

Laboratoire de
Mathématiques
Jean
Leray

UMR 6629 - Nantes



UNIVERSITÉ DE NANTES

Mathématiques fondamentales et appliquées : Algèbre-Géométrie

Rapport de stage de Master 2

Entropie topologique positive sur une nilvariété d'après LEO T. BUTLER

Mugisho Zagabe Christian

Encadrant : **Samuel Tapie**

Juillet 2018

Remerciement

Mes remerciements les plus sincères s'adressent, en premier lieu, à mon encadreur de stage, Monsieur Samuel Tapie. Un grand merci pour ses remarques, ses explications, ses orientations, ses propositions et sa disponibilité. Qu'à travers lui, tous les professeurs et intervenants du laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL) reçoivent ma profonde reconnaissance.

Que ma profonde gratitude parvienne également au centre de Mathématiques Henri Lebesgue, à l'Université de Nantes et à l'Institut Supérieur Pédagogique de Bukavu (ISP-Bukavu).

Table des matières

1	Introduction	5
2	Quelques aspects sur les systèmes dynamiques	7
2.1	Systèmes dynamiques discret et continu	7
2.1.1	Quelques définitions	7
2.1.2	Du discret au continu et inversement	11
2.1.3	Conjugaison	11
2.1.4	Dynamique topologique	12
2.2	Méthode de Poincaré-Melnikov	17
2.3	Entropie topologique	21
2.3.1	Entropie topologique dans le cas discret	21
2.3.2	Entropie topologique pour un flot	23
2.3.3	Entropie topologique dans le cas non compact	25
2.4	Fer à cheval de Smale	26
2.4.1	Description	26
2.4.2	Dynamique symbolique	29
3	Quelques aspects sur les structures riemannienne et symplectique	30
3.1	Variété riemannienne	30
3.1.1	Dérivée covariante	31
3.1.2	Géodésiques sur une variété riemannienne	33
3.1.3	Flot géodésique sur une variété riemannienne	36
3.2	Variété symplectique	38
3.2.1	Forme symplectique	38
3.2.2	Champ et flot hamiltoniens	40
3.2.3	Crochet de Poisson	41
3.3	Structure de Lie-Poisson	42
3.3.1	Variété de Poisson	42
3.3.2	Fonctions de Casimir	43
3.3.3	Application de Poisson.	44

4	Orbite coadjointe d'une algèbre de Lie	45
4.1	Groupe et algèbre de Lie	45
4.1.1	Groupe topologique	45
4.1.2	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie	46
4.2	Représentations adjointe et coadjointe	49
4.2.1	Orbite coadjointe	49
4.2.2	Forme symplectique sur l'orbite coadjointe	51
4.2.3	Crochet de Lie-Poisson sur \mathfrak{g}^*	51
5	Cas de l'étude de Leo T. Butler	54
5.1	Quelques considérations et notations	54
5.1.1	Métrique invariante à gauche sur un groupe de Lie	54
5.1.2	Champ d'Euler et champ hamiltonien	56
5.2	Géométrie de Poisson sur $T^*\mathcal{T}$	57
5.3	Métrique invariante à gauche avec entropie positive	62
6	Conclusion	65

En théorie des systèmes dynamiques, la notion d'entropie topologique correspond à un nombre réel associé à toute dynamique topologique. Elle permet de mesurer la dispersion des orbites sur plusieurs itérations. Lorsqu'elle est nulle, c'est le cas par exemple d'un système décrit par une isométrie, les orbites qui sont proches au départ ne s'éloignent pas trop vite après plusieurs itérations. Cependant, si elle est positive, cela présage le chaos dans le système dynamique. Il s'agit d'un invariant topologique dans le sens où deux systèmes dynamiques conjugués ont la même entropie topologique. Plus fort encore, si un système dynamique est une extension d'un deuxième, ce premier a une entropie topologique au moins égale à celle du second.

Un des exemples classiques de systèmes dynamiques à entropie topologique positive est le fer à cheval de Smale. Ainsi, la donnée d'un système dynamique ayant un facteur (« un sous-système dynamique ») conjugué au fer à cheval de Smale assure la positivité de son entropie topologique. Le théorème de Birkhoff-Smale sur le point homocline transverse est d'une importance capitale pour cet aspect.

Une nilvariété M est une variété obtenue comme quotient d'un groupe de Lie nilpotent G par un de ses sous-groupes discrets D . Si on définit une métrique riemannienne invariante à gauche sur G , elle induit sur M une métrique invariante à gauche et, par conséquent, un flot géodésique invariant à gauche sur le fibré cotangent T^*M .

Dans l'introduction de [1], Leo T. Butler revient sur une question intéressante concernant le flot géodésique sur une nilvariété : « *Tout flot géodésique invariant à gauche sur une nilvariété compacte est-il à entropie nulle ?* »

Il montre, dans son article, un contre exemple en considérant le problème sur la nilvariété $M = D \backslash \mathcal{T}$ où $\mathcal{T} := T_3 \oplus T_4$, où T_n correspond au groupe de Lie des matrices triangulaires supérieures ayant des 1 sur la diagonale et $D < \mathcal{T}$ est un sous-groupe discret. Afin d'y parvenir, il procède, succinctement, comme suit :

- soit \mathfrak{T} l'algèbre de Lie de \mathcal{T} et \mathfrak{T}^* son dual. Soit H un hamiltonien sur le fibré cotangent $T^*\mathcal{T}$, on note E_H le champ d'Euler (sur \mathfrak{T}^*) ; qui correspond donc à la projection sur le second facteur (de $T^*\mathcal{T} = \mathcal{T} \times \mathfrak{T}^*$) du champ de vecteurs hamiltonien associé à H ;
- le flot géodésique correspond au flot hamiltonien pour un hamiltonien métrique sur $T^*\mathcal{T}$;
- pour une famille particulière de hamiltoniens métriques H_ϵ , on étudie (sur une orbite coad-

1 Introduction

jointe $\mathcal{O}_k \subset \mathfrak{F}^*$ convenable) le champ d'Euler E_{H_ϵ} correspondant ;

- un symplectomorphisme entre \mathcal{O}_k et $T^*\mathbb{R}^3$ permet de ramener le problème à un hamiltonien H_ϵ sur $T^*\mathbb{R}^3$, lequel peut être transformé par changement de variable et réduction sur une sous-variété symplectique de dimension 4 ;
- on trouve alors sur \mathbb{R}^4 un hamiltonien F_ϵ ayant la forme d'un *Duffing forcé + oscillateur harmonique + perturbation* ;
- avec F_ϵ , on utilise la méthode de Poincaré-Melnikov pour montrer l'existence d'un point homocline transverse ;
- par le théorème de Birkoff-Smale, le flot de F_ϵ possède un facteur conjugué au fer à cheval de Smale suspendu ;
- l'entropie topologique du fer à cheval de Smale étant positive et le flot géodésique invariant à gauche étant une extension du flot de F_ϵ , l'entropie topologique de ce dernier est donc positive.

Nous tacherons, dans ce rapport, d'expliciter toutes ces notions afin de bien comprendre le procédé utilisé par Leo T. Butler. C'est cela qui constitue l'objectif de ce travail.

Ce rapport est subdivisé en quatre chapitres

1. *Quelques aspects sur les systèmes dynamiques.* Où notre objectif sera principalement de présenter les notions d'entropie topologique, de fer à cheval de Smale et la méthode de Poincaré-Melnikov. Nous y présenterons également quelques illustrations afin de fournir un avant goût aux développements faits dans l'article de Leo T. Butler.
2. *Quelques aspects sur les structures riemannienne et symplectique.* Dans ce chapitre le but premier est de mettre en avant les notions de variété riemannienne, de flot géodésique, de variété symplectique, de flot et champ hamiltoniens et de variété de Poisson.
3. *Orbite coadjointe d'une algèbre de Lie.* Tout en présentant des notions connexes, nous mettrons un cap vers la notion d'orbite coadjointe pour une algèbre de Lie et sa structure symplectique.
4. *Cas de l'étude de Leo T. Butler.* Ce chapitre sera consacré à l'étude menée dans l'article [1]. Nous reviendrons sur la démarche entreprise par Leo T. Butler pour répondre à la question principale posée ci-dessus.

Quelques aspects sur les systèmes dynamiques

2.1 Systèmes dynamiques discret et continu

Dans cette section nous aborderons quelques notions préliminaires concernant la théorie des systèmes dynamiques. Il sera question de définitions et exemples qui nous seront utiles pour la suite.

2.1.1 Quelques définitions

Définition 2.1.1. *Soit M un ensemble non vide. Un **système dynamique (à temps) discret** est la donnée d'une application $f : M \rightarrow M$.*

On définit de façon récursive les itérations de f par

$$f^{n+1} = f \circ f^n$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$ avec $f^0 = Id_M$. Ceci permet de voir que

$$f^{m+n} = f^m \circ f^n \tag{2.1}$$

pour $m, n \in \mathbb{N}$. De plus, si f inversible, les itérations dans le « passé » sont définies par

$$f^{-n} = (f^{-1})^n$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, la relation (2.1) est satisfaite pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$. Dans le cas où f est non inversible, les itérations f^n forment un semi-groupe et dans le cas inversible elles définissent un groupe.

Définition 2.1.2. *Soit M un ensemble non vide. Un **système dynamique (à temps) continu** est la donnée d'un **semi-flot** (ou d'un **flot**), c'est-à-dire d'une famille d'applications $\varphi^t : M \rightarrow M$ pour $t \geq 0$ telles que*

1. $\varphi^0 = Id$ et
2. $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$, $\forall t, s \geq 0$ (ou $\forall t, s \in \mathbb{R}$).

Remarque. Notons qu'aucune structure sur l'ensemble M n'a été imposée, chose qu'on oubliera assez rapidement dans la suite. Ainsi, M pourra être soit un espace topologique, soit un espace métrique, soit une variété différentielle,... ceci imposera bien évidemment aussi la nature soit de l'application f soit du semi-flot ou flot défini sur M . On aura donc tantôt une application continue, une isométrie, ou une application différentielle,...

Soit un système dynamique discret $f : M \longrightarrow M$.

Définition 2.1.3. Un ensemble $A \subset M$ est dit

- **f -invariant** si $f^{-1}(A) = A$ où

$$f^{-1}(A) = \{x \in M : f(x) \in A\};$$

- **positivement f -invariant** si $f(A) \subset A$;
- **négativement f -invariant** si $f^{-1}(A) \subset A$.

Pour un point $x \in M$,

- sa **semi-orbite positive** est l'ensemble

$$\gamma^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\},$$

- si f est inversible, sa **semi-orbite négative** est l'ensemble

$$\gamma^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

et

- son **orbite** est l'ensemble

$$\gamma(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Soit $\Phi = (\varphi^t : M \longrightarrow M)$ un semi-flot (respectivement un flot).

Définition 2.1.4. • Un ensemble $A \subset X$ est dit **Φ -invariant** si $\varphi^{-t}(A) = A$ pour tout $t \geq 0$ (respectivement $t \in \mathbb{R}$).

- La **semi-orbite positive** de x est l'ensemble

$$\gamma^+(x) = \{\varphi^t(x) : t \geq 0\}.$$

- Si Φ est un flot, la **semi-orbite négative** de x est l'ensemble

$$\gamma^-(x) = \{\varphi^{-t}(x) : t \geq 0\}$$

et

- l'**orbite** de x est l'ensemble

$$\gamma(x) = \{\varphi^t(x) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 2.1.5 ([6], page 9). *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que, pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

a une solution unique $x(t, x_0)$ définie pour $t \in \mathbb{R}$. Alors la famille des applications

$$\varphi^t \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ x_0 & \mapsto & \varphi^t(x_0) = x(t, x_0) \end{cases}$$

est un flot.

Systèmes hamiltoniens. Il s'agit d'une classe de systèmes dynamiques donnés par les équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \\ \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (2.3)$$

où \mathbb{R}^{2n} s'appelle l'espace de phase et $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ le hamiltonien. Le champ de vecteurs hamiltonien correspondant est donné par

$$X_H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$

(2.3) s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = X_H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Illustration 1. On se place dans \mathbb{R}^4 et on donne le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2} \left(x^2 + \left(X^2 - \frac{1}{2} \right)^2 + z^2 + Z^2 \right).$$

Les équations de Hamilton s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial X} = 2X \left(X^2 - \frac{1}{2} \right) \\ \dot{X} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x \\ \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial Z} = Z \\ \dot{Z} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -z \end{cases} \quad (2.4)$$

On a

$$\ddot{X} = -\dot{x} \implies \ddot{X} = -2X \left(X^2 - \frac{1}{2} \right) \iff X = \pm \operatorname{sech}(t) \text{ et } x = \pm \operatorname{sech}(t) \tanh(t).$$

Aussi,

$$\ddot{Z} = -\dot{z} \implies \ddot{Z} = -Z \implies Z = B \cos(t) + A \sin(t) \text{ et } z = -B \sin(t) + A \cos(t).$$

Une solution particulière de (2.4) est donc donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \pm \operatorname{sech}(t) \tanh(t) \\ X(t) = \pm \operatorname{sech}(t) \\ z(t) = A \cos(t) - B \sin(t) \\ Z(t) = A \sin(t) + B \cos(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

avec comme condition initiale

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ X(0) = \pm 1 \\ z(0) = A \\ Z(0) = B \end{cases} .$$

Si on pose

$$z(t)^2 + Z(t)^2 = 2h = \left(\sqrt{2h}\right)^2 \text{ avec } h > 0,$$

alors, en prenant

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt{2h} \cos(\theta) \\ Z_0 = \sqrt{2h} \sin(\theta) \end{cases} \text{ pour } \theta \in [0, 2\pi[, \quad (2.6)$$

grâce aux propriétés du flot, la solution (2.5) s'écrit

$$\begin{cases} x(t) = \pm \operatorname{sech}(t) \tanh(t) \\ X(t) = \pm \operatorname{sech}(t) \\ z(t) = \sqrt{2h} \sin(\theta) \cos(t) - \sqrt{2h} \cos(\theta) \sin(t) \\ Z(t) = \sqrt{2h} \sin(\theta) \sin(t) + \sqrt{2h} \cos(\theta) \cos(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \pm \operatorname{sech}(t) \tanh(t) \\ X(t) = \pm \operatorname{sech}(t) \\ z(t) = \sqrt{2h} \cos(t + \theta) \\ Z(t) = \sqrt{2h} \sin(t + \theta). \end{cases}$$

Une autre solution particulière de (2.4) est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ X(t) = 0 \\ z(t) = \sqrt{2h} \cos(t) \\ Z(t) = \sqrt{2h} \sin(t). \end{cases}$$

avec comme condition initiale

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ X(0) = 0 \\ z(0) = \sqrt{2h} \\ Z(0) = 0. \end{cases}$$

Cette solution peut également s'écrire

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ X(t) = 0 \\ z(t) = \sqrt{2h} \cos(t + \theta) \\ Z(t) = \sqrt{2h} \sin(t + \theta). \end{cases}$$

2.1.2 Du discret au continu et inversement

Les deux cas de systèmes dynamiques, discret et continu, sont liés puisque l'on peut passer de l'un à l'autre.

- A un flot $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$, il est possible d'associer un système dynamique à temps discret $(f^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ en posant $f = \varphi^1$ et $f^k = \varphi^k$.
- Inversement, soit $f : M \rightarrow M$ une application. On construit un semi-flot sur $(M \times [0, 1]) / f$ (appelé la **suspension de M par f**) de la manière suivante :

$$(M \times [0, 1]) / f = (M \times [0, 1]) / \sim \text{ avec } (x, 1) \sim (f(x), 0)$$

et pour $\alpha \in]0, 1[$, (x, α) est seul dans sa classe d'équivalence. Le **semi-flot de suspension** de f est donné par

$$\varphi^t(x, \alpha) = \left(f^k(x), \alpha + t - k \right), \text{ si } k \leq \alpha + t < k + 1. \quad (2.7)$$

Si f est inversible alors la famille des applications $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un flot, appelé **flot de suspension** au-dessus de f .

De façon générale, on a la définition suivante

Définition 2.1.6. Soit $f : M \rightarrow M$ une application, et $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction. Soit le quotient

$$M_\tau = \{(x, t) \in M \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq \tau(x)\} / \sim$$

avec $(x, \tau(x)) \sim (f(x), 0)$. Le **semi-flot de suspension** de f de hauteur τ est le semi-flot $\varphi^t : M_\tau \rightarrow M_\tau$ défini par

$$\varphi^t(x, \alpha) = \left(f^k(x), \alpha + t - \sum_{i=0}^{k-1} \tau(f^i(x)) \right), \text{ si } 0 \leq \alpha + t - \sum_{i=0}^{k-1} \tau(f^i(x)) \leq \tau(f^k(x)).$$

Si f est inversible, alors la famille des applications φ^t , pour $t \in \mathbb{R}$, est un flot, appelé **flot de suspension** au-dessus de f avec une hauteur τ .

2.1.3 Conjugaison

La conjugaison est utilisée afin de comparer deux systèmes dynamiques quelconques. On se sert de la notion de conjugaison. L'intérêt est, principalement, de déduire les propriétés d'un système (plutôt compliqué) à partir de celles d'un autre (plutôt simple) qui lui est conjugué.

Définition 2.1.7. Soit¹ $f^t : M \rightarrow M$ et $g^t : M' \rightarrow M'$ deux systèmes dynamiques. Une **semi-conjugaison** de (M', g) à (M, f) est une application surjective $\pi : M' \rightarrow M$ satisfaisant

$$f^t \circ \pi = \pi \circ g^t, \forall t.$$

- Une semi-conjugaison inversible est appelée **conjugaison**.

1. La notation f^t est utilisée ici pour parler à la fois du cas discret et continu. S'il s'agit du cas discret, on pose $f = f^1$ et $g = g^1$.

- S'il existe une conjugaison entre deux systèmes dynamiques, ces derniers sont alors dits **conjugés**.
- S'il existe une semi-conjugaison π de g^t à f^t , alors on dit que (M, f^t) est un **facteur** de (M', g^t) ou que (M', g^t) est une **extension** de (M, f^t)

Exemple 2.1.1. Un premier exemple simple d'une extension est le produit direct

$$(f_1 \times f_2)^t : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1 \times M_2$$

de deux systèmes dynamiques $f_i^t : M_i \longrightarrow M_i, i = 1, 2$, avec

$$(f_1 \times f_2)^t(x_1, x_2) = (f_1^t(x_1), f_2^t(x_2)).$$

La projection de $M_1 \times M_2$ sur M_1 ou M_2 est une semi-conjugaison. De ce fait, (M_1, f_1) et (M_2, f_2) sont des facteurs de $(M_1 \times M_2, f_1 \times f_2)$.

2.1.4 Dynamique topologique

Soit un espace topologique M .

Définition 2.1.8. • *Un système dynamique topologique discret est la donnée d'une application continue $f : M \longrightarrow M$.*

- *Tout flot (respectivement tout semi-flot) $\varphi^t : M \longrightarrow M$ tel que l'application $(t, x) \longmapsto \varphi^t(x)$ est continue dans $\mathbb{R} \times M$ (respectivement dans $\mathbb{R}^+ \times M$) est appelé **système dynamique topologique continu**.*

Pour la suite, sauf mention contraire, on supposera que M est (localement) compact et métrique.

