

RAPPORT DE STAGE
M2 MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

Géométrie énumérative et invariants tropicaux raffinés

Gurvan MÉVEL

encadré par Erwan BRUGALLÉ

Mars-Juin 2021

Sommaire

I	Un peu de géométrie algébrique : diviseurs et nombres d'intersections	3
1	Diviseurs	3
1.1	Définition	3
1.2	Diviseur principal et équivalence linéaire	4
1.3	Espace de fonctions et système linéaire d'un diviseur	5
2	Diviseur canonique	7
2.1	Diviseurs localement principaux	7
2.2	r -formes différentielles rationnelles	8
2.3	Classe des diviseurs canoniques	9
2.4	Quelques exemples	11
3	Nombres d'intersections	15
3.1	Définitions	15
3.2	Propriétés	17
3.3	Exemples de calculs et applications	18
4	Polygone, surface torique et formule d'adjonction	19
4.1	Système linéaire d'un polygone	19
4.2	Interprétation de la formule d'adjonction	20
II	Géométrie énumérative et invariants tropicaux raffinés	24
5	Présentation des problèmes considérés	24
5.1	Compter des courbes dans $\mathbb{C}P^2$	24
5.2	Compter des courbes sur X_Δ	26
5.3	Géométrie tropicale et invariants tropicaux raffinés	27
6	Diagrammes en étages et codegré	29
6.1	Diagrammes et marquages	29

6.2	Multiplcités et invariants tropicaux raffinés	32
6.3	Codegré d'un diagramme en étages	33
7	Comportement des coefficients des invariants tropicaux raffinés	36
7.1	Description des diagrammes	36
7.2	Énumération des diagrammes	40
7.3	Énoncé et démonstration du théorème	41

Introduction

La géométrie énumérative est la branche des mathématiques où l'on cherche à compter les objets géométriques vérifiant certaines propriétés. Le premier, et le plus simple, problème énumératif consiste à montrer que par deux points distincts passe une unique droite. Les problèmes énumératifs plus généraux de comptage de courbes passant par certains points sont plus compliqués, et il a fallu attendre la fin du XX^e siècle pour obtenir des progrès significatifs. Aujourd'hui, des liens ont été établis entre ces questions de géométrie algébrique et la géométrie tropicale, porte vers le monde combinatoire. L'étude de ces problèmes a fait apparaître de nouveaux objets et de nouvelles quantités comme les invariants tropicaux raffinés, sujet de ce stage.

Ce mémoire se scinde en deux parties. La première est consacrée à la présentation de notions classiques en géométrie algébrique : diviseurs et nombres d'intersections. Le but est de se familiariser avec ces concepts, avant de les mettre en action dans la quatrième section. Celle-ci introduit la surface torique et le système linéaire qu'on associe à un polygone convexe entier Δ . Elle est nécessaire pour comprendre les problèmes énumératifs posés dans la suite.

La seconde partie commence par une présentation progressive des problèmes énumératifs que l'on considère. On y trouve une formulation des problèmes, certaines des réponses qui ont été apportées, ainsi qu'une reformulation combinatoire via la géométrie tropicale. On y introduit également les invariants tropicaux raffinés. Les deux dernières sections sont consacrées à la démonstration du caractère polynomial des coefficients de petit codegré de ces invariants. Cette démonstration est entièrement combinatoire, et illustre l'utilisation des diagrammes en étages.

En dehors de la compréhension des problèmes posés, les deux parties sont très largement indépendantes. La seconde se base essentiellement sur l'article [BJP20].

Première partie

Un peu de géométrie algébrique : diviseurs et nombres d'intersections

Toutes les variétés considérées seront des variétés algébriques complexes.

1 Diviseurs

Soit X une variété irréductible.

1.1 Définition

Définition 1.1 (Diviseur). Un diviseur sur X est une somme formelle

$$D = \sum_H a_H H$$

portant sur l'ensemble des hypersurfaces irréductibles de X , où $a_H \in \mathbb{Z}$, et telle qu'un nombre fini de a_H soient non nuls.

Avec les notations précédentes, le degré du diviseur D est

$$\deg(D) = \sum_H a_H$$

et son support est

$$\text{supp}(D) = \bigcup_{a_H \neq 0} H.$$

Si pour toute hypersurface irréductible H on a $a_H = 0$, on note $D = 0$.

Si pour toute hypersurface irréductible H on a $a_H \geq 0$, on note $D \geq 0$. Si de plus il existe H telle que $a_H > 0$, on dit que le diviseur D est effectif et on note $D > 0$.

On note $\text{Div}(X)$ l'ensemble des diviseurs sur X . On définit une loi de groupe sur $\text{Div}(X)$ de la façon suivante. Si $D = \sum a_H H$ et $E = \sum b_H H$, on pose

$$D + E = \sum (a_H + b_H) H.$$

Le neutre est le diviseur 0, et on a $-D = \sum (-a_H) H$. De plus, l'application $\deg : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes.

Exemple. Soit $f \in \mathbb{C}[x]$. On peut lui associer un diviseur $\text{div}(f) \in \text{Div}(\mathbb{C})$ de la façon suivante. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les zéros de f , de multiplicités m_1, \dots, m_r . On définit

$$\text{div}(f) = \sum_{i=1}^r m_i \{\alpha_i\} \in \text{Div}(\mathbb{C}).$$

Ainsi, le support de $\text{div}(f)$ est l'ensemble des zéros de f , et chaque zéro apparaît avec sa multiplicité.

Plus généralement si $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ on peut factoriser f sous la forme

$$f = \lambda \prod_{i=1}^r f_i^{m_i}$$

où les f_i sont des polynômes irréductibles. On note \mathcal{C}_i l'hypersurface de \mathbb{C}^n définie par $f_i = 0$. Comme dans le cas $n = 1$, on définit le diviseur de f par

$$\text{div}(f) = \sum_{i=1}^r m_i \mathcal{C}_i \in \text{Div}(\mathbb{C}^n).$$

1.2 Diviseur principal et équivalence linéaire

Soit \mathcal{C} une hypersurface irréductible de X . Soit U un ouvert de X , dans lequel \mathcal{C} est définie par l'équation $g = 0$, où $g \in \mathbb{C}[U]$. Pour $f \in \mathbb{C}[U]$ non nulle, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$f \in \langle g^k \rangle \setminus \langle g^{k+1} \rangle.$$

On note cet entier $v_{\mathcal{C}}(f)$. Il correspond l'ordre de \mathcal{C} comme zéro ou pôle de f , et on peut montrer qu'il ne dépend pas de U (voir [Sha13]).

Soit $\varphi \in \mathbb{C}(X)$ non nulle. Si la fonction φ s'écrit $\varphi = f/g$, avec $f, g \in \mathbb{C}[U]$, on pose

$$v_{\mathcal{C}}(\varphi) = v_{\mathcal{C}}(f) - v_{\mathcal{C}}(g).$$

Ce nombre est non nul pour un nombre fini d'hypersurfaces \mathcal{C} , ce qui autorise à définir le diviseur

$$\text{div}(\varphi) = \sum_{\mathcal{C}} v_{\mathcal{C}}(\varphi) \mathcal{C}.$$

L'entier $v_{\mathcal{C}}(\varphi)$ s'interprète comme la multiplicité de \mathcal{C} en tant que zéro ou pôle de φ .

Exemple. Soit $\varphi \in \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$, et $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tels que $\varphi = f/g$. Alors le diviseur $\text{div}(\varphi)$ de \mathbb{C}^n que l'on construit ainsi est $\text{div}(\varphi) = \text{div}(f) - \text{div}(g)$, où $\text{div}(f)$ et $\text{div}(g)$ sont définis dans l'exemple précédent.

Définition 1.2 (Diviseur principal). Un diviseur de la forme $\text{div}(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathbb{C}(X)$ s'appelle un diviseur principal. On note $\text{PDiv}(X)$ l'ensemble des diviseurs principaux sur X .

Exemple. Prenons $X = \mathbb{C}^n$, et soit $D = \sum k_i \mathcal{C}_i$ un diviseur. Chaque hypersurface \mathcal{C}_i est donnée par une équation $f_i = 0$, où $f_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. En posant $\varphi = \prod f_i^{k_i} \in \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$, on a $\text{div}(\varphi) = D$. Ainsi, tout diviseur de \mathbb{C}^n est principal.

Exemple. Prenons $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, et soit $D = \sum k_i \mathcal{C}_i$ un diviseur. Chaque hypersurface \mathcal{C}_i est donnée par une équation $f_i = 0$, où $f_i \in \mathbb{C}_{d_i}[x_0, \dots, x_n]$ est un polynôme homogène de degré d_i . On suppose que D est de degré 0, c'est-à-dire $\sum k_i d_i = 0$. Alors $\varphi = \prod f_i^{k_i}$ est de la forme f/g où f et g sont des polynômes homogènes de même degré, donc $\varphi \in \mathbb{C}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$. Puisque $D = \text{div}(\varphi)$, alors D est un diviseur principal. Réciproquement, si D est principal alors il est de degré 0. Ainsi, $\text{PDiv}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ est l'ensemble des diviseurs de degré 0.

Remarque. Soit $\varphi \in \mathbb{C}(X)$. Alors $\varphi \in \mathbb{C}[X]$ si et seulement si $\text{div}(\varphi) \geq 0$.

Définition 1.3 (Équivalence linéaire). Soit $D, E \in \text{Div}(X)$. On dit que D et E sont linéairement équivalents, et on note $D \sim E$, si le diviseur $D - E$ est principal.

La relation \sim est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\text{Div}(X)$. On peut donc considérer le quotient, appelé groupe de Picard,

$$\text{Pic}(X) = \text{Div}(X) / \text{PDiv}(X) = \text{Div}(X) / \sim .$$

Exemple. Les exemples ci-dessus montrent que $\text{Pic}(\mathbb{C}^n) = \{0\}$, et que $\text{Pic}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}$, un isomorphisme étant donné par le degré.

1.3 Espace de fonctions et système linéaire d'un diviseur

Définition 1.4. Soit $D \in \text{Div}(X)$. On définit l'espace de fonction de D par

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathbb{C}(X) \mid \text{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

On note $\ell(D) = \dim(\mathcal{L}(D))$, et on appelle ce nombre la dimension de D .

Remarque. Le fait que $\mathcal{L}(D)$ soit un \mathbb{C} -espace vectoriel résulte de propriétés de valuation. Si X est une variété projective, alors $\ell(D) < +\infty$ pour tout diviseur D (voir [Sha13, théorème 3.9] dans le cas où X est une courbe).

L'interprétation de $\mathcal{L}(D)$ est la suivante. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(D)$. La fonction φ peut, au moins localement, s'écrire $\varphi = f/g$. Les équations $f = 0$ et $g = 0$ correspondent respectivement aux courbes des zéros et des pôles de φ . Notons $D = \sum k_i \mathcal{C}_i - \sum k'_i \mathcal{C}'_i$, avec $k_i, k'_i > 0$. La condition $\text{div}(\varphi) + D \geq 0$ s'écrit

$$\text{div}(f) - \sum k'_i \mathcal{C}'_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum k_i \mathcal{C}_i - \text{div}(g) \geq 0.$$

Ainsi, C'_i correspond forcément à des zéros de f , donc de φ , et la multiplicité de C'_i comme zéro de φ est au moins k'_i . De même, les zéros de g , donc les pôles de φ , sont forcément parmi les C_i , et la multiplicité de C_i comme pôle de φ est au plus k_i .

Par exemple si $X = \mathbb{C}$, un diviseur est une somme formelle de points

$$D = \sum k_i \{\alpha_i\} - \sum m_j \{\beta_j\}$$

avec $k_i, m_j > 0$. Si $\varphi = f/g \in \mathcal{L}(D)$, alors on a nécessairement

$$f(x) = h(x) \prod (x - \beta_j)^{k'_j} \text{ et } g(x) = \prod (x - \alpha_i)^{m'_i}$$

avec $h \in \mathbb{C}[x]$ non nul, $k'_j \geq k_j$, et $m'_i \leq m_i$.

Exemple. Si $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, ou plus généralement si X est une variété projective compacte, alors $\mathcal{L}(0) = \mathbb{C}$. En effet, un élément φ de $\mathcal{L}(0)$ vérifie $\text{div}(\varphi) \geq 0$, donc $\varphi \in \mathbb{C}[X] = \mathbb{C}$.

Exemple. Si X est une variété projective compacte et si D est un diviseur tel que $\text{deg}(D) < 0$, alors $\mathcal{L}(D) = \{0\}$. En effet, un élément φ non nul de $\mathcal{L}(D)$ vérifie $\text{div}(\varphi) + D \geq 0$. On a donc $0 = \text{deg}(\text{div}(\varphi)) \geq -\text{deg}(D) > 0$, ce qui est impossible.

Proposition 1.5. Soit $D, E \in \text{Div}(X)$. Si $D \sim E$, alors $\ell(D) = \ell(E)$.

Démonstration. Par hypothèse il existe $\varphi \in \mathbb{C}(X)$ telle que $E = D + \text{div}(\varphi)$. Alors pour $f \in \mathbb{C}(X)$, $f \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si $f\varphi \in \mathcal{L}(D)$. Autrement dit, la multiplication par φ réalise un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{L}(D)$, donc $\ell(E) = \ell(D)$. \square

Considérons $\{\text{div}(f) + D, f \in \mathcal{L}(D)\}$. Puisque $\text{div}(f) = \text{div}(\lambda f)$ pour tout $f \in \mathbb{C}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors

$$\{\text{div}(f) + D, f \in \mathcal{L}(D)\} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$$

Définition 1.6 (Système linéaire). Soit $D \in \text{Div}(X)$. Le système linéaire associé à D est

$$|D| = \{\text{div}(f) + D, f \in \mathcal{L}(D)\} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{L}(D)).$$

L'ensemble $|D|$ est l'espace des courbes dont les équations sont données par les éléments de $\mathcal{L}(D)$, deux courbes étant identiques si et seulement si leurs équations sont proportionnelles.

Exemple. Prenons $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, et soit $P \in \mathbb{C}_d[x_0, \dots, x_n]$ un polynôme homogène de degré d . Considérons l'hypersurface de degré d donnée par $\{P = 0\}$; on note D le diviseur correspondant. Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(D) &= \{f : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{C} \mid \text{div}(f) + D \geq 0\} \\ &= \left\{ \frac{Q}{R} : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{C} \mid \text{div}(Q) - \text{div}(R) + D \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

On peut supposer Q et R premiers entre eux, de sorte que $\text{div}(Q)$ et $\text{div}(R)$ n'ont pas de composantes communes. Puisque $\text{div}(Q) \geq 0$, il faut donc que les zéros de R soient absorbés par D , c'est-à-dire soit des zéros de P , c'est-à-dire R divise P . En écrivant $P = RS$, on a

$$\frac{Q}{R} = \frac{QS}{P},$$

et puisque Q et R sont homogènes de même degré, alors il en est de même pour QS et P . Ainsi :

$$\mathcal{L}(D) \simeq \mathbb{C}_d[x_0, \dots, x_n]$$

via l'application $Q/R \mapsto QS = QP/R$. Ainsi, le système linéaire associé à D est

$$|D| \simeq \mathbb{C}_d[x_0, \dots, x_n] / \mathbb{C}^*$$

c'est-à-dire correspond à l'ensemble des courbes algébriques de degré d dans $\mathbb{C}P^n$.

