d, z](x) = ([d, xy] - x[d, y] - y[d, z])(z)$$

Et pour le cas général on procède par récurrence :

$$\begin{aligned}
[d, x_1 \cdots x_r] =& [[d, x_1 \cdots x_{r-1}]x_r] + x_r[d, x_1 \cdots x_{r-1}] + x_1 \cdots x_{r-1}[d, x_r] \\
=& \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq r-1} x_{i_1} \cdots x_{i_k} [d, x_1, \cdots, \check{x}_{i_1}, \cdots, \check{x}_{i_k}, \cdots, x_r] \\
&+ x_r \sum_{k=0}^{r-2} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq r-1} x_{i_1} \cdots x_{i_k} [d, x_1, \cdots, \check{x}_{i_1}, \cdots, \check{x}_{i_k}, \cdots, x_{r-1}] \\
=& \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq r} x_{i_1} \cdots x_{i_k} [d, x_1, \cdots, \check{x}_{i_1}, \cdots, \check{x}_{i_k}, \cdots, x_r]
\end{aligned}$$

2. Encore une récurrence, cette fois-ci sur n. Pour $n = 1$ c'est l'égalité bien connue $d(x^2) = 2d(x)$. Si la propriété est vraie pour les dérivations d'ordre $n - 1$ elle l'est en particulier pour $[d, x]$ et donc

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} x^k [d, x](x^{n-k}) =& \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} x^k (d(x^{n+1-k}) - xd(x^{n-k}) - x^{n-k}d(x)) \\
=& \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^k d(x^{n+1-k}) \\
&+ d(x^{n+1}) + (-1)^n x^n d(x) \\
=& \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} x^k d(x^{n+1-k})
\end{aligned}$$

3. D'après 1. on a $[d, x^{n+1-r}] = \sum\limits_{k=0}^{n-r} \binom{n+1-r}{k} x^k [d, x^{(n+1-r-k)}]$ donc, en utilisant le fait que $\binom{n+1}{r}\binom{n+1-r}{k} =$

$\frac{(n+1)!}{(n+1-r-k)!k!r!} = \binom{n+1}{k+r}\binom{k+r}{r}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n+1}{r}(xy)^r[d,x^{n+1-r}](y^{n-r})\\
&\qquad=\sum_{r=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^r\binom{n+1}{r}\binom{n+1-r}{k}x^{k+r}y^r[d,x^{(n+1-r-k)}](y^{n-r})\\
&\qquad=\sum_{r=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^r\binom{n+1}{k+r}\binom{k+r}{r}x^{k+r}y^r[d,x^{(n+1-r-k)}](y^{n-r})\\
&\qquad=\sum_{r=0}^{n}\sum_{k=r}^{n}(-1)^r\binom{n+1}{k}\binom{k}{r}x^{k}y^r[d,x^{(n+1-k)}](y^{n-r})\\
&\qquad=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\binom{k}{r}x^{k}\left(\sum_{r=0}^{n-k}(-1)^r y^r[d,x^{(n+1-k)}](y^{n-r})\right)=0
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient de 3. et du fait que $[d,x^{(n+1-k)}]$ est une dérivation d'ordre $n-(n+1-k)=k-1$. $\square$

2.2 Propriétés fonctorielles

Proposition 4. *Étant donné un carré commutatif de morphismes d'anneaux*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\
A' \arrow[r, "i'"] & B'
\end{tikzcd}$$

il existe une unique application B-linéaire $\rho : \Omega^1_{B/A} \longrightarrow \Omega^1_{B'/A'}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "d^n_{B/A}"] \arrow[d, "\beta"'] & \Omega^n_{B/A} \arrow[d, "\rho"] \\
B' \arrow[r, "d^n_{B'/A'}"] & \Omega^n_{B'/A'}
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Le morphisme β confère à $\Omega^n_{B'/A'}$ une structure de B-module. L'application $D = d^n_{B'/A'} \circ \beta$ est une A-dérivation d'ordre n, d'où l'existence et l'unicité de ρ tel que $d_{B'/A'} \circ \rho = D = \rho \circ d^n_{B/A}$. $\square$

Considérons deux morphismes d'anneaux $i : A \longrightarrow B$ et $j : B \longrightarrow C$. Par propriété universelle on peut définir les applications C-linéaires

$$\begin{array}{rcl} \alpha_n : \Omega^n_{B/A}\otimes_B C & \longrightarrow & \Omega^n_{C/A} \\ d^n_{B/A}(x)\otimes 1 & \longmapsto & d^n_{C/A}(j(x)) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \beta_n : \Omega^n_{C/A} & \longrightarrow & \Omega^n_{C/B} \\ d^n_{C/A}(y) & \longmapsto & d^n_{C/B}(y) \end{array}$$

Il est clair que les deux suites

$$\Omega^n_{B/A}\otimes_B C \xrightarrow{\alpha_n} \Omega^n_{C/A} \longrightarrow \operatorname{coker}\alpha_n \longrightarrow 0$$

et

$$\Omega^n_{C/A} \xrightarrow{\beta_n} \Omega^n_{C/B} \longrightarrow 0$$

sont exactes. De plus on remarque que $\beta_n \circ \alpha_n = 0$, d'où le diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^n_{C/A} \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[d, two heads, "\pi_n"'] & \Omega^n_{C/B} \\
\text{coker } \alpha_n \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où $\pi_n : \Omega^n_{C/A} \longrightarrow \text{coker } \alpha_n$ est la surjection canonique.

Proposition 5. *Pour tout C-module M l'application*

$$\begin{array}{rcl}
\text{Hom}_C(\text{coker } \alpha_n, M) & \longrightarrow & \text{Der}^{(n)}_A(C, M) \cap \ker j^* \\
\varphi & \longmapsto & \varphi \circ \pi_n \circ d^n_{C/A}
\end{array}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Si $\varphi : \text{coker } \alpha_n \longrightarrow M$ est C-linéaire alors $\varphi \circ \pi_n \circ d^n_{C/A}$ est une A-dérivation d'ordre n et $\varphi\pi_n d^n_{C/A}(j(x)) = \varphi\pi_n\alpha_n(d^n_{B/A}(x) \otimes 1) = 0$, donc l'application est bien définie.

Si on prend $D : C \longrightarrow M$ une A-dérivation d'ordre n telle que $D \circ j = 0$ alors D se factorise ainsi : $D = \Phi \circ d^n_{C/A}$ avec $\Phi \in \text{Hom}_C(\Omega^n_{C/A}, M)$. De plus $\Phi\alpha_n(d^n_{C/A}(x) \otimes 1) = D(j(x)) = 0$ donc il existe φ : $\text{coker } \alpha_n \longrightarrow M$ telle que $\Phi = \varphi \circ \pi_n$ et alors $D = \varphi \circ \pi_n \circ d^n_{C/A}$. L'unicité de φ est immédiate puisque π_n est surjective et $\Omega^n_{C/A}$ est engendrée par Im $(d^n_{C/A})$. □

Si on prend $n = 1$ on a $\text{Der}_B(C, M) = \text{Der}_A(C, M) \cap \ker j^*$, on a donc des isomorphismes

$$\text{Hom}_C(\text{coker } \alpha_1, M) \simeq \text{Der}_B(C, M) \simeq \text{Hom}_C(\Omega^1_{C/B}, M)$$

pour tout C-module M, ce qui nous donne l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcl}
\Omega^1_{C/B} & \longrightarrow & \text{coker } \alpha_1 \\
d_{C/B}(x) & \longmapsto & \pi(d_{C/A}(x))
\end{array}$$

Remarque En particulier, on a montré que la suite (1) dans le théorème 2 est exacte, c'est-à-dire que pour $n = 1$ la suite

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{C/A} \longrightarrow \Omega^1_{C/B} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Théorème 5. *Si $n \geq 2$ on a une suite exacte de C-modules*

$$\Omega^{n-1}_{B/A} \otimes_B \text{coker } \alpha_{n-1} \xrightarrow{\sigma} \text{coker } \alpha_n \xrightarrow{\tau} \Omega^n_{C/B} \longrightarrow 0$$

où σ et τ sont définies par $\sigma(d^{n-1}_{B/A}(x) \otimes \pi_{n-1}d^{n-1}_{C/A}(y)) = [\pi_n \circ d^n_{C/A}, j(x)](y)$ et $\tau(\pi_n d^n_{C/A}(z)) = d^n_{C/B}(z)$.

Démonstration. Soulignons d'abord que τ est bien définie parce que $d^n_{C/B} \in \text{Der}^{(n)}_A(C, \Omega^n_{C/B}) \cap \ker j^*$. Quant à σ, elle s'obtient par produit tensoriel, notons tout de même que $d^n_{C/A}(j(x)) = \alpha_n(d^n_{B/A}(x) \otimes 1) \in \text{Im } (\alpha_n)$ donc $\sigma(d^{n-1}_{B/A}(x) \otimes \pi_{n-1}d^{n-1}_{C/A}(y)) = \pi_n d^n_{C/A}(j(x)y) - j(x)\pi_n d^n_{C/A}(y)$.

La suite voulue est exacte si et seulement si la suite duale

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_C(\Omega^n_{C/B}, M) \xrightarrow{\tau^*} \text{Hom}_C(\text{coker } \alpha_n, M) \xrightarrow{\sigma^*} \text{Hom}_C(\Omega^{n-1}_{B/A} \otimes_B \text{coker } \alpha_{n-1}, M)$$

est exacte pour tout C-module M. Or on a des isomorphismes $\text{Hom}_C(\Omega^n_{C/B}, M) \simeq \text{Der}^{(n)}_B(C, M)$, $\text{Hom}_C(\text{coker } \alpha_n, M) \simeq \text{Der}^{(n)}_A(C, M) \cap \ker j^*$ et

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_C(\Omega^{n-1}_{B/A} \otimes_B \text{coker } \alpha_{n-1}, M) &\simeq \text{Hom}_B(\Omega^{n-1}_{B/A}, \text{Hom}_C(\text{coker } \alpha_{n-1}, M)) \\
&\simeq \text{Hom}_B(\Omega^{n-1}_{B/A}, \text{Der}^{(n-1)}_A(C, M) \cap \ker j^*) \\
&\simeq \text{Der}^{(n-1)}_A(B, \text{Der}^{(n-1)}_A(C, M) \cap \ker j^*)
\end{aligned}$$

le dernier isomorphisme identifie $f \in \mathrm{Hom}_C(\Omega^{n-1}_{B/A} \otimes_B \mathrm{coker}\ \alpha_{n-1}, M)$ avec la A-dérivation $x \longmapsto (y \mapsto f(d^{n-1}_{B/A} \otimes \pi_{n-1} d^{n-1}_{C/A}(y))$.