Conjugaison topologique

- Rappelons que pour deux espaces topologiques M et M' , un homéomorphisme $f : M \rightarrow M'$ est une application continue, bijective et d'inverse continu.
- Soit $f^t : M \longrightarrow M$ et $g^t : M \longrightarrow M'$ deux systèmes dynamiques topologiques. Une **semi-conjugaison topologique** de (M', g) à (M, f) est une application continue surjective $\pi : M' \longrightarrow M$ satisfaisant

$$f^t \circ \pi = \pi \circ g^t, \forall t.$$

- Si π est un homéomorphisme, on parle alors d'une **conjugaison topologique**.

Autres définitions

Rappelons qu'une application linéaire de \mathbb{R}^n est dite **hyperbolique** si toutes ses valeurs propres ont une valeur absolue différente de 1.

Soit $\varphi^t : M \longrightarrow M$ un système dynamique, $dist$ une métrique sur M .

- Un point p est dit **T -périodique** si $\varphi^T(p) = p$ et $\varphi^t(p) \neq p$ pour $0 < t < T$. L'ensemble $\mathcal{O}(p) = \{\varphi^t(p), 0 \leq t \leq T\}$ est une **orbite périodique** ou une **orbite fermée**.

- Dans le cas discret, un point T -périodique p est dit **hyperbolique** si $d\varphi^T(p) : T_pM \longrightarrow T_pM$ est une application hyperbolique.
- Dans le cas continu, un point T -périodique p est dit **hyperbolique** si une seule de valeurs propres de $d\varphi^T(p) : T_pM \longrightarrow T_pM$ a pour valeur absolue 1.
- Les **variétés faiblement stable et instable** d'un point p sont définies respectivement par

$$W^s(p) = \left\{ q \in M : \exists \theta \in \mathbb{R} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist} \left(\varphi^{t+\theta}(q), \varphi^t(p) \right) = 0 \right\}$$

et

$$W^u(p) = \left\{ q \in M : \exists \theta \in \mathbb{R} : \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist} \left(\varphi^{t+\theta}(q), \varphi^t(p) \right) = 0 \right\}.$$

- Les **variétés faiblement stable et instable** d'une orbite γ sont définies respectivement par

$$W^s(\gamma) = \left\{ q \in M : \exists \theta \in \mathbb{R} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist} \left(\varphi^t(q), \gamma(t+\theta) \right) = 0 \right\}$$

et

$$W^u(\gamma) = \left\{ q \in M : \exists \theta \in \mathbb{R} : \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist} \left(\varphi^t(q), \gamma(t+\theta) \right) = 0 \right\}.$$

- Soit p un point fixe hyperbolique. Un point $q \neq p$ tel que

$$q \in W^s(p) \cap W^u(p)$$

est dit **point homocline** à p . Si $T_qW^s(p) + T_qW^u(p) = T_qM$, alors q est un **point homocline transverse** à p .

- Une orbite périodique $\gamma : [0, T] \longrightarrow M$ est dite **orbite homocline** si $\gamma(0)$ admet un point homocline.

Proposition 2.1.9. *Si $\gamma : [0, T] \longrightarrow M$ est une orbite homocline, alors tous ses points admettent un point homocline.*

Voici le résultat qui permet de voir la différence entre l'hyperbolicité dans le cas discret et continu.

Proposition 2.1.10 ([12], page 167). *1. Si $\varphi^t(x)$ est la solution de $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, alors*

$$d\varphi^t(x)(f(x)) = f(\varphi^t(x)), \forall t.$$

- 2. Si γ est une orbite T -périodique et $p \in \gamma$, alors $d\varphi^T(p)$ admet 1 comme valeur propre de vecteur propre $f(p)$.*
- 3. Si p et q sont deux points sur une orbite T -périodique γ , alors $d\varphi^T(p)$ et $d\varphi^T(q)$ sont conjuguées linéairement et ont donc les mêmes valeurs propres.*

Démonstration. 1. Pour la première assertion on a

$$\begin{aligned} f(\varphi^t(x)) &= \frac{d}{ds} \varphi^s(x) \Big|_{s=t} \\ &= \frac{d}{ds} \varphi^t \circ \varphi^s(x) \Big|_{s=0} \\ &= d\varphi^t(x)(f(x)). \end{aligned}$$

2. Comme $\varphi^T(p) = p$ on a

$$\begin{aligned} f(p) &= f(\varphi^T(p)) \\ &= d\varphi^T(p)f(p). \end{aligned}$$

3. Soit $q = \varphi^\tau(p)$. Alors

$$(\varphi^T \circ \varphi^\tau)(x) = (\varphi^\tau \circ \varphi^T)(x).$$

Dès lors, au point p on a

$$d\varphi^T(q)d\varphi^\tau(p) = d\varphi^\tau(p)d\varphi^T(p).$$

Ainsi $d\varphi^T(q)$ et $d\varphi^T(p)$ sont linéairement conjuguées par l'application linéaire $d\varphi^\tau(p)$. □

Si γ est une orbite T -périodique avec $p \in \gamma$, le résultat précédent montre que les valeurs propres de $d\varphi^T(p)$ sont $1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$. Les $n-1$ valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ sont appelées les **multiplicateurs caractéristiques** de γ (ils ne dépendent pas du point p d'après la troisième assertion ci-dessus).

Une orbite périodique γ est dite

- **orbite périodique hyperbolique** si tous les multiplicateurs caractéristiques sont tels que $|\lambda_j| \neq 1$ ($1 \leq j \leq n-1$),
- **orbite périodique hyperbolique attractive** si tous les multiplicateurs caractéristiques sont tels que $|\lambda_j| < 1$ ($1 \leq j \leq n-1$),
- **orbite périodique hyperbolique répulsive** si tous les multiplicateurs caractéristiques sont tels que $|\lambda_j| > 1$ ($1 \leq j \leq n-1$),
- **orbite périodique hyperbolique selle** si elle n'est ni attractive ni répulsive.

Illustration 2. Revenons à notre système hamiltonien

$$\begin{cases} \dot{x} = 2X \left(X^2 - \frac{1}{2} \right) \\ \dot{X} = -x \\ \dot{z} = Z \\ \dot{Z} = -z \end{cases} \quad (2.8)$$

de hamiltonien $H = \frac{1}{2} \left(x^2 + \left(X^2 - \frac{1}{2} \right)^2 + z^2 + Z^2 \right)$ et dont le flot, pour $q_0 = (0, \pm 1, \sqrt{2h}, 0)$, est donné par

$$\varphi^{\pm t}(q_0) = \left(\pm \operatorname{sech}(t) \tanh(t), \pm \operatorname{sech}(t), \sqrt{2h} \cos(t), \sqrt{2h} \sin(t) \right).$$

En utilisant les relations (2.6), on a

$$\varphi^{\pm t}(q_\theta) = \left(\pm \operatorname{sech}(t) \tanh(t), \pm \operatorname{sech}(t), \sqrt{2h} \cos(t + \theta), \sqrt{2h} \sin(t + \theta) \right).$$

Aussi, pour $p_0 = (0, 0, \sqrt{2h}, 0)$ on a

$$\varphi^t(p_0) = \left(0, 0, \sqrt{2h} \cos(t), \sqrt{2h} \sin(t) \right)$$

et les relations (2.6) donnent

$$\varphi^t(p_\theta) = \left(0, 0, \sqrt{2h} \cos(t + \theta), \sqrt{2h} \sin(t + \theta) \right).$$

Le hamiltonien H étant séparable, le système (2.8) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{X} \end{pmatrix} = X_{H_1} \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = X_{H_2} \begin{pmatrix} z \\ Z \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Le flot φ^t de X_H préserve l'ensemble $\{H_1 = h_1, H_2 = h_2 : h_1, h_2 > 0\}$.

Remarques.

- Pour $h \neq 0$ fixé, l'ensemble

$$\mathcal{C}_h = \{H_2 = h\} = \{(x, X, z, Z) \in \mathbb{R}^4 : z^2 + Z^2 = 2h\} \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$$

est une sous-variété lisse de dimension 3.

- Le flot φ^t préserve \mathcal{C}_h .
- $\sigma(t) = \varphi^t(p_0) = (0, 0, \sqrt{2h} \cos(t), \sqrt{2h} \sin(t))$ est une orbite 2π -périodique contenue dans \mathcal{C}_h .
- $\Gamma_\pm(t) = \varphi^{\pm t}(q_0) = \varphi^{\pm t}(q_0) = \left(\pm \operatorname{sech}(t) \tanh(t), \pm \operatorname{sech}(t), \sqrt{2h} \cos(t), \sqrt{2h} \sin(t) \right)$ est une orbite non périodique dans \mathcal{C}_h .
- L'étude du flot φ^t sera donc restreint à la surface de niveau \mathcal{C}_h dans la suite.

Lemme 2.1.11. *Le point p_0 est un point périodique hyperbolique de φ^t .*

Démonstration. 1. $\varphi^{2\pi}(p_0) = p_0$. Donc p_0 est 2π -périodique.

2. D'après la proposition 2.1.10, $d\varphi^{2\pi}(p_0)(F(p_0)) = F(p_0)$, c'est-à-dire $F(p_0)$ est vecteur propre de valeur propre 1 avec

$$F(x, X, z, Z) = \left(2X \left(X^2 - \frac{1}{2} \right), -x, Z, -z \right)$$

et $F(p_0) = F(0, 0, \sqrt{2h}, 0) = (0, 0, 0, -\sqrt{2h})$.

3. Aussi, on a

$$d\varphi^{2\pi}(p_0)(1, 1, 0, 0) = e^{-2\pi}(1, 1, 0, 0).$$

En effet, considérons la courbe

$$\Gamma(t) = \varphi^t(q_0) = (\operatorname{sech}(t) \tanh(t), \operatorname{sech}(t), \sqrt{2h} \cos(t), \sqrt{2h} \sin(t)).$$

On trouve

$$\begin{aligned} \varphi^{2\pi}(\Gamma(t)) &= \varphi^{2\pi}(\varphi^t(q_0)) \\ &= \varphi^{2\pi+t}(q_0) \\ &= \Gamma(2\pi + t) \end{aligned}$$

et en dérivant on a la relation

$$d\varphi^{2\pi}(\Gamma(t)) \left(\dot{\Gamma}(t) \right) = \dot{\Gamma}(2\pi + t).$$

Posons une nouvelle courbe

$$\tilde{\Gamma}(t) = (\operatorname{sech}(t) \tanh(t), \operatorname{sech}(t), \sqrt{2h}, 0)$$

qui coïncide avec $\Gamma(t)$ à chaque tour de 2π : $\tilde{\Gamma}(2\pi n) = \Gamma(2\pi n)$.

De plus, on a

$$\dot{\tilde{\Gamma}}(t) = (\operatorname{sech}(t) (1 - 2 \tanh^2(t)), -\operatorname{sech}(t) \tanh(t), 0, 0),$$

avec les comportements à l'infini suivants

$$\begin{cases} \alpha(t) = \operatorname{sech}(t) (1 - 2 \tanh^2(t)) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t} \\ \beta(t) = -\operatorname{sech}(t) \tanh(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha(t) = \operatorname{sech}(t) (1 - 2 \tanh^2(t)) \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} -e^t \\ \beta(t) = -\operatorname{sech}(t) \tanh(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} e^t \end{cases}$$

On a, par unicité du flot, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi^\theta \left(\tilde{\Gamma}(t) \right) = (\operatorname{sech}(t + \theta) \tanh(t + \theta), \operatorname{sech}(t + \theta), \sqrt{2h} \cos(\theta), \sqrt{2h} \sin(\theta)).$$

Donc

$$\varphi^{2\pi} \left(\tilde{\Gamma}(t) \right) = \tilde{\Gamma}(t + 2\pi), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et

$$\begin{aligned} d\varphi^{2\pi}(\tilde{\Gamma}(t)) \left(\dot{\tilde{\Gamma}}(t) \right) &= \dot{\tilde{\Gamma}}(2\pi + t) \\ \Leftrightarrow d\varphi^{2\pi}(\tilde{\Gamma}(t)) (\alpha(t), \beta(t), 0, 0) &= (\alpha(t + 2\pi), \beta(t + 2\pi), 0, 0). \end{aligned}$$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, on a

$$d\varphi^{2\pi}(\tilde{\Gamma}(t)) (e^{-t}(1 + \epsilon(t)), e^{-t}(1 + \epsilon'(t)), 0, 0) = (e^{-2\pi}e^{-t}(1 + \epsilon(t)), e^{-2\pi}e^{-t}(1 + \epsilon'(t)), 0, 0).$$

Comme $d\varphi^{2\pi}(\tilde{\Gamma}(t))$ est linéaire, on trouve

$$\begin{aligned} e^{-t}d\varphi^{2\pi}(\tilde{\Gamma}(t)) (1 + \epsilon(t), 1 + \epsilon'(t), 0, 0) &= e^{-t}e^{-2\pi} (1 + \epsilon(t), 1 + \epsilon'(t), 0, 0) \\ \Leftrightarrow d\varphi^{2\pi}(\tilde{\Gamma}(t)) (1 + \epsilon(t), 1 + \epsilon'(t), 0, 0) &= e^{-2\pi} (1 + \epsilon(t), 1 + \epsilon'(t), 0, 0). \end{aligned}$$

Ainsi lorsque $t \rightarrow +\infty$, comme $d\varphi^{2\pi}$ est continue et $\tilde{\Gamma}(t)$ a été choisi tel que $\tilde{\Gamma}(t) \rightarrow p_0$, on a

$$d\varphi^{2\pi}(p_0)(1, 1, 0, 0) = e^{-2\pi}(1, 1, 0, 0).$$

4. Enfin, montrons que

$$d\varphi^{2\pi}(p_0)(-1, 1, 0, 0) = e^{2\pi}(-1, 1, 0, 0).$$

En effet, en reprenant les courbes définies ci-dessus, on a, lorsque $t \rightarrow -\infty$,

$$\begin{aligned} d\varphi^{2\pi}(\tilde{\Gamma}(t)) (-e^t(1 + \epsilon(t)), e^t(1 + \epsilon'(t)), 0, 0) &= (-e^{2\pi}e^t(1 + \epsilon(t)), e^{2\pi}e^t(1 + \epsilon'(t)), 0, 0) \\ \Leftrightarrow e^t d\varphi^{2\pi}(\tilde{\Gamma}(t)) (-(1 + \epsilon(t)), 1 + \epsilon'(t), 0, 0) &= e^t e^{2\pi} (-(1 + \epsilon(t)), 1 + \epsilon'(t), 0, 0) \\ \Leftrightarrow d\varphi^{2\pi}(\tilde{\Gamma}(t)) (-(1 + \epsilon(t)), 1 + \epsilon'(t), 0, 0) &= e^{2\pi} (-(1 + \epsilon(t)), 1 + \epsilon'(t), 0, 0) \\ \Leftrightarrow d\varphi^{2\pi}(p_0)(-1, 1, 0, 0) &= e^{2\pi}(-1, 1, 0, 0). \end{aligned}$$

Comme \mathcal{C}_h est de dimension 3, $d\varphi^{2\pi}(p_0)$ est diagonalisable de valeurs propres $1, e^{2\pi}, e^{-2\pi}$. On conclut donc que p_0 est un point périodique hyperbolique de $(\mathcal{C}_h, \varphi^t)$ qui est un sous-système de $(\mathbb{R}^4, \varphi^t)$. \square

Proposition 2.1.12. *L'orbite $\sigma(t) = (0, 0, \sqrt{2h} \cos(t), \sqrt{2h} \sin(t))$ est une orbite homocline de φ^t .*

Démonstration. Nous allons montrer que $\Gamma(0) = q_0 = (0, 1, \sqrt{2h}, 0)$ est un point homocline de $\sigma(0) = p_0 = (0, 0, \sqrt{2h}, 0)$. En effet

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{dist}(\varphi^t(q_0), \varphi^t(p_0)) &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\text{sech}^2(t) \tanh^2(t) + \text{sech}^2(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De plus $q_\theta \in W^u(\sigma) \cap W_s(\sigma)$ car

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{dist}(\varphi^t(q_\theta), \sigma(t + \theta)) &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\text{sech}^2(t) \tanh^2(t) + \text{sech}^2(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Remarque. Le flot $(\mathcal{C}_h, \varphi^t)$, ayant $\sigma(t)$ comme orbite périodique hyperbolique, a une direction contractante et une dilatante. Alors $W^u(\sigma)$ et $W^s(\sigma)$ sont des variétés de dimension 2. Donc

$$W^u(\sigma) = W^s(\sigma) = \{\Gamma_+(t, \theta); t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi]\} \cup \{\Gamma_-(t, \theta); t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

A priori on a $\Gamma_+ \cup \Gamma_- \subset W^u = W^s$, l'égalité venant de la même dimension.

2.2 Méthode de Poincaré-Melnikov

La méthode de Poincaré-Melnikov permet de détecter l'existence d'un point homocline transverse pour un certain type de système hamiltonien perturbé. Nous allons décrire le principe de cette méthode en utilisant l'approche de [12], pages 268-272.

Soient dans \mathbb{R}^2 le système perturbé

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = X_H \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \epsilon Y(q, p, t),$$

où Y a pour période T en la variable t . On peut ajouter une autre variable τ pour que les équations soient indépendantes du temps

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_H \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \epsilon Y(q, p, t) \\ 1 \end{pmatrix} = \widehat{X}_\epsilon \begin{pmatrix} q \\ p \\ \tau \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

où τ est pris modulo T . On suppose que, pour le système hamiltonien non perturbé,

- X_H admet un point-selle fixe hyperbolique (q_0, p_0) donc l'équation (2.9) admet une orbite fermée γ_0 pour $\epsilon = 0$. Puisque les multiplicateurs caractéristiques de γ_0 sont différentes de 1, on a que, pour $\epsilon \neq 0$ mais suffisamment petit, il persiste une orbite fermée γ_ϵ .
- X_H admet une orbite homocline pour le point fixe, c'est-à-dire un point

$$(q, p) \in W^s((q_0, p_0), X_H) \cap W^u((q_0, p_0), X_H) - \{(q_0, p_0)\}.$$

Dans le (q, p, τ) -espace, l'orbite homocline de X_H devient une surface homocline pour γ_0 pour l'équation (2.9),

$$\Sigma = \{(q, p, \tau) : (q, p) \text{ est sur l'orbite homocline de } X_H\}.$$

2 Quelques aspects sur les systèmes dynamiques

Pour $\epsilon > 0$ l'orbite fermée γ_ϵ est toujours hyperbolique et ses variétés stable et instable varient de manière lisse avec ϵ dans des sous-espaces compacts.

Pour tout $z_0 \in \Sigma$, soit $z^s(z_0, \epsilon)$ le point où $W^s(\gamma_\epsilon, \widehat{X}_\epsilon)$ intersecte la normale à Σ en z_0 . Par la dépendance lisse à ϵ , $z^s(z_0, 0) = z_0$ et $z^s(z_0, \epsilon)$ est une fonction lisse de ϵ . On définit de la même manière $z^u(z_0, \epsilon)$.