2 Diviseur canonique

Dans cette section, on suppose que X est non singulière et de dimension n .

2.1 Diviseurs localement principaux

Soit $D = \sum k_i \mathcal{C}_i$ un diviseur de X . Soit $x \in X$ et U_x un voisinage ouvert de x dans X tel que $\mathcal{C}_i \cap U_x$ est défini par l'équation $\pi_i = 0$, avec $\pi_i \in \mathbb{C}[U_x]$. En notant $f_x = \prod \pi_i^{k_i}$, alors $f_x \in \mathbb{C}(U_x)$ et $D \cap U_x$ est le diviseur de U_x défini par $\text{div}(f_x)$.

Si X est compacte, on peut extraire du recouvrement $(U_x)_{x \in X}$ un sous-recouvrement fini $(U_i)_{1 \leq i \leq r}$ tel $D \cap U_i$ soit le diviseur de U_i défini par $\text{div}(f_i)$, avec $f_i \in \mathbb{C}[U_i]$. Les fonctions $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ doivent vérifier la condition suivante : pour tout i, j dans $\llbracket 1, r \rrbracket$ on a

$$\text{div}(f_i) = \text{div}(f_j) \text{ sur } U_i \cap U_j,$$

ce qui s'écrit aussi

$$\text{div} \left(\frac{f_i}{f_j} \right) = 0 \text{ sur } U_i \cap U_j.$$

Autrement dit, la fonction f_i/f_j doit être régulière et ne pas s'annuler sur $U_i \cap U_j$.

Si réciproquement on dispose d'un recouvrement fini $(U_i)_{1 \leq i \leq r}$ et de fonctions $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ vérifiant cette condition, alors on définit un diviseur D de X en posant $D \cap U_i = \text{div}(f_i)$.

Définition 2.1 (Diviseur localement principal). Un diviseur localement principal sur X est un diviseur D tel qu'il existe un recouvrement fini $(U_i)_{1 \leq i \leq r}$ et des fonctions $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$, avec $f_i \in \mathbb{C}[U_i]$, vérifiant $D \cap U_i = \text{div}(f_i)$.

Ce qui précède montre que tout diviseur est localement principal. Cette notion n'est qu'une nouvelle façon de voir les diviseurs, qui fait apparaître les fonctions de transition f_i/f_j .

Remarque. Deux familles $(U_i, f_i)_i$ et $(V_j, g_j)_j$ définissent le même diviseur localement principal si et seulement si pour tout (i, j) la fonction f_i/g_j est régulière et ne s'annule pas sur $U_i \cap V_j$.

2.2 r -formes différentielles rationnelles

Soit $x \in X$, on note T_x l'espace tangent de X en x , TX le fibré tangent de X , et T^*X le fibré cotangent.

Définition 2.2 (r -forme différentielle régulière). Une r -forme différentielle régulière est une section du fibré $\wedge^r T^*X$, c'est-à-dire une fonction φ qui à un élément $x \in X$ associe un élément $\varphi(x) \in \wedge^r T_x^*$. On note $\Omega^r[X]$ leur ensemble.

Concrètement,

$$\Omega^r[X] = \left\{ \omega \mid \forall x \in X, \exists U \text{ voisinage de } x, \exists g_{i_1, \dots, i_r}, f_{i_1}, \dots, f_{i_r} \in \mathbb{C}[U], \right. \\ \left. \omega|_U = \sum g_{i_1, \dots, i_r} df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r} \right\}.$$

Proposition 2.3. Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de X tel que $\Omega^r[U]$ soit un $\mathbb{C}[U]$ -module libre de rang $\binom{n}{r}$.

Démonstration. Voir [Sha13, théorème 3.18]. □

En particulier pour $r = n$, et si U est comme dans la proposition, alors $\Omega^n[U]$ est un $\mathbb{C}[U]$ -module libre de rang 1, donc

$$\Omega^n[U] = \{g du_1 \wedge \dots \wedge du_n, g \in \mathbb{C}[U]\}$$

où (u_1, \dots, u_n) sont des paramètres locaux en x . Soit V un autre voisinage de x tel que $\Omega^n[V]$ soit un $\mathbb{C}[V]$ -module libre, et soit (v_1, \dots, v_n) d'autres paramètres locaux en x . On dispose de relations

$$du_i = \sum_{j=1}^n h_{i,j} dv_j$$

avec $h_{i,j} \in \mathbb{C}[U]$. On note

$$J(u/v) = \det((h_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n})$$

le jacobien. Alors $J(u/v)$ est une fonction régulière sur U , c'est-à-dire $J(u/v) \in \mathbb{C}[U]$, et elle ne s'annule pas sur U . On calcule :

$$\begin{aligned}\omega &= g du_1 \wedge \dots \wedge du_n \\ &= g \bigwedge_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n h_{i,j} dv_j \right) \\ &= g \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n h_{k,\sigma(k)} \right) dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n \\ &= gJ(u/v) dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n.\end{aligned}$$

Ainsi, si $\omega = g_U du_1 \wedge \dots \wedge du_n$ sur U et $\omega = g_V dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n$ sur V , alors on a

$$g_V = g_U J(u/v) \text{ sur } U \cap V.$$

On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des couples (ω, U) tels que U est un ouvert de X et $\omega \in \Omega^r[X]$. On dit que deux couples (ω, U) et (ρ, V) sont équivalents, et on note $(\omega, U) \sim (\rho, V)$, si $\omega = \rho$ sur $U \cap V$. On note

$$\Omega^r(X) = \Omega^r[X] / \sim.$$

Définition 2.4 (*r*-forme différentielle rationnelle). Les éléments de $\Omega^r(X)$ sont appelés des *r*-formes différentielles rationnelles.

Proposition 2.5. L'ensemble $\Omega^r(X)$ est un $\mathbb{C}(X)$ -espace vectoriel de dimension $\binom{n}{r}$.

Démonstration. Voir [Sha13, théorème 3.19]. □

2.3 Classe des diviseurs canoniques

Soit $\omega \in \Omega^n(X)$, et $X = (U_i)_{1 \leq i \leq r}$ un recouvrement ouvert tel que $\omega = g^{(i)} du_1^{(i)} \wedge \dots \wedge du_n^{(i)}$ sur U_i , avec $g^{(i)} \in \mathbb{C}(U_i)$. Sur $U_i \cap U_j$ on a

$$g^{(j)} = g^{(i)} J(u^{(i)}/u^{(j)}).$$

Puisque $J(u^{(i)}/u^{(j)})$ est une fonction régulière sur $U_i \cap U_j$ et qui ne s'annule pas, alors la famille $(g^{(i)})_{1 \leq i \leq r}$ définit un diviseur localement principal sur X , noté $\text{div}(\omega)$ et donné sur U_i par $\text{div}(\omega) = \text{div}(g^{(i)})$.

Définition 2.6 (Diviseur canonique). Un diviseur canonique sur X est un diviseur de la forme $\text{div}(\omega)$ avec $\omega \in \Omega^n(X)$. On note $\text{KDiv}(X)$ leur ensemble.

Remarque. Si ω et ρ sont des formes rationnelles définies via des recouvrements $(U_i)_i$ et $(V_j)_j$ respectivement, on peut toujours supposer que ces recouvrements sont les mêmes quitte à considérer $(U_i \cap V_j)_{i,j}$.

Proposition 2.7. L'ensemble $\text{KDiv}(X)$ forme une classe d'équivalence de la relation d'équivalence linéaire.

Démonstration. Soit $\omega, \rho \in \Omega^n(X)$. Puisque $\Omega^n(X)$ est de dimension 1 sur $\mathbb{C}(X)$, il existe $f \in \mathbb{C}(X)$ telle que $\rho = f\omega$. On note $(g^{(i)})_{1 \leq i \leq r}$ (respectivement $(h^{(i)})_{1 \leq i \leq r}$) les fonctions définissant ω (respectivement ρ). Alors on a $h^{(i)} = fg^{(i)}$, donc

$$\text{div}(\rho) = \text{div}(f) + \text{div}(\omega).$$

Ainsi, deux diviseurs canoniques sont linéairement équivalents. Réciproquement, soit D un diviseur linéairement équivalent à un diviseur canonique $\text{div}(\omega)$. Il existe $f \in \mathbb{C}(X)$ telle que $D = \text{div}(f) + \text{div}(\omega) = \text{div}(f\omega)$, donc D est un diviseur canonique. \square

Dans la suite, on notera K_X au lieu de $\text{KDiv}(X)$ la classe des diviseurs canoniques. On dira par abus que K_X est le diviseur canonique de X .

Remarque. Soit $\omega \in \Omega^n(X)$. Alors $\omega \in \Omega^n[X]$ si et seulement si $\text{div}(\omega) \geq 0$. En particulier, si $\rho = f\omega \in \Omega^n(X)$, avec $f \in \mathbb{C}(X)$, alors $\rho \in \Omega^n[X]$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}(\text{div}(\omega))$. On a donc un isomorphisme

$$\Omega^n[X] \simeq \mathcal{L}(\text{div}(\omega)).$$

Puisque deux diviseurs linéairement équivalents définissent des espaces de fonctions isomorphes, on peut noter $\mathcal{L}(K_X)$ plutôt que $\mathcal{L}(\text{div}(\omega))$, et donc

$$\Omega^n[X] \simeq \mathcal{L}(K_X).$$

Plus généralement, pour tout diviseur D on a

$$\mathcal{L}(D + K_X) \simeq \{\omega \in \Omega^n(X) \mid \text{div}(\omega) + D \geq 0\}.$$

Définition 2.8 (Genre). Si X est une courbe projective non singulière, on définit le genre de X par

$$g(X) = \ell(K_X) = \dim(\Omega^1[X]).$$

Théorème 2.9 (Riemann-Roch). Soit X une courbe projective non singulière, et soit K_X son diviseur canonique. Pour tout $D \in \text{Div}(X)$, on a

$$\ell(D) - \ell(K_X - D) = 1 - g(X) + \text{deg}(D).$$

On peut trouver une démonstration de ce théorème au chapitre VI de [Mir95] par exemple.

Soit X une courbe projective compacte. On a vu plus haut que $\ell(0) = 1$. Ainsi, le théorème de Riemann-Roch appliqué avec $D = K_X$ nous donne le degré du diviseur canonique de X :

$$\deg(K_X) = 2g(X) - 2.$$

2.4 Quelques exemples

Diviseur canonique de $\mathbb{C}P^2$

On note $[x : y : z]$ les coordonnées homogènes dans $\mathbb{C}P^2$. On considère les ouverts $U_1 = \{x \neq 0\}$, $U_2 = \{y \neq 0\}$ et $U_3 = \{z \neq 0\}$. Chacun des ouverts U_i s'identifie à \mathbb{C}^2 avec les coordonnées suivantes :

$$U_1 \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{y}{x} \\ v_1 = \frac{z}{x} \end{array} \right., U_2 \left\{ \begin{array}{l} u_2 = \frac{x}{y} \\ v_2 = \frac{z}{y} \end{array} \right., U_3 \left\{ \begin{array}{l} u_3 = \frac{x}{z} \\ v_3 = \frac{y}{z} \end{array} \right. .$$

Soit $\omega \in \Omega^2(\mathbb{C}P^2)$. On écrit $\omega|_{U_i} = g_i du_i \wedge dv_i$, avec $g_i \in \mathbb{C}(U_i)$.

▷ Sur $U_1 \cap U_2$ on a $u_1 = 1/u_2$ et $v_1 = v_2/u_2$, donc

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ dv_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/u_2^2 & 0 \\ -v_2/u_2^2 & 1/u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{pmatrix}$$

donc le jacobien est

$$J_{1,2} = \frac{-1}{u_2^3} = -\left(\frac{y}{x}\right)^3.$$

▷ Sur $U_2 \cap U_3$ on a $u_2 = u_3/v_3$ et $v_2 = 1/v_3$, donc

$$\begin{pmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/v_3 & -u_3/v_3^2 \\ 0 & -1/v_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_3 \\ dv_3 \end{pmatrix}$$

donc le jacobien est

$$J_{2,3} = \frac{-1}{v_3^3} = -\left(\frac{z}{y}\right)^3.$$

▷ Sur $U_3 \cap U_1$ on a $u_3 = 1/v_1$ et $v_3 = u_1/v_1$, donc

$$\begin{pmatrix} du_3 \\ dv_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/v_1^2 \\ 1/v_1 & -u_1/v_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ dv_1 \end{pmatrix}$$

donc le jacobien est

$$J_{3,1} = \frac{1}{v_1^3} = \left(\frac{x}{z}\right)^3.$$

On vérifie qu'on a bien $J_{1,2}J_{2,3}J_{3,1} = 1$. Les relations $g_j = g_i J_{i,j}$ donnent alors

$$g_1 = g_1, g_2 = -\left(\frac{y}{x}\right)^3 g_1, g_3 = \left(\frac{z}{x}\right)^3 g_1.$$

Le choix de g_1 étant libre (les diviseurs obtenus par différents choix sont linéairement équivalents et correspondent tous $K_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$), on prend $g_1 = 1$. Alors

$$g_1 = 1, g_2 = -\left(\frac{y}{x}\right)^3, g_3 = \left(\frac{z}{x}\right)^3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (K_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2})|_{U_1} &= \operatorname{div}(1) = -3\operatorname{div}(x), \\ (K_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2})|_{U_2} &= 3\operatorname{div}(y) - 3\operatorname{div}(x) = -3\operatorname{div}(x), \\ (K_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2})|_{U_3} &= 3\operatorname{div}(z) - 3\operatorname{div}(x) = -3\operatorname{div}(x), \end{aligned}$$

donc $K_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} = -3\operatorname{div}(x)$. En particulier, $\deg(K_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}) = -3$. Puisque le degré établit un isomorphisme $\operatorname{Pic}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}$, on peut écrire sous cet isomorphisme : $K_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} = -3$.

Diviseur canonique de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

En généralisant les calculs effectués pour $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, on montre que, via le degré :

$$K_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n} = -(n+1).$$

Diviseur canonique d'une hypersurface de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

Soit $F \in \mathbb{C}_d[x_0, \dots, x_n]$ un polynôme homogène de degré d , et $X = \{F(x_0 : \dots : x_n) = 0\}$ l'hypersurface de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ qu'il définit. On suppose X non singulière.