Sous ces identifications la suite devient

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}^{(n)}_B(C,M) \xrightarrow{\tau_{der}} \mathrm{Der}^{(n)}_A(C,M) \cap \ker j^* \xrightarrow{\sigma_{der}} \mathrm{Der}^{(n-1)}_A(B, \mathrm{Der}^{(n-1)}(C,M) \cap \ker j^*)$$

où τ_{der} est l'inclusion et σ_{der} est définie par $\sigma_{der}(D)(x) = [D, j(x)]$ pour tous $D \in \mathrm{Der}^{(n)}_A(C,M) \cap \ker j^*$ et $x \in B$. L'injectivité de τ_{der} est immédiate. Fixons $D \in \mathrm{Der}^{(n)}_A(C,M) \cap \ker j^*$, $\sigma_{der}(D) = 0$ si et seulement si $[D, j(x)] = 0$ pour tout $x \in B$, ce qui équivaut à dire que $D(j(x)y) = j(x)D(y)$ pour tous $x \in B, y \in C$ ou encore que D est B-linéaire. D'où l'égalité $\ker \sigma_{der} = \mathrm{Der}^{(n)}_A(C,M)$ et s'en suit l'exactitude de la suite. $\square$

Supposons maintenant que $C = B/J$ où $J \subset B$ est un idéal et que j est la surjection canonique. Puisque $d^n_{B/A}$ est une A-dérivation d'ordre n, on vérifie que $d^n_{B/A}(x_0 \cdots x_n) \otimes 1 = 0$ dans $\Omega^n_{B/A} \otimes_B C$ pour tous $x_0, \cdots, x_n \in J$, ce qui permet de définir l'application B-linéaire

$$\begin{array}{rcl} \delta_n : J/J^{n+1} & \longrightarrow & \Omega^n_{B/A} \otimes_B C \\ x + J^{n+1} & \longmapsto & d^n_{B/A}(x) \otimes 1 \end{array}$$

Proposition 6. *Si $C = B/J$, alors la suite de C-modules*

$$0 \longrightarrow \langle \mathrm{Im}\ \delta_n \rangle_C \xrightarrow{\iota} \Omega^n_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha_n} \Omega^n_{C/A} \longrightarrow 0$$

est exacte, où $\langle \mathrm{Im}\ \delta_n \rangle_C$ est le sous-C-module de $\Omega^n_{B/A} \otimes_B C$ engendré par $\mathrm{Im}\ \delta_n$ *et ι est le morphisme d'inclusion.*

Démonstration. L'injectivité de ι est triviale. Soit M un C-module, la suite

$$\langle \mathrm{Im}\ \delta_n \rangle_C \xrightarrow{\iota} \Omega^n_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha_n} \Omega^n_{C/A} \longrightarrow 0$$

en induit une autre

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega^n_{C/A}, M) \xrightarrow{\alpha_n^*} \mathrm{Hom}_C(\Omega^n_{B/A} \otimes_B C, M) \xrightarrow{\iota^*} \mathrm{Hom}_C(\langle im \delta_n \rangle_C, M)$$

Or $\mathrm{Hom}_C(\Omega^n_{C/A}, M) \simeq \mathrm{Der}^{(n)}_A(C,M)$ et $\mathrm{Hom}_C(\Omega^n_{B/A} \otimes_B C, M) \simeq \mathrm{Hom}_B(\Omega^n_{B/A}, M) \simeq \mathrm{Der}^{(n)}_A(B,M)$, ce qui donne la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}^{(n)}_A(C,M) \xrightarrow{\alpha_{der}} \mathrm{Der}^{(n)}_A(B,M) \xrightarrow{\iota_{der}} \mathrm{Hom}_C(\langle im \delta_n \rangle_C, M)$$

où α_{der} et ι_{der} sont définies par $\alpha_{der}(d) = d \circ j$ et $\iota_{der}(D) : d_{B/A}(x) \otimes c \longmapsto cD(x)$, pour toutes dérivations $d \in \mathrm{Der}^{(n)}_A(C,M), D \in \mathrm{Der}^{(n)}_A(B,M)$.

α_{der} est injective car j est surjective, et $\iota_{der}\alpha_{der}(d) = 0$ pour tout $d \in \mathrm{Der}^{(n)}_A(C,M)$. Si $D \in \ker \iota_{der}$ alors $D_{|J} = 0$ donc D se factorise : il existe $d : C = B/J \longrightarrow M$ telle que $D = d \circ j$. Comme D est une A-dérivation d'ordre n, il en va de même pour d. On a montré l'exactitude de la dernière suite de morphismes, l'exactitude des autres en découle. $\square$

Remarque Si $n = 1$ alors J/J^2 est un C-module isomorphe à $\langle \mathrm{Im}\ \delta_1 \rangle$, ainsi on vient de montrer que dans le théorème 2 la suite de C-modules (2) est exacte.

Proposition 7. *Soient $i : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, $T \subset B$ est une partie multiplicative et M un $T^{-1}B$-module. Toute A-dérivation $d : B \longrightarrow M$ d'ordre n s'étend de manière unique en une A-dérivation $d_T : T^{-1}B \longrightarrow M$, cette dérivation est définie par*

$$d_T\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} t^k d(t^{n-k}x)$$

Démonstration. On montre ce résultat par récurrence sur $n \geq 1$. Le cas $n = 1$ a déjà été traité dans le lemme 2, on suppose qu'on a montré le résultat pour les dérivations d'ordre $n-1$.

Montrons d'abord l'unicité de d_T. Si d_T existe alors pour tous $t \in T, x \in B$ on doit avoir $[d_T, \frac{t}{1}](\frac{x}{1}) = d_T(\frac{xt}{1}) - \frac{x}{1}d_T(\frac{t}{1}) - \frac{t}{1}d_T(\frac{x}{1}) = [d,t](x)$, ainsi $[d_T, \frac{t}{1}]$ est une A-dérivation d'ordre $n-1$ qui prolonge $[d,t]$ et par unicité $[d_T, \frac{t}{1}] = [d,t]_T$. On doit donc avoir

$$\begin{aligned}
d_T\left(\frac{x}{t}\right) =& \frac{1}{t}d(x) - \frac{x}{t^2}d(t) - \frac{1}{t}[d,t]_T\left(\frac{x}{t}\right) \\
=& \frac{1}{t}d(x) - \frac{x}{t^2}d(t) + \frac{(-1)^n}{t^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}t^k[d,t](t^{n-1-k}x) \\
=& \frac{(-1)^n}{t^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}t^k d(t^{n-k}x) + \frac{(-1)^n}{t^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}t^{k+1}d(t^{n-1-k}x) \\
&+ (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\right)\frac{x}{t^2}d(t) + \frac{1}{t}d(x) - \frac{x}{t^2}d(t) \\
=& \frac{(-1)^n}{t^{n+1}}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)t^k d(t^{n-k}x) + \frac{(-1)^n}{t^{n+1}}d(t) + \frac{n+1}{t}d(x) \\
=& \frac{(-1)^n}{t^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k}t^k d(t^{n-k}x)
\end{aligned}$$

D'où l'unicité de d_T. Maintenant on montre que d_T est bien définie. On remarque, en utilisant le lemme 4 que si $x, s, v \in B$ alors

$$\begin{aligned}
v^{n+1}&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k}s^k d(s^{n-k}x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k}(vs)^k d((vs)^{n-k}vx) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k}(vs)^k[d, v^{n-k+1}](s^{n-k}x) + s^n x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k}v^k d(v^{n-k+1}) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi si on prend $s, t \in T$ et $x, y \in B$ tels que $utx = usy$, on a

$$\begin{aligned}
(-1)^n(us)^{n+1}t^{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k}s^k d(s^{n-k}x) &= (-1)^n s^{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k}(uts)^k d((uts)^{n-k}utx) \\
&= (-1)^n s^{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k}(uts)^k d((uts)^{n-k}usy) \\
&= (-1)^n(us)^{n+1}s^{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k}t^k d(t^{n-k}y)
\end{aligned}$$

Donc d_T est bien définie. Il est clair que d_T est A-linéaire. Maintenant on vérifie que pour tous $x, y \in B, t \in T$ on a

$$\left[d_T, \frac{y}{1}\right]\left(\frac{x}{t}\right) - [d,y]_T\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{(-1)^n}{s}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}y^r[d,y](s^{n-k}x) = 0$$

car $[d,y]$ est une A-dérivation d'ordre $n-1$ (on utilise aussi le lemme 4). On vient de montrer que $[d_T, \frac{y}{1}] = [d,y]_T$ pour tout $y \in B$. Or par hypothèse de récurrence $[d,y]_T$ est une A-dérivation d'ordre $n-1$. En remarquant que

$$\left[d_T, \frac{x}{t}\right] = \frac{1}{t}\left[d_T, \frac{x}{1}\right] - \frac{x}{t^2}\left[d_T, \frac{t}{1}\right] - \frac{1}{t}\left[\left[d_T, \frac{t}{1}\right], \frac{x}{t}\right] = \frac{1}{t}[d,x]_T - \frac{x}{t^2}[d,t]_T - \frac{1}{t}\left[[d,t]_T, \frac{x}{t}\right]$$

on peut finalement dire que d_T est une A-dérivation d'ordre n. $\square$

Théorème 6. *Soit $i : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux et T une partie multiplicative de B. En notant $S = i^{-1}(T)$ on a des isomorphismes*

$$T^{-1}\Omega^n_{B/A} \simeq \Omega^n_{T^{-1}B/S^{-1}A} \simeq \Omega^n_{T^{-1}B/A}$$

Démonstration. Considérons la A-dérivation d'ordre n

$$\begin{array}{rcl} d = (d^n_{B/A})_T : T^{-1}B & \longrightarrow & T^{-1}\Omega^1_{B/A} \\ \dfrac{x}{t} & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{s^{n+1}} \sum\limits_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{n+1}{k} t^k d^n_{B/A}(t^{n-k}x) \end{array}$$

Notons que Im d engendre $T^{-1}\Omega^n_{B/A}$ en tant que $T^{-1}B$ module car Im $d^n_{B/A}$ engendre le B-module $\Omega^n_{B/A}$.

Soit $D : T^{-1}B \longrightarrow M$ une A-dérivation, en composant avec le morphisme $j : B \longrightarrow T^{-1}B$ on obtient la A-dérivation $D \circ j : B \longrightarrow M$. Il existe une application B-linéaire $\varphi : \Omega^n_{B/A} \longrightarrow M$ telle que $D \circ j = \varphi \circ d^n_{B/A}$. On peut étendre φ en une application $T^{-1}B$-linéaire $\varphi_T : T^{-1}\Omega^n_{B/A} \longrightarrow M$. Comme $\varphi_T \circ d$ est une A-dérivation qui prolonge $D \circ j$, en effet

$$\varphi_T d\left(\frac{x}{1}\right) = \varphi d^n_{B/A}(x) = D\left(\frac{x}{1}\right)$$

pour tout $x \in B$, on conclut d'après le lemme précédent que $\varphi_T \circ d = D$. Si on a une autre application $T^{-1}B$-linéaire $\rho : T^{-1}\Omega^n_{B/A} \longrightarrow M$ telle que $\rho \circ d = D = \varphi_T \circ d$ alors $\rho = \varphi_T$ car Im d engendre $T^{-1}\Omega^n_{B/A}$. D'où le premier isomorphisme $T^{-1}\Omega^n_{B/A} \simeq \Omega^n_{T^{-1}B/A}$.

Pour l'autre isomorphisme il suffit de montrer que $\mathrm{Der}^{(n)}_A(T^{-1}B, M) = \mathrm{Der}^{(n)}_{S^{-1}A}(T^{-1}B, M)$ pour tout $T^{-1}B$-module M. L'inclusion $\mathrm{Der}^{(n)}_{S^{-1}A}(T^{-1}B, M) \subset \mathrm{Der}^{(n)}_A(T^{-1}B, M)$ est triviale. Réciproquement si $D : T^{-1}B \longrightarrow M$ est une A-dérivation d'ordre n alors $D \circ j : B \longrightarrow M$ est aussi une A-dérivation d'ordre n, où on note encore $j : B \longrightarrow T^{-1}B$ le morphisme canonique. D'après le lemme précédent on doit avoir $(D \circ j)_T = D$ et donc

$$D\left(\frac{ax}{st}\right) = \frac{(-1)^n}{(st)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} (st)^k (D \circ j)((st)^{n-k}ax) = \frac{a}{s} D\left(\frac{x}{t}\right)$$

pour tous $a \in A, x \in B, s \in S, t \in T$.