On veut mesurer la séparation des variétés stable et instable dans les directions orthogonales à Σ , c'est-à-dire la séparation entre $z^u(z_0, \epsilon)$ et $z^s(z_0, \epsilon)$. La fonction H est une bonne mesure de déplacement dans ces directions (comme le gradient de H est non nul aux points de Σ), donc on veut mesurer

$$\widehat{G}(z_0, \epsilon) = H(z^u(z_0, \epsilon)) - H(z^s(z_0, \epsilon)).$$

Comme $\widehat{G}(z_0, 0) \equiv 0$, il est possible d'écrire

$$\widehat{G}(z_0, \epsilon) = \epsilon G(z_0, \epsilon).$$

Un zero de $G(z_0, \epsilon)$ correspond à un point homocline. Puisque l'on désire mesurer le taux de séparation infinitésimal, on définit la fonction

$$\begin{aligned} M(z_0) &= \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} [H(z^u(z_0, \epsilon)) - H(z^s(z_0, \epsilon))] \right|_{\epsilon=0} \\ &= G(z_0, 0) \end{aligned}$$

appelée **fonction de Melnikov**. Il s'agit d'une fonction de Σ dans \mathbb{R} . Un zero de M correspond à la place où, de façon infinitésimale, les variétés stable et instable continuent à s'intersecter. Le théorème suivant, une conséquence directe du théorème des fonctions implicites appliqué à G , donne un critère pour l'intersection des variétés pour $\epsilon \neq 0$.

Théorème 2.2.1 ([12], page 271). *Soit $z_0 \in \Sigma$ tel que $M(z_0) = 0$ et une dérivée directionnelle $\frac{\partial M}{\partial v}(z_0) \neq 0$ pour v tangent à Σ . Alors pour $\epsilon \neq 0$ suffisamment petit, γ_ϵ admet une intersection transverse homocline près de z_0 .*

Pour calculer la fonction de Melnikov, on se sert du résultat suivant

Théorème 2.2.2 ([12], page 272). *La fonction de Melnikov est donnée par l'intégrale impropre*

$$M(z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dH_{\varphi_0(t, z_0)} Y(\varphi_0(t, z_0)) dt,$$

avec φ_0 le flot de X_H pour $\epsilon = 0$ et $X_\epsilon = X_H + \epsilon Y$.

Et encore plus simple, on a le cas particulier suivant

Corollaire 2.2.3 ([8], page 509). *Dans le cas d'une perturbation hamiltonienne, c'est-à-dire $Y = H_1$ est également un hamiltonien, on a*

$$M(z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{H, H_1\}(\varphi_0(t, z_0)) dt,$$

avec $\{H, H_1\} \equiv \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H_1}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H_1}{\partial q}$ le crochet de Poisson.

Illustration 3. Soit le hamiltonien perturbé donné par

$$2H_\epsilon = 2H_1 + 2H_2 + 2\epsilon H_{1,2} = \left(x^2 + \left(X^2 - \frac{1}{2} \right)^2 \right) + (z^2 + Z^2) + 2\epsilon z x$$

qui est la forme d'un *Duffing non forcé + oscillateur harmonique + perturbation*.

D'après l'illustration 2, le hamiltonien non perturbé ($\epsilon = 0$) $H_0 = H_1 + H_2$ est séparable et admet une orbite homocline sur l'ensemble $\mathcal{C}_h = \{H_2 = h > 0\}$ qui est donnée par

$$\sigma(t) = \left(0, \quad 0, \quad \sqrt{2h} \cos(t), \quad \sqrt{2h} \sin(t) \right).$$

Le flot hamiltonien correspondant est

$$\varphi_0^\pm(t, \theta; h) = \begin{cases} x_0(t) = \pm \operatorname{sech}(t) \tanh(t) \\ X_0(t) = \pm \operatorname{sech}(t) \\ z_0(t) = \sqrt{2h} \cos(t + \theta) \\ Z_0(t) = \sqrt{2h} \sin(t + \theta). \end{cases}$$

De plus²

$$\begin{aligned} \{H_{1,2}, H_1\} &= \left(\frac{\partial H_{1,2}}{\partial x} \frac{\partial H_1}{\partial X} - \frac{\partial H_{1,2}}{\partial X} \frac{\partial H_1}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial H_{1,2}}{\partial z} \frac{\partial H_1}{\partial Z} - \frac{\partial H_{1,2}}{\partial Z} \frac{\partial H_1}{\partial z} \right) \\ &= 2z \left(X^2 - \frac{1}{2} \right) X. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de Melnikov est donnée par

$$\begin{aligned} M(t, \theta; h) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{H_{1,2}, H_1\} (\varphi_0^+(\tau, \theta; h)) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{H_{1,2}, H_1\} \left(\operatorname{sech}(\tau) \tanh(\tau), \operatorname{sech}(\tau), \sqrt{2h} \cos(\tau + \theta), \sqrt{2h} \sin(\tau + \theta) \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sqrt{2h} \cos(\tau + \theta) \left(\operatorname{sech}^2(\tau) - \frac{1}{2} \right) \operatorname{sech}(\tau) d\tau \\ &= 2\sqrt{2h} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\tau + \theta) \operatorname{sech}(\tau) \left(\operatorname{sech}^2(\tau) - \frac{1}{2} \right) d\tau \\ &= 2\sqrt{2h} \cos(\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\tau) \operatorname{sech}(\tau) \left(\operatorname{sech}^2(\tau) - \frac{1}{2} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Soit à calculer l'intégrale

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\tau) \operatorname{sech}(\tau) \left(\operatorname{sech}^2(\tau) - \frac{1}{2} \right) d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\tau) \operatorname{sech}''(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} U = \cos(\tau) \\ dV = \operatorname{sech}''(\tau) d\tau \end{cases} \implies \begin{cases} dU = -\sin(\tau) d\tau \\ V = \operatorname{sech}'(\tau) \end{cases}$$

2. On pourrait aussi prendre le crochet $\{H_{1,2}, H_0\}$ mais comme H_2 est constant sur \mathcal{C}_h ce crochet se réduit à $\{H_{1,2}, H_1\}$.

pour avoir

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[\cos(\tau) \operatorname{sech}'(\tau) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\tau) \operatorname{sech}'(\tau) d\tau \right\}, \quad \cos(\tau) \text{ est paire} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\tau) \operatorname{sech}'(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} U = \sin(\tau) \\ dV = \operatorname{sech}'(\tau) d\tau \end{cases} \implies \begin{cases} dU = \cos(\tau) d\tau \\ V = \operatorname{sech}(\tau) \end{cases}$$

pour avoir

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[\sin(\tau) \operatorname{sech}(\tau) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\tau) \operatorname{sech}(\tau) d\tau \right\}, \quad \operatorname{sech}(\tau) \text{ est paire} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\tau) \operatorname{sech}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\tau) \operatorname{sech}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{2} \frac{2}{e^\tau + e^{-\tau}} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{e^\tau + e^{-\tau}} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(1+i)\tau} + e^{(1-i)\tau}}{e^{2\tau} + 1} d\tau \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)x} + e^{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)x}}{e^x + 1} dx, \quad \text{avec } x = 2\tau. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégrale d'Euler

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}, \quad \text{si } \operatorname{Re}(a) < 1,$$

on a

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\right)} + \frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\right)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\cos\left(i\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{\pi}{\cos\left(i\frac{\pi}{2}\right)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{\cos\left(i\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$M(t, \theta; h) = \frac{\sqrt{2h\pi}}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cos(\theta)$$

admet $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ comme zéros simples dans $[0, 2\pi[$. On conclut donc que, pour ϵ suffisamment petit, il existe un point homocline transverse.

2.3 Entropie topologique

« L'entropie topologique est un invariant topologique qui mesure la complexité de la structure des orbites d'un système dynamique. Elle correspond au taux de croissance exponentiel du nombre d'orbites différentes de longueur n ». ([3], page 36).

2.3.1 Entropie topologique dans le cas discret

Soit (M, d) un espace métrique compact et $f : M \rightarrow M$ une application continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d_n(x, y) = \sup_{0 \leq k \leq n-1} d(f^k(x), f^k(y)) \quad (2.10)$$

mesure la distance maximum entre les n premiers itérés de x et y .

Soit $\epsilon > 0$ fixé.

- Un sous-ensemble $A \subset M$ est dit (n, ϵ) -**recouvrant** si pour tout $x \in M$ il existe $a \in A$ tel que $d_n(x, a) < \epsilon$. Soit

$$span(n, \epsilon, f) = \min \{ \#A : A \subset M \text{ est } (n, \epsilon)\text{-recouvrant} \}.$$

- Un sous-ensemble $A \subset M$ est dit (n, ϵ) -**séparé** si pour deux points $x, y \in A$, $d_n(x, y) < \epsilon$. Par compacité, un tel A est fini. Soit $sep(n, \epsilon, f)$ le cardinal maximal d'un ensemble (n, ϵ) -séparé. Soit

$$sep(n, \epsilon, f) = \max \{ \#A : A \subset M \text{ est } (n, \epsilon)\text{-séparé} \}.$$

- Soit $cov(n, \epsilon, f)$ le cardinal minimum d'un recouvrement de X par des ensembles de d_n -diamètre plus petit que ϵ :

$$cov(n, \epsilon, f) = \min \{ \#\mathcal{U} : \mathcal{U} = (U_i) \text{ recouvrement de } M : \max \{ d_n(x, y) : x, y \in U_i \} < \epsilon \}.$$

Les quantités $span(n, \epsilon, f)$, $sep(n, \epsilon, f)$ et $cov(n, \epsilon, f)$ sont liées par le résultat suivant

Lemme 2.3.1 ([3], page 36).

$$cov(n, 2\epsilon, f) \leq span(n, \epsilon, f) \leq sep(n, \epsilon, f) \leq cov(n, \epsilon, f)$$

Soit

$$h_\epsilon(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(cov(n, \epsilon, f))}{n}. \quad (2.11)$$

La limite

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} h_\epsilon(f) \quad (2.12)$$

existe et est appelée **entropie topologique** de f . Les inégalités du lemme 2.3.1 entraînent que

$$\begin{aligned} h_{top}(f) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{cov}(n, \epsilon, f))}{n} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{span}(n, \epsilon, f))}{n} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{sep}(n, \epsilon, f))}{n}. \end{aligned}$$

Voici quelques résultats intéressants sur l'entropie topologique, tirés de [3](pages 38-40).

Proposition 2.3.2 ([3], page 38). *L'entropie topologique ne dépend pas du choix de la distance qui induit la topologie sur M .*

Démonstration. Soient d et d' deux métriques définies sur M compact. On définit pour tout $\epsilon > 0$,

$$\delta(\epsilon) = \max \{ d'(x, y) : d(x, y) \leq \epsilon \}.$$

Ainsi toute $\delta(\epsilon)$ -boule pour la métrique d' est contenue dans une ϵ -boule pour la métrique d . Cet argument est étendu sur les métriques d_n et d'_n ; si un ensemble A a un d_n -diamètre plus petit que ϵ , alors A a un d'_n -diamètre plus petit que $\delta(\epsilon)$. Cela conduit à l'inégalité

$$\text{cov}'(n, \delta(\epsilon), f) \leq \text{cov}(n, \epsilon, f).$$

Par compacité de M , on a $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon) = 0$. Ainsi,

$$h'_{top}(f) = \lim_{\delta(\epsilon) \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{cov}'(n, \delta(\epsilon), f))}{n} \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{cov}(n, \epsilon, f))}{n} = h_{top}(f).$$

En interchangeant les rôles de d et d' dans le raisonnement ci-dessus on trouve aussi $h_{top}(f) \leq h'_{top}(f)$. \square

Corollaire 2.3.3 ([3], page 39). *L'entropie topologique est un invariant topologique : Soient M et M' deux espaces métriques compacts et $g : M \rightarrow M$, $f : M' \rightarrow M'$ deux applications continues. Si g et f sont topologiquement conjuguées, alors $h_{top}(g) = h_{top}(f)$.*

Démonstration. Supposons que $\pi : M' \rightarrow M$ conjugue (M, g) et (M', f) . Soit d une métrique sur M . Alors

$$d'(y_1, y_2) = d(\pi(y_1), \pi(y_2))$$

est une métrique sur M' . Comme π est une isométrie de M et M' , et l'entropie topologique est indépendante de la métrique, on a $h_{top}(g) = h_{top}(f)$. \square

Proposition 2.3.4 ([3], page 40). *Si f est un facteur de g (g une extension de f) alors $h_{top}(g) \geq h_{top}(f)$:*

Soient (M, d) et (M', d') deux espaces métriques compacts et $g : M \rightarrow M$, $f : M' \rightarrow M'$ deux applications continues semi-conjuguées par $\pi : M \rightarrow M'$. Supposons que k est surjectif. Alors $h_{top}(g) \geq h_{top}(f)$.

Démonstration. Soit $B \subset M'$ un ensemble (n, ϵ, f) -séparé tel que $\#B = \text{sep}(n, \epsilon, f)$. Grâce à la surjectivité de k , on construit $A \subset M$ en prenant $x \in A$ tel que $x \in \pi^{-1}(y)$ pour $y \in B$. Ainsi, $\#A = \#B$. L'ensemble B étant (n, ϵ, f) -séparé on a $\forall y_1, y_2 \in B, d'_n(y_1, y_2) < \epsilon$. Par continuité uniforme de π , pour $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $x_1, x_2 \in X, d(x_1, x_2) \leq \delta(\epsilon)$ entraîne $d'(\pi(x_1), \pi(x_2)) \leq \epsilon$. Prendre $x_1, x_2 \in A$, avec $x_1 \in \pi^{-1}(y_1)$ et $x_2 \in \pi^{-1}(y_2)$ pour $y_1, y_2 \in B$ permet alors de montrer que A est $(n, \delta(\epsilon), g)$ -séparé. Donc

$$\text{sep}(n, \delta(\epsilon), g) \geq \#A = \#B = \text{sep}(n, \epsilon, f).$$

On en déduit que $h_{\text{top}}(g) \geq h_{\text{top}}(f)$. □

Proposition 2.3.5 ([3], page 39). *Soient (M, d) et (M, d') deux espaces métriques compacts et $f : M \rightarrow M, g : M' \rightarrow M'$ deux applications continues. Alors*

1. $h_{\text{top}}(f^m) = mh_{\text{top}}(f)$ avec $m \in \mathbb{N}$,
2. si f est inversible alors $h_{\text{top}}(f^{-1}) = h_{\text{top}}(f)$. Donc $h_{\text{top}}(f^m) = |m|h_{\text{top}}(f)$ pour $m \in \mathbb{Z}$,
3. $h_{\text{top}}(f \times g) = h_{\text{top}}(f) + h_{\text{top}}(g)$.

2.3.2 Entropie topologique pour un flot

Soit (M, d) un espace métrique compact et $(\varphi^t : M \rightarrow M)_{t \in \mathbb{R}}$ un flot sur M . On introduit les métriques équivalentes $(d_T)_{T \in \mathbb{R}}$ sur M

$$d_T(x, y) = \max_{0 \leq t \leq T} d(\varphi^t(x), \varphi^t(y)). \quad (2.13)$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé et $T \in \mathbb{R}$.

- Un sous-ensemble $A \subset M$ est (ϵ, T) -**recouvrant** si pour tout $x \in M$ il existe $a \in A$ tel que $d_T(x, a) < \epsilon$. Soit $\text{span}(\epsilon, T)$ le cardinal minimum d'un tel ensemble.
- Un sous-ensemble $A \subset M$ est (ϵ, T) -**séparé** si $\forall x, y \in A, d_T(x, y) > \epsilon$. Soit $\text{sep}(\epsilon, T)$ le cardinal maximum d'un ensemble (n, ϵ) -séparé.
- On considère aussi des recouvrements de M par des ouverts de diamètre au plus ϵ pour la métrique d_T . Soit $\text{cov}(\epsilon, T)$ le nombre minimum d'ouverts nécessaires.

Les quantités $\text{span}(\epsilon, T)$, $\text{sep}(\epsilon, T)$ et $\text{cov}(\epsilon, T)$ sont liées par les relations

Lemme 2.3.6.

$$\text{cov}(2\epsilon, T) \leq \text{span}(\epsilon, T) \leq \text{sep}(\epsilon, T) \leq \text{cov}(\epsilon, T).$$

L'entropie topologique du flot φ^t est la quantité définie par :

$$h_{\text{top}}(\varphi^t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{cov}(\epsilon, T))}{T} \quad (2.14)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{span}(\epsilon, T))}{T} \quad (2.15)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{sep}(\epsilon, T))}{T}. \quad (2.16)$$

Le résultat suivant, tiré de [2] (page 112), montre le lien entre l'entropie topologique dans les cas discret et continu.

Proposition 2.3.7. Soit $\Phi = (\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ un flot. Alors on a

$$h_{top}(\Phi) = h_{top}(\varphi^1).$$

En effet, l'exercice 1 ci-dessous permet de conclure.

Exercice 1 :

Si $f = \varphi^1$, montrons que $h_{top}(\varphi^t) = h_{top}(f)$.

Les distances (2.10) et (2.13) donnent

$$\begin{cases} d_n(x, y) = \max_{0 \leq k \leq n-1} d(f^k(x), f^k(y)) = \max_{0 \leq k \leq n-1} d((\varphi^1)^k(x), (\varphi^1)^k(y)) \\ d_T(x, y) = \max_{0 \leq l \leq T} d(\varphi^l(x), \varphi^l(y)) = d(\varphi^1(x), \varphi^1(y)). \end{cases}$$

Ainsi

$$d_T(x, y) \leq d_n(x, y). \quad (2.17)$$

- Si un ensemble A a un d_n -diamètre plus petit que ϵ , alors A a un d_T -diamètre plus petit que ϵ .
- Si A est (ϵ, T) -séparé, on a pour tout $x, y \in A$, $d_T(x, y) > \epsilon$ et d'après (2.17), $d_n(x, y) \geq d_T(x, y) > \epsilon$.
- Si A est (n, ϵ, φ^1) -recouvrant, on a pour tout $x \in X$ qu'il existe $a \in A$ tel que $d_n(x, a) < \epsilon$ et d'après (2.17), $\epsilon > d_n(x, a) \geq d_T(x, a)$.

Ceci conduit aux inégalités

$$\begin{cases} cov(n, \epsilon, \varphi^1) \leq cov(\epsilon, T) \\ sep(n, \epsilon, \varphi^1) \leq sep(\epsilon, T) \\ span(n, \epsilon, \varphi^1) \geq span(\epsilon, T). \end{cases} \quad (2.18)$$

Les inégalités (2.18) ainsi que les lemmes (2.3.1) et (2.3.6) conduisent aux inégalités

$$cov(2\epsilon, T) \leq span(\epsilon, T) \leq span(n, \epsilon, \varphi^1) \leq sep(n, \epsilon, \varphi^1) \leq sep(\epsilon, T) \leq cov(\epsilon, T)$$

qui permettent de conclure.

Exercice 2 :

Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme, soit $\varphi_t : M \times [0, 1]/f \rightarrow M \times [0, 1]/f$ le flot de suspension de f .

Montrons que $h_{top}(\varphi^t) = h_{top}(f)$.