Plaçons-nous d'abord sur l'ouvert $\{x_0 \neq 0\}$ de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Dans cet ouvert, X est défini par l'équation $G(y_1, \dots, y_n) = 0$, où $G(y_1, \dots, y_n) = F(1, y_1, \dots, y_n)$ et $y_i = x_i/x_0$. Notons $X_0 = X \cap \{x_0 \neq 0\}$, et soit U_i l'ouvert de X_0 donné par $\{\partial G/\partial y_i \neq 0\}$. Des coordonnées sur U_i sont $(y_1, \dots, \widehat{y}_i, \dots, y_n)$. Considérons les $(n-1)$ -formes

$$\omega_i = \frac{(-1)^i}{\partial G/\partial y_i} dy_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy}_i \wedge \dots \wedge dy_n \in \Omega^{n-1}[U_i].$$

En multipliant la relation

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial G}{\partial y_k} dy_k = 0$$

par $dy_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy}_i \wedge \dots \wedge \widehat{dy}_j \wedge \dots \wedge dy_n$, où $i < j$, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial G}{\partial y_k} dy_k \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy}_i \wedge \dots \wedge \widehat{dy}_j \wedge \dots \wedge dy_n = 0.$$

Les termes de cette somme sont non nuls uniquement pour $k = i$ et $k = j$, et valent respectivement

$$(-1)^{i-1} \frac{\partial G}{\partial y_i} dy_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy}_j \wedge \dots \wedge dy_n$$

et

$$(-1)^{j-2} \frac{\partial G}{\partial y_j} dy_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy}_i \wedge \dots \wedge dy_n$$

On en déduit

$$\omega_i = \omega_j \text{ sur } U_i \cap U_j,$$

donc la famille $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ définit un élément de $\Omega^{n-1}(X_0)$, noté ω . Cet élément est régulier et ne s'annule pas sur X_0 , donc

$$\operatorname{div}(\omega) = 0 \text{ sur } X_0.$$

Ainsi, avec les choix effectués, x_0 est la seule coordonnée qui joue potentiellement un rôle dans le diviseur canonique de X .

Pour voir le rôle de x_0 on se place sur une autre carte, par exemple sur $X_1 = X \cap \{x_1 \neq 0\}$. Dans $\{x_1 \neq 0\}$, X est définie par $H(z_1, \dots, z_n) = 0$, où $z_1 = x_0/x_1$, $z_i = x_i/x_1$ pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et $H(z_1, \dots, z_n) = F(z_1, 1, z_2, \dots, z_n) = z_1^d G(y_1, \dots, y_n)$. On note que pour $i \geq 2$ on a

$$\frac{\partial H}{\partial z_i}(z_1, \dots, z_n) = z_1^{d-1} \frac{\partial G}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_n).$$

On considère l'ouvert de X_1 donné par $V_j = \{\partial H/\partial z_j \neq 0\}$. On veut déterminer l'expression de ω dans l'ouvert V_j . Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{-1}{z_1^2} dz_1 \\ dy_i &= \frac{-z_i}{z_1^2} dz_1 + \frac{1}{z_1} dz_i \text{ pour } 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Les coordonnées sur V_j sont $(z_1, \dots, \widehat{z}_j, \dots, z_n)$, et on souhaite déterminer le jacobien $J(U_i/V_j)$ de changement de base entre U_i et V_j . Pour cela, on doit exprimer dy_j sans faire appel à dz_j , c'est-à-dire il faut exprimer dz_j en fonction des dz_k pour $k \neq j$. Puisque

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial z_k} dz_k = 0$$

alors sur V_j on a

$$dz_j = \frac{-1}{\partial H/\partial z_j} \sum_{k \neq j} \frac{\partial H}{\partial z_k} dz_k.$$

On obtient alors

$$J(U_i/V_j) = \frac{(-1)^{i+j+1} \partial H/\partial z_i}{z_1^n \partial H/\partial z_j}.$$

En notant

$$\begin{aligned} \omega &= g_i dy_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy}_i \wedge \dots \wedge dy_n \text{ sur } U_i \\ \omega &= h_j dz_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dz}_j \wedge \dots \wedge dz_n \text{ sur } V_j \end{aligned}$$

on a donc pour $2 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} h_j &= g_i J(U_i/V_j) \\ &= \frac{(-1)^i (-1)^{i+j+1} \partial H / \partial z_i}{\frac{\partial G / \partial y_i}{z_1^n} \frac{\partial H / \partial z_j}{1}} \\ &= \frac{(-1)^{j+1}}{z_1^{n-d+1}} \frac{1}{\partial H / \partial z_j} \end{aligned}$$

Puisque $\partial H / \partial z_j$ ne s'annule pas sur V_j , alors pour tout j on a

$$\operatorname{div}(\omega) = (d - n - 1) \operatorname{div}(z_1) = (d - n - 1) \operatorname{div}(x_0) \text{ sur } V_j$$

donc

$$\operatorname{div}(\omega) = (d - n - 1) \operatorname{div}(x_0) \text{ sur } X_1.$$

Puisque cette expression est aussi vraie sur X_0 , alors le diviseur canonique d'une hypersurface X de degré d de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ est

$$K_X = (d - n - 1) \operatorname{div}(x_0).$$

Calcul de $\ell(K_X)$ pour X hypersurface de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

Connaissant K_X , on peut déterminer $\Omega^{n-1}[X]$ grâce à l'isomorphisme $\Omega^{n-1}[X] \simeq \mathcal{L}(K_X)$.

Supposons que $d - n - 1 > 0$. Soit $f \in \mathcal{L}(K_X) = \mathcal{L}((d - n - 1) \operatorname{div}(x_0))$. On écrit $f = g/h$ avec $g, h \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ homogènes de même degré. Puisque les pôles de f , c'est-à-dire les zéros de h , doivent être compensés par $(d - n - 1) \operatorname{div}(x_0)$, alors h est de la forme $h = x_0^k$ avec $k \leq d - n - 1$. En particulier, g et h sont de degré k , donc g est combinaison linéaire de monômes de la forme $x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}$ vérifiant $i_0 + \dots + i_n = k$. Dans la carte $x_0 \neq 0$, on a

$$\frac{x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}}{x_0^k} = y_1^{i_1} \dots y_n^{i_n}$$

avec $i_1 + \dots + i_n \leq k \leq d - n - 1$. Ainsi, f correspond à un élément de $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ de degré au plus $d - n - 1$. Par ailleurs, deux éléments P et Q de $\mathbb{C}_{\leq d-n-1}[y_1, \dots, y_n]$ définissent deux éléments différents de $\Omega^{n-1}[X]$; en effet, si ce n'est pas le cas alors G (de degré d) divise $P - Q$ (de degré au plus $d - n - 1$, donc au plus $d - 1$), ce qui est impossible. Donc

$$\Omega^{n-1}[X] \simeq \mathbb{C}_{\leq d-n-1}[y_1, \dots, y_n].$$

Avec cette caractérisation, on peut calculer $\ell(K_X)$.

▷ Le nombre de monômes de degré k en n variables est $\binom{n+k-1}{n-1}$.

- ▷ Il y a une bijection entre l'ensemble des monômes de degré au plus $d - n - 1$ en n variables (base de $\Omega^{n-1}[X]$) et l'ensemble des monômes de degré $d - n - 1$ en $n + 1$ variables; cette bijection est donnée par l'ajout d'une variable permettant d'homogénéiser le monôme de degré au plus $d - n - 1$ en un monôme de degré $d - n - 1$. Ainsi, la dimension de $\Omega^{n-1}[X]$ est $\binom{d-1}{n}$.

Exemple. Dans le cas particulier où X est une courbe non singulière de degré d dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, son genre est donc

$$g(X) = \ell(K_X) = \binom{d-1}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

3 Nombres d'intersections

Dans cette partie, on considère X une variété non singulière de dimension n , et D_1, \dots, D_n des diviseurs de X .

3.1 Définitions

Définition 3.1. Soit $x \in X$. S'il existe un voisinage U de x tel que

$$U \cap \bigcap_{i=1}^n \text{supp}(D_i) = \{x\}$$

on dit que les diviseurs D_1, \dots, D_n sont en position générale en x .

Si pour tout $x \in \bigcap_i \text{supp}(D_i)$ les diviseurs D_1, \dots, D_n sont en position générale en x , on dit que les diviseurs D_1, \dots, D_n sont en position générale.

Rappelons que pour $x \in X$ on note

$$\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_{X,x} = \{f \in \mathbb{C}[X] \mid f(x) = 0\}$$

l'idéal maximal de x , et

$$\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{X,x} = \mathbb{C}[X]_{\mathfrak{m}_x} = \left\{ \frac{f}{g}, f \in \mathbb{C}[X], g \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathfrak{m}_x \right\}$$

l'anneau local en x .

Soit $x \in X$. Comme X est non singulière, chaque diviseur est localement principal. Ainsi, il existe un voisinage U de x dans lequel chacun des D_i est donné par une fonction $f_i \in \mathbb{C}(U)$: $D_i = \text{div}(f_i)$. Si les diviseurs sont effectifs, on a $f_i \in \mathbb{C}[U]$. Supposons de plus que D_1, \dots, D_n soient en position générale en x . Cela signifie que

$$U \cap V(f_1, \dots, f_n) = \{x\}.$$

Si on considère $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle \subset \mathcal{O}_x$, le théorème des zéros de Hilbert donne $\sqrt{I} = \mathfrak{m}_x$. Il existe donc un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}_x^p \subset I$, et le quotient $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^p$ est de dimension finie en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel (voir [Sha13], section 2.2 du chapitre 2.) On déduit que le quotient \mathcal{O}_x/I est également de dimension finie en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel.

Définition 3.2 (Multiplicité d'intersection, cas effectif). Soit $x \in X$ tel que D_1, \dots, D_n soient en position générale en x . Supposons que D_1, \dots, D_n soient effectifs, et soit f_i une équation locale de D_i sur un voisinage de x . La multiplicité d'intersection de D_1, \dots, D_n en x est l'entier

$$(D_1 \cdots D_n)_x = \dim(\mathcal{O}_x/\langle f_1, \dots, f_n \rangle).$$

Remarque. Si $x \notin \bigcap_i \text{supp}(D_i)$, on pose $(D_1 \cdots D_n)_x = 0$.

Définition 3.3 (Multiplicité d'intersection, cas général). Soit $x \in X$ tel que D_1, \dots, D_n soient en position générale en x . On écrit $D_i = D_i^+ - D_i^-$ avec D_i^+ et D_i^- effectifs. La multiplicité d'intersection de D_1, \dots, D_n en x est l'entier

$$(D_1 \cdots D_n)_x = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \sum_{i_1, \dots, i_n} (D_{i_1}^+ \cdots D_{i_k}^+ D_{i_{k+1}}^- \cdots D_{i_n}^-)_x.$$

Remarque. Pour que cette définition soit licite, il faut que $D_{i_1}^+, \dots, D_{i_k}^+, D_{i_{k+1}}^-, \dots, D_{i_n}^-$ soient en position générale en x , ou bien que $x \notin \bigcap_i \text{supp}(D_i^\pm)$. Or, $\text{supp}(D_i) = \text{supp}(D_i^+) \cup \text{supp}(D_i^-)$ donc

$$\bigcap_{i=1}^n \text{supp}(D_i) = \bigcup_{i_1, \dots, i_n} (D_{i_1}^+ \cap \dots \cap D_{i_k}^+ \cap D_{i_{k+1}}^- \cap \dots \cap D_{i_n}^-).$$

Ainsi, si $U \cap \bigcap_i \text{supp}(D_i) = \{x\}$, on a

$$U \cap \bigcap_{j=1}^k \text{supp}(D_{i_j}^+) \cap \bigcap_{j=k+1}^n \text{supp}(D_{i_j}^-) = \{x\} \text{ ou } \emptyset$$

c'est-à-dire $D_{i_1}^+, \dots, D_{i_k}^+, D_{i_{k+1}}^-, \dots, D_{i_n}^-$ sont en position générale en x , ou $x \notin \bigcap_i \text{supp}(D_i^\pm)$.

Exemple. Soit X soit une courbe non singulière. Soit $f \in \mathbb{C}[X]$, et considérons le diviseur principal $D = \text{div}(f)$. Soit $x \in \text{supp}(D)$, et soit m la multiplicité de x comme zéro de f . Soit enfin $u \in \mathcal{O}_x$ un paramètre local en x , c'est-à-dire $u(x) = 0$ et u forme une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. On peut écrire $f = u^m g$ avec $g(x) \neq 0$. Alors

$$(D)_x = \dim(\mathcal{O}_x/\langle f \rangle) = \dim(\mathcal{O}_x/\langle u^m g \rangle) = \dim(\mathcal{O}_x/\langle u^m \rangle) = m.$$

La multiplicité d'intersection de D en x est donc la multiplicité de x comme zéro de f .

Exemple. Soit X une courbe non singulière. Soit D un diviseur de X et $x \in X$. Comme D est localement principal, il existe $\varphi = f/g \in \mathbb{C}(X)$, avec $f, g \in \mathbb{C}[X]$, tel qu'autour de X on a $D = \text{div}(f) - \text{div}(g)$. Alors $(D)_x = (\text{div}(f))_x - (\text{div}(g))_x$, puisque $\text{div}(f)$ et $\text{div}(g)$ sont effectifs. D'après l'exemple précédent, la multiplicité d'intersection de D en x est donc l'ordre de x comme zéro ou pôle de φ .

Définition 3.4 (Nombre d'intersections). Soit D_1, \dots, D_n des diviseurs de X en position générale. Leur nombre d'intersections est l'entier

$$D_1 \cdots D_n = \sum_{x \in \bigcap \text{supp}(D_i)} (D_1 \cdots D_n)_x.$$

Exemple. Prenons $X = \mathbb{C}$. Soit $D = \text{div}(f)$ avec $f \in \mathbb{C}[x]$. D'après les exemples qui précèdent, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $(D)_x$ est l'ordre d'annulation de f en x . Ainsi, le nombre d'intersections de D est $\text{deg}(f)$, et on retrouve le nombre de racines de f .

3.2 Propriétés

Les deux propriétés suivantes ne sont pas directes.

Proposition 3.5 (Additivité). Soit $D_1, \dots, D_{n-1}, D_n, E_n$ des diviseurs en position générale. Alors

$$D_1 \cdots D_{n-1}(D_n + E_n) = D_1 \cdots D_{n-1}D_n + D_1 \cdots D_{n-1}E_n.$$

Proposition 3.6 (Invariance par équivalence linéaire). Soit $D_1, \dots, D_{n-1}, D_n, E_n$ des diviseurs de X . On suppose que D_1, \dots, D_{n-1}, D_n ainsi que D_1, \dots, D_{n-1}, E_n sont en position générale, et que D_n et E_n sont linéairement équivalents. Alors :

$$D_1 \cdots D_{n-1}D_n = D_1 \cdots D_{n-1}E_n.$$

Démonstration. Ces deux propositions sont montrées au chapitre 4 de [Sha13]. □

Jusqu'ici, on a défini les nombres d'intersections pour des diviseurs D_1, \dots, D_n en position générale. Les deux propositions suivantes, prouvées dans [Sha13], permettent de s'affranchir de cette condition.

Proposition 3.7. Soit D_1, \dots, D_n des diviseurs de X . Il existe des diviseurs E_1, \dots, E_n tel que D_i et E_i sont linéairement équivalents, et tels que E_1, \dots, E_n soient en position générale.