$\square$

Proposition 8. *Si A' et B sont des A-algèbres et si $B' = B \otimes_A A'$, on a un isomorphisme*

$$\Omega^n_{B/A} \otimes B' \simeq \Omega^n_{B'/A'}$$

Démonstration. Les applications

$$\begin{array}{rcl} \Omega^n_{B/A} \times B' & \longrightarrow & \Omega^n_{B'/A'} \\ (d_{B/A}(x), u) & \longmapsto & u d_{B'/A'}(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} B \times A' & \longrightarrow & \Omega^n_{B/A} \otimes_B B' \\ (x, a) & \longmapsto & d_{B/A}(x) \otimes (1 \otimes a) \end{array}$$

induisent respectivement une application B'-linéaire $\varphi : \Omega^n_{B/A} \otimes_B B' \longrightarrow \Omega^n_{B'/A'}$ et une A'-dérivation $d : B' \longrightarrow \Omega^n_{B/A} \otimes_B B'$. Par définition de $\Omega^n_{B'/A'}$ la A'-dérivation d induit une application B'-linéaire $\psi : \Omega^n_{B'/A'} \longrightarrow \Omega^n_{B/A} \otimes_B B'$. Il est facile de voir que $\varphi = \psi^{-1}$. $\square$

Proposition 9. *Si $A \longrightarrow B$ est la limite d'un système inductif de morphismes d'anneaux $A_i \longrightarrow B_i$ alors* colim $\Omega^n_{B_i/A_i} = \Omega^n_{B/A}$.

Démonstration. D'après la première construction du module des différentielles d'ordre n et la proposition 4 les carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} A_i & \longrightarrow & B_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_j & \longrightarrow & B_j \end{array}$$

induisent des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc} B_i^{(B_i^{n+1})} \oplus B_i^{(B_i \times B_i)} \oplus B_i^{(A_i)} & \longrightarrow & B_i^{(B_i)} & \longrightarrow & \Omega^n_{B_i/A_i} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ B_j^{(B_j^{n+1})} \oplus B_j^{(B_j \times B_j)} \oplus B_j^{(A_j)} & \longrightarrow & B_j^{(B_j)} & \longrightarrow & \Omega^n_{B_j/A_j} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les suites horizontales sont exactes. En passant à la colimite on obtient la suite exacte

$$B^{(B^{n+1})} \oplus B^{(B \times B)} \oplus B^{(A)} \longrightarrow B^{(B)} \longrightarrow \operatorname{colim} \Omega^n_{B_i/A_i} \longrightarrow 0$$

et par conséquent $\Omega^n_{B/A}$ est isomorphe à colim $\Omega^n_{B_i/A_i}$. $\square$

Remarque Ces deux derniers résultats terminent la preuve de la proposition 2.

2.3 L'exemple des anneaux de polynômes

On définit la relation d'ordre (partielle) sur $\mathbb{Z}^s$ suivante :

$$\alpha \leq \beta \iff \forall j \in \{1, \cdots, s\}, \alpha_j \leq \beta_j$$

On convient que si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^s$ sont des multi-indices, tels que $\beta \leq \alpha$, et si $x = (x_1, \cdots, x_s) \in A^s$ alors

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{s} \alpha_k \quad ; \quad \binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^{s} \binom{\alpha_k}{\beta_k} \quad ; \quad x^\alpha = \prod_{j=1}^{s} x_k^{\alpha_k}$$

Dans cette partie le but sera d'étudier le module $\Omega^n_{A/k}$ dans le cas où k est un anneau et $A = k[X] = k[X_1, \cdots, X_s]$ (ici $X = (X_1, \cdots, X_s)$). Pour simplifier les notations on notera $d = d^n_{A/k}$.

Si $f \in A$ on peut écrire $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s} a_\alpha X^\alpha$ avec $a_\alpha \in k$. Dans $A[T] = A[T_1, \cdots, T_s]$ on a

$$\begin{aligned} f(X+T) &= \sum_\alpha a_\alpha (X+T)^\alpha = \sum_\alpha a_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} X^{\alpha - \beta} T^\beta \\ &= \sum_\beta \left(\sum_{\alpha \geq \beta} a_\alpha \binom{\alpha}{\beta} X^{\alpha-\beta} \right) T^\beta \end{aligned}$$

On notera $\frac{1}{\beta!}\frac{\partial^\beta f}{\partial X^\beta} = \sum_{\alpha \geq \beta} a_\alpha \binom{\alpha}{\beta} X^{\alpha - \beta}$ si bien que l'égalité précédente se réécrit

$$f(X+T) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha} T^\alpha$$

En particulier $\frac{1}{0!}\frac{\partial^0 f}{\partial X^0} = f$.

$A[T] = k[X, T]$ est un A-module libre, la base canonique est formée des monômes X^α et T^α pour $\alpha \in \mathbb{N}^s$. On a un isomorphisme de A-algèbres

$$\begin{array}{rcl} \Phi : k[X] \otimes_k k[X] & \longrightarrow & k[X, T] \\ X_j \otimes 1 & \longmapsto & X_j \\ 1 \otimes X_j & \longmapsto & X_j + T_j \end{array}$$

En particulier ce morphisme envoie $1 \otimes f - f \otimes 1$ sur $f(X+T) - f(X)$, or on a vu dans la preuve de la proposition 3 que $I_{A/k}$ est l'idéal engendré par les éléments de la forme $1 \otimes f - f \otimes 1$, $f \in A$. Comme $\Phi(f) = f(X+T) - f(X) = \sum\limits_{|\alpha| \geq 1} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha} T^\alpha$ on a $1 \otimes f - f \otimes 1 = \sum\limits_{|\alpha|\geq 1} \frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha}(1 \otimes X - X \otimes 1)^\alpha$ où $\frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha}$ est identifié à son image par Φ^{-1}. Ainsi la famille $((1 \otimes X - X \otimes 1)^\alpha)_{|\alpha|\geq 1} = (\Phi(X^\alpha))_{|\alpha| \geq 1}$ est libre et engendre $I_{A/k}$, c'est donc une base du A-module $I_{A/k}$. Il suit qu'une base du A-module $I_{A/k}^{n+1}$ est $((1 \otimes X - X \otimes 1)^\alpha)_{|\alpha| \geq n+1}$ et on en déduit le résultat suivant :

Proposition 10. *$\Omega^n_{A/k} = I_{A/k}/I^{n+1}_{A/k}$ est un A-module libre de dimension $\binom{n+s}{s} - 1$. En notant $d(X) = (d(X_1), \cdots, d(X_s))$, la famille $(d(x)^\alpha)_{1 \leq |\alpha| \leq n}$ en est une base et*

$$d(f) = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha} (d(x))^\alpha$$

pour tout $f \in A$.

Pour finir on va montrer que pour $\alpha \in \mathbb{N}^s$ avec $|\alpha| \geq 1$, l'application $\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial}{\partial X^\alpha} : k[X] \longrightarrow k[X]$ est une k-dérivation d'ordre $|\alpha|$. Pour commencer notons que cette application est clairement k-linéaire. Si $f, g \in k[X]$ alors

$$f(X+T)g(X+T) = \left(\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha} T^\alpha\right)\left(\sum_\beta \frac{1}{\beta!}\frac{\partial^\beta g}{\partial X^\beta} T^\beta\right) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha}\frac{1}{\beta!}\frac{\partial^\beta g}{\partial X^\beta} T^{\alpha+\beta}$$

Si $\gamma \in \mathbb{N}^r$ vérifie $|\gamma| = 1$ alors $\alpha + \beta = \gamma$ si et seulement si $\alpha = \gamma$ ou bien $\beta = \gamma$. Ainsi en identifiant le coefficient devant T^γ on aboutit à l'égalité

$$\frac{1}{\gamma!}\frac{\partial^\gamma (fg)}{\partial X^\gamma} = f \frac{1}{\gamma!}\frac{\partial^\gamma g}{\partial X^\gamma} + g \frac{1}{\gamma!}\frac{\partial^\gamma f}{\partial X^\gamma}$$

ce qui signifie que $\frac{1}{\gamma!}\frac{\partial^\gamma}{\partial X^\gamma}$ est une A-dérivation d'ordre $1 = |\gamma|$.

Soit $f \in k[X]$, on fixe j un entier compris entre 1 et s et on pose $g = X_j f$, on a

$$g(X+T) = (X_j + T_j) f(X+T) = \sum X_j \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha} T^\alpha + \sum \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha} T_k T^\alpha$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}^s$ alors en identifiant le coefficient devant T^α dans l'égalité ci-dessus, on obtient

$$\frac{\partial^\alpha (X_k f)}{\partial X^\alpha} = \begin{cases} X_j \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha} + \frac{1}{(\alpha - e_j)!}\frac{\partial^{\alpha - e_j} f}{\partial X^{\alpha - e_j}} & \text{si } \alpha \geq e_j \\ X_j \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha} & \text{sinon} \end{cases} \tag{4}$$

où $e_j \in \mathbb{N}^s$ est le multi-indice dont le j-ème coefficient vaut 1 et tous les autres sont nuls.

D'après la formule du binôme de Newton on a

$$(X+T)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} X^{\alpha - \beta} T^\beta$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{\beta!}\frac{\partial^\beta X^\alpha}{\partial X^\beta} = \binom{\alpha}{\beta} X^{\alpha - \beta}$$

avec la convention usuelle que $\binom{\alpha}{\beta} = 0$ pour tout $\beta \not\leq \alpha$ (ie s'il existe un ℓ tel que $\alpha_\ell < \beta_\ell$). En particulier, si $\alpha \in \mathbb{N}^s \setminus \{0, e_j\}$ alors $\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha X_j}{\partial X^\alpha} = 0$. Ainsi en utilisant l'égalité (4) on vérifie que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^s \setminus \{0, e_j\}$ on a

$$\left[\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial X^\alpha}, X_j\right] = \frac{1}{(\alpha - e_j)!}\frac{\partial^{\alpha - e_j}}{\partial X^{\alpha - e_j}}.$$

Pour avoir une égalité similaire qui reste vraie même lorsque $|\alpha| = 1$ ou plus généralement lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}^s$, on introduit des applications k-linéaires δ_α $(\alpha \in \mathbb{Z}^s)$ définies par

$$\delta_\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha!}\dfrac{\partial^\alpha}{\partial X^\alpha} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}^s \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi l'égalité (4) devient

$$[\delta_\alpha, X_j] = \delta_{\alpha - e_j}, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^s$$

On fixe $\alpha \in \mathbb{Z}^s$, on va maintenant montrer par récurrence sur $|\beta| \geq 1$ que

$$[\delta_\alpha, X^\beta] = \sum_{\gamma \neq \beta} \binom{\beta}{\gamma} X^\gamma \delta_{\alpha+\gamma-\beta} = \sum_{\substack{0 \leq \gamma \leq \beta \\ \gamma \neq \beta}} \binom{\beta}{\gamma} X^\gamma \delta_{\alpha+\gamma-\beta}$$

Le cas $|\beta| = 1$ a déjà été traité. On suppose $|\beta| > 1$ et on écrit $\beta = \beta' + \beta''$ avec $|\beta''| = 1$, par récurrence on obtient

$$\begin{aligned}
[\delta_\alpha, X^\beta] =& [[\delta_\alpha, X^{\beta'}], X^{\beta''}] + X^{\beta'}[\delta_\alpha, X^{\beta''}] + X^{\beta''}[\delta_\alpha, X^{\beta'}] \\
=& \sum_{\gamma \neq \beta'} \binom{\beta'}{\gamma} X^\gamma [\delta_{\alpha+\gamma-\beta'}, X^{\beta''}] + X^{\beta'}\delta_{\alpha-\beta''} + X^{\beta''} \sum_{\gamma \neq \beta'} \binom{\beta'}{\gamma} X^\gamma \delta_{\alpha+\gamma-\beta'} \\
=& \sum_{\substack{\gamma \geq \beta'' \\ \gamma \neq \beta}} \left(\binom{\beta'}{\gamma} + \binom{\beta'}{\gamma - \beta''} \right) X^\gamma \delta_{\alpha+\gamma-\beta} + \sum_{\substack{\gamma \ngeq \beta'' \\ \gamma \neq \beta}} \binom{\beta'}{\gamma} X^\gamma \delta_{\alpha+\gamma-\beta} \\
=& \sum_{\gamma \neq \beta} \binom{\beta}{\gamma} X^\gamma \delta_{\alpha+\gamma-\beta}
\end{aligned}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{Z}^s$, si $\alpha = 0$ ou $\alpha \ngeq 0$ (ie un des α_j est strictement négatif) alors $\delta_\alpha = 0$ est une A-dérivation de tout ordre. Si $|\alpha| = 1$ on a déjà vu que δ_α est une A-dérivation d'ordre 1. Si $|\alpha| > 1$ alors, par récurrence, la relation précédente nous permet de dire que $[\delta_\alpha, f]$ est une combinaison ($k[X]$-)linéaire de dérivations d'ordres strictement inférieurs à $|\alpha|$, et ce pour tout $f \in k[X]$, donc δ_α est une k-dérivation d'ordre $|\alpha|$.