L'exercice 1 montre que $h_{top}(\varphi^t) = h_{top}(\varphi^1)$. Pour le flot de suspension on a

$$\begin{aligned} \varphi^1(x, \alpha) &= (f^k(x), \alpha + 1 - k), \text{ si } k \leq \alpha + 1 < k + 1. \\ &= (f^k(x), \alpha + 1 - k), \text{ si } k - 1 \leq \alpha < k. \end{aligned}$$

Sachant que $0 \leq \alpha \leq 1$ on a

$$\begin{aligned} k - 1 &\leq \alpha < k \\ \Rightarrow \alpha &< k \leq \alpha + 1 \\ \Rightarrow 0 &\leq \alpha < k \leq \alpha + 1 \leq 2 \\ \Rightarrow 0 &< k \leq 2 \\ \Rightarrow k &= 1, k = 2. \end{aligned}$$

- Pour $k = 1$ on a

$$\varphi^1(x, \alpha) = (f(x), \alpha), \text{ si } 0 \leq \alpha < 1.$$

Ainsi,

$$h_{top}(\varphi^1) = h_{top}(f) + h_{top}(Id_{[0,1[}) = h_{top}(f).$$

- Pour $k = 2$ on a $1 \leq \alpha < 2 \Rightarrow \alpha = 1$, ce qui donne

$$\varphi^1(x, 1) = (f^2(x), 1) \sim (f(x), 0).$$

Aussi,

$$h_{top}(\varphi^1) = h_{top}(f) + h_{top}(0) = h_{top}(f).$$

2.3.3 Entropie topologique dans le cas non compact

D'après [1], R. Bowen généralise la définition de l'entropie topologique dans le cas non compact : Soit (M, d) un espace localement compact et $f : M \rightarrow M$ une application uniformément continue. Soit

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n} d(f^i(x), f^i(y)).$$

Pour tout $n \geq 0$, d_n est une distance. Soit $K \subset M$ un compact. Pour $n > 0$ et $\epsilon > 0$, un ensemble $S \subset K$ est (n, ϵ) -séparé si pour tous $x, y \in S$, $x \neq y$ on a $d_n(x, y) > \epsilon$. Soit

$$sep(n, \epsilon, K) = \max\{\#S : S \text{ est } (n, \epsilon)\text{-séparé}\}.$$

Alors soit

$$s(\epsilon, K) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log sep(n, \epsilon, K),$$

et

$$h_d(f, K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s(\epsilon, K),$$

la quantité

$$h_d(f) := \sup_{K \text{ compact}} h_d(f, K)$$

est appelée **entropie de f par rapport à la métrique d** .

Proposition 2.3.8 ([1]). *Soit (M, d) et (M', d') deux espaces métriques ainsi que $f : M \rightarrow M$, $g : M' \rightarrow M'$ et $\pi : M \rightarrow M'$ des applications uniformément continues avec π surjective et $\pi \circ f = g \circ \pi$. Alors pour tout compact $K \subset M$, $h_d(f, K) \geq h_{d'}(g, \pi(K))$.*

2.4 Fer à cheval de Smale

Dans cette section, on décrit un système dynamique classique ; le **fer à cheval de Smale**. Son plus grand intérêt ici réside dans le résultat suivant :

Théorème 2.4.1 (Birkhoff-Smale). *Soit $\varphi^t : M \rightarrow M$ un flot avec une orbite périodique γ . Supposons qu'il existe un point homocline transverse. Alors, dans un voisinage de γ , le système dynamique (M, φ^t) admet un facteur qui est conjugué au fer à cheval de Smale suspendu.*

Proposition 2.4.2. *L'entropie topologique du fer à cheval de Smale est positive.*

Démonstration. Voir le corollaire 2.4.9 ci-dessous. □

Corollaire 2.4.3. *Un système qui a un facteur conjugué au fer à cheval a une entropie topologique positive.*

Démonstration. Les propositions 2.3.4 et 2.4.2 ci-dessus permettent de conclure. □

2.4.1 Description

Considérons une application $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

qui contracte R dans la direction x , l'étire dans la direction y et le replie sur lui-même comme montré à la figure 2.1.

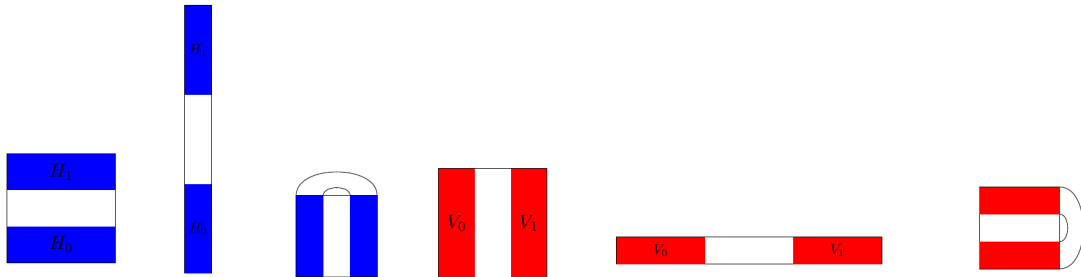


FIGURE 2.1 – L'application f (en bleue) et son inverse f^{-1} (en rouge).

On suppose que f est affine sur les rectangles « horizontaux »

$$H_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{\mu} \right\}$$

et

$$H_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 - \frac{1}{\mu} \leq y \leq 1 \right\}$$

et les envoie sur les rectangles « verticaux »

$$f(H_0) = V_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \lambda, 0 \leq y \leq 1\}$$

et

$$f(H_1) = V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \lambda \leq x \leq \lambda, 0 \leq y \leq 1\}.$$

La forme de f sur H_0 et H_1 est respectivement donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix},$$

avec $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ et $\mu > 2$.

Une conséquence immédiate de la définition de f est le résultat suivant

Lemme 2.4.4 ([8],page 422). *1. Supposons que V est un rectangle vertical; alors $f(V) \cap R$ consiste en deux rectangles verticaux, l'un dans V_0 et l'autre dans V_1 .*

2. Supposons que H est un rectangle horizontal; alors $f^{-1}(H) \cap R$ consiste en deux rectangles horizontaux, l'un dans H_0 et l'autre dans H_1 .

Le but est de construire géométriquement l'ensemble des points, noté Λ , qui restent dans R pendant toutes les itérations possibles de f :

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(R).$$

Les relations $f(H_0) = V_0$ et $f(H_1) = V_1$ conduisent à

$$R \cap f(R) = V_0 \cup V_1.$$

Aussi, les relations $f^{-1}(V_0) = H_0$ et $f^{-1}(V_1) = H_1$ conduisent à

$$f^{-1}(R) \cap R = H_0 \cup H_1.$$

Notons $V_0 = R_0$ et $V_1 = R_1$. L'ensemble

$$R \cap f(R) \cap f^2(R) = R \cap f^2(R)$$

est composé de quatre rectangles verticaux, notés $R_{i,j}$, $i, j \in \{0, 1\}$, de largeur λ^2 tels que décrit à la figure 2.2.

En itérant l'application f , on a en général, pour toute suite $\omega_0, \dots, \omega_n$ de 0 et de 1, que

$$R_{\omega_0\omega_1\dots\omega_n} = R_{\omega_0} \cap f(R_{\omega_1}) \cap \dots \cap f^n(R_{\omega_n})$$

est un rectangle vertical de largeur λ^n , et $R \cap f^n(R)$ est l'union de 2^n tels rectangles. Pour une suite infinie $\omega = (\omega_i) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, soit

$$R_\omega = \bigcap_{i=0}^{\infty} f^i(R_{\omega_i}),$$

l'ensemble

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(R) = \bigcup_{\omega} R_\omega$$

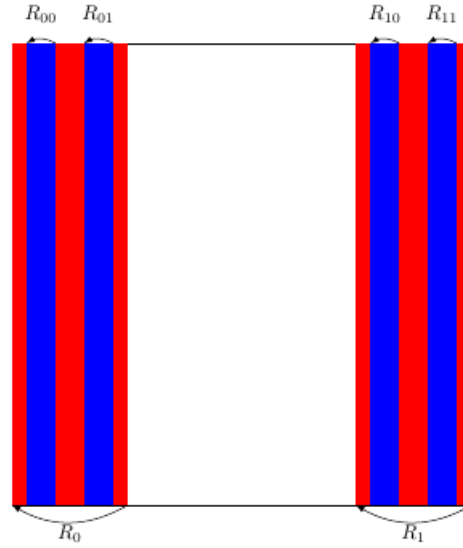


FIGURE 2.2 – Représentation de la région $R \cap f(R) \cap f^2(R)$.

est constitué d'un nombre infini de lignes verticales dont chacune est codée par une unique suite infinie de 0 et de 1.

On procède de façon similaire avec l'inverse f^{-1} . Pour toute suite $\omega_{-m}, \omega_{-m+1}, \dots, \omega_{-1}$ de 0 et de 1,

$$\bigcap_{i=1}^m f^{-i}(R_{\omega_i})$$

est un rectangle horizontal de largeur μ^{-m} , et l'ensemble

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-i}(R)$$

est constitué d'un nombre infini de lignes horizontales dont chacune ligne est codée par une unique suite infinie de 0 et de 1. **Le fer à cheval de Smale** est l'ensemble donné par

$$\Lambda = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^i(R).$$

Remarque. L'application

$$\phi : \begin{cases} \Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} & \rightarrow & \Lambda \\ \omega = (\omega_i) & \mapsto & \phi(\omega) = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^i(R_{\omega_i}) \end{cases} \quad (2.19)$$

est une bijection. Aussi,

$$f(\phi(\omega)) = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^{i+1}(R_{\omega_i}) = \phi(\sigma(\omega)),$$

où σ est le **décalage à droite** dans Σ_2 :

$$\sigma(\omega)_{i+1} = \omega_i.$$

Ainsi, ϕ conjugue $f|_{\Lambda}$ et σ .

Pour trouver l'entropie topologique du fer à cheval de Smale, nous allons nous intéresser à son *codage*, c'est-à-dire à la dynamique symbolique qui lui est conjuguée.

2.4.2 Dynamique symbolique

Soit $k > 1$ un entier. On considère l'ensemble $\Sigma_k^+ = \{1, \dots, k\}^{\mathbb{N}}$ des suites

$$\omega = (i_1(\omega)i_2(\omega), \dots),$$

où $i_n(\omega) \in \{1, \dots, k\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 2.4.5. *Le **décalage** est l'application définie par*

$$\sigma : \begin{cases} \Sigma_k^+ & \rightarrow \Sigma_k^+ \\ \omega & \mapsto \sigma(\omega) = (i_2(\omega)i_3(\omega), \dots). \end{cases}$$

On introduit une distance, donc une topologie sur Σ_k^+ . Soit $\beta > 1$. Pour $\omega, \omega' \in \Sigma_k^+$, on définit

$$d(\omega, \omega') = \begin{cases} \beta^{-n} & \text{si } \omega \neq \omega' \\ 0 & \text{si } \omega = \omega', \end{cases} \quad (2.20)$$

où $n = n(\omega, \omega') \in \mathbb{N}$ est le plus petit entier positif tel que $i_n(\omega) \neq i_n(\omega')$.

Proposition 2.4.6 ([6], page 150). *Pour chaque $\beta > 1$,*

1. *d est une distance sur Σ_k^+ ,*
2. *$d(\omega, \omega'') \leq \max\{d(\omega, \omega'), d(\omega', \omega'')\}$,*
3. *(Σ_k^+, d) est un espace métrique compact,*
4. *le décalage σ est continu.*

Proposition 2.4.7 ([6], page 151). *$h_{top}(\sigma | \Sigma_k^+) = \log k$.*

Soit $\Sigma_k = \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des suites

$$\omega = (\dots, i_{-1}(\omega)i_0(\omega)i_1(\omega), \dots)$$

Définition 2.4.8. *Le **décalage** est l'application définie par*

$$\sigma : \begin{cases} \Sigma_k & \rightarrow \Sigma_k \\ \omega & \mapsto \sigma(\omega) = \omega', \end{cases}$$

où $i_n(\omega') = i_{n+1}(\omega)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

On remarque que le décalage σ est inversible dans Σ_k . On introduit également une distance, donc une topologie sur Σ_k . Soit $\beta > 1$. Pour $\omega, \omega' \in \Sigma_k$, on définit

$$d(\omega, \omega') = \begin{cases} \beta^{-n} & \text{si } \omega \neq \omega' \\ 0 & \text{si } \omega = \omega', \end{cases}$$

où $n = n(\omega, \omega') \in \mathbb{N}$ est le plus petit entier tel que

$$i_n(\omega) \neq i_n(\omega') \text{ ou } i_{-n}(\omega) \neq i_{-n}(\omega').$$

Corollaire 2.4.9. *L'entropie topologique du fer à cheval de Smale est égale à $\log 2$.*

Démonstration. La conjugaison (2.19) entre le fer à cheval de Smale et Σ_2 , le corollaire 2.3.3 et la proposition 2.4.7 permettent de conclure. \square

Quelques aspects sur les structures riemannienne et symplectique

Ce chapitre abordera principalement deux grandes notions que sont les variétés riemanniennes et les variétés symplectiques. Des thèmes connexes à ces deux notions y seront également définis.

3.1 Variété riemannienne

Définition 3.1.1. • Une *métrique riemannienne* sur une variété M est la donnée d'une application lisse

$$g : \begin{cases} M & \rightarrow & S^2T^*M \\ m & \mapsto & g_m : \begin{cases} T_mM \times T_mM & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & g_m(u, v) \end{cases} \end{cases}$$

avec g_m un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive) sur T_mM .

• Le couple (M, g) est dit *variété riemannienne*.

Soit $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(1 \leq i \leq n)}$ le champ de vecteurs coordonnés dans une carte locale (x_1, \dots, x_n) de m . Soit $u, v \in T_mM$ avec

$$u = \sum_{i=1}^n u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_m \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_m .$$

Alors

$$g_m(u, v) = \sum_{i,j} g_{ij}(m) u^i v^j = {}^t u (g_{ij}(m)) v,$$

avec

$$g_{ij}(m) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_m, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_m\right)$$

et $(g_{ij}(m))_{(1 \leq i, j \leq n)}$ une matrice symétrique définie positive. Dans les coordonnées $(x^i)_{\leq i \leq n}$, la notation standard est

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j .$$

Exemple 3.1.1. Sur \mathbb{R}^n , à partir de la métrique euclidienne standard, on définit une métrique riemannienne sur \mathbb{R}^n :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \\ x & \mapsto g_x : \begin{cases} T_x \mathbb{R}^n \times T_x \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right) & \mapsto g_x(u, v) = \sum_i^n u_i v_i. \end{cases} \end{cases} \quad S^2 T^* \mathbb{R}^n$$

Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(g_{ij}(m))_{(1 \leq i, j \leq n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = Id_n,$$

que l'on note, dans les coordonnées $(x_i)_{i \leq n}$,

$$g_{eucl} = dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

Remarque. Soit (U, φ) et (V, φ') deux cartes locales sur M . Si g est donnée par (g_{kl}) (respectivement (g'_{ij})) dans le système des coordonnées (x_k) (respectivement (y_j)), alors

$$g \left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \sum_{k,l} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} g \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right).$$

Exemple 3.1.2. L'espace euclidien \mathbb{R}^2 est équipé d'une structure riemannienne canonique $g_{eucl} = dx^2 + dy^2$. Pour exprimer l'expression locale de cette métrique en coordonnées polaires (r, θ) avec

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases},$$

on a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dès lors,

$$g \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 1, \quad g \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = r^2 \quad \text{et} \quad g \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Ainsi,

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

3.1.1 Dérivée covariante

Connexion

Définition 3.1.2. Soit M une variété. On appelle **connexion** sur M une application

$$D : \begin{cases} \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) & \longrightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) & \longmapsto D(X, Y) = D_X Y \end{cases}$$

telle que les propriétés suivantes soient satisfaites :

pour toutes fonctions réelles $f, g \in C^\infty(M)$ et tous champs de vecteurs X, Y, Z sur M ,

1. $D_X(Y + Z) = D_XY + D_XZ$,
2. $D_{fX+gY}Z = fD_XZ + gD_YZ$,
3. $D_X(fY) = fD_XY + (X.f)Y$.

Remarque. La notation fX désigne le champ de vecteurs défini pour tout $m \in M$ par

$$(fX)(m) = f(m)X(m)$$

et la notation $X.f$ désigne la fonction sur M obtenue en appliquant l'opérateur différentiel X à la fonction f .

Définition 3.1.3. On dit qu'une connexion D sur M est **symétrique** ou **sans torsion** si, pour tous champs de vecteurs X et Y sur M , on a

$$D_XY - D_YX = [X, Y].$$

Le tenseur

$$T : (X, Y) \mapsto (D_XY - D_YX) - [X, Y]$$

est appelé **torsion** de la connexion D .

Définition 3.1.4. Soit (M, g) sur variété riemannienne. Une connexion D sur M est dite **compatible** avec la métrique g si

$$X.g(Y, Z) = g(D_XY, Z) + g(Y, D_XZ).$$

Théorème 3.1.5 ([5], page 178). Sur une variété riemannienne (M, g) , il existe une unique connexion qui soit à la fois symétrique et compatible avec la métrique g . On l'appelle **connexion de Levi-Civita** ou **connexion riemannienne** ou encore **connexion canonique**.

Proposition 3.1.6 ([4], page 68). Soit (M, g) une variété riemannienne ainsi que X, Y deux champs de vecteurs sur M . Dans des coordonnées locales on écrit

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j, \quad X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Dans ce système de coordonnées, on a

$$D_XY = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i X^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

avec Γ_{jk}^i , les **symboles de Christoffel**, sont des fonctions définies par la relation

$$D \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

En posant $\partial_k g_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}$ on a

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}).$$

Dérivée covariante le long d'une courbe

Définition 3.1.7. *Un champ de vecteur le long d'une courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ est une courbe $X : I \rightarrow TM$ telle que $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ pour tout $t \in I$.*

Exemple 3.1.3. Par exemple, $\gamma'(t)$ est un champ le long de γ .

Théorème 3.1.8 ([4], page 72). *Soit (M, g) une variété riemannienne munie de sa connexion canonique D , et $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe sur M . Il existe une unique application notée $Y \mapsto \frac{DY}{dt}$ et appelée **dérivée covariante le long de γ** qui, à tout champ de vecteurs Y le long de γ , associe un autre champ de vecteurs $\frac{DY}{dt}$ le long de γ avec les propriétés suivantes*

1. pour tous champs Y, Z le long de γ et toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{D(Y + Z)}{dt} = \frac{DY}{dt} + \frac{DZ}{dt}$$

et

$$\frac{D(fY)}{dt} = \frac{df}{dt}Y + f\frac{DY}{dt},$$

2. s'il existe un voisinage de t_0 dans I tel que Y est la restriction à γ d'un champ de vecteurs X défini dans un voisinage de $\gamma(t_0)$ dans M , alors

$$\frac{DY}{dt}(t_0) = (D_{\gamma'(t_0)}X)_{\gamma'(t_0)}.$$

Dans un système de coordonnées locales où $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ on a

$$\frac{DY}{dt} = \sum_j \left[\frac{dY^i}{dt}(t) + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i(x^j)'(t)Y^k(t) \right] \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (3.1)$$

Définition 3.1.9. *Un champ de vecteurs X le long d'une courbe γ est dit **parallèle le long de γ** si $\frac{DX}{dt} = 0$.*

Exemple 3.1.4. Sur \mathbb{R}^n , pour tout champ de vecteurs X le long de γ ,

$$\frac{DX}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(X(t)).$$

3.1.2 Géodésiques sur une variété riemannienne

Définition 3.1.10. *Soit (M, g) une variété riemannienne et D sa connexion canonique. Une courbe paramétrée γ sur M est une **géodésique** sur M si le champ de vecteurs-vitesse γ' est parallèle le long de γ , c'est-à-dire*

$$D_{\gamma'}\gamma' = 0 \text{ ou } \frac{D\gamma'}{dt} = 0$$

et ne s'annule jamais.