Proposition 3.8. Soit D_1, \dots, D_n et E_1, \dots, E_n des diviseurs en position générale tels que D_i et E_i sont linéairement équivalents. Alors

$$D_1 \cdots D_n = E_1 \cdots E_n.$$

Pour D_1, \dots, D_n des diviseurs quelconques, on peut donc trouver E_1, \dots, E_n des diviseurs en position générale tels que $D_i \sim E_i$, et définir

$$D_1 \cdots D_n = E_1 \cdots E_n.$$

3.3 Exemples de calculs et applications

Théorème de Bézout

Prenons $X = \mathbb{CP}^2$, et soit \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux courbes de degrés respectifs d et d' . Soit L une droite, c'est-à-dire une courbe de degré 1. Puisque $\text{Pic}(\mathbb{CP}^2) \simeq \mathbb{Z}$ alors $\mathcal{C} \sim dL$ et $\mathcal{C}' \sim d'L$. On a donc

$$\mathcal{C} \cdot \mathcal{C}' = dL \cdot d'L = dd'L^2.$$

Pour calculer L^2 , on considère une autre droite L' . Puisque $L \sim L'$, alors $L^2 = L \cdot L'$. Cette dernière quantité vaut 1 puisque deux droites en position générale ont un unique point d'intersection. Ainsi, on obtient le théorème de Bézout :

$$\mathcal{C} \cdot \mathcal{C}' = dd'.$$

Formule d'adjonction

Soit X une surface et \mathcal{C} une courbe sur X . Le diviseur canonique de \mathcal{C} est $K_{\mathcal{C}} = (K_X + \mathcal{C})|_{\mathcal{C}}$, et son degré est $\deg(K_{\mathcal{C}}) = (K_X + \mathcal{C}) \cdot \mathcal{C}$.

Remarque. Pour calculer $K_{\mathcal{C}}$, on choisit un diviseur D linéairement équivalent à $K_X + \mathcal{C}$ et qui intersecte \mathcal{C} transversalement; et on calcule $D \cap \mathcal{C}$.

Le genre de \mathcal{C} étant défini par $g(\mathcal{C}) = \ell(K_{\mathcal{C}})$, le théorème de Riemann-Roch, si \mathcal{C} est non singulière, donne la formule d'adjonction

$$g(\mathcal{C}) = \frac{\mathcal{C}^2 + K_X \cdot \mathcal{C} + 2}{2}.$$

Exemple. Prenons $X = \mathbb{CP}^2$, et soit \mathcal{C} une courbe de degré d non singulière. On a vu plus haut que, via le degré, on a $K_{\mathbb{CP}^2} = -3$. La formule ci-dessus donne donc

$$g(\mathcal{C}) = \frac{d^2 - 3d + 2}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

et on retrouve le genre calculé dans un exemple précédent.

Remarque. Une courbe singulière \mathcal{C} sur une surface X possède aussi un genre g . Si la courbe est nodale avec r points doubles, on peut montrer que

$$g + r = \frac{\mathcal{C}^2 + K_X \cdot \mathcal{C} + 2}{2}.$$

4 Polygone, surface torique et formule d'adjonction

4.1 Système linéaire d'un polygone

Soit Δ un polygone (convexe) à sommets entiers dans \mathbb{R}^2 . On lui associe l'application

$$\varphi_\Delta \left| \begin{array}{l} (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^N \\ (x, y) \mapsto [x^i y^j]_{(i,j) \in \Delta \cap \mathbb{Z}^2} \end{array} \right.$$

et la variété torique $X_\Delta = \overline{\text{Im}(\varphi_\Delta)}$. Notons $[a_{i,j}]_{(i,j) \in \Delta \cap \mathbb{Z}^2}$ les coordonnées homogènes de $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$, et soit H un hyperplan de $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ défini par $\sum a_{i,j} \alpha_{i,j} = 0$. Alors l'intersection $H \cap X_\Delta$ est donnée par

$$\sum a_{i,j} x^i y^j = 0$$

et correspond à une courbe sur la surface X_Δ .

Définition 4.1. On note $|\mathcal{L}_\Delta|$ le système linéaire formé des courbes sur X_Δ obtenues par la construction précédente. Autrement dit :

$$|\mathcal{L}_\Delta| = \{H \cap X_\Delta, H \text{ hyperplan de } \mathbb{C}\mathbb{P}^N\}.$$

Si on définit \mathcal{L}_Δ comme l'espace engendré par les fonctions $(x^i y^j)_{(i,j) \in \Delta \cap \mathbb{Z}^2}$, alors on a

$$|\mathcal{L}_\Delta| \simeq \mathbb{P}(\mathcal{L}_\Delta).$$

De plus, deux éléments de $|\mathcal{L}_\Delta|$ sont linéairement équivalents.

Remarque. En réalité l'application φ_Δ , donc les courbes qu'on définit, sont vues à travers une carte. On peut le voir dans l'exemple suivant.

Exemple. Si $\Delta = \Delta_d$, alors $X_{\Delta_d} = \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Notons $[x_0 : x_1 : x_2]$ les coordonnées dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Le système linéaire $|\mathcal{L}_{\Delta_d}|$ correspond aux courbes données par

$$\sum_{i+j \leq d} a_{i,j} x^i y^j = 0,$$

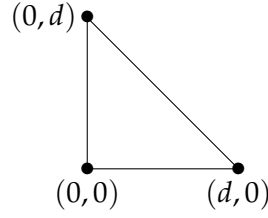


FIGURE 1 – Le polygone Δ_d

c'est-à-dire aux courbes de degré d dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, vues dans la carte $\{x_2 \neq 0\}$ avec $x = x_0/x_2$ et $y = x_1/x_2$. Dans cet exemple, on pourrait plutôt considérer

$$\varphi_{\Delta_d} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathbb{P}^2 & \rightarrow & \mathbb{C}\mathbb{P}^N \\ [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & [x_0^i x_1^j x_2^{d-i-j}]_{(i,j) \in \Delta_d \cap \mathbb{Z}^2} \end{array} \right.$$

où $N = d(d+3)/2$. Alors $X_{\Delta_d} = \text{Im}(\varphi_{\Delta_d})$, et l'intersection avec un hyperplan de $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ donne $\sum a_{i,j} x_0^i x_1^j x_2^{d-i-j} = 0$. Cette fois-ci, les courbes ne sont pas vues via des cartes affines.

Ainsi, un polygone Δ définit une surface X_Δ ainsi qu'un système linéaire, c'est-à-dire un ensemble de courbes sur X_Δ . Ces courbes ont un genre, et le genre des courbes non singulières est donné par la formule d'adjonction. On va voir dans la partie suivante que cette formule peut s'interpréter grâce au polygone Δ .

4.2 Interprétation de la formule d'adjonction

Rappelons la formule d'adjonction. Si \mathcal{C} est une courbe non singulière sur la surface X , alors son genre est

$$g(\mathcal{C}) = \frac{\mathcal{C}^2 + K_X \cdot \mathcal{C} + 2}{2}.$$

Cette formule fait intervenir des nombres d'intersections, que nous allons interpréter maintenant dans le cas où $X = X_\Delta$ est une variété torique. Soit donc Δ un polygone lisse, X_Δ la surface torique non singulière associée, et \mathcal{C} une courbe non singulière dans le système linéaire $|\mathcal{L}_\Delta|$.

Interprétation de K_{X_Δ}

La variété torique X_Δ est une compactification de $(\mathbb{C}^*)^2$: elle correspond au tore auquel on a ajouté certaines droites. Pour calculer K_{X_Δ} on part donc de $(\mathbb{C}^*)^2$.

Considérons sur $(\mathbb{C}^*)^2$ la forme différentielle

$$\omega = \frac{dx \wedge dy}{xy}.$$

En particulier, le diviseur canonique de $(\mathbb{C}^*)^2$ est nul, puisque ni x ni y ne peuvent s'annuler. Les seuls changements de coordonnées possibles sur $(\mathbb{C}^*)^2$ correspondent à l'action de $GL_2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire sont les changements

$$(z, w) = (x^a y^b, x^c y^d) \text{ avec } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}).$$

Or, la forme ω est invariante sous l'action de $GL_2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire si (z, w) est comme ci-dessus alors

$$\frac{dz \wedge dw}{z w} = \frac{dx \wedge dy}{x y}.$$

Nous allons nous servir de cette forme pour déterminer K_{X_Δ} .

D'une part, deux polygones Δ et Δ' qui diffèrent d'une translation définissent la même surface torique et le même système linéaire. A partir de maintenant, on suppose donc que l'origine est un sommet des polygones considérés.

D'autre part, deux polygones Δ et Δ' définissent la même surface torique et le même système linéaire si et seulement s'il existe $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ telle que A envoie Δ sur Δ' . Dans ce cadre, regarder la surface et les courbes via Δ ou Δ' correspond à se placer dans un système de coordonnées ou dans un autre.

Puisque Δ est lisse, alors deux côtés consécutifs quelconques de Δ peuvent être envoyés par une matrice de $GL_2(\mathbb{Z})$ sur les axes de \mathbb{R}^2 , et leurs générateurs minimaux sur $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

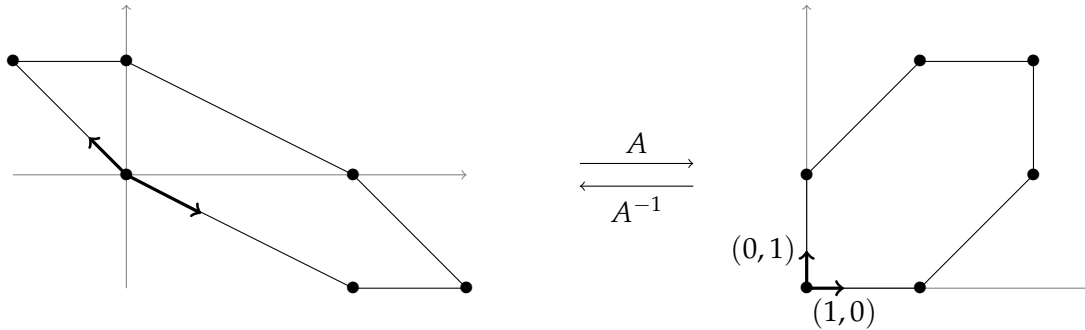


FIGURE 2 – Image d'un polygone lisse par $A \in GL_2(\mathbb{Z})$

Dans ce nouveau système de coordonnées, considérons le plongement de Veronese

$$\varphi_\Delta \left| \begin{array}{l} (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow \mathbb{C}P^N \\ (x, y) \mapsto [x^i y^j]_{(i,j) \in \Delta \cap \mathbb{Z}^2} \end{array} \right.$$

où les premiers monômes correspondent aux points entiers de Δ sur l'axe des abscisses. Considérons la droite $y = 0$. L'intersection de cette droite avec l'image de φ_Δ est donc

$$\{[1 : x : \dots : x^m : 0 : 0 : \dots : 0], z \in \mathbb{C}^*\}.$$

On constate que les uniques monômes non nuls sont ceux donnés par le côté $j = 0$ de Δ , et que cette intersection correspond donc au plongement de Veronese de ce côté.

Or, dans $X_\Delta = \overline{\text{Im}(\varphi_\Delta)}$, la droite $y = 0$ correspond à des pôles de $\omega = (dx \wedge dy)/xy$, donc à une composante de K_{X_Δ} . Ainsi, chaque côté de Δ correspond, éventuellement après un changement de coordonnées, à une droite de pôles de la forme ω , donc à une composante de K_{X_Δ} affectée du poids -1 .

Réciproquement, puisque les composantes de K_{X_Δ} sont les zéros et pôles de ω , et puisque les seuls changements de coordonnées possibles sont ceux donnés par $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$, alors une composante de K_{X_Δ} correspond à une droite $y = 0$, avec un certain choix de coordonnées, donc à un côté de Δ .

Ainsi, le diviseur canonique d'une surface torique non singulière X_Δ correspond aux côtés du polygone Δ qui la définit. En particulier, son degré est l'opposé du nombre de côtés de Δ .

Interprétation de $K_{X_\Delta} \cdot \mathcal{C}$

Pour calculer $K_{X_\Delta} \cdot \mathcal{C}$ on doit calculer $-D \cdot \mathcal{C}$, où D est une courbe intervenant dans K_{X_Δ} . Après changement de coordonnées, on suppose qu'il existe deux côtés consécutifs de Δ portés par les axes du plan, et que D correspond au côté $j = 0$ de Δ , c'est-à-dire D est la droite $y = 0$. Notons m la longueur de ce côté.

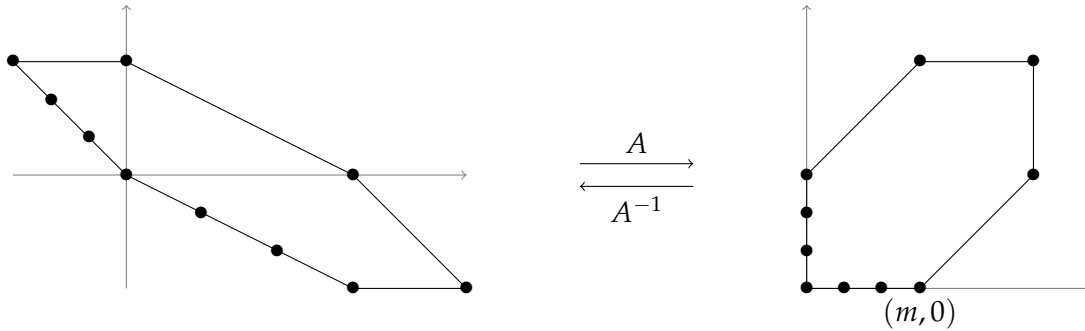


FIGURE 3 – Image d'un polygone lisse par $A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$; les longueurs entières des côtés sont préservées

Soit $P(x, y) = 0$ l'équation de \mathcal{C} . L'intersection de \mathcal{C} et de D est donc définie par $P(x, 0) = 0$, c'est-à-dire par une équation polynomiale en une variable de degré au plus m . Or, quitte à remplacer \mathcal{C} par une autre courbe générique¹ $\mathcal{C}' \in |\mathcal{L}_\Delta|$, on peut supposer que ce degré est m . L'équation $P(x, 0) = 0$ admet donc m solutions comptées avec multiplicités. Ainsi, $D \cdot \mathcal{C}$ correspond à la longueur du côté de Δ associé à D , donc

$$-D \cdot \mathcal{C} = -m.$$

Soit r le nombre de côtés de Δ . Chaque côté de Δ correspond à une courbe D_i intervenant dans K_{X_Δ} . On note m_i la longueur entière du côté associé à D_i , c'est-à-dire le nombre de

1. Si \mathcal{C} n'est pas générique, il est possible que certaines solutions soient à l'infini, et donc n'apparaissent pas dans la carte où l'on se place.

points entiers sur ce segment. Ce qui précède montre que

$$K_{X_\Delta} \cdot \mathcal{C} = -(D_1 + \dots + D_r) \cdot \mathcal{C} = -(m_1 + \dots + m_r).$$

Ainsi, $K_{X_\Delta} \cdot \mathcal{C}$ s'interprète comme l'opposé du nombre de points entiers sur la frontière de Δ .