Remarque Par définition des $\delta_\alpha$et d'après la proposition la famille $(\delta_\alpha)_{1 \leq |\alpha| \leq n}$ forme une base de $\Omega^n_{A/k}$, et

$$d(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^r} \delta_\alpha(f)(d(x))^\alpha = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq n} \delta_\alpha(f)(d(x))^\alpha$$

pour tout $f \in A$, car $\delta_\alpha = 0$ si $\alpha \leq 0$ et $(d(x))^\alpha = 0$ si $|\alpha| > 0$ $(\alpha \in \mathbb{N}^s)$.

On définit un ordre total sur $\mathbb{N}^s$ par la relation

$$\alpha \preceq \beta \iff \begin{cases} |\alpha| < |\beta| \\ \text{ou } \alpha = \beta \\ \text{ou } |\alpha| = |\beta| \text{ et il existe un } j \in \{1, \cdots, s-1\} \text{ tel que } \beta_j < \alpha_j \text{ et } \alpha_i = \beta_i \text{ si } 1 \leq i \leq j-1 \end{cases}$$

Par exemple pour $s = 3$ on a

$$(0,0,0) \preceq (1,0,0) \preceq (0,1,0) \preceq (0,0,1) \preceq (2,0,0) \preceq (1,1,0) \preceq (1,0,1) \preceq (0,2,0) \preceq \cdots$$

C'est avec cette ordre qu'on ordonnera la base $((d(X))^\alpha)_{1 \leq |\alpha| \leq n}$ de $\Omega^n_{A/k}$. Remarquons que si $\beta \leq \alpha$ alors $\beta \preceq \alpha$; par contraposée si $\alpha \prec \beta$ alors $\beta \nleq \alpha$ et donc $\binom{\alpha}{\beta} = 0$. La matrice $M = (\delta_\beta(X^\alpha))_{1 \leq |\alpha|, |\beta| \leq n} = \left(\binom{\alpha}{\beta} X^{\alpha-\beta}\right)_{1 \leq |\alpha|, |\beta| \leq n}$ est donc triangulaire et sa diagonale n'est composée que de 1, ainsi $\det M = 1$ et M est inversible. Or on a vu que $d(X^\alpha) = \sum_{1 \leq |\beta| \leq n} \delta_\beta(X^\alpha) d(X)^\beta$ donc

$$M(d(X)^\beta)_{1 \leq |\beta| \leq n} = (d(X^\alpha))_{1 \leq |\alpha| \leq n}$$

et par conséquent $(d(X^\alpha))_{1 \leq |\alpha| \leq n}$ est une A-base de $\Omega^n_{A/k}$.

3 Faisceau des formes différentielles

Dans cette section le but sera de généraliser les notions de dérivation et de forme différentielle aux faisceaux. Dans un premier temps on définit ces notions pour un espace topologique X quelconque et ensuite on se concentrera sur le cas des schémas. Dans tout ce qui suit X désignera un espace topologique.

Définition 4. *Soit $\theta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un morphisme de faisceaux d'anneaux et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{B}$-modules. Une $\mathcal{A}$-dérivation d'ordre n de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{F}$ est un morphisme de faisceaux de $\mathcal{A}$-modules (pour la structure de $\mathcal{A}$-module induite par θ) $d : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{F}$ tel que pour tout ouvert U de X l'application $d_U : \mathcal{B}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ soit une $\mathcal{A}(U)$-dérivation d'ordre n (pour le morphisme θ_U). On note $\mathrm{Der}^{(n)}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ l'ensemble des $\mathcal{A}$-dérivations d'ordre n de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{F}$.*

De manière analogue au cas des anneaux on devrait plutôt parler de θ-dérivation. On remarque que, de part les propriétés faisceautiques de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$, pour vérifier qu'un morphisme de $\mathcal{A}$-module $d : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{F}$ est une $\mathcal{A}$-dérivation d'ordre n, il suffit de vérifier que d_U est une $\mathcal{A}(U)$-dérivation d'ordre n pour des ouverts U formant base d'ouverts de X. On peut même dire un peu mieux avec ce lemme :

Lemme 5. *Soit $\theta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un morphisme de faisceaux d'anneaux et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{B}$-modules. L'ensemble $\mathrm{Der}^{(n)}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ coïncide avec l'ensemble des morphismes de faisceaux d'ensembles $d : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{F}$ tels que $d_x : \mathcal{B}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x$ soit une $\mathcal{A}_x$-dérivation d'ordre n pour tout $x \in X$ (pour le morphisme θ_x).*

L'ensemble $\mathrm{Der}^{(n)}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ est un sous-faisceau de $\mathcal{B}$-modules de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$. Dans ce qui suit on va montrer que le foncteur $\mathrm{Der}^{(n)}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, \cdot)$ est représentable.

Soit $\theta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un morphisme de faisceaux d'anneaux sur X. Pour tout ouvert U on a un morphisme d'anneaux $\theta_U : \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{B}(U)$, donc $\mathcal{B}(U)$ est une $\mathcal{A}(U)$-algèbre, ce qui permet de définir $\Omega^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)}$. Lorsque l'on prend deux ouverts $V \subset U$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(U) \arrow[r, "\theta_U"] \arrow[d, "\alpha_{VU}"'] & \mathcal{B}(U) \arrow[d, "\beta_{VU}"] \\ \mathcal{A}(V) \arrow[r, "\theta_V"] & \mathcal{B}(V) \end{tikzcd}$$

D'après la proposition 4 il existe une unique application $\mathcal{B}(U)$-linéaire $\rho_{VU} : \Omega^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)} \longrightarrow \Omega^n_{\mathcal{B}(V)/\mathcal{A}(V)}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(U) \arrow[r, "d_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)}"] \arrow[d, "\beta_{VU}"'] & \Omega^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)} \arrow[d, "\rho_{VU}"] \\ \mathcal{B}(V) \arrow[r, "d_{\mathcal{B}(V)/\mathcal{A}(V)}"] & \Omega^n_{\mathcal{B}(V)/\mathcal{A}(V)} \end{tikzcd}$$

Il est clair que ρ_{UU} est l'identité ; si $W \subset V \subset U$ sont trois ouverts de X alors :

$$\begin{aligned} (\rho_{WV} \circ \rho_{VU}) \circ d^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)} &= \rho_{WV} \circ d^n_{\mathcal{B}(V)/\mathcal{A}(V)} \circ \beta_{VU} = d^n_{\mathcal{B}(W)/\mathcal{A}(W)} \circ \beta_{WV} \circ \beta_{VU} \\ &= d^n_{\mathcal{B}(W)/\mathcal{A}(W)} \circ \beta_{WU} = \rho_{WU} \circ d^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)} \end{aligned}$$

Ainsi $\rho_{WU} = \rho_{WV} \circ \rho_{VU}$. De tout ça on tire que l'application $U \longmapsto \Omega^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)}$ définit un préfaisceau de $\mathcal{B}$-modules. Aussi, le diagramme précédent indique que les dérivations $d^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)}$ définissent un morphisme de préfaisceaux.

Définition 5. *Soit X un espace topologique et $\theta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un morphisme de faisceaux d'anneaux sur X. Le faisceau des formes différentielles d'ordre n de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{A}$ est le faisceau de $\mathcal{B}$-modules associé au préfaisceau $U \longmapsto \Omega^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)}$; on le note $\Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$. On munit ce faisceau de la $\mathcal{A}$-dérivation d'ordre n, notée $d^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$, induite par les $d^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)}$.*

Pour être clair $(d_{\mathcal{B}/\mathcal{A}})^n_U : \mathcal{B}(U) \longrightarrow \Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(U)$ est obtenue par composition de $d^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)}$ et de l'inclusion naturelle $\iota_U : \Omega^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)} \hookrightarrow \Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(U)$. Par construction $d_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$ est une $\mathcal{A}$-dérivation d'ordre n.

Soit $\theta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un morphisme de faisceaux d'anneaux sur X. Pour tout faisceau de $\mathcal{B}$-module $\mathcal{F}$ et toute $\mathcal{A}$-dérivation d'ordre n $D : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{F}$ il existe un unique morphisme de faisceaux de $\mathcal{B}$-modules $\varphi : \Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{F}$ tel que $\varphi \circ d^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = D$.

Démonstration. Si $\varphi \circ d^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = \psi \circ d^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$ avec $\varphi, \psi : \Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{F}$ alors pour tout ouvert U on a $\varphi_U \circ \iota_U \circ d^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)} = \psi_U \circ \iota_U \circ d^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)}$ et donc $\varphi_U \circ \iota_U = \psi_U \circ \iota_U$, d'où $\varphi \circ \iota = \psi \circ \iota$. Comme $\Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \longmapsto \Omega^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)}$ on a nécessairement $\varphi = \psi$, d'où l'unicité.

Pour l'existence considérons $D : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{F}$ une $\mathcal{A}$-dérivation d'ordre n. Pour tout ouvert U il existe une unique application $\mathcal{B}(U)$-linéaire $\psi_U : \mathcal{B}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ telle que $D_U = \psi_U \circ d^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)}$. On vérifie, grâce à l'unicité des ψ_U, que $\psi = (\psi_U)$ est un morphisme de préfaisceaux. Il existe un morphisme de faisceaux de $\mathcal{B}$-modules tel que $\varphi = \psi \circ \iota$, on a donc $\varphi_U \circ (d^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}})_U = \psi_U \circ \iota_U \circ (d^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}})_U = \psi_U \circ d^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)} = D_U$ pour tout ouvert U, d'où l'égalité $\varphi \circ d^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = D$. $\square$

Corollaire 6. *Si $\theta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux, alors pour tout faisceau de $\mathcal{B}$-modules $\mathcal{F}$ l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathrm{Der}^{(n)}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, \mathcal{F}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ d^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \end{array}$$

est un isomorphisme de faisceaux de $\mathcal{B}$-modules.