La vitesse $|\gamma'(t)|$ est constante, comme

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \langle D_{\gamma'}\gamma', \gamma' \rangle = 0.$$

En coordonnées locales, d'après la relation (3.1), les géodésiques sont solutions du système différentiel

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i(x(t)) \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad (1 \leq i \leq n), \quad (3.2)$$

avec $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$.

Exemple 3.1.5. Les géodésiques de \mathbb{R}^n sont des lignes droites paramétrées avec vitesse constante. En effet,

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t) = 0 \Leftrightarrow \gamma''(t) = 0 \Leftrightarrow \gamma(t) = x_0 + tv.$$

Géodésique et équations d'Euler-Lagrange

Définition 3.1.11. La longueur d'une courbe $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ est définie par

$$\mathcal{L}_g(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt.$$

Si la courbe $\gamma([a, b])$ est contenue dans le domaine d'une carte (U, φ) , la longueur est, en notant $x(t) = (\varphi \circ \gamma)(t)$, donnée par

$$\mathcal{L}_g(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g_{i,j}(x(t)) x'_i(t) x'_j(t)} dt.$$

Proposition 3.1.12. La longueur d'une courbe ne dépend pas du choix de la carte.

Définition 3.1.13. Soit M une variété différentielle. Un **lagrangien** sur M est une application lisse

$$\begin{aligned} L : TM \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v \in T_x M, t) &\longmapsto L(x, v \in T_x M, t). \end{aligned}$$

On associe à un lagrangien L une fonctionnelle \mathcal{F}_L sur l'ensemble de courbes \mathcal{C}^1 sur M :

$$\mathcal{F}_L : (\gamma : [a, b] \rightarrow M) \longmapsto \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt.$$

Exemple 3.1.6. Si (M, g) est une variété riemannienne, si $L_g(x, v, t) = \sqrt{g_x(v, v)}$ alors si $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ est une courbe sur M , la fonctionnelle

$$\mathcal{F}_{L_g}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_x(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt = \mathcal{L}_g(\gamma)$$

est la **g -longueur** de la courbe γ .

La fonctionnelle associée au lagrangien $L_g^2(x, v, t) = g_x(v, v)$ donnée par

$$\mathcal{F}_{L_g^2}(\gamma) = \int_a^b g_x(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

et appelée **énergie** de la courbe γ pour la métrique g .

Définition 3.1.14. Une courbe γ est **extrémale** pour un lagrangien L si elle est un point critique de la fonctionnelle \mathcal{F}_L avec des extrémités fixées, c'est-à-dire pour toute courbe C^1 $c :]-\epsilon, \epsilon[\times [a, b] \rightarrow M$ tel que

- $\forall t \in [a, b], c(0, t) = \gamma(t)$ et
- $\forall s \in]-\epsilon, \epsilon[, \begin{cases} c(s, a) = \gamma(a) \\ c(s, b) = \gamma(b) \end{cases},$

alors

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\mathcal{F}_L(c(s, \cdot))) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_a^b L \left(c(s, t), \frac{\partial c}{\partial t}(s, t), t \right) dt = 0.$$

Théorème 3.1.15 (Equations d'Euler-Lagrange). Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $L : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un lagrangien. Une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ sur U est extrémale pour L si et seulement si

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [a, b], \quad \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)(h) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) \right)(h). \quad (3.3)$$

Proposition 3.1.16. Soit (M, g) une variété riemannienne. Une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ sur M est extrémale pour $L_g^2 = g_x(\dot{x}, \dot{x})$ si et seulement si elle est extrémale pour $L_g = \sqrt{g_x(\dot{x}, \dot{x})}$ et est à vitesse constante, c'est-à-dire

$$\sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} \equiv \text{cst.}$$

Définition 3.1.17. Une **géodésique** d'une variété riemannienne (M, g) est une courbe critique pour la g -énergie $\mathcal{F}_{L_g^2}$.

Si $g_x = \sum_{ij} g_{ij}(x) dx^i dx^j$ est la métrique riemannienne sur $U \subset \mathbb{R}^n$, les équations d'Euler-Lagrange (3.3) pour le lagrangien $L(x, \dot{x}) = g_x(\dot{x}, \dot{x})$ donnent explicitement les équations différentielles satisfaites par les géodésiques.

Remarque. On a bien évidemment équivalence entre les définitions 3.1.10 et 3.1.17. En effet, exprimons le lagrangien sous la forme

$$L(x^\mu, \dot{x}^\mu) = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu,$$

avec μ, ν des indices muets. Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\frac{\partial L}{\partial x^\rho} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} \right) = 0. \quad (3.4)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^\rho} &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + g_{\mu\nu} \frac{\partial (\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)}{\partial x^\rho} \\ &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \dot{x}^\rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + g_{\mu\nu} \frac{\partial (\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)}{\partial \dot{x}^\rho} \\ &= g_{\mu\nu} \frac{\partial (\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)}{\partial \dot{x}^\rho} \\ &= 2g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \end{aligned}$$

Ainsi les équations (3.4) s'écrivent

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{d}{dt} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \frac{d}{dt} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \frac{d(g_{\mu\nu})}{dt} \dot{x}^\mu - g_{\mu\nu} \frac{d(\dot{x}^\mu)}{d\tau} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \frac{d(g_{\beta\nu})}{dt} \dot{x}^\beta - g_{\mu\nu} \ddot{x}^\mu = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - g_{\mu\nu} \ddot{x}^\mu = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - g_{\mu\nu} \ddot{x}^\mu = 0 \\
 \Leftrightarrow & -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + g_{\mu\nu} \ddot{x}^\mu = 0 \\
 \Leftrightarrow & g_{\mu\nu} \ddot{x}^\mu + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \\
 \Leftrightarrow & \ddot{x}^\mu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \\
 \Leftrightarrow & \ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0.
 \end{aligned}$$

Et on retrouve ainsi les équations 3.2.

3.1.3 Flot géodésique sur une variété riemannienne

Soit (M, g) une variété riemannienne complète et soit $\gamma_{(x,v)}(t)$ l'unique géodésique avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \gamma_{(x,v)}(0) = x \\ \dot{\gamma}_{(x,v)}(0) = v. \end{cases} \quad (3.5)$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit un difféomorphisme du fibré tangent TM comme suit

$$\phi^t : \begin{cases} TM & \longrightarrow & TM \\ (x, v) & \longmapsto & \phi^t(x, v) = (\gamma_{(x,v)}(t), \dot{\gamma}_{(x,v)}(t)) \end{cases} .$$

La famille des difféomorphismes ϕ^t est un flot. Soit SM le **fibré tangent unitaire** de M , c'est-à-dire, le sous-ensemble de TM dont les éléments (x, v) sont tels que v est de g -norme 1. Comme les géodésiques ont une vitesse constante, ϕ^t laisse SM invariant, c'est-à-dire, si $(x, v) \in SM$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\phi^t(x, v) \in SM$. La restriction de ϕ^t à SM est appelée **flot géodésique** de g . Voir [11], page 8.

Considérons le cas particulier d'un système lagrangien, c'est-à-dire un système décrit par un lagrangien $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ et donné par les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Soit (M, g) une variété riemannienne et on définit le lagrangien

$$L(x, v) = \frac{1}{2} g_x(v, v).$$

Le système lagrangien sur TM correspondant à ce lagrangien (aussi bien sa restriction sur le fibré tangent unitaire SM) est appelé **flot géodésique** sur la variété M . Voir [2], page 201.

Via la métrique riemannienne g on identifie le fibré cotangent T^*M et du fibré tangent TM . Ainsi la proposition suivante permet d'écrire l'équivalent de l'équation d'Euler-Lagrange sur le fibré cotangent.

Proposition 3.1.18. *L'équation d'Euler-Lagrange est équivalente à un système d'équations (équations de Hamilton) :*

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \end{cases} \quad (3.6)$$

où $H(p, q) = p\dot{q} - L(q, \dot{q})$ est la transformée de Legendre du lagrangien $L(q, \dot{q})$ et $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$.

Démonstration. L'équation d'Euler-Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$ peut s'écrire $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$. Donc, d'une part,

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq$$

et d'autre part,

$$dH = d(p\dot{q} - L) = \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial q} dq.$$

Ceci donne, par identification des termes, les équations (3.6). □

La proposition précédente assure le fait que le flot géodésique soit un flot hamiltonien. Pour trouver le hamiltonien correspondant au lagrangien $L(x, v) = \frac{1}{2}g_x(v, v)$, soit $H(p, q) = p\dot{q} - L(q, \dot{q})$ la transformée de Legendre de $L(q, \dot{q})$. On a

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2}g_q(\dot{q}, \dot{q}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\sum_{ij} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j \right) \\ &= \sum_{ij} g_{ij}(q) \dot{q}^i. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} H(p, q) &= p\dot{q} - L(q, \dot{q}) \\ &= \left(\sum_{ij} g_{ij}(q) \dot{q}^i \right) \dot{q} - \frac{1}{2}g_q(\dot{q}, \dot{q}) \\ &= g_q(\dot{q}, \dot{q}) - \frac{1}{2}g_q(\dot{q}, \dot{q}) \\ &= \frac{1}{2}g_q(\dot{q}, \dot{q}). \end{aligned}$$

3.2 Variété symplectique

3.2.1 Forme symplectique

Une première interprétation des formes différentielles sur une variété M est la suivante

Définition 3.2.1. Une p -forme différentielle sur M est une section du fibré

$$\pi : \wedge^p T^*M \longrightarrow M$$

des formes alternées sur M , c'est-à-dire une application lisse $\alpha : M \longrightarrow \wedge^p T^*M$ telle que pour tout $x \in M$, $\alpha_x \in \wedge^p T_x^*M$:

$$\alpha : \begin{cases} M & \longrightarrow & \wedge^p T^*M \\ x & \longmapsto & \alpha_x : \begin{cases} T_x M \times \dots \times T_x M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_p) & \longmapsto & \alpha_x(v_1, \dots, v_p). \end{cases} \end{cases}$$

Une autre interprétation, équivalente à la première, utilisant les champs de vecteurs sur M consiste à voir α comme une p -forme linéaire alternée sur l'ensemble des champs de vecteurs sur M , $Vect(M)$, lequel est considéré comme un module sur l'anneau $C^\infty(M)$.

Définition 3.2.2. Une p -forme différentielle α sur M est donnée par

$$\alpha : \begin{cases} Vect(M) \times \dots \times Vect(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ (X_1, \dots, X_p) & \longmapsto & \alpha(X_1, \dots, X_p) : \begin{cases} M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha(X_1, \dots, X_p)(x) = \alpha_x((X_1)_x, \dots, (X_p)_x) \end{cases} \end{cases}$$

où

$$X_i : \begin{cases} M & \longrightarrow & TM \\ x & \longmapsto & X_i(x) = (X_i)_x \in T_x M \end{cases}$$

est un champ de vecteurs sur M . Avec cette définition, on a les notions suivantes

- La **différentielle** $d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$ est donnée par

$$d\alpha(X_0, \dots, X_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i X_i \cdot \alpha(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_p) + \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_p).$$

La notation \widehat{X}_i signifie qu'on omet X_i .

- La **dérivée de Lie** associée à champ de vecteurs X , $L_X : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(M)$, est donnée par

$$L_X \alpha = \left(\frac{d}{dt} \right) (\varphi_t^* \alpha) |_0,$$

avec φ_t le groupe local à un paramètre associé à X et $\varphi_t^* \alpha$ le pull-back¹ de α par φ_t .

- Le **produit intérieur** d'une p -forme différentielle α par un champ de vecteurs X , $i_X : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M)$, est donné par

$$(i_X \alpha)(X_1, \dots, X_{p-1}) = \alpha(X, X_1, \dots, X_{p-1}).$$

En utilisant la première définition on a

$$(i_X \alpha)_x(v_1, \dots, v_{p-1}) = \alpha_x(X_x, v_1, \dots, v_{p-1}).$$

1. Défini plus bas.

- De plus, les formules suivantes sont vérifiées
 1. Formule de Cartan : $L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$,
 2. $L_X f = df(X) = X.f$,
 3. $L_X \circ d = d \circ L_X$,
 4. $L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X \beta$,
 5. $L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X = L_{[X,Y]}$.

Pullback d'une p -forme différentielle

Soit $f : M \rightarrow N$ une application différentielle et ω une p -forme différentiable sur N . Alors, sur M , il existe une p -forme différentielle, notée $f^*\omega$, définie comme suit

$$\begin{array}{ccc} T_x M \times T_x M \times \dots \times T_x M & \xrightarrow{df(x)} & T_{f(x)} N \times T_{f(x)} N \times \dots \times T_{f(x)} N & \xrightarrow{\omega_{f(x)}} & \mathbb{R} \\ (v_1, v_2, \dots, v_p) & \mapsto & (df(x).v_1, df(x).v_2, \dots, df(x).v_p) & \mapsto & \omega_{f(x)}((df(x).v_1, df(x).v_2, \dots, df(x).v_p)). \end{array}$$

Plus simplement,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (f^*\omega)_x : T_x M \times T_x M \times \dots \times T_x M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, v_2, \dots, v_p) & \mapsto & (f^*\omega)_x(v_1, v_2, \dots, v_p) = \omega_{f(x)}((df(x).v_1, df(x).v_2, \dots, df(x).v_p)) \end{array} \right. .$$

Définition 3.2.3. Soit M une variété différentielle de dimension paire. Une **structure symplectique** sur M est la donnée d'une 2-forme différentielle ω qui est

- fermée : $d\omega = 0$ et
- régulière : $\forall x \neq 0, \exists y : \omega(x, y) \neq 0$ avec $x, y \in T_x M$.

Le couple (M, ω) s'appelle **variété symplectique**.

Exemple 3.2.1. Considérons la variété \mathbb{R}^{2n} muni des coordonnées (p_i, q_i) . La forme

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i$$

est une forme symplectique sur \mathbb{R}^{2n} .

Définition 3.2.4. Un **difféomorphisme** $f : (M, \omega) \rightarrow (N, \eta)$ entre deux variétés symplectiques tel que

$$f^*\eta = \omega$$

est appelé un **difféomorphisme symplectique** ou un **symplectomorphisme**.

Théorème 3.2.5 (Darboux, [2], page 221). Soit (M, ω) une variété symplectique. Pour tout point $x \in M$ il existe un voisinage U de x et un système des coordonnées $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tel que sur tout point $y \in U$, ω est la forme symplectique standard par rapport à la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{2n}} \right\}$.

Ce théorème renseigne donc que toute variété symplectique est localement symplectomorphe à \mathbb{R}^{2n} . Les coordonnées ci-dessus sont appelées **coordonnées de Darboux** ou **coordonnées symplectiques**.

Exemple 3.2.2. Soit M une variété différentielle et les coordonnées locales $\{q_1, \dots, q_n\}$ sur M . Sur le fibré cotangent T^*M cela entraîne les coordonnées $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$. On définit la **1-forme de Liouville** θ par

$$\theta = - \sum_{i=1}^n p_i dq_i.$$

Alors sa dérivée extérieure donnée par

$$\omega = d\theta = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$$

est une forme symplectique sur T^*M .

3.2.2 Champ et flot hamiltoniens

Définition 3.2.6. Soit (M, ω) une variété symplectique et $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse.

- Le champ de vecteurs, noté X_H et donné par

$$i_{X_H} \omega = -dH, \tag{3.7}$$

est appelé **champ de vecteurs hamiltonien** associé à H ou **gradient symplectique** de H .

- Le flot φ^t du champ X_H , c'est-à-dire la famille d'applications $\varphi^t : M \rightarrow M$ satisfaisant

$$\frac{d}{dt} \varphi^t(x) = X_H(\varphi^t(x)); \quad x \in M, t \in \mathbb{R} \text{ et } \varphi^0(x) = x,$$

est appelé **flot hamiltonien** de H .

Si Y est un champ de vecteurs sur M la relation (3.7) s'écrit

$$(i_{X_H} \omega)(Y) = \omega(X_H, Y) = -dH(Y).$$

Exemple 3.2.3. Considérons la variété symplectique $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ avec

$$\omega = \sum_{i=1}^n (dp_i \wedge dq_i).$$

Soit $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse et

$$Y = \sum_i^n Y^{p_i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_i^n Y^{q_i} \frac{\partial}{\partial q_i}$$

un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^{2n} . Pour exprimer le champ hamiltonien associé à H , écrivons-le sous la forme

$$X_H = \sum_i^n X^{p_i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_i^n X^{q_i} \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Alors on a, d'une part,

$$\begin{aligned} \omega(X_H, Y) &= \sum_{i=1}^n (dp_i \wedge dq_i) \left(\begin{pmatrix} X^{p_i} \\ X^{q_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y^{p_i} \\ Y^{q_i} \end{pmatrix} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n dp_i \begin{pmatrix} X^{p_i} \\ X^{q_i} \end{pmatrix} dq_i \begin{pmatrix} Y^{p_i} \\ Y^{q_i} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n dp_i \begin{pmatrix} Y^{p_i} \\ Y^{q_i} \end{pmatrix} dq_i \begin{pmatrix} X^{p_i} \\ X^{q_i} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n X^{p_i} Y^{q_i} - \sum_{i=1}^n Y^{p_i} X^{q_i} \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
 dH(Y) &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) \begin{pmatrix} Y^{p_i} \\ Y^{q_i} \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \begin{pmatrix} Y^{p_i} \\ Y^{q_i} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \begin{pmatrix} Y^{p_i} \\ Y^{q_i} \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} Y^{p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} Y^{q_i}.
 \end{aligned}$$

Comme X_H vérifie $\omega(X_H, Y) = -dH(Y)$, c'est-à-dire ici

$$\sum_{i=1}^n X^{p_i} Y^{q_i} - \sum_{i=1}^n Y^{p_i} X^{q_i} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} Y^{q_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} Y^{p_i},$$

on trouve le champ hamiltonien

$$X_H = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{pmatrix}.$$

La relation $\dot{\varphi}^t = X_H$ donne les équations habituelles de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{cases}$$

Proposition 3.2.7 ([2], page 223). *Le flot hamiltonien préserve la structure symplectique :*

$$(\varphi^t)^* \omega = \omega.$$

Proposition 3.2.8 ([2], page 224). *Soit (M, ω) une variété symplectique, $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse, $i_{X_H} \omega = -dH$, et $\dot{\varphi}^t = X_H$. Alors $H(\varphi^t(x))$ ne dépend pas du temps.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} H|_{\varphi^t(x)} &= dH(\varphi^t(x)) \dot{\varphi}^t(x) \\
 &= -\omega(X_H(\varphi^t(x)), \dot{\varphi}^t(x)) \\
 &= -\omega(X_H(\varphi^t(x)), X_H(\varphi^t(x))) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

On dit alors que H est une intégrale première du flot hamiltonien φ^t .

3.2.3 Crochet de Poisson

Soit (M, ω) une variété symplectique. A une fonction $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ correspond un groupe à un paramètre $\varphi_H^t : M \rightarrow M$, par exemple le flot hamiltonien de H . Soit $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ une autre fonction sur M .