Interprétation de \mathcal{C}^2

Prenons $\Delta = \Delta_d$. Alors $X_{\Delta_d} = \mathbb{C}P^2$ et $|\mathcal{L}_{\Delta_d}|$ correspond aux courbes de degré d . D'après le théorème de Bézout, on a donc $\mathcal{C}^2 = d^2$. On remarque que cette quantité est le double de l'aire du triangle Δ_d .

Dans le cas général, l'interprétation de \mathcal{C}^2 est la même. C'est le théorème de Kouchnirenko, voir [GKZ94] par exemple.

Interprétation de $g(\mathcal{C})$

Étant donné un polygone entier convexe Δ , notons $A(\Delta)$ son aire, $I(\Delta)$ le nombre de points entiers à l'intérieur de Δ et $F(\Delta)$ le nombre de points entiers sur la frontière de Δ . La formule de Pick s'écrit alors

$$I(\Delta) = \frac{2A(\Delta) - F(\Delta) + 2}{2}.$$

Or, d'après les interprétations précédentes on a $2A(\Delta) = \mathcal{C}^2$ et $F(\Delta) = -K_{X_\Delta} \cdot \mathcal{C}$ pour toute courbe non singulière \mathcal{C} dans le système linéaire $|\mathcal{L}_\Delta|$. Ainsi,

$$I(\Delta) = \frac{\mathcal{C}^2 + K_{X_\Delta} \cdot \mathcal{C} + 2}{2} = g(\mathcal{C}).$$

Le genre d'une courbe non singulière de $|\mathcal{L}_\Delta|$ correspond donc au nombre de points entiers à l'intérieur de Δ .

Remarque. Puisque deux courbes de $|\mathcal{L}_\Delta|$ sont linéairement équivalentes, on peut noter \mathcal{L}_Δ plutôt que \mathcal{C} dans les nombres d'intersections. La formule d'adjonction pour une courbe de genre g ayant r points doubles s'écrit alors

$$g + r = \frac{\mathcal{L}_\Delta^2 + K_{X_\Delta} \cdot \mathcal{L}_\Delta + 2}{2}.$$

Deuxième partie

Géométrie énumérative et invariants tropicaux raffinés

5 Présentation des problèmes considérés

5.1 Compter des courbes dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$

Dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, on souhaiterait compter les courbes vérifiant certaines propriétés. Outre son degré d , une courbe possède aussi un genre g et un nombre de points doubles r . Ces trois quantités sont reliées par la formule d'adjonction :

$$g + r = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

En général, on fixe le degré ; il y a alors deux façons de compter les courbes : on peut fixer le genre ou le nombre de points doubles.

Il faut préciser quelles sont les propriétés souhaitées pour nos courbes. On s'intéresse ici aux courbes passant par un certain nombre de points ; mais combien de points faut-il fixer ? Si on n'en prend pas assez il risque d'y avoir une infinité de courbes ; et si on en fixe trop il pourrait n'y avoir plus aucune courbe. Le bon nombre est donné par un calcul de dimension.

Dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, une courbe algébrique de degré d est donnée par $\{P = 0\}$, où $P \in \mathbb{C}_d[x, y, z]$ est un polynôme homogène de degré d . Puisque P et λP pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ définissent la même courbe, il y a une bijection entre l'espace $|\mathcal{L}(d)|$ des courbes de degré d , et l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{C}_d[x, y, z])$. Comme $\mathbb{C}_d[x, y, z]$ est de dimension $(d+1)(d+2)/2$, alors $|\mathcal{L}(d)|$ correspond à l'espace projectif $\mathbb{C}\mathbb{P}^{d(d+3)/2}$.

Proposition 5.1. Soit $d(d+3)/2$ points en position générique dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Il existe une unique courbe de degré d qui passent par tous ces points.

Démonstration. Soit $(p_i)_{1 \leq i \leq d(d+3)/2}$ les points considérés, et $P \in \mathbb{C}_d[x, y, z]$. Les équations $P(p_i) = 0$ forment un système de $d(d+3)/2$ équations avec $(d+1)(d+2)/2$ inconnues, qui sont les coefficients de P . Comme la configuration de points est générique, alors ce système est de rang maximal, c'est-à-dire $d(d+3)/2$. Son noyau est donc de dimension 1 : les polynômes possibles forment une droite, et correspondent tous à la même courbe. \square

L'ensemble des courbes de degré d correspond à $\mathbb{C}\mathbb{P}^{d(d+3)/2}$. Imposer qu'une courbe soit singulière revient à ajouter une équation entre les coefficients d'un polynôme qui la définit, donc à perdre une dimension. L'ensemble des courbes singulières est donc une hypersurface,

appelée hypersurface discriminante. Ainsi, dans la proposition précédente on peut supposer que la courbe obtenue est non singulière.

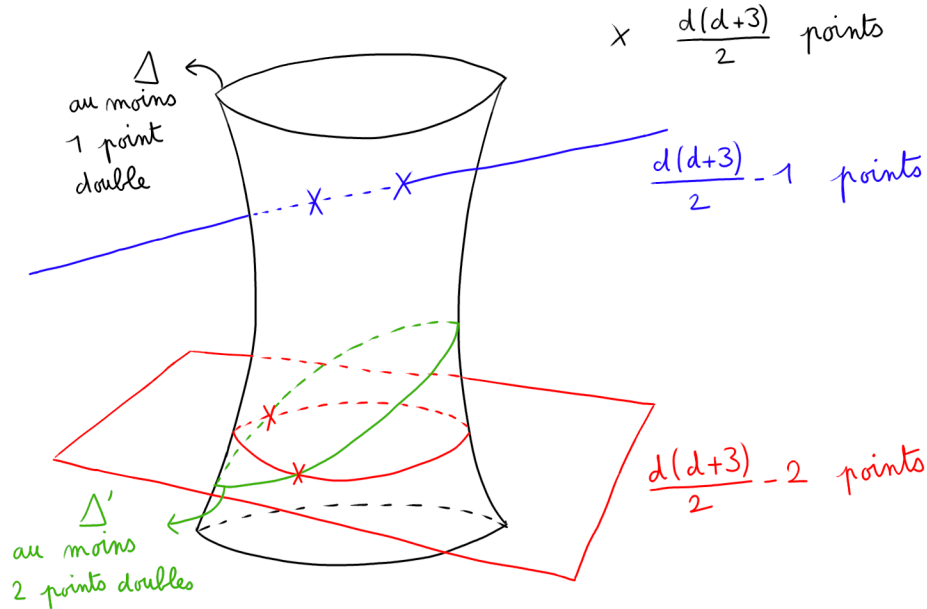


FIGURE 4 – Intersection avec l’hypersurface discriminante

Sur le dessin de la figure 4, si on fixe :

- ▷ $d(d+3)/2$ points, on obtient un point générique de $|\mathcal{L}(d)|$ qui correspond à une courbe générique donc non singulière ;
- ▷ $d(d+3)/2 - 1$ points, on obtient une droite dans l’espace $|\mathcal{L}(d)|$. Cette droite intersecte l’hypersurface discriminante Δ en des points générique de cette hypersurface, c’est-à-dire ayant 1 point double ;
- ▷ $d(d+3)/2 - 2$ points, on obtient un plan dans l’espace $|\mathcal{L}(d)|$. Ce plan intersecte Δ en une variété de dimension 1, qui intersecte Δ' (l’hypersurface discriminante de Δ) en des points génériques de Δ' , c’est-à-dire ayant 2 points doubles.

La moralité est la suivante : si on fixe $d(d+3)/2 - r$ points, on pourra compter les courbes de degré d passant par tous ces points et ayant r points doubles.

Définition 5.2. On note $N_{\mathbb{C}P^2}(d, r)$ le nombre de courbes de degré d dans $\mathbb{C}P^2$ ayant r points doubles et passant par une configuration générique de $d(d+3)/2 - r$ points.

Cette quantité ne dépend pas des points choisis tant qu’ils le sont de façon générique ; la notation est donc licite.

Compte tenu de la formule d'adjonction, on peut aussi fixer $3d - 1 + g$ points et énumérer les droites de degré d et de genre g passant par tous ces points. On pourra donc considérer $N_{\mathbb{CP}^2}(d, (d-1)(d-2)/2 - g)$.

Exemple. Le tableau ci-dessous indique certaines valeurs de $N_{\mathbb{CP}^2}(d, (d-1)(d-2)/2 - g)$.

$g \setminus d$	1	2	3	4
0	1	1	12	620
1	0	0	1	225
2	0	0	0	27
3	0	0	0	1

On connaît aussi les formules :

$$\begin{aligned} d \geq 1 : N_{\mathbb{CP}^2}(d, 0) &= 1 \\ d \geq 3 : N_{\mathbb{CP}^2}(d, 1) &= 3(d-1)^2 \\ d \geq 4 : N_{\mathbb{CP}^2}(d, 2) &= \frac{3}{2}(d-1)(d-2)(3d^2 - 3d - 11). \end{aligned}$$

En réalité, il existe des formules de récurrences obtenues dans [CH96], qui permettent de calculer tous les nombres $N_{\mathbb{CP}^2}(d, r)$. On connaît également certains comportements de ces nombres.

Proposition 5.3 (Di Francesco-Itzykson). *A r fixé et pour $d \geq r + 2$, $N_{\mathbb{CP}^2}(d, r)$ est polynomial en d de degré $2r$.*

A g fixé, $N_{\mathbb{CP}^2}(d, (d-1)(d-2)/2 - g)$ croît exponentiellement vite avec d . Par exemple, $\ln(N_{\mathbb{CP}^2}(d, (d-1)(d-2)/2)) \sim 3d \ln(d)$.

Démonstration. On peut trouver une démonstration de l'asymptotique exponentielle pour le cas du genre nul dans [Bru08]. □

5.2 Compter des courbes sur X_Δ

On peut généraliser la question précédente en remplaçant \mathbb{CP}^2 par une surface torique X_Δ . La notion de degré est remplacée par le système linéaire $|\mathcal{L}_\Delta|$, et on s'intéresse encore aux courbes de genre g ou ayant r points doubles. Ces quantités sont reliées par la formule d'adjonction

$$g + r = \frac{\mathcal{L}_\Delta^2 + K_{X_\Delta} \cdot \mathcal{L}_\Delta + 2}{2} = |\mathring{\Delta} \cap \mathbb{Z}^2|,$$

mais les propriétés énumératives sont différentes selon que l'on fixe le genre ou le nombre de points doubles. Il faut aussi préciser par combien de points nous allons imposer à nos courbes de passer. Ici, les équations des courbes de $|\mathcal{L}_\Delta|$ ont $|\Delta \cap \mathbb{Z}^2|$ coefficients, donc il faut

fixer $|\Delta \cap \mathbb{Z}^2| - 1$ points. Comme précédemment, diminuer le genre de 1 (ou ajouter un point double) réduit de 1 le nombre de points à fixer.

Définition 5.4. On note $N_{X_\Delta}(\mathcal{L}_\Delta, r)$ le nombre de courbes dans $|\mathcal{L}_\Delta|$ ayant r points doubles et passant par une configuration générique de $|\Delta \cap \mathbb{Z}^2| - 1 - r$ points.

Comme dans le cas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, on peut aussi être amené à s'intéresser à $N_{X_\Delta}(\mathcal{L}_\Delta, |\mathring{\Delta} \cap \mathbb{Z}^2| - g)$, qui est le nombre de courbes dans $|\mathcal{L}_\Delta|$ de genre g et qui passent par une configuration générique de $|\partial\Delta \cap \mathbb{Z}^2| - 1 + g$ points.

Exemple. Pour $\Delta = \Delta_d$, on a $X_\Delta = \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, $|\mathcal{L}_\Delta|$ correspond aux courbes algébriques de degré d et $|\Delta \cap \mathbb{Z}^2| - 1 = d(d+3)/2$: on retrouve la formulation de la section précédente.

Il existe une généralisation du résultat de Di Francesco-Itzykson qui, malgré son nom, a été démontrée.

Théorème 5.5 (Conjecture de Göttsche). Il existe un polynôme universel $P_r(x, y, z, t)$ tel que pour tout polygone entier convexe lisse Δ on ait

$$N_{X_\Delta}(\mathcal{L}_\Delta, r) = P_r(\mathcal{L}_\Delta^2, -K_{X_\Delta} \cdot \mathcal{L}_\Delta, \mathcal{L}_\Delta^2, \chi(X_\Delta)).$$

Par exemple pour $\Delta = \Delta_d$, le nombre de courbes de degré d ayant r points doubles et passant par $d(d+3)/2 - r$ points dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ est donné par $P_r(d^2, 3d, 9, 3)$.

5.3 Géométrie tropicale et invariants tropicaux raffinés

Théorèmes de correspondance

Les problèmes énumératifs peuvent aussi se formuler dans le cadre de la géométrie tropicale : on peut se demander combien de courbes tropicales de polygone de Newton Δ et de genre g passent par $3d - 1 + g$ points dans \mathbb{R}^2 . Les problèmes énumératifs précédents sont liés à ceux tropicaux. En effet, on peut associer à une courbe tropicale \mathcal{C} une multiplicité complexe $\mu_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}) \in \mathbb{N}$, et le théorème suivant fait la jonction.

Théorème 5.6 (Théorème de correspondance de Mikhalkin, [Mik04]). On a

$$N_{X_\Delta}(\mathcal{L}_\Delta, |\mathring{\Delta} \cap \mathbb{Z}^2| - g) = \sum \mu_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}),$$

où la somme porte sur les courbes tropicales de polygone de Newton Δ et de genre g passant par une configuration générique de $|\partial\Delta \cap \mathbb{Z}^2| - 1 + g$ points.

En décomposant une courbe tropicale, on obtient un diagramme en étages pondéré \mathcal{D} . En notant $w(a)$ le poids de l'arête a , on définit

$$\mu_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) = \prod_a w(a)^2.$$

Dans le théorème précédent, on peut remplacer $\mu_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ par $\mu_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$, modulo une certaine relation d'équivalence entre les diagrammes, qu'on ne détaille pas dans cette partie, mais qui apparaîtra plus loin.

Théorème 5.7 (Brugallé-Mikhalkin, [Bru08]). On a

$$N_{X_{\Delta}}(\mathcal{L}_{\Delta}, |\mathring{\Delta} \cap \mathbb{Z}^2| - g) = \sum \mu_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}),$$

où la somme porte sur les classes d'équivalence de diagrammes en étages de polygone de Newton Δ et de genre g .

Entiers quantiques et invariants tropicaux raffinés

Étant donné un entier k , l'entier quantique associé est

$$[k] = \frac{q^{k/2} - q^{-k/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \in \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}].$$

C'est un polynôme de Laurent en une variable $q^{1/2}$, dont les coefficients sont positifs. Block et Göttsche ont eu l'idée ([BG16]) de remplacer, dans le théorème précédent, $w(a)$ par son analogue quantique : on obtient alors un polynôme de Laurent en q , qu'on note $G_{X_{\Delta}}(\mathcal{L}_{\Delta}, g)(q)$, ou $G_{\Delta}(g)(q)$.

Définition 5.8 (Invariant tropical raffiné). Le polynôme de Laurent $G_{\Delta}(g)(q)$ s'appelle invariant tropical raffiné.