D'après la première construction de $\Omega^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)}$, pour tout ouvert U on a une suite exacte

$$\mathcal{B}(U)^{(\mathcal{B}(U)^{n+1})} \oplus \mathcal{B}(U)^{(\mathcal{B}(U)\times\mathcal{B}(U))} \oplus \mathcal{B}(U)^{(\mathcal{A}(U))} \longrightarrow \mathcal{B}(U)^{(\mathcal{B}(U))} \longrightarrow \Omega^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)} \longrightarrow 0$$

Les morphismes de restrictions sont compatibles avec cette suite exacte, c'est-à-dire que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(U)^{(\mathcal{B}(U)^{n+1})} \oplus \mathcal{B}(U)^{(\mathcal{B}(U)\times\mathcal{B}(U))} \oplus \mathcal{B}(U)^{(\mathcal{A}(U))} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}(U)^{(\mathcal{B}(U))} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^n_{\mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \mathcal{B}(V)^{(\mathcal{B}(V)^{n+1})} \oplus \mathcal{B}(V)^{(\mathcal{B}(V)\times\mathcal{B}(V))} \oplus \mathcal{B}(V)^{(\mathcal{A}(V))} \arrow[r] & \mathcal{B}(V)^{(\mathcal{B}(V))} \arrow[r] & \Omega^n_{\mathcal{B}(V)/\mathcal{A}(V)} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commute pour tous ouverts $V \subset U$. Ainsi on obtient des morphismes de préfaisceaux qui induisent des morphismes sur les faisceaux associés. D'où le résultat suivant.

Proposition 11. *Soit $\theta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un morphisme de faisceaux d'anneaux sur X. On a une suite exacte naturelle*

$$\mathcal{B}^{(\mathcal{B}^{n+1})} \oplus \mathcal{B}^{(\mathcal{B}\times\mathcal{B})} \oplus \mathcal{B}^{(\mathcal{A})} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{B}^{(\mathcal{B})} \longrightarrow \Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \longrightarrow 0$$

Autrement dit $\Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$ est le conoyau de l'application Ψ.

Corollaire 7. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques et $\theta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ un morphisme de faisceaux d'anneaux sur Y. On a une identification canonique*

$$f^{-1}\Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \simeq \Omega^n_{f^{-1}\mathcal{B}/f^{-1}\mathcal{A}}$$

et sous cette identification $d^n_{f^{-1}\mathcal{B}/f^{-1}\mathcal{A}} = f^{-1}d^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$.

En particulier si $x \in X = Y$, en considérant l'injection $\{x\} \longrightarrow X$ on obtient l'isomorphisme canonique

$$\left(\Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}\right)_x \simeq \Omega^n_{\mathcal{B}_x/\mathcal{A}_x}$$

Démonstration. Le foncteur f^{-1} est exact donc la suite

$$\mathcal{B}^{(\mathcal{B}^{n+1})} \oplus \mathcal{B}^{(\mathcal{B}\times\mathcal{B})} \oplus \mathcal{B}^{(\mathcal{A})} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{B}^{(\mathcal{B})} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$f^{-1}\left(\mathcal{B}^{(\mathcal{B}^{n+1})} \oplus \mathcal{B}^{(\mathcal{B}\times\mathcal{B})} \oplus \mathcal{B}^{(\mathcal{A})}\right) \xrightarrow{f^{-1}\Psi} f^{-1}\left(\mathcal{B}^{(\mathcal{B})}\right) \longrightarrow f^{-1}\Omega^1_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \longrightarrow 0$$

Sous les identifications

$$f^{-1}\left(\mathcal{B}^{(\mathcal{B}^{n+1})} \ \oplus\ \mathcal{B}^{(\mathcal{B}\times\mathcal{B})} \ \oplus\ \mathcal{B}^{(\mathcal{A})}\right) = (f^{-1}\mathcal{B})^{(f^{-1}\mathcal{B}^{n+1})} \ \oplus\ (f^{-1}\mathcal{B})^{(f^{-1}\mathcal{B}\times f^{-1}\mathcal{B})} \ \oplus (f^{-1}\mathcal{B})^{(f^{-1}\mathcal{A})}$$

et

$$f^{-1}\left(\mathcal{B}^{(\mathcal{B})}\right) = (f^{-1}\mathcal{B})^{(f^{-1}\mathcal{B})}$$

on remarque que $f^{-1}\Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$ et $\Omega^n_{f^{-1}\mathcal{B}/f^{-1}\mathcal{A}}$ sont conoyaux de la même application, donc sont canoniquement isomorphes. D'où le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& \Omega^n_{f^{-1}\mathcal{B}/f^{-1}\mathcal{A}} \arrow[dd] \\
f^{-1}\left(\mathcal{B}^{(\mathcal{B})}\right) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& f^{-1}\left(\Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}\right)
\end{tikzcd}$$

et en composant avec l'inclusion $f^{-1}\mathcal{B} \longrightarrow f^{-1}\left(\mathcal{B}^{(\mathcal{B})}\right)$ on aboutit au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& & \Omega^n_{f^{-1}\mathcal{B}/f^{-1}\mathcal{A}} \arrow[dd] \\
f^{-1}\mathcal{B} \arrow[r] \arrow[urr, "d^n_{f^{-1}\mathcal{B}/f^{-1}\mathcal{A}}"] \arrow[drr, "f^{-1}d^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}"'] & f^{-1}\left(\mathcal{B}^{(\mathcal{B})}\right) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & f^{-1}\left(\Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}\right)
\end{tikzcd}$$

□

Avec une preuve similaire on a un autre corollaire.

Corollaire 8. *Soit $\theta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ un morphisme de faisceaux d'anneaux sur X. Pour tout ouvert U on a une identification canonique* $\left(\left(\Omega^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}\right)_{|U}, (d^n_{\mathcal{B}/\mathcal{A}})_{|U}\right) \simeq \left(\Omega^n_{\mathcal{B}_{|U}/\mathcal{A}_{|U}}, d^n_{\mathcal{B}_{|U}/\mathcal{A}_{|U}}\right)$.

Définition 6. *Soit $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme d'espace annelés.*

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules, une Y-dérivation d'ordre n de $\mathcal{O}_X$ sur $\mathcal{F}$ est est une $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-dérivation, c'est-à-dire une dérivation pour le morphisme $f^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow f^{-1}f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$. On note $\mathrm{Der}_Y^{(n)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ *le faisceau (de $\mathcal{O}_X$-modules) des Y-dérivations d'ordre n de $\mathcal{O}_X$ sur $\mathcal{F}$.*

Le faisceau des formes différentielles de X sur Y est le faisceau $\Omega^n_{X/Y} := \Omega^n_{\mathcal{O}_X/f^{-1}\mathcal{O}_Y}$ munit de la dérivation $d^n_{X/Y} := d_{\mathcal{O}_X/f^{-1}\mathcal{O}_Y}$.

Théorème 7. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. Si $U \subset X$ et $V \subset Y$ sont des ouverts affines tels que $f(U) \subset V$ alors il existe un isomorphisme de $\mathcal{O}_U$-modules $(\Omega^n_{X/Y})_{|U} \simeq \widetilde{\Omega^n}_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)}$ compatible avec les dérivations.*

En particulier $\Omega^n_{X/Y}$ est un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules. Pour prouver ce théorème on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 6. *Soit $f : X = \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow Y = \mathrm{Spec}(A)$ un morphisme de schémas affines et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules. On a une bijection*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Der}^{(n)}_Y(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathrm{Der}^{(n)}_A(B, \mathcal{F}(X)) \\ d & \longmapsto & d_X \end{array}$$

Démonstration. Dans un premier remarquons que Y est un ouvert contenant $f(X)$ et donc on a un morphisme $A = \mathcal{O}_Y(Y) \longrightarrow f^{-1}\mathcal{O}_Y(X)$. Une $f^{-1}\mathcal{O}_Y(X)$-dérivation d'ordre n de B sur $\mathcal{F}(X)$ est donc aussi une A-dérivation d'ordre n. En fait, la composition $A \longrightarrow f^{-1}\mathcal{O}_Y(X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) = B$ n'est rien d'autre que le morphisme $f^\#_Y$.

Soient $d, d' \in \mathrm{Der}^{(n)}_Y(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ telles que $d_X = d'_X$. Pour montrer que $d = d'$ il suffit de vérifier que $d_{D(x)} = d'_{D(x)}$ pour tout $x \in B$, ce qui est bien le cas car :

$$\begin{aligned} (-1)^n x^{(n+1)k} d_{D(x)}\left(\frac{a}{x^k}\right) &= \left(\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+1}{r} x^{rk} d_X(x^{k(n-r)}a)\right)_{|D(x)} \\ &= \left(\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+1}{r} x^{rk} d'_X(x^{k(n-r)}a)\right)_{|D(x)} \\ &= (-1)^n x^{(n+1)k} d'_{D(x)}\left(\frac{a}{x^k}\right) \end{aligned}$$

pour tout $\frac{a}{x^k} \in B_x$.

Réciproquement si $\delta \in \mathrm{Der}_A(B, M)$ (ie δ est une $f^\#_Y$-dérivation), alors pour tout $x \in B$ il existe une unique A-dérivation $B_x \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ qui prolonge δ et en composant avec le morphisme de restriction on obtient une A-dérivation $d_{D(x)} : B_x \longrightarrow \mathcal{F}(D(x))$. Si $D(x) \subset D(y)$ on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} B_y \arrow[rr, "d_{D(y)}"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathcal{F}(D(y)) \arrow[dd] \\ & \mathcal{F}(X) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ B_x \arrow[ur] \arrow[rr, "d_{D(x)}"] & & \mathcal{F}(D(x)) \end{tikzcd}$$

sur lequel tous les triangles sont commutatifs par unicité des prolongements de δ, et donc ce diagramme commute. De ce fait, les $d_{D(x)}$ induisent un morphisme morphisme de faisceaux de groupes abéliens $d : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{F}$.

Notons $\theta : f^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$. Comme X et Y sont affines on a $f(\mathfrak{p}) = (f^\#_Y)^{-1}(\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in Y$, donc le morphisme $\theta_\mathfrak{p} : (f^{-1}\mathcal{O}_Y)_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_{Y,f(\mathfrak{p})} = A_\mathfrak{p} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = B_\mathfrak{p}$ est en fait le morphisme induit par $f^\#_Y$ par localisation. On vérifie que $d_\mathfrak{p}$ coïncide avec la dérivation $B_\mathfrak{p} \longrightarrow \mathcal{F}_\mathfrak{p}$ induite par δ, ce qui fait de d une $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-dérivation telle que $d_X = \delta$. □

Démonstration. On a $\left(f^{-1}\mathcal{O}_Y\right)_{|V} = f^{-1}_{|U}\mathcal{O}_V$ donc $(\Omega^n_{X/Y})_{|U} = (\Omega^n_{\mathcal{O}_X/f^{-1}\mathcal{O}_Y})_{|U}$ s'identifie à $\Omega^n_{U/V} = \Omega^n_{\mathcal{O}_U/f^{-1}_{|U}\mathcal{O}_V}$ (cf. Corollaire 8). On va montrer que $\Omega^n_{U/V}$ est isomorphe à $\widetilde{\Omega^n}_{B/A}$, où $B = \mathcal{O}_X(U)$ et $A = \mathcal{O}_Y(V)$. Comme

U et V sont affines, on a des bijections

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_B(B,\mathcal{F}(X)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U,\mathcal{F}) \\ u & \longmapsto & \widetilde{u} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{Der}_A(B,\mathcal{F}(X)) & \longmapsto & \mathrm{Der}_Y(\mathcal{O}_U,\mathcal{F}) \\ d & \longmapsto & \widetilde{d} \end{array}$$

Soient $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_U$-modules et $d : \mathcal{O}_U \longrightarrow \mathcal{F}$ une V-dérivation. Par propriété universelle de $\Omega^n_{B/A}$ il existe une unique application A-linéaire $\varphi : B \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ telle que $\varphi \circ d_{B/A} = d_U$. On a $d = \widetilde{\varphi \circ d_{B/A}}$, or $(\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{d}_{B/A})_U = \widetilde{\varphi}_U \circ (\widetilde{d}_{B/A})_U = \varphi \circ d_{B/A} = d_U$ donc $d = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{d}_{B/A}$. Si $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U,\mathcal{F})$ vérifie aussi $d = \theta \circ \widetilde{d}_{B/A}$ alors on a $\theta_U \circ d_{B/A} = d_U$, donc $\theta_U = \varphi$ et par conséquent $\widetilde{\varphi} = \theta$. On a montré que $\widetilde{\Omega^n}_{B/A}$ munit de la dérivation $\widetilde{d}_{B/A}$ vérifie la même propriété universelle que $\Omega^1_{U/V}$, ce qui termine la preuve.