Définition 3.2.9. On appelle **crochet de Poisson** des fonctions F et H définies sur M , on note $\{F, H\}$, la dérivée de la fonction F suivant la direction du flot hamiltonien de H :

$$\{F, H\}(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(\varphi_H^t(x)).$$

De façon équivalente le crochet de Poisson de deux fonctions F et H peut être défini par

$$\{F, H\} = \omega(X_H, X_F) = dF(X_H).$$

Exemple 3.2.4. Dans les coordonnées symplectiques $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$ on a

$$\begin{aligned} \{F, H\} &= \omega(X_H, X_F) \\ &= \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i(X_H, X_F) \\ &= \sum_{i=1}^n dp_i(X_H) dq_i(X_F) - \sum_{i=1}^n dp_i(X_F) dq_i(X_H) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \frac{\partial F}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \end{aligned}$$

Proposition 3.2.10 ([2], page 225). • Le crochet de Poisson est antisymétrique : $\{F, H\} = -\{H, F\}$.

• Une fonction F est une intégrale première du flot hamiltonien de H si et seulement si $\{F, H\} = 0$.

3.3 Structure de Lie-Poisson

La structure de Lie-Poisson permet de considérer le crochet de Poisson dans un cadre plus abstrait et donc général que celui obtenu à partir de la structure symplectique.

3.3.1 Variété de Poisson

Définition 3.3.1. Le **crochet de Poisson** (ou la **structure de Poisson**) sur une variété M est la donnée d'une application bilinéaire sur $C^\infty(M)$, notée $\{.,.\}$, vérifiant les propriétés suivantes

1. $(C^\infty(M), \{.,.\})$ est une algèbre de Lie et
2. $\{.,.\}$ est une dérivation :

$$\{FG, H\} = \{F, H\}G + F\{G, H\}, \quad \forall F, G, H \in C^\infty(M).$$

On dit dans ce cas que M est une **variété de Poisson**.

Exemple 3.3.1. • **Crochet symplectique.** Toute variété symplectique est une variété de Poisson. Le crochet de Poisson est défini comme ci-dessus par la forme symplectique. La

propriété de dérivation est une conséquence des propriétés de dérivation sur les champs de vecteurs :

$$\begin{aligned}\{FG, H\} &= X_H(FG) \\ &= FX_H(G) + GX_H(F) \\ &= \{F, H\}G + F\{G, H\}.\end{aligned}$$

- **Crochet de Lie-Poisson**². Soit \mathfrak{g} est une algèbre de Lie et \mathfrak{g}^* son dual. Pour $F : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$, on définit la dérivée $\frac{\delta F}{\delta \mu} \in \mathfrak{g}$, où $\mu \in \mathfrak{g}^*$, par

$$dF(\mu) \cdot \nu = \left\langle \nu, \frac{\delta F}{\delta \mu} \right\rangle \quad \forall \nu \in \mathfrak{g}^*.$$

Il s'agit ici d'une identification entre \mathfrak{g}^{**} et \mathfrak{g} et ainsi $dF(\mu) \in \mathfrak{g}^{**}$ est vu comme un élément de \mathfrak{g} .

Alors le dual \mathfrak{g}^* est une variété de Poisson par rapport aux crochets de Lie-Poisson³ $\{.,.\}_+$ et $\{.,.\}_-$ définis par

$$\{F, G\}_{\pm}(\mu) = \pm \left\langle \mu, \left[\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta G}{\delta \mu} \right] \right\rangle,$$

pour $\mu \in \mathfrak{g}^*$ et $F, G \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

3.3.2 Fonctions de Casimir

On généralise la notion de champ de vecteurs hamiltonien telle que vue dans le cadre symplectique.

Proposition 3.3.2 ([7], page 333). *Soit M une variété de Poisson. Si $H \in C^\infty(M)$, alors il existe une unique champ de vecteurs sur M , noté X_H , tel que*

$$X_H(G) = \{G, H\}, \quad \forall G \in C^\infty(M).$$

Le champ X_H est appelé **champ de vecteurs hamiltonien** de H .

Proposition 3.3.3 ([7], page 333). *Soit $F, G \in C^\infty(M)$. On a*

$$[X_H, X_G] = -X_{\{H, G\}}.$$

Démonstration. En utilisant l'identité de Jacobi on a

$$\begin{aligned}[X_H, X_G](F) &= X_H(X_G(F)) - X_G(X_H(F)) \\ &= \{\{F, G\}, H\} - \{\{F, H\}, G\} \\ &= -\{F, \{H, G\}\} \\ &= -X_{\{H, G\}}(F).\end{aligned}$$

□

Pour les équations de mouvement, en utilisant la structure de Poisson, on a le résultat suivant

2. [7], page 328.

3. Il y en a deux, $\{.,.\}_-$ et $\{.,.\}_+$ respectivement, selon que l'on considère la translation à gauche ou la translation à droite respectivement.

Proposition 3.3.4 ([7], page 334). Soit φ^t un flot sur une variété de Poisson M et $H \in C^\infty(M)$. Alors

1. pour tout $F \in C^\infty(U)$, U un ouvert de M , on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt} (F \circ \varphi^t) = \{F, H\} \circ \varphi^t = \{F \circ \varphi^t, H\},$$

ou simplement

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

si et seulement si φ^t est le flot de X_H .

2. Si φ^t est le flot de X_H , alors

$$H \circ \varphi^t = H.$$

Corollaire 3.3.5 ([7], page 334). Soit $G, H \in C^\infty(M)$. Alors G est constant le long de la courbe intégrale de X_H si et seulement si $\{G, H\} = 0$.

Parmi les éléments de $C^\infty(M)$ il existe des fonctions C telles que

$$\{C, F\} = 0 \quad \forall F \in C^\infty(M).$$

Ce sont des fonctions qui sont constantes le long du flot de tous les champs de vecteurs hamiltoniens ou, de façon équivalente, $X_C = 0$, c'est-à-dire, C génère des dynamiques triviales. On les appelle **fonctions de Casimir** de la structure de Poisson. Elles forment le centre de l'algèbre de Poisson $C^\infty(M)$.

Exemple 3.3.2. Sur une variété symplectique M , toute fonction de Casimir est constante sur une composante connexe de M . En effet, dans le cas symplectique,

$$X_C = 0 \implies dC = 0,$$

et donc C est localement constant.

3.3.3 Application de Poisson.

Proposition 3.3.6 ([7], page 338). Le flot hamiltonien préserve la structure de Poisson : si φ^t est le flot de X_H , alors

$$\varphi_t^* \{F, G\} = \{\varphi_t^* F, \varphi_t^* G\}.$$

En d'autres termes

$$\{F, G\} \circ \varphi_t = \{F \circ \varphi_t, G \circ \varphi_t\}.$$

Définition 3.3.7. Une application lisse $f : M \rightarrow N$ entre deux variétés de Poisson $(M, \{.,.\}_1)$ et $(N, \{.,.\}_2)$ est une **application canonique** ou **application de Poisson** si

$$f^* \{F, G\}_2 = \{f^* F, f^* G\}_1, \quad \forall F, G \in C^\infty(N).$$

La proposition 3.3.6 ci-dessus montre que le flot hamiltonien est une application de Poisson.

Orbite coadjointe d'une algèbre de Lie

Dans ce chapitre, après quelques rappels de notions importantes, nous verrons brièvement ce que c'est qu'une orbite coadjointe d'une algèbre de Lie.

4.1 Groupe et algèbre de Lie

4.1.1 Groupe topologique

Définition 4.1.1. *Un groupe topologique est un groupe muni d'une topologie telle que l'application*

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

soit continue.

On note $M(n, \mathbb{R})$ l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{R} et $GL(n, \mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M(n, \mathbb{R})$, qui est appelé **groupe linéaire**.

Proposition 4.1.2 ([13], page 4). *Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$, muni de la topologie induite par celle de $M(n, \mathbb{R})$, est un groupe topologique.*

Définition 4.1.3. *Un groupe de Lie est un groupe topologique G muni d'une structure de variété différentielle.*

Un **groupe de Lie linéaire** est un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$.

Exemples de sous-groupes de $GL(n, \mathbb{R})$

- Le **groupe spécial linéaire** noté et défini par

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : \det(g) = 1\}.$$

- Le **groupe orthogonal** noté et défini par

$$O(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : g^T g = Id \text{ i.e } g^{-1} = g^T\}.$$

4 Orbite coadjointe d'une algèbre de Lie

- Le **groupe spécial orthogonal** $SO(n)$ est le groupe des matrices orthogonales de déterminant 1 :

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}).$$

- Plus généralement, soit B la matrice d'une forme bilinéaire b non dégénérée sur \mathbb{R}^n , on définit le groupe

$$O(b) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : g^T B g = B \text{ i.e } g^{-1} = B^{-1} g^T B\}.$$

En particulier si b est la forme bilinéaire symétrique définie par

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{i=1}^q x_{p+i} y_{p+i}, \quad p + q = n,$$

on note $O(b) = O(p, q)$ et on a le **groupe pseudo-orthogonal** défini par

$$O(p, q) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : g^T I_{p,q} g = I_{p,q}\},$$

où

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

- Si b est la forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée donnée par

$$b(x, y) = -\sum_{i=1}^m x_i y_{m+i} + \sum_{i=1}^m x_{m+i} y_i,$$

alors on a le **groupe symplectique** noté et défini par

$$Sp(m, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : g^T J g = J\},$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

- Le **groupe triangulaire supérieur** et le **groupe triangulaire supérieur strict**, notés et définis respectivement par

$$T(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : g_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$$

et

$$T_0(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : g_{ij} = 0 \text{ si } i > j \text{ et } g_{ii} = 1\}.$$

4.1.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie. A tout élément $g \in G$ on associe deux difféomorphismes, à savoir les **translations à gauche et à droite** notées et définies respectivement par

$$R_g : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & R_g(x) = xg \end{cases}$$

et

$$L_g : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & L_g(x) = gx. \end{cases}$$

On a les propriétés suivantes

- $L_g \circ L_h = L_{gh}$,
- $R_g \circ R_h = R_{hg}$,
- $R_g \circ L_h = L_h \circ R_g$,
- $L_{g^{-1}} = L_g^{-1}$,
- $R_{g^{-1}} = R_g^{-1}$.

Définition 4.1.4. *Un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TG)$ est invariant à gauche (resp. à droite) sur G si*

$$\forall g \in G, L_g^* X = X \text{ (resp. } R_g^* X = X).$$

Proposition 4.1.5 ([10], page 128). *Si G est une groupe de Lie (d'élément neutre noté e), l'application $X \mapsto X_e$ est un isomorphisme entre l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche sur G et l'espace tangent $T_e G$.*

Le crochet sur les champs de vecteurs se transfère donc par isomorphisme sur $T_e G$.

Définition 4.1.6. *L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G , notée \mathfrak{g} , est l'espace tangent $T_e G$.*

Dans le cas particulier où G est un groupe de Lie linéaire, on lui associe l'ensemble¹

$$\mathfrak{g} = \text{Lie}(G) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) : \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\},$$

où l'exponentielle d'une matrice $X \in M(n, \mathbb{K})$ est définie par la série

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

Exemples :

- $\text{Lie}(GL(n, \mathbb{R})) = M(n, \mathbb{R})$,
- $\text{Lie}(SL(n, \mathbb{R})) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) : \text{tr}(X) = 0\}$,
- $\text{Lie}(SO(n)) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) : X^T = -X\} = \text{AntiSym}(n, \mathbb{R})$,
- $\text{Lie}(Sp(n, \mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} : A \in M(n, \mathbb{R}), B, C \in \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \right\}$.

Dans les exemples ci-dessus, le crochet de Lie est celui des matrices : $[A, B] = AB - BA$.

La définition abstraite d'une algèbre de Lie est la suivante :

Définition 4.1.7. *Une **algèbre de Lie** réelle (resp. complexe) est un espace vectoriel \mathfrak{g} sur \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) muni d'une application bilinéaire*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] \end{aligned}$$

telle que

- $[X, Y] = -[Y, X]$,
- $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$ (identité de Jacobi).

1. ([13], page 41).

Algèbres de Lie nilpotentes et résolubles

Soit G un groupe d'élément neutre noté e . Le commutateur de deux éléments x et y de G est défini par

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy.$$

Si A et B sont deux sous-groupes de G , on note $[A, B]$ le sous-groupe engendré par les commutateurs de la forme $[x, y]$ pour $x \in A$ et $y \in B$.

On définit alors par récurrence une suite (la **suite centrale descendante** de G) de sous-groupes de G , par

$$\mathcal{C}^1(G) = G, \mathcal{C}^k(G) = [\mathcal{C}^{k-1}(G), G].$$

Définition 4.1.8. *Le groupe G est dit **nilpotent** s'il existe un entier n tel que $\mathcal{C}^n(G) = \{e\}$.*

Le **groupe dérivé** de G , noté $D(G)$, est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs. On définit les groupes dérivés successifs comme suit

$$D_0(G) = G \text{ et } D_{i+1}(G) = D(D_i(G)).$$

Définition 4.1.9. *Le groupe G est dit **résoluble** s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $D_n(G) = \{e\}$.*

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie sur \mathbb{R} . Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels de \mathfrak{g} , on note $[A, B]$ le sous-espace de \mathfrak{g} engendré par les crochets $[X, Y]$, où $X \in A$ et $Y \in B$. On note et définit l'**idéal dérivé** de \mathfrak{g} par

$$\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

- La **suite centrale descendante** $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g})$ est définie par récurrence par

$$\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = [\mathcal{C}^{k-1}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}].$$

- La **suite dérivée** $\mathcal{D}^k(\mathfrak{g})$ est définie par

$$\mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}(\mathfrak{g}), \mathcal{D}(\mathcal{D}^{k-1}(\mathfrak{g})) = \mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^{k-1}(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^{k-1}(\mathfrak{g})].$$

Les sous-espaces $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{D}^k(\mathfrak{g})$ sont des idéaux.

- La suite $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g})$ est décroissante et donc stationnaire à partir d'un certain rang. L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite **nilpotente** s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$.
- La suite $\mathcal{D}^k(\mathfrak{g})$ est également décroissante et donc stationnaire à partir d'un certain rang. L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite **résoluble** s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Exemples

[[13], pages 60-61]

- Soit $T_0(n, \mathbb{K})$ le groupe des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1. Son algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}_0(n, \mathbb{K})$ est constituée des matrices triangulaires supérieures dont les éléments diagonaux sont nuls :

$$\mathfrak{t}_0(n, \mathbb{K}) = \{x \in M(n, \mathbb{K}) : x_{ij} = 0 \text{ si } i \geq j\}.$$

Pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : x_{ij} = 0 \text{ si } i \geq j - k + 1\}.$$

En particulier, $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$, et \mathfrak{g} est nilpotente.

- Soit $T(n, \mathbb{K})$ le groupe des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont non nuls. Son algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ est constituée des matrices triangulaires supérieures :

$$\mathfrak{t}(n, \mathbb{K}) = \{x \in M(n, \mathbb{K}) : x_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}.$$

Nous avons

$$\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^3(\mathfrak{g}) = \dots = \mathfrak{t}_0(n, \mathbb{K})$$

et

$$\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) = \left\{x \in \mathfrak{g} : x_{ij} = 0 \text{ si } i > j - 2^{k+1}\right\}.$$

Par suite, $\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ si $2^{k-1} \geq n - 1$. Ainsi, \mathfrak{g} est résoluble mais n'est pas nilpotente.

Le lien entre groupe de Lie et algèbre de Lie résolubles est énoncé dans le résultat suivant :

Proposition 4.1.10 ([14], page 206). *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g}*

1. *Si G est nilpotent (resp. résoluble) alors \mathfrak{g} est nilpotente (resp. résoluble).*
2. *Si G est connexe et \mathfrak{g} est nilpotente (resp. résoluble) alors G est nilpotent (resp. résoluble).*

Définition 4.1.11. *Soit G un groupe de Lie connexe nilpotent et $D < G$ un sous-groupe discret². La variété $M = D \backslash G$ est appelée une **nilvariété**.*

4.2 Représentations adjointe et coadjointe

4.2.1 Orbite coadjointe

Soit G un groupe de Lie et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Le groupe G opère sur lui-même par une translation à gauche $L_g : h \mapsto gh$ et une translation à droite $R_g : h \mapsto hg$. Soit

$$I_g = R_g^{-1} \circ L_g : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & ghg^{-1} \end{cases}$$

l'automorphisme intérieur du groupe G . Il laisse e fixe. On définit la dérivée de I_g en l'unité e par l'application induite des espaces tangents comme suit :

$$(dI_g)(e) = Ad_g : \begin{cases} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ \xi & \longmapsto & \frac{d}{dt} I_g(e^{t\xi})|_{t=0} = g\xi g^{-1}. \end{cases}$$

On définit alors les représentations suivantes

Représentation intérieure de G

Elle est donnée par

$$I : \begin{cases} G & \longrightarrow & \text{End}(G) \\ g & \longmapsto & I_g : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & I_g(h) = ghg^{-1}. \end{cases} \end{cases}$$

2. C'est-à-dire la topologie induite de G sur D est la topologie discrète.

Représentation adjointe de G

Elle est donnée par

$$Ad : \begin{cases} G & \longrightarrow & End(\mathfrak{g}) \\ g & \longmapsto & Ad_g : \begin{cases} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ \xi & \longmapsto & Ad_g(\xi) = g\xi g^{-1}. \end{cases} \end{cases}$$

Définition 4.2.1. Grâce à l'action adjointe

$$\begin{aligned} G \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (g, \xi) &\longmapsto Ad_{g^{-1}}(\xi) \end{aligned}$$

de G sur \mathfrak{g} donnée par la représentation adjointe de G , on définit l'**orbite adjointe** de ξ par

$$\mathcal{O}_G(\xi) = \{Ad_{g^{-1}}(\xi) : g \in G\} \subset \mathfrak{g}.$$

Représentation adjointe de \mathfrak{g}

La représentation adjointe de \mathfrak{g} est donnée par

$$ad : \begin{cases} \mathfrak{g} & \longrightarrow & End(\mathfrak{g}) \\ \xi & \longmapsto & ad_\xi : \begin{cases} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ \eta & \longmapsto & ad_\xi(\eta) = [\xi, \eta]. \end{cases} \end{cases}$$

Représentation coadjointe de G

Soit T_g^*G l'espace cotangent de G en g , c'est-à-dire le dual de l'espace tangent T_gG . Un élément $\alpha \in T_g^*G$ est une forme linéaire sur T_gG et sa valeur sur $\eta \in T_gG$ est désignée par

$$\alpha : \begin{cases} T_gG & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \eta & \longmapsto & \alpha(\eta) \equiv \langle \alpha, \eta \rangle. \end{cases}$$

Soit $\mathfrak{g}^* = T_e^*G$ l'espace vectoriel dual de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Définition 4.2.2. L'opérateur dual de Ad_g est défini par

$$Ad_g^* : \begin{cases} \mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ \alpha & \longmapsto & Ad_g^*(\alpha) : \begin{cases} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \xi & \longmapsto & \langle Ad_g^*(\alpha), \xi \rangle = \langle \alpha, Ad_{g^{-1}}(\xi) \rangle. \end{cases} \end{cases}$$