Le degré de $G_{\Delta}(g)$ est le maximum des degrés des diagrammes en étage de polygone de Newton Δ et de genre g

Remarque. Puisque $[k](1) = k$, alors $G_{\Delta}(g)(1) = N_{X_{\Delta}}(\mathcal{L}_{\Delta}, |\mathring{\Delta} \cap \mathbb{Z}^2| - g)$.

Dans la suite, on s'intéresse au comportement des invariants tropicaux raffinés et de leurs coefficients. Plusieurs résultats existent à ce sujet.

Théorème 5.9 (Block-Göttsche, [BG16]). Les coefficients de $G_{\Delta}(|\Delta \cap \mathbb{Z}^2| - 1 - r)$ sont asymptotiquement polynomiaux par rapport à Δ .

Par exemple pour d assez grand et $\Delta = \Delta_d$, les coefficients de $G_{\mathbb{C}P^2}(d, d(d+3)/2 - r)$ sont polynomiaux en d de degré $2r$.

Si on décide de fixer g plutôt que r , on a par exemple les résultats suivants, où les polygones $\Delta_{a,b,n}$ sont décrits sur la figure suivante.

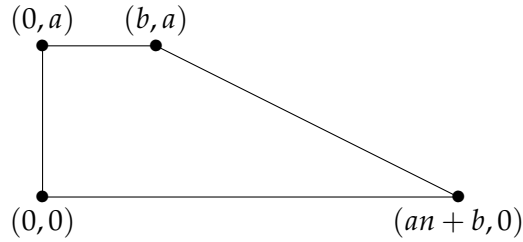


FIGURE 5 – Le polygone $\Delta_{a,b,n}$

Théorème 5.10 (Brugallé-Jaramillo Puentes, [BJP20]). Pour tout $i, g \in \mathbb{N}$ et a, b, n assez grands, le coefficient de codegré i de $G_{\Delta_{a,b,n}}(g)$ est polynomial de degré $i + 2g$ en a et $i + g$ en b et n .

Ce théorème admet d'autres versions, selon qu'on suppose $n = 0$ ou $b = 0$ par exemple. Dans le cas où $g = 0$, un nouveau paramètre, noté s , entre en jeu. Il correspond au nombre de paires de points complexes conjugués que doivent contenir les courbes énumérées. On note $G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s)$ les invariants tropicaux raffinés correspondant. Dans ce cadre, le théorème précédent s'adapte ainsi.

Théorème 5.11 (Brugallé-Jaramillo Puentes, [BJP20]). Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et a, b, n assez grands, le coefficient de codegré i de $G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s)$ est polynomial de degré i en chacune des variables a, b, n et s .

La suite de ce rapport est consacrée à une démonstration de ce dernier résultat.

6 Diagrammes en étages et codegré

6.1 Diagrammes et marquages

Comme évoqué dans la section précédente, les problèmes de géométrie énumératives se ramènent à des problèmes de combinatoires basés sur des diagrammes. Commençons par préciser ce qu'on appelle un diagramme en étages.

Un graphe orienté Γ est constitué de :

- ▷ un ensemble de sommets $V(\Gamma)$,
- ▷ un ensemble d'arêtes bornées $E^0(\Gamma)$ orientées d'un sommet vers un autre,
- ▷ un ensemble d'arêtes infinies $E^{-\infty}(\Gamma)$, appelées sources et orientées vers un sommet,
- ▷ un ensemble d'arêtes infinies $E^{+\infty}(\Gamma)$, appelées puits et orientées depuis un sommet.

On note $E(\Gamma) = E^0(\Gamma) \cup E^{-\infty}(\Gamma) \cup E^{+\infty}(\Gamma)$ l'ensemble des arêtes.

Soit Γ un graphe orienté. Une fonction poids sur Γ est une application $\omega : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{N}^*$; on dit que (Γ, ω) est un graphe orienté pondéré.

Soit (Γ, ω) un graphe orienté pondéré et $v \in V(\Gamma)$. On note

$$v^+ = \{e \in E(\Gamma) \mid e \text{ est orientée vers } v\},$$

$$v^- = \{e \in E(\Gamma) \mid e \text{ est orientée depuis } v\}.$$

On définit la divergence de v par

$$\text{div}(v) = \sum_{e \in v^+} \omega(e) - \sum_{e \in v^-} \omega(e).$$

Définition 6.1 (Diagramme en étage). Un diagramme en étages de polygone de Newton $\Delta_{a,b,n}$ est un couple $\mathcal{D} = (\Gamma, \omega)$ tel que :

- ▷ Γ est un graphe orienté, pondéré par ω , acyclique et connexe, possédant a sommets, b puits et $an + b$ sources,
- ▷ toutes les sources et puits sont de poids 1,
- ▷ pour tout sommet v on a $\text{div}(v) = n$.

Le genre d'un diagramme en étages est son premier nombre de Betti, et son degré est

$$\text{deg}(\mathcal{D}) = \sum_{e \in E(\Gamma)} (\omega(e) - 1).$$

On fera l'abus de confondre le graphe Γ et le diagramme \mathcal{D} . Par convention, on représente les diagrammes en étages orientés du bas vers le haut. On note

$$n(\mathcal{D}) = |V(\mathcal{D}) \cup E(\mathcal{D})| = |\partial\Delta_{a,b,n} \cap \mathbb{Z}^2| - 1 + g.$$

C'est le nombre d'éléments du diagramme, mais aussi le nombre de points par lesquels on impose aux courbes de passer.

Exemple. La figure 6 donne des exemples de diagrammes en étages; on précise les polygones de Newton et les genres, ainsi que les poids différents de 1.

L'orientation de \mathcal{D} induit un ordre partiel sur \mathcal{D} : pour $a, b \in V(\mathcal{D}) \cup E(\mathcal{D})$, on note $a \preceq b$ s'il existe un chemin orienté de a vers b . Si $A \subset \mathbb{N}$, une application $m : A \rightarrow V(\mathcal{D}) \cup E(\mathcal{D})$ est croissante si : $m(i) \preceq m(j) \Rightarrow i \leq j$.

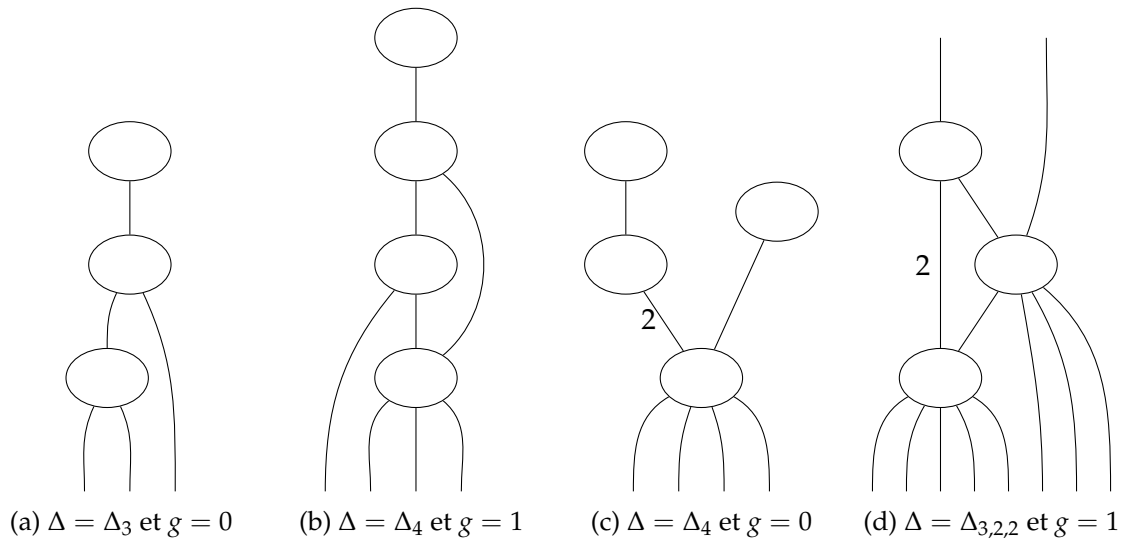


FIGURE 6 – Exemples de diagrammes en étages

Définition 6.2 (Marquage). Soit \mathcal{D} un diagramme en étages de polygone de Newton $\Delta_{a,b,n}$. Un marquage de \mathcal{D} est une bijection croissante

$$m : \llbracket 1, n(\mathcal{D}) \rrbracket \rightarrow V(\mathcal{D}) \cup E(\mathcal{D}).$$

On dit que (\mathcal{D}, m) est un diagramme en étages marqué.

Deux diagrammes en étages marqués (\mathcal{D}, m) et (\mathcal{D}', m') de même polygone de Newton $\Delta_{a,b,n}$ sont isomorphes s'il existe $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ un isomorphisme de graphes pondérés orientés tel que $m' = \varphi \circ m$.

Exemple. Les diagrammes en étages marqués des figures 7.(a) et 7.(b) sont isomorphes, mais ne le sont pas avec celui de la figure 7.(c).

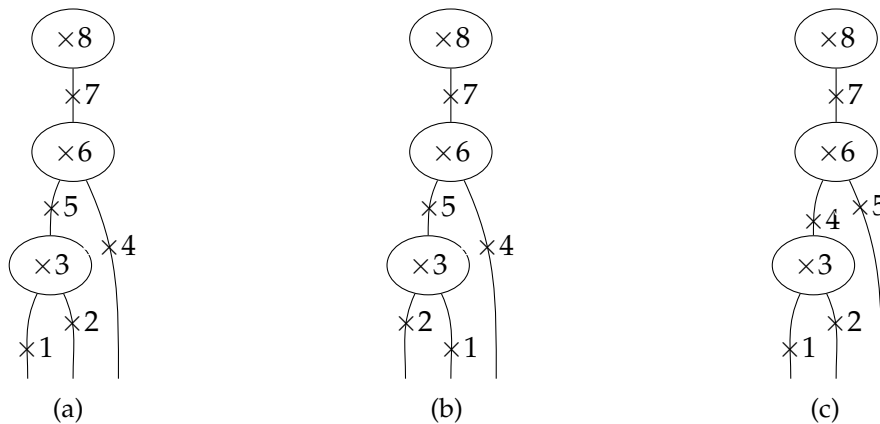


FIGURE 7 – Exemples de diagrammes en étages marqués avec $\Delta = \Delta_3$ et $g = 0$

6.2 Multiplicités et invariants tropicaux raffinés

Soit \mathcal{D} un diagramme en étages de genre $g = 0$. Dans ce cas, un nouveau paramètre $s \in \mathbb{N}$ apparaît.

Définition 6.3 (Appariement). Un appariement d'ordre s de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ est un ensemble S de s paires disjointes $\{i, i+1\} \subset \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit \mathcal{D} un diagramme en étages et S un appariement de $\llbracket 1, n(\mathcal{D}) \rrbracket$. Un marquage m de \mathcal{D} est compatible avec S si pour tout $\{i, i+1\} \in S$, l'ensemble $\{m(i), m(i+1)\}$ est formé d'un sommet et d'une arête adjacente, ou de deux arêtes toutes deux orientées depuis ou vers un même sommet.

Soit (\mathcal{D}, m) un diagramme en étages marqué compatible avec un appariement S . On pose :

- ▷ $E_0 = \{e \in E(\mathcal{D}) \mid \forall \alpha \in S, e \notin m(\alpha)\},$
- ▷ $E_1 = \{e \in E(\mathcal{D}) \mid \exists v \in V(\mathcal{D}), \exists \alpha \in S, \{e, v\} = m(\alpha)\},$
- ▷ $E_2 = \{\{e, e'\} \subset E(\mathcal{D}) \mid \exists \alpha \in S, \{e, e'\} = m(\alpha)\}.$

On associe à chaque appariement une fonction qui à un diagramme associe une multiplicité.

Définition 6.4 (S-multiplicité raffinée). Soit (\mathcal{D}, m) un diagramme en étages marqué et S un appariement de $\llbracket 1, n(\mathcal{D}) \rrbracket$. La S -multiplicité raffinée de \mathcal{D} est le polynôme de Laurent

$$\mu_S(\mathcal{D}, m)(q) = \prod_{e \in E_0} [\omega(e)]^2(q) \prod_{e \in E_1} [\omega(e)](q^2) \prod_{\{e, e'\} \in E_2} \frac{[\omega(e)](q)[\omega(e')](q)[\omega(e) + \omega(e')](q)}{[2]}$$

si S est compatible avec (\mathcal{D}, m) , et 0 sinon.

Ce polynôme est symétrique, appartient à $\mathbb{N}[q, q^{-1}]$ et est de degré $\deg(\mathcal{D})$ (voir [BJP20, lemme 2.12]).

Le théorème suivant fait le lien entre ces multiplicités de diagrammes et le problème énumératif initial.

Théorème 6.5 ([BJP20]). Soit $a, n \in \mathbb{N}^*$ et $b, s \in \mathbb{N}$. Pour tout appariement S d'ordre s de $\llbracket 1, n(\mathcal{D}) \rrbracket$, on a

$$G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s)(q) = \sum_{(\mathcal{D}, m)} \mu_S(\mathcal{D}, m)(q)$$

où la somme porte sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de diagrammes en étages marqués de polygone de Newton $\Delta_{a,b,n}$ et de genre 0.

En particulier, ce théorème annonce que le membre de droite ne dépend pas de S . Pour les calculs, on pourra donc choisir l'appariement que l'on veut.

Remarque. Le degré de $G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s)$ est le maximum des degrés des diagrammes en étages de polygone de Newton $\Delta_{a,b,n}$ et de genre 0.

6.3 Codegré d'un diagramme en étages

Définition 6.6 (Codegré). Soit \mathcal{D} un diagramme de polygone de Newton $\Delta_{a,b,n}$ et de genre g . Son codegré est

$$\text{codeg}(\mathcal{D}) = |\Delta_{a,b,n}^\circ \cap \mathbb{Z}^2| - g - \text{deg}(\mathcal{D}).$$

On peut montrer que le codegré d'un diagramme est positif ([IM12]), et qu'un diagramme \mathcal{D} est de codegré nul si et seulement si

- ▷ l'ordre \preceq est total sur $V(\mathcal{D})$,
- ▷ les éléments de $E^{-\infty}(\mathcal{D})$ (respectivement $E^{+\infty}(\mathcal{D})$) sont tous adjacents au sommet minimal (respectivement maximal),
- ▷ les éléments de $E^0(\mathcal{D})$ relient deux sommets consécutifs.

Exemple. Les diagrammes en étages de la figure 6 sont de codegrés respectifs 1, 2, 2 et 6.

Nous utiliserons dans la suite des opérations sur les diagrammes, que l'on décrit maintenant et qui sont illustrées sur la figure 8.