□

Théorème 8. *Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas, $\Delta : X \longrightarrow X \times_Y X$ le morphisme diagonale et $p, q : X \times_Y X \longrightarrow X$ les projections respectivement sur le premier et le second facteur. On note W le plus grand ouvert de $X \times_Y X$ contenant $\Delta(X)$ et $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux quasi-cohérent définissant $\Delta(X)$ comme un sous-schéma fermé de W. Alors*

$$\Omega^n_{X/Y} \simeq \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^{n+1})$$

Démonstration. $\mathcal{I}$ est un faisceau quasi-cohérent sur W donc il en va de même pour $\mathcal{I}^{n+1}$ et $\mathcal{I}/\mathcal{I}^{n+1}$, ainsi $\Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^{n+1})$ est un faisceau quasi-cohérent sur X. Soient $U \subset X$ et $V \subset Y$ des ouverts affines tels que $f(U) \subset V$, on note $B = \mathcal{O}_X(U)$ et $A = \mathcal{O}_Y(V)$. $U \times_V U$ est alors un ouvert affine contenant $\Delta(U)$ et isomorphe à $\mathrm{Spec}(B \otimes_A B)$, et sous cette identification le morphismes $\Delta^{\#}_{U \times_V U}$ devient

$$\begin{array}{rcl} B \otimes_A B & \longrightarrow & B \\ x \otimes y & \longmapsto & xy \end{array}$$

D'après la deuxième construction de $\Omega^n_{B/A}$, on a un isomorphisme $\Omega^n_{B/A} \simeq \mathcal{I}(U \times_V U)/\mathcal{I}(U \times_V U)^2 \simeq (\mathcal{I}/\mathcal{I}^{n+1})(U \times_V U)$ (le second isomorphisme est dû au fait que $\mathcal{I}$ est quasi-cohérent). Finalement

$$\Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^{n+1})_{|U} = (\mathcal{I}/\mathcal{I}^{n+1}(U \times_V U) \otimes_{\mathcal{O}_W(U \times_V U)} \mathcal{O}_X(U))^{\sim} \simeq (\Omega^n_{B/A} \otimes_{B \otimes_A B} B)^{\sim} \simeq \widetilde{\Omega^n}_{B/A} \simeq \Omega^n_{U/V} \simeq (\Omega^n_{X/Y})_{|U}$$

□

La propriété suivante résulte des propriétés montrées auparavant dans le cas des anneaux.

Proposition 12. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas.*

1. *Si Y' est un Y-schéma et $X' = X \times_Y Y'$ alors*
$$\Omega^n_{X/Y} \simeq (p')^* \Omega^n_{X'/Y'}$$
avec $p' : X' \longrightarrow X$ la projection sur le premier facteur.
2. *Si X' est un autre Y-schéma alors on a un isomorphisme*
$$\Omega^1_{X \times_Y X'} \simeq p^* \Omega^1 X/Y \oplus (p')^* \Omega^1_{X'/Y}$$
où p est la projection sur X et p' est la projection sur X'.
3. *Si Y est un Z-schéma alors on a une suite exacte*
$$f^* \Omega^1_{Y/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0$$
4. *Si Z est un sous-schéma fermé de X et $\mathcal{J}$ est le faisceau d'idéaux quasi-cohérent définissant Z, on a une suite exacte*
$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \longrightarrow \Omega^1_{Z/Y} \longrightarrow 0$$

Exemple Dans [6] (théorème 8.13) on pourra retrouver la preuve du résultat suivant : Si A est un anneau et $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathbf{P}^n_A$ alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow (\mathcal{O}_X(-1))^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

4 Normalité des hypersurfaces

4.1 Quelques rappels d'algèbre commutative

On donne ici quelques définitions et propriétés d'algèbres commutative concernant la normalité des anneaux. Pour plus de détails on pourra notamment consulter [2] , [8] et [12].

Définition 7. *Un élément $x \in B$ est dit entier sur A s'il existe un polynôme unitaire $P \in A[X]$ tel que $P(x) = 0$. Si tous les éléments de B sont entiers sur A on dit que la A-algèbre B est finie.*

On peut caractériser les éléments entiers de la manière suivante :

Proposition 13. *Soit $x \in B$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *x est entier sur A*
2. *Il existe $x_1, \cdots, x_r \in B$ tels que $A[x] = \sum Ax_i$*
3. *Il existe un $A[x]$-module fidèle (ie le morphisme $A[b] \longrightarrow \mathrm{End}(M)$ est injectif).*

Démonstration. [2], chap. V, théorème 1 □

On peut montrer que l'ensemble des éléments entiers de B sur A est une sous-algèbre de A (cf. [2] chap.V Corollaire 1 de la proposition 4). Cet anneau s'appelle la fermeture intégrale de A dans B. Lorsque A est intègre et $B = K(A)$ est le corps des fractions de A, la fermeture intégrale de A dans $K(A)$ est appelé la clôture intégrale de A, on la note souvent $\overline{A}$.

Définition 8. *On dit qu'un anneau A est normal (ou intégralement clos) s'il est intègre et est égal à sa clôture intégrale ($\overline{A} = A$).*

Par exemple $\mathbb{Z}$ est intégralement clos, plus généralement tout anneau principal intégralement clos (cf. [2] chap. 5 proposition 10). Un exemple d'anneau non intégralement clos est $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ car $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \backslash \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ vérifie $\varphi^2 = \varphi + 1$. On peut également vérifier que si A est normal alors $A[X]$ et $A[[X]]$ sont intégralement clos (cf. [2] chap. V corollaire 3 de la proposition 13).

Proposition 14. *Soit A un anneau intègre et S une partie multiplicative ne contenant pas 0. On a $\overline{S^{-1}A} = S^{-1}\overline{A}$.*

En particulier si A est normal alors $S^{-1}A$ est normal.

Démonstration. [2], chap. V, proposition 16 et son corollaire 1. □

Théorème 9. *Soit A un anneau intègre. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est normal*
2. *$S^{-1}A$ est normal pour toute partie multiplicative $S \subset A$ ne contenant pas 0*
3. *$A_\mathfrak{p}$ est normal pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$*
4. *$A_\mathfrak{m}$ est normal pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$*

Démonstration. [2], chap. V, corollaire 3 de la proposition 16. □

Définition 9. *Un anneau local $(A, \mathfrak{m})$ est dit régulier si $\dim_{Krull}(A) = \dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.*

Un anneau A est dit régulier s'il est noethérien et si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ l'anneau local $A_\mathfrak{p}$ est régulier.

Proposition 15. *Un anneau régulier est normal.*

Si A est un anneau normal et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de hauteur 1 alors $A_\mathfrak{p}$ est un anneau local régulier, et

$$A = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \\ \mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1}} A_\mathfrak{p}$$

Démonstration. [8], théorèmes 11.5 (et 11.2) et 19.4. □

Définition 10. *Soit M un A-module. Un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ est dit associé à M s'il existe un $m \in M$ tel que $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(m) = \{a \in A : am = 0, \forall m \in M\}$.*

On peut montrer que si M est un A-module non nul sur un anneau noethérien, alors il existe toujours un idéal associé à M.

Proposition 16. *Soient k un corps, $A = k[X_1, \cdots, X_s]$, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, $f \in A$ irréductible et $R = (B/(f))_{\mathfrak{p}/(f)}$. On note $\mathfrak{c} = \{r \in R : r\overline{R} \subset R\}$, $Q \subset R$ un idéal associé à $\mathfrak{c}$ et $(\mathfrak{c} : Q) = \{h \in R : hQ \subset \mathfrak{c}\}$. Alors R_Q n'est pas normal et il existe un $g \in (\mathfrak{c} : Q)\overline{R} \setminus \mathfrak{R}_{\mathfrak{Q}}$.*

Démonstration. [1], lemme 4.5. □

4.2 Matrice Jacobienne et critère de Jacobi

On reprend les même notations que dans la partie 2.3, on fixe $J = (f_1, \cdots, f_r)$ un idéal de $A = k[X_1, \cdots, X_s]$ et on pose $B = A/J$. D'après la proposition 6 on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{D} \longrightarrow \Omega^n_{A/k} \otimes_A B \longrightarrow \Omega^n_{B/k} \longrightarrow 0$$

où $\mathfrak{D}$ est le B-module engendré par l'image de l'application canonique $J/J^{n+1} \longrightarrow \Omega^n_{A/k} \otimes_A B$. On va en donner une description. Pour tout i compris entre 1 et r et tout $\beta \in \mathbb{N}^s$ on note

$$F^{(i)}_\beta = (d(x))^\beta d(f_i) \in \Omega^n_{A/k}$$

En utilisant le fait que $(d(X))^\alpha = 0$ si $|\alpha| > n$ ($\alpha \in \mathbb{N}^s$) et que $\delta_\gamma(f) = \frac{1}{\gamma!}\frac{\partial^\gamma f}{\partial X^\gamma}$ si $\alpha \in \mathbb{N}^s$ et $\delta_\gamma = 0$ sinon, on obtient

$$F^{(i)}_\beta = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \delta_\alpha(f_i)(d(X))^{\alpha+\beta} = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq n} \delta_{\alpha-\beta}(f_i)(d(X))^\alpha = \sum_{\substack{1 \leq |\alpha| \leq n \\ \beta \leq \alpha, \beta \neq \alpha}} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha}(d(X))^\alpha$$

Il est bon de noter que $F^{(i)}_0 = \sum\limits_{1 \leq |\alpha| \leq n} \delta_\alpha(f_i)(d(X))^\alpha = d(f_i)$ et que $F^{(i)}_\beta$ dès que $|\beta| \geq n$, ainsi la famille qui va nous intéresser est $(F^{(i)}_\beta)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 0 \leq |\beta| \leq n-1}}$ qui est de cardinal $r\binom{n-1+s}{s}$.