La représentation coadjointe de G est donnée par

$$Ad^* : \begin{cases} G & \longrightarrow & End(\mathfrak{g}^*) \\ g & \longmapsto & Ad_g^* : \begin{cases} \mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ \alpha & \longmapsto & Ad_g^*(\alpha) : \begin{cases} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \xi & \longmapsto & \langle Ad_g^*(\alpha), \xi \rangle = \langle \alpha, Ad_g(\xi) \rangle. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Définition 4.2.3. Grâce à l'action coadjointe

$$\begin{aligned} G \times \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ (g, \alpha) &\longmapsto Ad_{g^{-1}}^*(\alpha) \end{aligned}$$

de G sur \mathfrak{g}^* donnée par la représentation coadjointe de G , on définit l'**orbite coadjointe** de α par

$$\mathcal{O}_G^*(\alpha) = \{Ad_{g^{-1}}^*(\alpha) : g \in G\} \subset \mathfrak{g}^*.$$

Représentation coadjointe de \mathfrak{g}

La représentation coadjointe de \mathfrak{g} est donnée par

$$ad^* : \begin{cases} \mathfrak{g} & \longrightarrow \\ \xi & \longmapsto \end{cases} ad_\xi^* : \begin{cases} \mathfrak{g}^* & \longrightarrow \\ \alpha & \longmapsto \end{cases} ad_\xi^*(\alpha) : \begin{cases} \mathfrak{g} & \longrightarrow \\ \eta & \longmapsto \end{cases} \langle ad_\xi^*(\alpha), \eta \rangle = -\langle \alpha, ad_\xi(\eta) \rangle = -\langle \alpha, [\xi, \eta] \rangle$$

4.2.2 Forme symplectique sur l'orbite coadjointe

Décrivons les vecteurs tangents des orbites coadjointes³. Soit $\xi \in \mathfrak{g}$ et $g(t)$ une courbe sur G tangent en ξ à $t = 0$; par exemple, soit $g(t) = \exp(t\xi)$. Soit \mathcal{O} une orbite coadjointe et $\mu \in \mathcal{O}$. Si $\eta \in \mathfrak{g}$, alors

$$\mu(t) = Ad_{g(t)}^* \mu$$

est une courbe sur \mathcal{O} avec $\mu(0) = \mu$. En différentiant l'identité

$$\langle \mu(t), \eta \rangle = \langle \mu, Ad_{g(t)} \eta \rangle$$

par rapport à t au point $t = 0$, on a

$$\langle \mu'(0), \eta \rangle = -\langle \mu, ad_\xi \eta \rangle = -\langle ad_\xi^* \mu, \eta \rangle,$$

et donc

$$\mu'(0) = -ad_\xi^* \mu.$$

Ainsi,

$$T_\mu \mathcal{O} = \{ad_\xi^* \mu : \xi \in \mathfrak{g}\}.$$

Ce même calcul montre que le générateur infinitésimal de l'action coadjointe est donné par

$$\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = -ad_\xi^* \mu.$$

L'algèbre coadjointe d'isotropie de μ

$$\mathfrak{g}_\mu = \{\xi \in \mathfrak{g} : ad_\xi^* \mu = 0\}$$

est l'algèbre de Lie du groupe coadjoint d'isotropie

$$G_\mu = \{g \in G : Ad_g^* \mu = \mu\}.$$

Théorème 4.2.4 ([7], page 454). *Soit G un groupe de Lie et $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ l'orbite coadjointe. Alors*

$$\omega^\pm(\mu) (\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu), \eta_{\mathfrak{g}^*}(\mu),) = \pm \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle \quad \forall \mu \in \mathcal{O}, \xi, \eta \in \mathfrak{g} \quad (4.1)$$

définit une forme symplectique sur \mathcal{O} .

4.2.3 Crochet de Lie-Poisson sur \mathfrak{g}^*

Proposition 4.2.5 ([7], page 328). *Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie, alors son dual \mathfrak{g}^* est une variété de Poisson par rapport aux crochets de Lie-Poisson $\{.,.\}_+$ et $\{.,.\}_-$ définis par*

$$\{F, G\}_\pm(\mu) = \pm \left\langle \mu, \left[\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta G}{\delta \mu} \right] \right\rangle, \quad (4.2)$$

pour $\mu \in \mathfrak{g}^*$, $F, G \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ et $[.,.]$ est le crochet de Lie sur \mathfrak{g} .

3. ([7], page 453)

Deux autres approches pour définir le crochet de Lie-Poisson sur \mathfrak{g}^*

Voir [7], page 462.

Le même crochet de Poisson sur \mathfrak{g}^* , défini directement en (4.2), peut être obtenu suivant deux autres procédés :

- **Méthode d'extension :**

1. Prendre $F, H : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}$;
2. étendre F, H à F_L, H_L (resp. F_R, H_R) : $T^*G \longrightarrow \mathbb{R}$ par translation à gauche (resp. à droite) ;
3. considérer le crochet $\{F_L, H_L\}$ (resp. $\{F_R, H_R\}$) par rapport à la structure symplectique canonique sur T^*G ; et
4. restreindre

$$\{F_L, H_L\} |_{\mathfrak{g}^*} = \{F, H\}_- \quad (\text{resp. } \{F_R, H_R\} |_{\mathfrak{g}^*} = \{F, H\}_+).$$

- **Méthode de restriction :**

1. Prendre $F, H : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}$;
2. restreindre F, H à $F, H |_{\mathcal{O}}$ à l'orbite coadjointe ; et
3. considérer le crochet de Poisson

$$\{F |_{\mathcal{O}}, H |_{\mathcal{O}}\}^{\pm}(\mu) = \{F, H\}_{\pm}(\mu), \quad \mu \in \mathcal{O}$$

par rapport à la structure symplectique ω^{\pm} de \mathcal{O} .

Champ hamiltonien sur \mathfrak{g}^*

([7], page 462).

Pour $H \in C^{\infty}(\mathfrak{g}^*)$ les équations d'évolution sont déterminées par

$$\dot{F} = \{F, H\}_-,$$

et sont équivalentes aux équations

$$\dot{\mu} = X_H(\mu)$$

sur \mathfrak{g}^* , avec X_H le champ de vecteur hamiltonien associé à H . Pour déterminer X_H , écrivons

$$\dot{F}(\mu) = dF(\mu) \cdot \dot{\mu} = \left\langle \dot{\mu}, \frac{\delta F}{\delta \mu} \right\rangle$$

et

$$\{F, H\}_-(\mu) = - \left\langle \mu, \left[\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta H}{\delta \mu} \right] \right\rangle = \left\langle \mu, \text{ad}^*_{\frac{\delta H}{\delta \mu}} \frac{\delta F}{\delta \mu} \right\rangle = \left\langle \text{ad}^*_{\frac{\delta H}{\delta \mu}}(\mu), \frac{\delta F}{\delta \mu} \right\rangle.$$

Ainsi, on a

$$X_H(\mu) = \text{ad}^*_{\frac{\delta H}{\delta \mu}}(\mu).$$

Proposition 4.2.6 ([7], page 463). *1. Pour $H \in C^{\infty}(\mathfrak{g}^*)$, la trajectoire de X_H partant de μ reste dans $\text{Orb}(\mu)$.*

4 Orbite coadjointe d'une algèbre de Lie

2. Une fonction $C \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ est une fonction de Casimir si et seulement si $\frac{\delta C}{\delta \mu} \in \mathfrak{g}_\mu$, pour tout $\mu \in \mathfrak{g}^*$.
3. Si $C \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ est Ad^* -invariant (constant sur les orbites), alors C est une fonction de Casimir. L'inverse est vrai si toutes les orbites coadjointes sont connexes.

Proposition 4.2.7. *Si on est sur une sous-variété qui est une ligne de niveau de fonctions de Casimir et symplectique, alors c'est exactement une orbite coadjointe.*

Ce chapitre est consacré à l'étude menée dans [1].

5.1 Quelques considérations et notations

- Le crochet de Poisson sur \mathfrak{g}^* est défini pour $f, h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ et $p \in \mathfrak{g}^*$ par

$$\{f, h\}(p) := -\langle p, [df(p), dh(p)] \rangle \quad (5.1)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Une fonction de Casimir est constante sur chaque orbite coadjointe et chaque orbite coadjointe est ensemble de niveau de toutes les fonctions de Casimir.
- Le crochet de Poisson sur \mathfrak{g}^* peut être obtenu à partir du crochet de Poisson sur T^*G en identifiant la sous-algèbre de Lie $C^\infty(T^*G)^G$ des fonctions lisses invariantes à gauche avec $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ comme suit :

la trivialisatation à gauche de $T^*G = G \times \mathfrak{g}^*$ induit la projection sur le second facteur

$$r : T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*;$$

$$r^*C^\infty(\mathfrak{g}^*) = C^\infty(T^*G)^G.$$

5.1.1 Métrique invariante à gauche sur un groupe de Lie

Une métrique riemannienne sur un groupe de Lie G est, par définition, invariante à gauche si elle est invariante par toutes les translations à gauche L_g . Plus précisément on a la définition suivante

Définition 5.1.1. Une métrique h sur un groupe de Lie G est dite **invariante à gauche** si

$$\forall g, g' \in G; \xi, \eta \in T_{g'}G \quad h_{g'} \left((dL_g)_{g'}(\xi), (dL_g)_{g'}(\eta) \right) = h_{g'}(\xi, \eta).$$

On construit une métrique invariante sur un groupe de Lie se fait à partir d'un produit scalaire sur son algèbre de Lie. Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g} = T_eG$ son algèbre de Lie. D'après la définition ci-dessus, h est une métrique invariante à gauche sur G si pour tout $\gamma \in G$,

- h_γ est un produit scalaire sur $T_\gamma G$ et

- $h_\gamma = dL_\gamma(e)_*.h_e$ ou alors $h_e = dL_\gamma(e)^*.h_\gamma$, avec $dL_\gamma(e) : T_eG \rightarrow T_\gamma G$.

Ainsi, la donnée d'un produit scalaire h_e sur \mathfrak{g} correspond à la donnée d'une métrique invariante à gauche h sur G et inversement.

Illustration 4. Soit l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{g} = \left\{ N = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

On définit h_e sur \mathfrak{g} par

$$h_e = a_{xx}dx^2 + a_{yy}dy^2 + a_{zz}dz^2$$

Ainsi,

$$h_e(N, N') = a_{xx}xx' + a_{yy}yy' + a_{zz}zz', \quad (5.2)$$

avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N' = \begin{pmatrix} 0 & x' & y' \\ 0 & 0 & z' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit le groupe de Lie

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Alors la métrique invariante à gauche sur G est donnée, pour tout $\gamma \in G$, par

$$h_\gamma = dL_\gamma(e)_*.h_e = \left((dL_\gamma(e))^{-1} \right)^* .h_e.$$

Donc

$$\begin{aligned} h_\gamma(N, N') &= h_e \left((dL_\gamma(e))^{-1} .N, (dL_\gamma(e))^{-1} .N' \right) \\ &= h_e(\gamma^{-1} .N, \gamma^{-1} .N'). \end{aligned}$$

Posons

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & 1 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i \in \mathbb{R},$$

pour avoir

$$\gamma^{-1} .N = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & 1 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x & y + \gamma_1 z \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\gamma^{-1} .N' = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & 1 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x' & y' \\ 0 & 0 & z' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x' & y' + \gamma_1 z' \\ 0 & 0 & z' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} h_\gamma(N, N') &= h_e(\gamma^{-1}.M, \gamma^{-1}.M') \\ &= a_{xx}xx' + a_{yy}(y + \gamma_1z)(y' + \gamma_1z') + a_{zz}zz'. \end{aligned}$$

Le hamiltonien du flot géodésique donné par h_γ est dans ce cas

$$\begin{aligned} 2H(\gamma, p) &= h_\gamma(p, p) \\ &= a_{xx}p_x^2 + a_{yy}p_y^2 + (a_{yy}\gamma_1^2 + 2a_{yz}\gamma_1 + a_{zz})p_z^2. \end{aligned}$$

On peut procéder de la même manière pour l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{t}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z & w \\ 0 & 0 & y & u \\ 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : u, v, w, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

5.1.2 Champ d'Euler et champ hamiltonien

Voir [1].

- Pour $h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, le champ de vecteurs hamiltonien $E_h = \{., h\}$ s'écrit sous la forme

$$E_h(p) = -ad_{dh(p)}^*p.$$

- Une métrique invariante à gauche étant constante dans la trivialisaton à gauche $T^*G = G \times \mathfrak{g}^*$, le champ d'Euler E_h est un champ hamiltonien sur \mathfrak{g}^* pour le produit scalaire donné par la métrique sur \mathfrak{g}^* . Par exemple, pour l'illustration 4 ci-dessus, le hamiltonien pour le champ d'Euler, obtenu à partir de la relation 5.2, est donné par

$$h(p) = \frac{1}{2} (a_{xx}p_x^2 + a_{yy}p_y^2 + a_{zz}p_z^2).$$

- Soit $\phi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ une application linéaire définie positive¹. En posant $h(p) = \frac{1}{2} \langle p, \phi(p) \rangle$, on a le champ de vecteurs hamiltonien

$$E_h(p) = -ad_{\phi(p)}^*p.$$

Par exemple, pour l'illustration 4 ci-dessus, si on écrit

$$p = p_x dx + p_y dy + p_z dz \in \mathfrak{g}^* \text{ et } \phi(p) = a_{xx}p_x \frac{\partial}{\partial x} + a_{yy}p_y \frac{\partial}{\partial y} + a_{zz}p_z \frac{\partial}{\partial z},$$

on a $\langle p, \phi(p) \rangle = 2h(p)$.

1. $\phi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ est dit

- **défini** si $\langle p, \phi(p) \rangle = 0 \implies p = 0$,
- **positif** si $\forall p \in \mathfrak{g}^*, \langle p, \phi(p) \rangle \geq 0$.

- En considérant la trivialisation à gauche $T^*G = G \times \mathfrak{g}^*$, le flot hamiltonien d'un hamiltonien invariant à gauche H sur T^*G admet les équations de mouvement

$$X_H(g, p) = \begin{cases} \dot{g} = T_e L_g dh(p) \\ \dot{p} = -ad_{dh(p)}^* p, \end{cases}$$

où $h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ satisfait $r^*h = H$.

- Le champ d'Euler est donné par $E_h = dr(X_H)$. Si $h(p) = \frac{1}{2} \langle p, \phi(p) \rangle$ pour une application linéaire définie positive $\phi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$, alors H est induit par une métrique invariante à gauche sur T^*G et X_H est le champ de vecteurs géodésique.
- Finalement, si $D < G$ est un sous-groupe discret, alors $T^*M = M \times \mathfrak{g}^*$, où $M = D \backslash G$. La projection $r : T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ est naturellement invariante à gauche. Elle se factorise donc en une application $r_0 : T^*M \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Si $H_0 = r_0^*h$ pour $h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, alors $dr_0(X_{H_0}) = E_h$. Ainsi, le flot hamiltonien d'un hamiltonien invariant à gauche sur T^*M est projeté sur un flot hamiltonien sur \mathfrak{g}^* .

Proposition 5.1.2 ([1]). *Soit G un groupe de Lie connexe nilpotent, $D < G$ un sous-groupe discret, une métrique invariante à gauche de G et la nilvariété $M = D \backslash G$. La métrique (et le flot géodésique) induite par celle de G sur M est invariante à gauche.*

Proposition 5.1.3 ([1]). *Soit G un groupe de Lie connexe, $D < G$ un sous-groupe discret et $M = D \backslash G$. Soit $h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ et $H_0 = r_0^*h$ et soit ϕ^t le flot hamiltonien de X_{H_0} sur T^*M et φ^t le flot hamiltonien de E_h sur \mathfrak{g}^* . Soit $S^*M = h^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. Si h est propre, alors pour tout compact $K \subset S^*M$,*

$$h_d(\phi^1, K) \geq h_d(\varphi^1, r_0(K)).$$

Le fibré cotangent $T^*M = M \times \mathfrak{g}^*$ étant équipé de la métrique produit d^2 .

5.2 Géométrie de Poisson sur $T^*\mathcal{T}$

Soit $T_n < SL(n, \mathbb{R})$ le groupe des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. Soit $\mathcal{T} := T_3 \oplus T_4$, $D < \mathcal{T}$ un sous-groupe discret de \mathcal{T} et $M = D \backslash \mathcal{T}$. Soit SM le fibré tangent unitaire de M .

Proposition 5.2.1. *Il existe un flot géodésique invariant à gauche $\phi^t : SM \rightarrow SM$ tel que $h_{top}(\phi^1) > 0$.*

Pour montrer cette proposition, l'objectif sera l'existence d'un flot géodésique sur SM qui possède un facteur conjugué au fer à cheval de Smale suspendu. Et la positivité de l'entropie topologique du fer à cheval de Smale permettra alors de conclure.

Soit \mathfrak{T} l'algèbre de Lie de \mathcal{T} . On a le résultat suivant

Proposition 5.2.2. *Il existe une application linéaire définie positive $\phi : \mathfrak{T}^* \rightarrow \mathfrak{T}^*$ et un ouvert de l'orbite coadjointe \mathcal{O} dans \mathfrak{T}^* tels que $h_{top}(E_\phi|_{\mathcal{O}}) > 0$.*

2. Il s'agit du produit de la métrique invariante à gauche sur M et de la métrique d' invariante par translation sur \mathfrak{g}^* .

Soit $\mathfrak{t}_n = \text{Lie}(T_n)$. L'algèbre de Lie \mathfrak{t}_4 est donnée par

$$\mathfrak{t}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z & w \\ 0 & 0 & y & u \\ 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : u, v, w, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour un $a \in \{u, v, w, x, y, z\}$, soit $A \in \mathfrak{t}_4$ l'élément obtenu en posant $a = 1$ et tous les autres coefficients sont nuls. C'est-à-dire on pose

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\{U, V, W, X, Y, Z\}$ est une base de \mathfrak{t}_4 et les relations de commutation sont données par

$$\begin{cases} [X, Y] = Z \\ [Y, V] = U \\ [X, U] = W \\ [Z, V] = W \end{cases} \quad (5.3)$$

et les autres crochets sont nuls. L'algèbre de Lie \mathfrak{t}_3 peut naturellement être identifiée à la sous-algèbre de \mathfrak{t}_4 engendrée par $\{X, Y, Z\}$. Ainsi, \mathfrak{t}_3 admet une base $\{R, S, T\}$,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec l'unique relation de commutation non triviale

$$[R, S] = T. \quad (5.4)$$

Comme $\mathfrak{T} = \mathfrak{t}_3 \oplus \mathfrak{t}_4$, \mathfrak{T} admet une base $\{R, S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$ avec les relations de commutation (5.3) et (5.4).