- A^+ . On suppose que le diagramme \mathcal{D} contient deux sommets $v_1 \preceq v_2$, reliés par une arête e_1 allant de v_1 vers v_2 . On suppose également qu'il existe une arête e_2 partant de v_1 , mais n'arrivant pas à v_2 . On construit un diagramme \mathcal{D}' en faisant partir cette arête de v_2 plutôt que v_1 ; le poids de e_1 devient $\omega'(e_1) = \omega(e_1) + \omega(e_2)$.
- A^- . On suppose que le diagramme \mathcal{D} contient deux sommets $v_1 \preceq v_2$, reliés par une arête e_1 allant de v_1 vers v_2 . On suppose également qu'il existe une arête e_2 arrivant à v_2 , mais ne partant pas à v_1 . On construit un diagramme \mathcal{D}' en faisant arriver cette arête à v_1 plutôt que v_2 ; le poids de e_1 devient $\omega'(e_1) = \omega(e_1) + \omega(e_2)$.

Proposition 6.7. Les opérations A^+ et A^- préservent le genre et le polygone de Newton. De plus, elles réduisent le codegré de $\omega(e_2)$.

Démonstration. Puisque les opérations A^\pm préservent le nombre de régions bornées définies par le graphe, alors elles préservent le genre. De plus, elles ne changent rien au nombre de

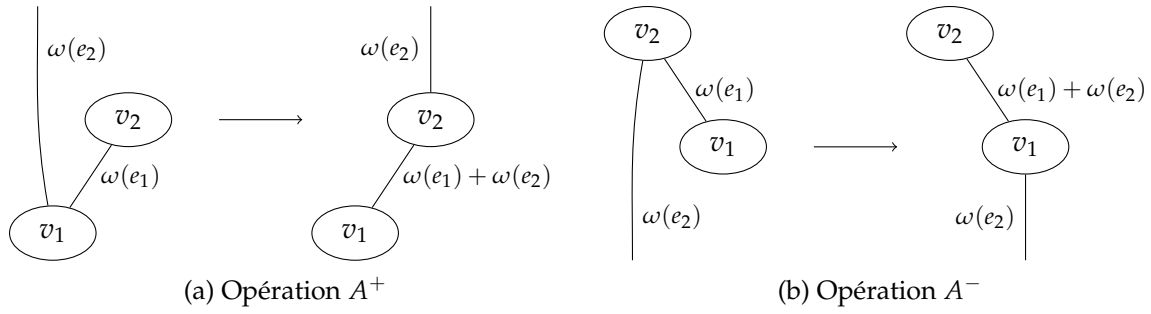


FIGURE 8 – Opérations sur les diagrammes en étages

sommets, de puits ou de sources, et ne modifie pas le poids des arêtes infinies. Enfin, on ajuste le poids de l'arête e_1 pour préserver la divergence. Ces opérations préservent donc le polygone de Newton.

En augmentant le poids de e_1 par $\omega(e_2)$, on augmente d'autant le degré donc on diminue d'autant le codegré. \square

Proposition 6.8. Soit \mathcal{D} un diagramme en étages de polygone de Newton Δ et ayant une divergence constante $n \in \mathbb{Z}$. Si \mathcal{D} possède k sommets minimaux, alors

$$\text{codeg}(\mathcal{D}) \geq (k-1) \left(|E^{-\infty}(\mathcal{D})| - \frac{nk}{2} \right).$$

Ce résultat s'applique en particulier avec $\Delta_{a,b,n}$ et $-\Delta_{a,b,n}$, qui sont de divergence n et $-n$.

Démonstration. Notons v_1, \dots, v_k les sommets minimaux de \mathcal{D} . Soit u_i le nombre de sources arrivant au sommet v_i . En appliquant un nombre fini de fois l'opération A^- , on peut supposer que toutes les sources arrivent à un sommet minimal, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^k u_i = |E^{-\infty}(\mathcal{D})|.$$

Avec des opérations A^\pm , on se ramène au cas où il existe un sommet v supérieur à tous les v_i , et tel que tout élément de $E^0(\mathcal{D})$ partant d'un v_i arrive sur v et qu'il n'y ait pas de puits partant d'un v_i . Soit $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq n_i}$ les arêtes dans $E^0(\mathcal{D})$ partant de v_i . Puisque la divergence de v_i est n , et puisque les sources sont de poids 1, alors

$$\sum_{j=1}^{n_i} \omega(e_{i,j}) = u_i - n$$

donc

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{n_i} \omega(e_{i,j}) = |E^{-\infty}(\mathcal{D})| - u_k - (k-1)n.$$

Enfin, avec des opérations A^- on construit un diagramme \mathcal{D}' ayant $k - 1$ sommets minimaux, en descendant les sommets v_1, \dots, v_{k-1} sous le sommet v_k , puis en faisant descendre les u_k sources de v_k sous le sommet v_{k-1} . Dans ce processus, les arêtes $e_{i,j}$ pour $i \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$, ainsi que les u_k sources de v_k , sont déplacées une unique fois; le codegré diminue donc de $(|E^{-\infty}(\mathcal{D})| - u_k - (k - 1)n) + u_k = |E^{-\infty}(\mathcal{D})| - (k - 1)n$. Ainsi, en prenant en compte en opérations précédentes :

$$\text{codeg}(\mathcal{D}) \geq \text{codeg}(\mathcal{D}') + |E^{-\infty}(\mathcal{D})| - (k - 1)n.$$

Si on applique ceci $k - 1$ fois afin de n'avoir plus qu'un sommet minimal, on obtient

$$\text{codeg}(\mathcal{D}) \geq (k - 1)|E^{-\infty}(\mathcal{D})| + \frac{k(k - 1)}{2}n$$

d'où le résultat. □

On termine cette section par un résultat sur les coefficients de polynômes de Laurent. Soit P un polynôme de Laurent de degré d . Le coefficient de codegré i de P est son coefficient de degré $d - i$; on le note $\langle P \rangle_i$.

On définit

$$F(k, l) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = l \\ i_1, \dots, i_k \geq 1}} \prod_{j=1}^k i_j$$

et

$$\Phi_l(k) = F(k, k + l).$$

Proposition 6.9. \triangleright La fonction Φ_l est polynomiale de degré l .

\triangleright Soit $i, k \geq 0$ et $a_1, \dots, a_k > i$ des entiers. Alors

$$\left\langle \prod_{j=1}^k [a_j]^2(q) \right\rangle_i = \Phi_l(k).$$

Démonstration. Voir [BJP20]. □

On déduit de cette proposition que la fonction

$$(k, a_1, \dots, a_k) \mapsto \left\langle \prod_{j=1}^k [a_j]^2(q) \right\rangle_i$$

ne dépend que de k sur l'ensemble $\{a_1 > i, \dots, a_k > i\}$, et est polynomiale de degré i .

Remarque. Soit d le degré de $G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s)$; c'est le nombre de points entiers à l'intérieur de $\Delta_{a,b,n}$. Étant donné le théorème 6.5, les diagrammes de codegré nul sont les seuls qui contribuent au coefficient dominant de $G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s)$, c'est-à-dire à son coefficient de codegré 0. De

plus, un diagramme de codegré i a une multiplicité de degré $d - i$; il ne contribue donc qu'aux coefficients de $G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s)$ de codegré au moins i . Autrement dit, les diagrammes qui contribuent à $\langle G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s) \rangle_i$ sont uniquement ceux de codegré au plus i .

7 Comportement des coefficients des invariants tropicaux raffinés

On rappelle le résultat dont on souhaite présenter une démonstration.

Théorème 7.1 (Brugallé-Jaramillo Puentes). Pour tout $i \in \mathbb{N}$ notons

$$U_i = \{(a, b, n, s) \in \mathbb{N}^4 \mid an + b \geq i + 2s, a > i, b > i\}.$$

Alors l'application

$$\begin{cases} U_i & \rightarrow \mathbb{N} \\ (a, b, n, s) & \mapsto \langle G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s) \rangle_i \end{cases}$$

est polynomiale de degré i en chacune des variables a, b, n et s .

Pour montrer ceci, nous allons en fait donner une formule explicite pour $\langle G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s) \rangle_i$. La preuve repose sur le fait qu'avec ces hypothèses les diagrammes concernés se décrivent assez simplement, en fonction de leur codegré. Commençons par donner cette description.

7.1 Description des diagrammes

Soit $i \in \mathbb{N}$ et $(u, \tilde{u}) \in \mathbb{N}^i \times \mathbb{N}^i$. On note

$$\text{codeg}(u, \tilde{u}) = \sum_{k=1}^i k(u_k + \tilde{u}_k)$$

et

$$C_i = \{(u, \tilde{u}) \in \mathbb{N}^i \times \mathbb{N}^i \mid \text{codeg}(u, \tilde{u}) \leq i\}.$$

Pour $a > i, b, n \geq 0$ et $(u, \tilde{u}) \in C_i$, on note $\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$ le diagramme en étages de polygone de Newton $\Delta_{a,b,n}$ représenté sur la figure 9. Il est constitué :

- ▷ d'une partie basse contenant des sources, au plus jusqu'au sommet v_{i+1} ,
- ▷ d'une partie intermédiaire formée d'un enchainement d'arêtes et de sommets,
- ▷ d'une partie haute contenant des puits, au plus jusqu'au sommet v_{a-i} .

Son genre est nul, et l'ordre \preceq est total sur les sommets.

On calcule facilement les poids des arêtes de $\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$, ainsi que son codegré.

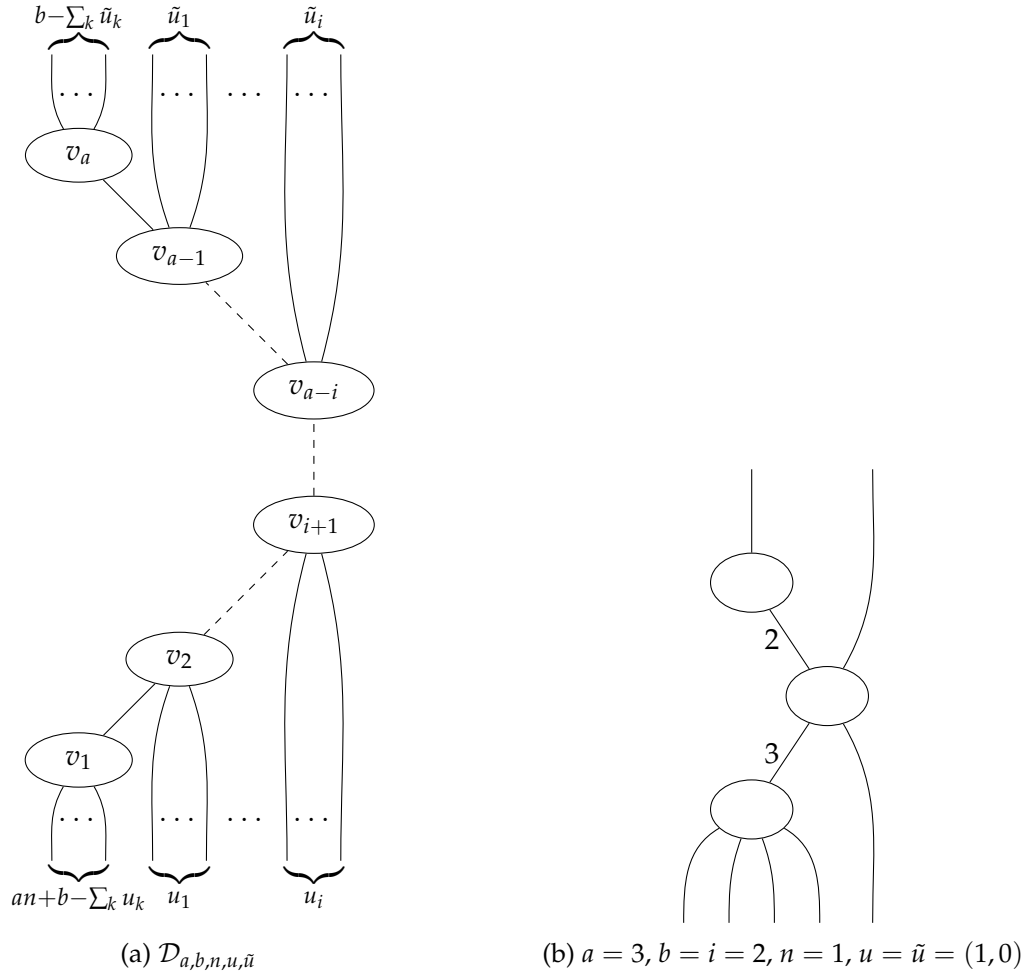


FIGURE 9 – Le diagramme $\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$ et un exemple

Lemme 7.2. Soit $i \in \mathbb{N}$, $a > i$, $b, n \geq 0$ et $(u, \tilde{u}) \in C_i$. Soit $v_1 \preceq \dots \preceq v_a$ les sommets de $\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$, et $e \in E^0(\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}})$. Soit $k \in \llbracket 1, a-1 \rrbracket$ tel que e relie les sommets v_k et v_{k+1} .

- ▷ Si $k \in \llbracket 1, i \rrbracket$, alors $\omega(e) = (a-k)n + b - \sum_{j=k}^i u_j$.
- ▷ Si $k \in \llbracket i+1, a-i-1 \rrbracket$, alors $\omega(e) = (a-k)n + b$.
- ▷ Si $k \in \llbracket a-i, a-1 \rrbracket$, alors $\omega(e) = b + (a-k)n - \sum_{j=a-k}^i \tilde{u}_j$.

Démonstration. On calcule ces poids de proche en proche, en partant soit de $k = 1$, soit de $k = a-1$. \square

Lemme 7.3. Soit $i \in \mathbb{N}$, $a > i$, $b, n \geq 0$ et $(u, \tilde{u}) \in C_i$. Alors

$$\text{codeg}(\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}) = \text{codeg}(u, \tilde{u}) \leq i.$$

Démonstration. Notons v_1 (respectivement v_a) le sommet minimal (respectivement maximal) pour \preceq de $\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$. Par des opérations A^- (respectivement A^+), on fait descendre toutes les sources sur le sommet v_1 (respectivement monter tous les puits sur le sommet v_a). Ces opérations diminuent le codegré de $\text{codeg}(u, \tilde{u})$. Or, le diagramme obtenu est de codegré 0, d'où le résultat. \square

On remarque également que, puisque

$$\sum_{j=1}^i u_j \leq \text{codeg}(\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}) \leq i,$$

alors le nombre d'arêtes infinies adjacentes au sommet le plus bas est au moins $an + b - i$.

Lemme 7.4. Soit $i \in \mathbb{N}$, $a, b > i$ et $n \geq 0$. Soit \mathcal{D} un diagramme en étages de polygone de Newton $\Delta_{a,b,n}$ et de genre 0. On suppose que $\text{codeg}(\mathcal{D}) \leq i$. Alors il existe $(u, \tilde{u}) \in C_i$ tel que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$.

Démonstration. Montrons d'abord que l'ordre \preceq est total sur l'ensemble $V(\mathcal{D})$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Puisque \mathcal{D} est un arbre, cela signifie que \mathcal{D} possède plusieurs sommets minimaux ou maximaux pour \preceq .