Proposition 17. *$\mathfrak{D}$ est le B-module engendré par les $F^{(i)}_\beta$, où i parcourt $\{1, \cdots, r\}$ et $\beta \in \mathbb{N}^s$ vérifie $0 \leq |\beta| \leq n-1$.*

Démonstration. On va d'abord montrer que l'image du morphisme $J/J^{n+1} \longrightarrow \Omega^n_{A/k} \otimes_A B$ coïncide avec l'ensemble $E = \left\{\sum\limits_{i=1}^r d(g_i)d(f_i) \otimes 1 + d(f_i) \otimes \overline{g_i} : g_1, \cdots, g_r \in A\right\}$, où on a noté $\overline{g} = g + J \in B/J$. En remarquant que $(1 \otimes (fg) - (fg) \otimes 1) = (1 \otimes f - f \otimes 1)(1 \otimes g - g \otimes 1) + f(1 \otimes g - g \otimes 1) + g(1 \otimes f - f \otimes 1)$ on aboutit à l'égalité

$$d(fg) = d(f)d(g) + fd(g) + gd(f)$$

pour tous $f, g \in A$. Soit $\omega \in \Omega^n_{A/k} \otimes_A B$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\omega \in \mathrm{Im}\ (J/J^{n+1} \longrightarrow \Omega^n_{A/k}) &\iff \exists g_1, \cdots, g_r \in A, \omega = \sum_{i=1}^r d(f_i g_i) \otimes 1 \\
&\iff \exists g_1, \cdots, g_r \in A, \omega = \sum_{i=1}^r d(f_i)d(g_i) \otimes 1 + (g_i d(f_i)) \otimes 1 + (f_i d(g_i)) \otimes 1 \\
&\iff \exists g_1, \cdots, g_r \in A, \omega = \sum_{i=1}^r d(f_i)d(g_i) \otimes 1 + d(f_i) \otimes \overline{g_i}
\end{aligned}$$

car $\overline{f_i} = 0$, d'où l'égalité souhaité.

Or si $g \in A$ on a

$$d(g)d(f_i) = \sum_{1\leq|\alpha|\leq n} \delta_\alpha(g)d(X)^\alpha d(f_i) = \sum_{1\leq|\alpha|<n} \delta_\alpha(g)d(X)^\alpha d(f_i) = \sum_{1\leq|\alpha|<n} \delta_\alpha(g)F_\alpha^{(i)}$$

puisque $(1\otimes X - X\otimes 1)^\alpha(1\otimes f_i - f_i \otimes 1) \in I_{A/k}^{n+1}$ dès lors que $|\alpha| = n$. Donc :

$$d(g)d(f_i)\otimes 1 + d(f_i)\otimes \overline{g} = \sum_{1\leq|\alpha|<n} \overline{\delta_\alpha(g)}\cdot(F_\alpha^{(i)}\otimes 1) + \overline{g}\cdot(F_0^i\otimes 1)$$

On a montré que $\mathfrak{O} \subset \langle (F_\beta^{(i)})_{\substack{1\leq i\leq r\\ 0\leq|\beta|\leq n-1}} \rangle_B$. Réciproquement on a vu que la famille $(d(X^\alpha))_{1\leq|\alpha|\leq n}$ est une A-base de $\Omega_{A/k}^n$, on écrit alors $d(X)^\beta = \sum_{1\leq|\alpha|\leq n} g_{\alpha,\beta}d(X^\alpha)$ et alors

$$F_\beta^{(i)}\otimes 1 = d(f_i)(d(X))^\beta = \sum_{1\leq|\alpha|\leq n} \overline{g}_{\alpha,\beta}\cdot\left(d(X^\alpha)d(f_i)\otimes 1 + d(f_i)\otimes\overline{X^\alpha} - \overline{X^\alpha}\cdot d(f_i)\otimes 1\right)$$

Comme $d(X^\alpha)d(f_i)\otimes 1 + d(f_i)\otimes \overline{X^\alpha}$ et $d(f_i)\otimes 1$ sont dans l'image du morphisme $J/J^{n+1} \longrightarrow \Omega_{A/k}^n \otimes_A B$ on conclut que $F_\beta^{(i)} \in \mathfrak{O}$, ce qui termine la preuve. $\square$

Ce résultat combiné avec la suite exacte précédente et le fait que $((d(X))^\alpha)_{1\leq|\alpha|\leq n}$ forme une base de $\Omega_{A/k}^n$ nous donne des isomorphismes de B-modules

$$\Omega_{B/k}^n \simeq \left(\Omega_{A/k}^n\otimes_A B\right)\Big/ \sum_{\substack{1\leq i\leq r\\ 0\leq|\beta|\leq n-1}} B\cdot(F_\beta^{(i)}\otimes 1) \simeq \bigoplus_{1\leq|\alpha|\leq n} B\cdot(d(X))^\alpha \Big/ \sum_{\substack{1\leq i\leq r\\ 0\leq|\beta|\leq n-1}} B\cdot F_\beta^{(i)}$$

Définition 11. *On pose $M = \binom{n-1+s}{s}$ et $N = \binom{n+s}{s} - 1$ et on ordonne $\mathbb{N}^s$ avec le même ordre total qu'à la fin de la partie 2.3.*

On note $\mathrm{Jac}_n(f_i) = (\delta_{\alpha-\beta}(f_i))_{\substack{1\leq|\alpha|\leq n\\ 0\leq|\beta|\leq n}} \in \mathcal{M}_{M,N}(A)$ la matrice dont les lignes sont les $F_\beta^{(i)}$ vus comme des éléments de A^N par le choix de la base $((d(X))^\alpha)_{1\leq|\alpha|\leq n}$.

On pose

$$\mathrm{Jac}_n(f_1,\cdots,f_r) = \begin{pmatrix}\mathrm{Jac}_n(f_1)\\ \vdots \\ \mathrm{Jac}_n(f_r)\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{rM,N}(A)$$

Cette matrice est appelée la matrice Jacobienne d'ordre n de $f_1,\cdots,f_r$.

Remarque Si l'on identifie $\Omega_{A/k}^n\otimes_A B$ avec B^N et que l'on regarde $\tau = {}^t\,\mathrm{Jac}_n(f_1,\cdots,f_r)$ comme une application B-linéaire de B^{rM} dans B^n, alors l'image de cette application est engendrée par les $F_\beta^{(i)}$. On obtient ainsi une présentation de $\Omega_{B/k}^n$.

$$B^{rM} \xrightarrow{\tau} B^N \longrightarrow \Omega_{B/k}^n \longrightarrow 0$$

Remarque On suppose ici que $r = 1$ et que $f = f_1$. Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^s$, on note $e_j \in \mathbb{N}^s$ le multi-indice dont le j-ème coefficient vaut 1 ($1 \leq j \leq s$). Si $\alpha = \beta + e_j$ alors $\delta_{\alpha-\beta}(f) = \delta_{e_j}(f) = \frac{\partial f}{\partial X_j}$. En particulier si $\beta = (0,\cdots,0,\ell-1)$ ($1\leq \ell\leq n$) et $|\alpha| = \ell$ alors ou bien $\alpha = \beta + e_j$ pour un certain j, et dans ce cas $\delta_{\alpha-\beta}(f) = \frac{\partial f}{\partial X_j}$, sinon $\beta \not\leq \alpha$ et donc $\delta_{\alpha-\beta}(f) = 0$.

On affirme que si $\alpha \prec \beta + e_1$ alors $\delta_{\alpha-\beta}(f) = 0$. En effet l'hypothèse implique que $\beta + e_1 \not\leq \alpha$, on est donc dans l'un des deux cas suivant : soit $\beta_i > \alpha_i$ pour un $i \neq 1$, soit $\beta_1 + 1 > \alpha_1$. Si $\beta_i > \alpha_i$ avec $i \neq 1$

alors $\delta_{\alpha-\beta}(f) = 0$. On suppose désormais que $\alpha_i = \beta_i$ si $i \neq 1$, et donc $\beta_1 + 1 > \alpha_1$, ie $\beta_1 \leq \alpha_1$. Il n'est donc pas possible que $|\alpha| = |\beta + e_1| = |\beta| + 1$. Or par hypothèse $\alpha \prec \beta + e_1$, par conséquent $|\alpha| < |\beta| + 1$ et il suit que $\alpha \leq \beta$ et que $\delta_{\alpha-\beta}(f) = 0$.

On a ainsi montré que la matrice $\mathrm{Jac}_n(f)$ est échelonnée et a pour pivot $\frac{\partial f}{\partial X_1}$.

Exemples Si $n = 1$ on a

$$\mathrm{Jac}_1(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq s}}$$

Pour illustrer on peut prendre $f = x^3 - y^2 \ \in k[X,Y]$, pour $n = 1, 2$ on obtient les matrices

$$\begin{pmatrix} 3X^2 & -2Y \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 3X^2 & -2Y & 3X & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3X^2 & -2Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3X^2 & -2Y \end{pmatrix}$$

Le résultat concernant la normalité que l'on va montrer s'appuie essentiellement sur le critère de Jacobi :

Théorème 10. *Soient k un corps parfait $J = (f_1, \cdots, f_r)$ un idéal de $A = k[X_1, \cdots, X_s]$ et $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ deux idéaux premier tels que $J \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ est minimal parmi les idéaux premiers compris entre J et $\mathfrak{p}$. On pose $B = A/J$ et $R = B_{\mathfrak{p}/J}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La matrice* $\mathrm{Jac}_1(f_1, \cdots, f_r) \mod \mathfrak{p} \in \mathcal{M}_{r,s}(B/\mathfrak{p})$ *est de rang* $\mathrm{ht}(\mathfrak{q})$
2. *R est un anneau local régulier*
3. *$\Omega^1_{R/k}$ est un R-module libre de rang $r - \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$*

Démonstration. [8], théorème 30.3 et la remarque qui le suit. □

On suppose désormais, et jusqu'à la fin de ce mémoire, que k est un corps parfait, $A = k[X_1, \cdots, X_r]$, $f \in A$ est irréductible, $B = A/(f)$, $\mathfrak{p}$ est un idéal premier contenant f et $R = B_{\mathfrak{p}/(f)}$. Dans ce cadre le critère de Jacobi s'énonce de la sorte :

Corollaire 9. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La matrice* $\mathrm{Jac}_1(f) \mod \mathfrak{p}$ *est de rang* 1
2. *R est un anneau local régulier*
3. *$\Omega^1_{R/k}$ est un R-module libre de rang $r - 1$*

L'équivalence entre les deux premiers poins se généralise pour la matrice Jacobienne d'ordre n.

Proposition 18 (Critère de Jacobi d'ordre n)**.** *R est un anneau local régulier si et seulement si le rang de la matrice* $\mathrm{Jac}_n(f) \mod \mathfrak{p}$ *vaut M.*

Démonstration. Si R est un anneau local régulier alors $\mathrm{Jac}_1(f) \mod \mathfrak{p}$ est de rang 1 par le critère de Jacobi, on peut donc supposer sans perte que $\frac{\partial f}{\partial X_1} \notin \mathfrak{p}$. Or on a vu dans la remarque précédente que $\mathrm{Jac}_n(f)$ a est échelonnée et a pour pivot $\frac{\partial f}{\partial X_1}$. Il suit que le rang de $\mathrm{Jac}_n(f) \mod \mathfrak{p}$ vaut M.