Soit p_a la fonction linéaire définie par

$$p_a : \begin{cases} \mathfrak{T}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & p_a(p) = \langle p, A \rangle. \end{cases}$$

De la définition du crochet de Poisson (5.1) sur \mathfrak{T}^* et en utilisant les relations de commutation on a

$$\begin{aligned} \{p_x, p_y\}(p) &= -\langle p, [dp_x(p), dp_y(p)] \rangle \\ &= -\langle p, [X, Y] \rangle \\ &= -\langle p, Z \rangle \\ &= -p_z(p). \end{aligned}$$

De manière analogue on calcule les crochets de Poisson suivants

$$\begin{cases} \{p_x, p_y\} = -p_z \\ \{p_y, p_v\} = -p_u \\ \{p_x, p_u\} = -p_w \\ \{p_z, p_v\} = -p_w \\ \{p_r, p_s\} = -p_t, \end{cases} \quad (5.5)$$

les autres crochets étant nuls. Grâce aux relations (5.5) et aux propriétés du crochet de Poisson, on a

$$\begin{aligned} \{p_w p_y - p_z p_u, p_x\} &= \{p_w p_y, p_x\} - \{p_z p_u, p_x\} \\ &= \{p_w, p_x\} p_y + p_w \{p_y, p_x\} - \{p_z, p_x\} p_u - p_z \{p_u, p_x\} \\ &= p_w p_z - p_z p_w \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{p_w p_y - p_z p_u, p_y\} &= \{p_w p_y, p_y\} - \{p_z p_u, p_y\} \\ &= \{p_w, p_y\} p_y + p_w \{p_y, p_y\} - \{p_z, p_y\} p_u - p_z \{p_u, p_y\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et de manière analogue on peut voir que $p_w p_y - p_z p_u$ commute avec toutes les autres p_a . Ainsi, on obtient trois fonctions de Casimir indépendantes sur \mathfrak{T}^* données par

$$K_1(p) = p_w, \quad K_2(p) = p_w p_y - p_z p_u \quad \text{et} \quad K_3(p) = p_t.$$

Soit

$$K : \begin{cases} \mathfrak{T}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ p & \longmapsto & K(p) = (K_1, K_2, K_3)(p) = (K_1(p), K_2(p), K_3(p)). \end{cases}$$

Notons $\mathcal{O}_k \subset \mathfrak{T}^*$, avec $k = (k_1, k_2, k_3)$, les ensembles de niveau associées aux trois Casimirs ci-dessus. On dira que \mathcal{O}_k est **régulière** si $k_1 k_2 k_3 \neq 0$.

Lemme 5.2.3. *Soit $\mathcal{O}_k \subset \mathfrak{T}^*$ régulière. Alors \mathcal{O}_k est symplectomorphe à $T^*\mathbb{R}^3$ muni de sa structure symplectique canonique.*

Démonstration. Le crochet de Poisson sur \mathfrak{T}^* est restreint à \mathcal{O}_k , restriction notée par $\{.,.\}_k$. Soit

$$T^*\mathbb{R}^3 = \{(a, A, b, B, c, C) : a, A, b, B, c, C \in \mathbb{R}\},$$

dont le crochet de Poisson canonique, noté $[\cdot, \cdot]$, satisfait à

$$\begin{cases} [a, A] = 1 \\ [b, B] = 1 \\ [c, C] = 1 \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Soit λ, μ deux paramètres non nuls. L'application f_k définie par

$$f_k : \begin{cases} \mathcal{O}_k & \longrightarrow & T^*\mathbb{R}^3 \\ p & \longmapsto & f_k(p) = \begin{cases} a = -\lambda p_x \\ A = (k_1\lambda)^{-1}p_u \\ b = -\mu p_v \\ B = (k_1\mu)^{-1}p_z \\ c = |k_3|^{-\frac{1}{2}}p_s \\ C = |k_3|^{-\frac{1}{2}}p_r \end{cases} \end{cases}$$

est un difféomorphisme. En effet,

- f_k est lisse car ses composantes le sont,
- l'application $g_k : T^*\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{O}_k$; $g_k(a, A, b, B, c, C) = (p_r, p_s, p_t, p_u, p_v, p_w, p_x, p_y, p_z)$ donnée par

$$\begin{cases} p_r = |k_3|^{-\frac{1}{2}}C \\ p_s = |k_3|^{-\frac{1}{2}}c \\ p_t = k_3 \\ p_u = \lambda k_1 A \\ p_v = -\mu^{-1}b \\ p_w = k_1 \\ p_x = -\lambda^{-1}a \\ p_y = \frac{k_2 + k_1^2 \lambda \mu A B}{k_1} \\ p_z = k_1 \mu B \end{cases}$$

satisfait aux relations

$$\begin{cases} K \circ g_k = k \\ f_k \circ g_k = id \\ g_k \circ f_k = id. \end{cases}$$

Comme g_k est une application polynomiale, elle est lisse et ainsi \mathcal{O}_k est difféomorphe à $T^*\mathbb{R}^3$.

- Définissons pour $f_k : \mathcal{O}_k \longrightarrow T^*\mathbb{R}^3$ l'application

$$f_k^* : \begin{cases} (C^\infty(T^*\mathbb{R}^3), [\cdot, \cdot]) & \longrightarrow & (C^\infty(\mathcal{O}_k, \{\cdot, \cdot\}_k) \\ \alpha & \longmapsto & f_k^* \alpha : \begin{cases} \mathcal{O}_k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & f_k^* \alpha(p) = \alpha(f_k(p)). \end{cases} \end{cases}$$

Avec

$$a : \begin{cases} T^*\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a, A, b, B, c, C) & \longmapsto & a, \end{cases}$$

on a $f_k^* a = -\lambda p_x$. De manière analogue on trouve

$$\begin{cases} f_k^* a = -\lambda p_x \\ f_k^* A = (k_1 \lambda)^{-1} p_u \\ f_k^* b = -\mu p_v \\ f_k^* B = (k_1 \mu)^{-1} p_z \\ f_k^* c = |k_3|^{-\frac{1}{2}} p_s \\ f_k^* C = |k_3|^{-\frac{1}{2}} p_r. \end{cases} \quad (5.6)$$

A partir des relations (5.6) et les commutations pour le crochet de Poisson sur \mathfrak{T}^* on a

a)

$$\begin{aligned} \{f_k^* a, f_k^* A\} &= \{-\lambda p_x, (k_1 \lambda)^{-1} p_u\} \\ &= -\{p_x, k_1^{-1} p_u\} \\ &= \{k_1^{-1} p_u, p_x\} \\ &= \{k_1^{-1}, p_x\} p_u + k_1^{-1} \{p_u, p_x\} \\ &= k_1^{-1} p_w \\ &= 1. \end{aligned}$$

b) Idem pour $\{f_k^* b, f_k^* B\} = 1$.

c)

$$\begin{aligned} \{f_k^* c, f_k^* C\} &= \left\{ |k_3|^{-\frac{1}{2}} p_s, |k_3|^{-\frac{1}{2}} p_r \right\} \\ &= \left\{ |k_3|^{-\frac{1}{2}}, |k_3|^{-\frac{1}{2}} p_r \right\} p_s + |k_3|^{-\frac{1}{2}} \left\{ p_s, |k_3|^{-\frac{1}{2}} p_r \right\} \\ &= \left\{ |k_3|^{-\frac{1}{2}}, |k_3|^{-\frac{1}{2}} \right\} p_r p_s + |k_3|^{-\frac{1}{2}} \left\{ |k_3|^{-\frac{1}{2}}, p_r \right\} p_s \\ &+ |k_3|^{-\frac{1}{2}} \left\{ p_s, |k_3|^{-\frac{1}{2}} \right\} p_r + |k_3|^{-\frac{1}{2}} |k_3|^{-\frac{1}{2}} \{p_s, p_r\} \\ &= |k_3|^{-1} \{p_s, p_r\} \\ &= |k_3|^{-1} p_t \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \{f_k^* a, f_k^* A\} = 1 = f_k^*[a, A] \\ \{f_k^* b, f_k^* B\} = 1 = f_k^*[b, B] \\ \{f_k^* c, f_k^* C\} = 1 = f_k^*[c, C] \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Ceci entraîne que

$$f_k^* : (C^\infty(T^*\mathbb{R}^3), [\cdot, \cdot]) \longrightarrow (C^\infty(\mathcal{O}_k, \{\cdot, \cdot\}_k))$$

est un isomorphisme d'algèbre de Lie.

- On conclut que f_k est un symplectomorphisme.

□

Remarque. La proposition précédente montre, de plus, que

- $(\mathcal{O}_k, \{.\})$ est symplectique,
- les ensembles de niveau \mathcal{O}_k de K sont des orbites coadjointes de l'action de \mathcal{T} sur \mathfrak{T}^* . On dit que \mathcal{O}_k est une **orbite coadjointe régulière** si $k_1 k_2 k_3 \neq 0$,
- les $K_i(p)$ ($i = 1, 2, 3$) sont les seules fonctions de Casimir.

5.3 Métrique invariante à gauche avec entropie positive

Comme à l'illustration 4, soit $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 > 0$ des constantes telles que $a_3 a_5 = a_1 a_4$ et soit

$$\begin{cases} 4H_4(p) = a_1 p_x^2 + a_2 p_y^2 + a_3 p_z^2 + a_4 p_u^2 + a_5 p_v^2 + a_6 p_w^2 \\ 2H_3(p) = p_r^2 + p_s^2 + a_7 p_t^2 \\ H_{3,4}(p) = p_s (\sqrt{a_1} p_x + \sqrt{a_5} p_v). \end{cases} \quad (5.7)$$

On définit sur \mathfrak{T}^*

$$H_\epsilon := 2H_4 + H_3 + \epsilon H_{3,4}.$$

Pour ϵ suffisamment petit, c'est-à-dire une petite perturbation, H_ϵ est un hamiltonien métrique, le champ X_{H_ϵ} est donc un champ de vecteurs géodésique. On a le résultat suivant :

Proposition 5.3.1. *Soit $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 > 0$ des constantes telles que $a_3 a_5 = a_1 a_4$. Il existe une orbite coadjointe régulière $\mathcal{O} \subset \mathfrak{T}^*$ telle que pour tout ϵ suffisamment petit, le champ d'Euler $E_{H_\epsilon}|_{\mathcal{O}}$ admette un facteur conjugué au fer à cheval suspendu.*

Démonstration. Comme le champ de vecteurs E_{H_ϵ} ne change pas par addition des Casimir, les termes $a_6 p_w^2$ et $a_7 p_t^2$ peuvent être ignorés dans (5.7). Soit

$$\mathbf{H}_{.,k} : T^*\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

le hamiltonien donné par

$$\mathbf{H}_{.,k} = (H. |_{\mathcal{O}_k}) \circ f_k^{-1}.$$

Alors, à une constante près on a

$$\begin{cases} 4\mathbf{H}_{4,k} = a_1 \lambda^{-2} a^2 + \frac{a_2}{k_1} (k_2 + \lambda \mu k_1^2 AB)^2 + a_3 \mu^2 k_1^2 B^2 + a_4 \lambda^2 k_1^2 A^2 + a_5 \mu^{-2} b^2 \\ 2\mathbf{H}_{3,k}(p) = k_3 (c^2 + C^2) \\ \mathbf{H}_{3,4,k}(p) = k_3 c \frac{a+b}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Pour transformer $\mathbf{H}_{\epsilon,k}$ en une somme de hamiltoniens séparables plus une petite perturbation, on introduit le changement de variables sur $T^*\mathbb{R}^3$ suivant :

$$\begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ B = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \\ a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ b = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ z = c \\ Z = C. \end{cases}$$

Comme $a_3a_5 = a_1a_4$, il existe $\lambda, \mu > 0$ uniques tels que

$$0 = a_5\mu^{-2} - a_1\lambda^{-2} = a_3\mu^2 - a_4\lambda^2 \text{ et } a_1\lambda^{-2} + a_5\mu^{-2} = 1.$$

En effet, on peut prendre $\lambda^2 = 2a_1$ et $\mu^2 = 2a_5$. Alors

$$\begin{cases} 2\mathbf{H}_{4,k} = (x^2 - \xi X^2 + \nu X^4) + (y^2 + \omega Y^2 + v Y^4 - 2\nu X^2 Y^2) \\ 2\mathbf{H}_{3,k}(p) = k_3 (z^2 + Z^2) \\ \mathbf{H}_{3,4,k}(p) = k_3 zx, \end{cases} \quad (5.9)$$

avec

$$\begin{cases} \xi = - (a_3a_5k_1^2 + a_2k_2\sqrt{a_1a_5}) \\ \omega = \xi + 2a_3a_5k_1^2 = a_3a_5k_1^2 - a_2k_2\sqrt{a_1a_5} \\ \nu = a_1a_2a_5k_1^2. \end{cases} \quad (5.10)$$

Observons que la sous-variété symplectique

$$\mathfrak{Z} = \{y = Y = 0\}$$

est invariante par rapport aux champs de vecteurs hamiltoniens (5.9) ; ainsi l'analyse de la perturbation peut être faite sur \mathfrak{Z} . De plus, sur \mathfrak{Z} , les hamiltoniens sont donnés par

$$\begin{cases} 2\mathbf{H}_{4,k} = (x^2 - \xi X^2 + \nu X^4) \\ 2\mathbf{H}_{3,k}(p) = k_3 (z^2 + Z^2) \\ \mathbf{H}_{3,4,k}(p) = k_3 zx. \end{cases} \quad (5.11)$$

Pour simplifier l'analyse de la perturbation, on doit prendre en compte une orbite coadjointe convenable. Comme la fonction de Casimir $K : \mathfrak{X}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ est surjective, on peut fixer $\nu = 1, \xi = 1$ en posant, d'après les relations (5.10),

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1a_2a_5}} \\ k_2 = -\frac{a_1a_2 + a_3}{\sqrt{a_1^3a_2^2a_5}}. \end{cases}$$

On fixe $k_3 = 1$ également. Ainsi $\omega = 1 + \frac{2a_3}{a_1a_2}$.

Notons $\mathbf{F}_\bullet = \mathbf{H}_{\bullet,k} |_{\mathfrak{Z}}$. Les hamiltoniens (5.11) se simplifient en

$$2\mathbf{F}_\epsilon = 2\mathbf{F}_4 + 2\mathbf{F}_3 + 2\epsilon\mathbf{F}_{3,4} = \left(x^2 + \left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2\right) + (z^2 + Z^2) + 2\epsilon zx$$

qui est la forme d'un *Duffing non forcé + oscillateur harmonique + perturbation*, abordé au premier chapitre.

La technique de Poincaré-Melnikov nous a permis de montrer l'existence d'un point homocline transverse et par le théorème 2.4.1 de Birkhoff-Smale, le flot perturbé, de hamiltonien \mathbf{F}_ϵ , admet un facteur conjugué au fer à cheval suspendu. Comme les points homoclines transverses persistent par une petite C^1 perturbation, cela veut dire que $E_{H_\epsilon} |_{\mathcal{O}}$ admet un fer à cheval suspendu dans un ouvert des orbites coadjointes.

Ceci démontre la proposition 5.3.1 et, par conséquent, la proposition 5.2.2 □

Le résultat suivant nous renseigne que, pour un hamiltonien H , pour trouver le flot correspondant au niveau d'énergie $\{H = \lambda\}$, il suffit de multiplier le flot du niveau d'énergie $\{H = 1\}$ par la constante λ .

Lemme 5.3.2. *Soit φ^t le flot d'un champ de vecteurs hamiltoniens X_H , avec H homogène de degré 2. Alors*

$$\varphi^t(\lambda p) = \lambda \varphi^t(p).$$

Démonstration. Soit $X_H(p) = \mathbb{J}dH(p)$ ³ le champ hamiltonien associé à H . H étant homogène de degré 2 on a

$$\begin{aligned} H(\lambda p) &= \lambda^2 H(p) \\ \Leftrightarrow dH(\lambda p) &= \lambda dH(p) \\ \Leftrightarrow X_H(\lambda p) &= \lambda X_H(p). \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\lambda \varphi^t(p)) &= \lambda \frac{d}{dt}(\varphi^t(p)) \\ &= \lambda X_H(\varphi^t(p)) \\ &= X_H(\lambda \varphi^t(p)). \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda \varphi^t(p)$ est une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \gamma'(t) = X_H(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = \lambda p. \end{cases}$$

Or, $\varphi^t(\lambda p)$ est aussi solution du même problème. Donc, par unicité on a

$$\varphi^t(\lambda p) = \lambda \varphi^t(p).$$

□

D'après le lemme 5.3.2 ci-dessus, on conclut que E_{H_ϵ} admet un fer à cheval suspendu sur tout niveau d'énergie. Donc

- $(\mathfrak{T}^*, E_{H_\epsilon})$ est à entropie topologique positive et
- d'après la proposition 5.1.3, $\left(S^*M = H_\epsilon^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), X_{H_\epsilon}\right)$ est à entropie topologique positive.

Ceci démontre la proposition 5.2.1.

3. Où $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix}$.

Nous voici au terme de ce rapport qui a porté sur l'article [1] de Leo T. Butler. Nous n'avons nullement la prétention d'avoir exploré la totalité de la thématique et sommes prêts aux critiques et suggestions de nos lecteurs. Nous avons principalement, tel que l'objectif de ce travail le souligne, présenté l'étude menée pour répondre à la question suivante : « *Tout flot géodésique invariant à gauche sur une nilvariété compacte est-il à entropie nulle ?* » Et la réponse à cette question est donc négative étant donné que cet article en construit un contre-exemple.

Tout au long de ce rapport, nous avons pu faire ressortir les grandes notions, sous-jacentes à cette étude, telles que

- l'entropie topologique ;
- le fer à cheval de Smale ;
- la méthode de Poincaré-Melnikov ;
- une variété riemannienne ;
- un flot géodésique ;
- une variété symplectique ;
- le champ de vecteurs et le flot hamiltoniens ;
- une variété de Poisson ;
- l'orbite coadjointe d'une algèbre de Lie ;
- ...

Tout cela pour concourir à l'explicitation de l'étude menée par Leo T. Butler. Nous aurions aimé, au cours de ce stage,

- entrer un peu plus en profondeur dans les notions évoquées pour bien les cerner séparément. C'est-à-dire, par exemple, bien développer la méthode de Poincaré-Melnikov, le théorème de Birkoff-Smale et bien d'autres théorèmes cités ici sans détail ;
- aborder également le cas général où $M = D \setminus T_n$, $D < T_n$ avec $n \geq 7$;

6 Conclusion

- faire la même démarche pour l'article *Positive-entropy geodesic flows on nilmanifolds* de Leo T. Butler et Vassili Gerlreich où n'est plus considéré l'algèbre de Lie $\mathcal{T} = T_4 \oplus T_3$ mais seulement T_4 .

Dans l'avenir, si le moyen, le temps et les opportunités nous le permettent, nous aimerions investiguer sur les problèmes ouverts suivants, posés par Leo T. Botler ;

- quelles nilvariétés admettent une métrique à entropie nulle ?
- quelles nilvariétés admettent un flot complètement intégrable ?

Bibliographie

- [1] Leo T. Butler, *Invariant Metrics on Nilmanifolds with Positive Topological Entropy* . Geometriae Dedicata 100 : 173-185, 2003.
- [2] ANATOLE KATOK and BORIS HASSELBLATT, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [3] Michael Brin and Garrett Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [4] S. Gallot, D. Hullin and J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.
- [5] François Rouvière, *Initiation à la géométrie de Riemann*. Calvage et Mounet, Paris, 2016.
- [6] Luis Barreira et Claudia Valls, *Théorie des systèmes dynamiques : Une introduction*. EDP Sciences, 2013.
- [7] Jerrold E. Marsden and Tudor S. Ratiu, *INTRODUCTION to MECHANICS and SYMMETRY* Second Edition. Springer, 1999.
- [8] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 1990.
- [9] V. Arnold, *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*. Editions MIR-Moscou, 1976.
- [10] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

Bibliographie

- [11] Gabriel P. Paternain, *Geodesics Flows*. Birkhauser, Boston, 1999.

- [12] Clark Robinson, *DYNAMICAL SYSTEMS Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*. CRC Press, 1995.

- [13] Jacques Faraut, *Analyse sur les groupes de Lie*. Calvage et Mounet, Paris, 2016.

- [14] Arthur Sagle and R. Walde, *Introduction to Lie Groups and Lie Algebra*, 51 1st Edition, Academic Press 1986