Soit k le nombre de sommets minimaux. D'après la proposition 6.8 on a

$$\text{codeg}(\mathcal{D}) \geq (k-1) \left(|E^{-\infty}(\mathcal{D})| - \frac{nk}{2} \right).$$

Puisque le polygone de Newton de \mathcal{D} est $\Delta_{a,b,n}$, alors $|E^{-\infty}(\mathcal{D})| = an + b$. De plus, puisque \mathcal{D} possède a sommets alors $k \leq a - 1$. Ainsi

$$\text{codeg}(\mathcal{D}) \geq (k-1) \left(\left(a - \frac{k}{2} \right) n + b \right) \geq (k-1) \left(\frac{a+1}{2} n + b \right) \geq (k-1)b.$$

Ainsi, si $k \geq 2$ on a $\text{codeg}(\mathcal{D}) \geq b > i$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $k = 1$.

En inversant l'orientation dans le diagramme \mathcal{D} , on obtient un diagramme \mathcal{D}' de polygone de Newton $-\Delta_{a,b,n}$, dont les sommets sont de divergence $-n$, et qui a le même codegré que \mathcal{D} . Ses sommets minimaux correspondent aux sommets maximaux de \mathcal{D} . Soit k leur nombre. La proposition 6.8 donne

$$\text{codeg}(\mathcal{D}) \geq (k-1) \left(b + \frac{nk}{2} \right) \geq (k-1)b$$

et on conclut comme précédemment que $k = 1$.

Ainsi, \mathcal{D} admet un unique sommet minimal et un unique sommet maximal, et l'ordre est donc total sur $V(\mathcal{D})$. Notons $v_1 \preceq \dots \preceq v_a$ les sommets de \mathcal{D} . Si u_j (respectivement \tilde{u}_j) est le nombre de sources arrivant au sommet v_{j+1} (respectivement de puits partant du sommet v_{a-j}), alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$. Puisque $\text{codeg}(u, \tilde{u}) = \text{codeg}(\mathcal{D})$ d'après le lemme précédent, et puisque $\text{codeg}(\mathcal{D}) \leq i$, alors $(u, \tilde{u}) \in C_i$. \square

En résumé, pour $a, b > i$ les diagrammes en étages de polygone de Newton $\Delta_{a,b,n}$ et de codegré au plus i sont exactement les diagrammes $\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$ pour $(u, \tilde{u}) \in C_i$. De plus, on a également l'inégalité suivante.

Lemme 7.5. Soit $i \in \mathbb{N}$, $a, b > i$ et $n \geq 0$. Soit \mathcal{D} un diagramme en étages de polygone de Newton $\Delta_{a,b,n}$, de genre 0 et de codegré au plus i . Alors le poids de chaque arête $e \in E^0(\mathcal{D})$ vérifie

$$\omega(e) > i - \text{codeg}(\mathcal{D}).$$

Démonstration. D'après ce qui précède, on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$ avec $(u, \tilde{u}) \in C_i$. Soit $v_1 \preceq \dots \preceq v_a$ les sommets de \mathcal{D} . Puisque \mathcal{D} est de codegré au plus i , alors la partie basse de \mathcal{D} s'arrête au plus au sommet v_{i+1} .

Considérons une arête bornée e ayant le plus petit poids. Supposons que e se situe dans la partie intermédiaire ou haute de \mathcal{D} , et soit e' une arête telle que $e \preceq e'$. Puisque les sommets de \mathcal{D} sont de divergence (strictement si $n > 0$) positive, alors $\omega(e') \leq \omega(e)$. Ainsi, on peut supposer que e est dans la partie basse de \mathcal{D} ou bien est l'arête la plus grande pour \preceq .

Dans le premier cas, soit $1 \leq k \leq i$ tel que e relie v_k à v_{k+1} . D'après le lemme 7.2,

$$\omega(e) = (a - k)n + b - \sum_{j=k}^i u_j \geq 0 + b - \text{codeg}(\mathcal{D}) > i - \text{codeg}(\mathcal{D}).$$

Dans le second cas, toujours grâce au lemme 7.2,

$$\omega(e) = n + b - \sum_{j=1}^i \tilde{u}_j \geq 0 + b - \text{codeg}(\mathcal{D}) > i - \text{codeg}(\mathcal{D}).$$

\square

D'après une remarque précédente, on sait que seuls les diagrammes de codegré au plus i interviennent dans le coefficient de codegré i de $G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s)$. On doit donc énumérer, sous conditions de marquages, les diagrammes $\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$ avec $(u, \tilde{u}) \in C_i$.

7.2 Énumération des diagrammes

On définit

$$\tilde{v}_u(a, b, n, s) = \sum \frac{s!}{s_0! \dots s_i!} \prod_{k=1}^i \binom{an + b + 2k - 2s_0 - \dots - 2s_k - u_{k+1} - \dots - u_i}{u_k - 2s_k}$$

où la somme porte sur l'ensemble $\{(s_0, \dots, s_i) \in \mathbb{N}^{i+1} \mid s_0 + \dots + s_i = s\}$, et

$$v_{u, \tilde{u}}(a, b, n, s) = \tilde{v}_u(a, b, n, s) \tilde{v}_{\tilde{u}}(0, b, 0, 0).$$

Par convention, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est nul si $k < 0$ ou $n < 0$. Si $k \geq 0$, alors c'est un polynôme en n de degré k . On a ainsi le lemme suivant.

Lemme 7.6. Soit $i \in \mathbb{N}$, $(u, \tilde{u}) \in C_i$. L'application

$$(a, b, n, s) \mapsto v_{u, \tilde{u}}(a, b, n, s)$$

est polynomial sur l'ensemble $\{b \geq i, an + b \geq i + 2s\}$, de degré au plus $\text{codeg}(u, \tilde{u})$ en chacune des variables.

Démonstration. On a

$$2(s_0 + \dots + s_k) + u_{k+1} + \dots + u_i \leq 2s + \sum_{j=1}^i j u_j \leq 2s + i \leq an + b + 2k$$

donc le coefficient binomial

$$\binom{an + b + 2k - 2s_0 - \dots - 2s_k - u_{k+1} - \dots - u_i}{u_k - 2s_k}$$

est soit nul (si $u_k - 2s_k < 0$), soit un polynôme de degré $u_k - 2s_k$ en a, b, n et s (car $s_0 + \dots + s_k = s - (s_{k+1} + \dots + s_i)$). Le produit de ces coefficients pour $k \in \llbracket 1, i \rrbracket$ est ainsi polynomial de degré au plus

$$\sum_{k=1}^i (u_k - 2s_k) = \sum_{k=1}^i u_k - 2(s - s_0)$$

en a, b, n et s . De plus, si on considère fixé s_0 , alors $s! / (s_0! \dots s_i!)$ est un polynôme en s de degré $s - s_0$.

En mettant ensemble toutes les contributions, $\tilde{v}_u(a, b, n, s)$ (respectivement $\tilde{v}_{\tilde{u}}(0, b, 0, 0)$) est polynomial en a, b, n et s (respectivement en b) de degré au plus $\sum_k u_k$ (respectivement $\sum_k \tilde{u}_k$). Donc $v_{u, \tilde{u}}(a, b, n, s)$ est polynomial de degré au plus $\text{codeg}(u, \tilde{u})$ en a, b, n et s . \square

Remarque. Si on regarde la démonstration en détails, on a montré que $\tilde{v}_{u, \tilde{u}}$ est de degré au plus $\sum_k u_k$ en a, n et s , et au plus $\sum_k (u_k + \tilde{u}_k)$ en b . Cependant, on n'a pas besoin de cette précision dans la suite.

Puisque l'invariant tropical raffiné $G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s)$ ne dépend pas de l'appariement S d'ordre s choisi, on s'en fixe un. On considérera des appariements de la forme

$$S = \{\{1, 2\}, \dots, \{2s - 1, 2s\}\}$$

où $s \leq \lfloor n(\mathcal{D})/2 \rfloor$.

Lemme 7.7. Soit $i \in \mathbb{N}$, $(u, \tilde{u}) \in C_i$ et $a, b, n, s \in \mathbb{N}$ tels que $b \geq i$ et $an + b \geq i + 2s$. Alors $\nu_{u, \tilde{u}}(a, b, n, s)$ est le nombre de marquages de $\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$ compatibles avec S .

Ce lemme s'interprète ainsi. Pour marquer le diagramme $\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$ de façon compatible avec S , on doit marquer chacune des trois parties le constituant. Pour la partie intermédiaire il n'y a pas de choix possible; les possibilités pour le bas dépendent des sources et sont comptées par $\tilde{\nu}_u(a, b, n, s)$; et celles pour le haut dépendent des puits et sont comptées par $\tilde{\nu}_{\tilde{u}}(0, b, 0, 0)$. Grâce à la forme choisie pour S , le paramètre s n'intervient pas dans le haut du diagramme.

Démonstration. Soit m un marquage de $\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$. Puisque $an + b - i \geq 2s$, alors pour $j \leq 2s$, $m(j) \in E^{-\infty}(\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}})$. Le reste de la preuve est un calcul.

Pour la partie basse, il faut choisir combien de paires de S on met parmi les u_j sources de v_{j+1} , puis choisir lesquelles de ces paires on met, ce qui donne la somme et le coefficient $\frac{s!}{s_0! \dots s_i!}$. Enfin, il faut choisir le marquage des $u_j - 2s_j$ sources restantes attachées à v_{j+1} , ce qui donne le produit de coefficients binomiaux, d'où le $\tilde{\nu}_u(a, b, n, s)$.

Pour la partie haute, il faut choisir le marquage des \tilde{u}_j puits attachés à v_{a-j} , ce qui donne $\tilde{\nu}_{\tilde{u}}(0, b, 0, 0)$. □

7.3 Énoncé et démonstration du théorème

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients pour montrer le théorème. On rappelle que la notation $\Phi_k(l)$ est définie en section 6.3.

Théorème 7.8 (Brugallé-Jaramillo Puentes). Pour tout $i \in \mathbb{N}$ notons

$$U_i = \{(a, b, n, s) \in \mathbb{N}^4 \mid an + b \geq i + 2s, a > i, b > i\}.$$

Alors l'application

$$\langle G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s) \rangle_i = \sum_{(u, \tilde{u}) \in C_i} \nu_{u, \tilde{u}}(a, b, n, s) \Phi_{i - \text{codeg}(u, \tilde{u})}(a - 1).$$

En particulier l'application

$$\begin{cases} U_i & \rightarrow \mathbb{N} \\ (a, b, n, s) & \mapsto \langle G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s) \rangle_i \end{cases}$$

est polynomiale de degré i en chacune des variables a, b, n et s .

Démonstration. Soit $(a, b, n, s) \in U_i$. Puisque $an + b - i \geq 2s$, alors tout marquage m de $\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$ compatible avec S vérifie $m(j) \in E^{-\infty}(\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}})$ pour $j \leq 2s$. On a donc

$$\mu_S(\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}, m)(q) = \prod_{e \in E^0(\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}})} [\omega(e)]^2(q)$$

et on notera $\mu(\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}})$ cette quantité.

Puisque seuls les diagrammes de codegré au plus i interviennent dans le coefficient de codegré i de $G_{\Delta_{a,b,n}}$, alors d'après la description des diagrammes de codegré au plus i , et par le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} \langle G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s) \rangle_i &= \left\langle \sum_{(u,\tilde{u}) \in C_i} v_{u,\tilde{u}}(a, b, n, s) \mu(\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}) \right\rangle_i \\ &= \sum_{(u,\tilde{u}) \in C_i} v_{u,\tilde{u}}(a, b, n, s) \langle \mu(\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}) \rangle_{i - \text{codeg}(u,\tilde{u})} \end{aligned}$$

En effet, si $\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}$ est de codegré $c = \text{codeg}(u, \tilde{u}) \leq i$ et si on note d le degré d'un diagramme de codegré nul, alors $\mu(\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}})$ est de degré $d - c$. Son coefficient qui intervient dans $\langle G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s) \rangle_i$ est donc celui de codegré $i - c$.

De plus, par le lemme 7.5 d'inégalité sur les poids, et par la proposition 6.9, on a

$$\langle \mu(\mathcal{D}_{a,b,n,u,\tilde{u}}) \rangle_{i - \text{codeg}(u,\tilde{u})} = \Phi_{i - \text{codeg}(u,\tilde{u})}(a - 1)$$

puisqu'il y a $a - 1$ arêtes bornées. Ceci donne la formule pour $\langle G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s) \rangle_i$.

Enfin, d'après la proposition 6.9, $\Phi_{i - \text{codeg}(u,\tilde{u})}$ est polynomial en a de degré $i - \text{codeg}(u, \tilde{u})$; et le lemme 7.6 montre que $v_{u,\tilde{u}}$ est polynomial de degré au plus $\text{codeg}(u, \tilde{u})$ en chacune des variables. Ainsi, $v_{u,\tilde{u}}(a, b, n, s) \Phi_{i - \text{codeg}(u,\tilde{u})}(a - 1)$ est polynomial :

- ▷ en a de degré au plus $i - \text{codeg}(u, \tilde{u}) + \text{codeg}(u, \tilde{u})$, donc au plus i ;
- ▷ en b, n et s de degré au plus $\text{codeg}(u, \tilde{u})$, donc au plus i .

En sommant toutes les contributions, $\langle G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s) \rangle_i$ est polynomial en a, b, n et s de degré au plus i . Puisque pour $(u, \tilde{u}) = ((i, 0, \dots, 0), 0)$ le degré en chacune des variables b, n et s est exactement i , alors $\langle G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s) \rangle_i$ est polynomial en b, n et s de degré i . Pour $(u, \tilde{u}) = (0, 0)$, le degré en a est exactement i , donc $\langle G_{\Delta_{a,b,n}}(0, s) \rangle_i$ est polynomial en a de degré i . \square

Références

- [BG16] Florian BLOCK et Lothar GÖTTSCHE : Refined curve counting with tropical geometry. *Compositio Mathematica*, 152(1):115–151, janvier 2016. arXiv : 1407.2901.
- [BJP20] Erwan BRUGALLÉ et Andrés JARAMILLO PUENTES : Polynomiality properties of tropical refined invariants. novembre 2020. arXiv : 2011.12668.
- [Bru08] Erwan BRUGALLÉ : Géométries énumératives complexe, réelle et tropicale. In Pascale HARINCK, Alain PLAGNE et Claude SABBAH, éditeurs : *Géométrie tropicale*, pages 27–84. Éd. de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2008.
- [CH96] Lucia CAPORASO et Joe HARRIS : Counting plane curves of any genus. août 1996. arXiv : alg-geom/9608025.
- [GKZ94] Israel M. GELFAND, Mikhail M. KAPRANOV et Andrei V. ZELEVINSKY : *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994.
- [IM12] Ilia ITENBERG et Grigory MIKHALKIN : On Block-Goettsche multiplicities for planar tropical curves. janvier 2012. arXiv : 1201.0451.
- [Mik04] Grigory MIKHALKIN : Enumerative tropical algebraic geometry in \mathbb{R}^2 . décembre 2004. arXiv : math/0312530.
- [Mir95] Rick MIRANDA : *Algebraic curves and Riemann surfaces*. Numéro v. 5 de Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, Providence, R.I, 1995.
- [Sha13] Igor R. SHAFAREVICH : *Basic Algebraic Geometry 1*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013.