Supposons que $\mathrm{Jac}_n(f) \mod \mathfrak{p}$ est de rang M. Soit $\beta = (0, \cdots, n-1)$, on a $F_\beta = \sum_{1\leq|\alpha|\leq n} \delta_{\alpha-\beta}(f)(d(X))^\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_j}(d(X))^{\beta+e_j}$. Ainsi, la dernière ligne de $\mathrm{Jac}_n(f)$ contient un élément qui n'appartient pas à $\mathfrak{p}$. On choisit un indice $1 \leq i \leq r$ tel que $\frac{\partial f}{\partial X_i} \notin \mathfrak{p}$ et par le critère de Jacobi on conclut que R est un anneau local régulier. □

Pour finir on a ce lemme :

Lemme 7. *Les F_β sont A-linéairement indépendants.*

Démonstration. Comme f est irréductible l'une de ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial X_j}$ est non nulle, sans perte on suppose que $j = 1$. La matrice $\mathrm{Jac}_n(f)$ étant échelonnée de pivot $\frac{\partial f}{\partial X_1}$ elle est donc de rang M. Or les lignes de cette matrice sont les F_β, par conséquent les F_β sont A-linéairement indépendants. □

4.3 Lien entre la normalité de R et la torsion de $\Omega^1_{R/k}$

Soulignons qu'on a des isomorphismes de R-modules canoniques (on rappel que $R = B_{\mathfrak{p}/(f)} = (A[X_1, \cdots, X_s]/(f))_{\mathfrak{p}/(f)}$)

$$\begin{aligned}\Omega^n_{R/k} \simeq & \Omega^n_{B/k} \otimes_B R \simeq \left[\left(\Omega^n_{A/k} \otimes_A B \right) \Big/ \sum_{0 \le |\beta| \le n-1} B \cdot (F_\beta \otimes 1) \right] \otimes_B R \\ & \simeq \left(\Omega^n_{A/k} \otimes_A R \right) \Big/ \sum_{0 \le |\beta| \le n-1} R \cdot (F_\beta \otimes 1)\end{aligned}$$

Si $\sum_{1\le|\alpha|\le n} (d(X))^\alpha \otimes a_\alpha \in \Omega^n_{A/k} \otimes_A R$ on notera $\left[\sum_{1\le|\alpha|\le n} (d(X))^\alpha \otimes a_\alpha \right]$ sa classe d'équivalence dans $\Omega^n_{R/k}$.

Mentionnons également que si K désigne le corps des fractions de B alors $\Omega^n_{A/k} \otimes_A B$ s'injecte dans $\Omega^n_{A/k} \otimes K$ car $\Omega^n_{A/k}$ est un A-module libre.

La preuve du résultat suivant est due à Barajas et Duarte ([1], 4.3).

Théorème 11. *Soient k un corps parfait, $A = k[X_1, \cdots, X_s]$, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et $f \in \mathfrak{p}$ supposé irréductible. On pose $B = A/(f)$ et $R = B_{\mathfrak{p}/(f)}$.*

R est normal si et seulement si $(\Omega^n_{R/k})_{\mathrm{tors}} = 0$

Démonstration. On suppose d'abord que R est normal. Soit $\omega = \left[\sum_{1\le|\alpha|\le n} (d(X))^\alpha \otimes a_\alpha \right] \in (\Omega^n_{R/k})_{\mathrm{tors}}$ et $h \in R \setminus \{0\}$ tel que $h\omega = 0$. Il existe des $b_\beta \in R$ $(0 \le |\beta| \le n-1)$ tels que

$$h \cdot \sum_{1\le|\alpha|\le n} (d(X))^\alpha \otimes a_\alpha = \sum_{0\le|\beta|\le n-1} F_\beta \otimes b_\beta$$

Comme R est normal, on rappel que $R = \bigcap_{\substack{Q \in \mathrm{Spec}(R) \\ \mathrm{ht}(Q)=1}} R_Q$. On va montrer que pour tout idéal premier $Q \subset R$ de hauteur 1 on a $\frac{b_\beta}{h} \in R_Q$, ainsi on aura montré que $\frac{b_\beta}{h} \in R$ et que $\sum_{1\le|\alpha|\le n} (d(X))^\alpha \otimes a_\alpha = \sum_{0\le|\beta|\le n-1} F_\beta \otimes \frac{b_\beta}{h}$, donc $\omega = 0$.

Prenons donc $Q \subset R$ un idéal premier de hauteur 1. On a $F_\beta \otimes b_\beta = \sum_{1\le|\alpha|\le n} (d(X))^\alpha \otimes (\delta_{\alpha-\beta}(f) b_\beta)$, or les $(d(X))^\alpha \otimes 1$ $(1 \le |\alpha| \le n)$ forment une R-base de $\Omega^n_{A/k} \otimes_A R$, ce qui nous donne l'égalité dans R

$$\sum_{0\le|\beta|\le n-1} \delta_{\alpha-\beta}(f) b_\beta = h a_\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{N}^s, 1 \le |\alpha| \le n$$

ce que l'on peut réécrire

$${}^t\mathrm{Jac}_n(f)(b_\beta)_{0\le|\beta|\le n-1} = (h a_\alpha)_{1\le|\alpha|\le n}$$

où on identifie $\mathrm{Jac}_n(f)$ avec la matrice de $\mathcal{M}_{M,N}(R)$ qu'elle induit.

Q est un idéal premier de $R = B_{\mathfrak{p}/(\mathfrak{f})} = (A/(f))_{\mathfrak{p}/(f)}$, il existe donc un idéal $\mathfrak{q} \subset A$ compris entre (f) et $\mathfrak{p}$ tel que $R_Q = B_{\mathfrak{q}/(f)}$. De plus R est normal, donc R_Q aussi, et $\mathrm{ht}(Q) = 1$, ainsi $R_Q = B_{\mathfrak{q}/(f)}$ est un anneau local régulier. Par le critère de Jacobi d'ordre n, on sait que $\mathrm{Jac}_n(f) \mod \mathfrak{q}$ est de rang M. Par conséquent il existe une sous-matrice L de $\mathrm{Jac}_n(f)$ de taille M telle que $\det(L) \notin \mathfrak{q}$. L est donc inversible dans $A_\mathfrak{q}$ et $L^{-1} = \frac{1}{\det L} U$ où $U \in \mathcal{M}_{M,N}(A)$. Finalement on conclut qu'il existe des $c_\beta \in R$ (obtenus en choisissant les les bon a_α et en leur appliquant ${}^tU$) tels que $\frac{b_\beta}{h} = \frac{c_\beta}{\det L} \in R_Q$ pour tout $\beta \in \mathbb{N}^s, 0 \le |\beta| \le n-1$.

Réciproquement on suppose que R n'est pas normal. On note $\overline{R}$ sa clôture intégrale. On note $\mathfrak{c} = \{r \in R : r\overline{R} \subset R\}$ et on prend $Q \subset R$ un idéal associé à $\mathfrak{c}$ et on note $(\mathfrak{c} : Q) = \{h \in R : hQ \subset \mathfrak{c}\}$.

L'anneau local R_Q n'est pas normal, donc n'est pas régulier. Il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ compris entre (f) et $\mathfrak{p}$ tel que $R_Q = B_{\mathfrak{q}/(f)}$. D'après le critère de Jacobi d'ordre n, la matrice $\mathrm{Jac}_n(f) \mod \mathfrak{q}$ est de rang strictement inférieur à M. Comme A/q est intègre le noyau de ${}^t\mathrm{Jac}_n(f) \mod \mathfrak{q}$ est non trivial. On choisit alors des $(a_\beta)_{0\leq|\beta|\leq n-1} \in A$ tels que ${}^t\mathrm{Jac}_n(f)(a_\beta) \in \mathfrak{q}$ avec $a_{\beta_0} \notin \mathfrak{q}$ pour au certain β_0. Autrement dit pour tout $\beta \in \mathbb{N}^s, 0 \leq |\beta| \leq n-1$:

$$\sum_{1\leq|\alpha|\leq n} a_\beta \delta_{\alpha-\beta}(f) \in \mathfrak{q}$$

On pose $b_\beta = \frac{a_\beta+(f)}{1} \in R$, notons que $b_{\beta_0} \notin Q$ car $a_{\beta_0} \in \mathfrak{q}$. On sait qu'il existe $g \in (\mathfrak{c} : Q)\overline{R}$ tel que $g \notin R_Q$. Remarquons que

$$\begin{aligned} g \sum_{0\leq|\beta|\leq n-1} F_\beta \otimes b_\beta =& g \sum_{0\leq|\beta|\leq n-1} \left(\sum_{1\leq|\alpha|\leq n} \delta_{\alpha-\beta}(f)(d(X))^\alpha \right) \otimes b_\beta \\ =& g \sum_{1\leq|\alpha|\leq n} \left(\sum_{0\leq|\beta|\leq n-1} a_\beta \delta_{\alpha-\beta}(f)(d(X))^\alpha \right) \otimes 1 \in gQ \left(\Omega^n_{A/k} \otimes_A R \right) \end{aligned}$$

Or par construction $gQ \subset \mathfrak{c}\overline{R} \subset R$, donc

$$g \sum_{0\leq|\beta|\leq n-1} F_\beta \otimes b_\beta \in \Omega^n_{A/k} \otimes_A R$$

et comme les $(d(X))^\alpha \otimes 1$ forment une R-base de $\Omega^n_{A/k} \otimes_A R$, on peut écrire

$$g \sum_{0\leq|\beta|\leq n-1} F_\beta \otimes b_\beta = \sum_{1\leq|\alpha|\leq n} (d(X))^\alpha \otimes u_\alpha$$

pour des $u_\alpha \in R$. Si on écrit $g = \frac{k}{h}$ avec $k, h \in R$ et $h \neq 0$ on a donc

$$h \left[\sum_{1\leq|\alpha|\leq n} (d(X))^\alpha \otimes u_\alpha \right] = k \left[\sum_{0\leq|\beta|\leq n-1} F_\beta \otimes b_\beta \right] = 0$$

Par l'absurde supposons que $\left(\Omega^n_{R/k}\right)_{\mathrm{tors}} = 0$. Puisque $h \neq 0$ on a $\left[\sum_{1\leq|\alpha|\leq n} (d(X))^\alpha \otimes u_\alpha \right] = 0$ et on peut choisir des $v_\beta \in R$ tels que

$$\sum_{1\leq|\alpha|\leq n} (d(X))^\alpha \otimes u_\alpha = \sum_{0\leq|\beta|\leq n-1} F_\beta \otimes v_\beta$$

Il en découle l'égalité

$$\sum_{0\leq|\beta|\leq n-1} F_\beta \otimes k b_\beta = \sum_{0\leq|\beta|\leq n-1} F_\beta \otimes h v_\beta$$

On a vu que les F_β sont A-linéairement indépendant, donc les $F_\beta \otimes 1$ sont R-linéairement indépendants. Ainsi on conclut que $kb_\beta = hv_\beta$ pour tout $\beta \in \mathbb{N}^s, 0 \leq |\beta| \leq n-1$. En particulier $g = \frac{k}{h} = \frac{v_{\beta_0}}{b_{\beta_0}} \in R_Q$, ce qui est une contradiction. $\square$

Remerciement Je remercie Julien SEBAG pour les conseils qu'il m'a apporté.

Références

[1] Paul Barajas et Daniel Duarte. "On the module of differentials of order n of hypersurfaces". In : *Journal of Pure and Applied Algebra* (2020).

[2] Nicolas Bourbaki. *Algèbre commutative : Chapitres 5 à 7.* Springer Science & Business Media, 2007.

[3] David Eisenbud. *Commutative Algebra : with a view toward algebraic geometry.* Springer Science & Business Media, 1995.

[4] Alexander Grothendieck et Jean Dieudonné. "EGA IV Études locale des schémas et des morphismes de schémas, Première partie". In : *Publications Mathématiques de l'IHES* (1964).

[5] Alexander Grothendieck et Jean Dieudonné. "EGA IV Études locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie". In : *Publications Mathématiques de l'IHES* (1967).

[6] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* T. 52. Springer Science & Business Media, 1977.

[7] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves.* Oxford University Press on Demand, 2002.

[8] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory.* Cambridge university press, 1989.

[9] Yoshikazu Nakai. "High order derivations. I". In : *Osaka Journal of Mathematics* (1970).

[10] Howard Osborn. "Modules of differentials I". In : *Math. Annalen* (1967).

[11] Frédéric Paulin. "Géométrie différentielle élémentaire". In : *Cours de premiere année de mastere ENS Année* 2007 (2006).

[12] Oscar Zariski et Pierre Samuel. *Commutative algebra : Volume I.* T. 29. Springer Science & Business Media, 1958.