UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DE SCIENCE ET TECHNIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

STAGE DE RECHERCHE M2 MFA

Éléments De Calcul Pseudo-Différentiels Pour Les Équations Cinétiques.

Étudiant :
Mohamad RACHID

Directeur de stage :
Frédéric HÉRAU

Nantes, 2018

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Frédéric HÉRAU pour l'encadrement de mon stage et pour toute l'aide qu'il m'a apportée afin de me permettre de mieux cerner le travail à réaliser tout au long de celui-ci.

De façon plus générale, je remercie tous les membres du "Laboratoire de Mathématiques Jean Leray" pour la gentillesse de leur accueil.

Table des matières

1 Introduction

En mécanique statistique, l' équation de Fokker-Planck est une équation aux dérivées partielles qui décrit l' évolution temporelle de la fonction de densité de probabilité de la vitesse d'une particule sous l'influence des forces de traînée et des forces aléatoires, comme dans le mouvement brownien. L'opérateur de Fokker-Planck dérive de cette équation cinétique par changement de variable.

On définit l'opérateur Fokker-Planck sur $\mathbb{R}^{2n}$ par :

$$K = -\Delta_v + \frac{1}{4}|v|^2 - \frac{n}{2} + X_0 \tag{1.1}$$

où x, v dans $\mathbb{R}^n$, $|.|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, ∂_x le gradient suivant x, ∂_v le gradient suivant v, et Δ_v le laplacien suivant v,
avec

$$X_0 = -\nabla_x V(x).\partial_v + v.\partial_x \tag{1.2}$$

le champ de vecteur hamiltonien associé à :

$$\Phi(x, v) = \frac{v^2}{2} + V(x) \tag{1.3}$$

où V est le potentiel sur $\mathbb{R}^n$. On a V et donc Φ sont C^∞.
On considère le Laplacien de Witten :

$$\Delta^{(0)}_{\Phi/2} = -\Delta + \frac{1}{4}|\nabla\Phi|^2 - \frac{1}{2}\Delta\Phi \tag{1.4}$$

où Δ est le laplacien suivant x et v et ∇ est le gradient suivant x et v.

Pour répondre à des problématiques de la théorie cinétique, on s'intéresse dans ce rapport à analyser et montrer le "retour à l'équilibre" pour l'opérateur de Fokker-Planck K.
La question du retour à l'équilibre est de déterminer qu'il existe deux constantes positives $C, \alpha_1 > 0$ tel que

$$\forall t \geq 0, \|e^{-tK} - \Pi_0\| \leq Ce^{-\alpha_1 t}. \tag{1.5}$$

où Π_0 est le projecteur sur $\exp{-\Phi}$ lorsque cette fonction est dans L^2.
Lorsque l'inégalité (1.5) est vérifiée, nous dirons qu'on a un retour à l'équilibre (à vitesse) exponentiel(le).
La difficulté de l'étude pour l'opérateur de Fokker-Planck K vient du fait qu'il n'est ni auto-adjoint, ni elliptique ni sectoriel. On doit donc utiliser des estimations hypoelliptique et des critères plus fins pour montrer le retour à l'équilibre.

Rappelons un peu d'analyse abstraite pour développer notre propos. Si H est un espace de Hilbert complexe, un opérateur non borné A sur H de domaine $D(A)$ est appelé accrétif si

$$\mathrm{Re}\langle Au, u\rangle \geq 0, \forall u \in D(A). \tag{1.6}$$

Un opérateur accrétif A est maximal accrétif s'il n'existe pas une extension accrétive $\widehat{A}$ de A à domaine strictement plus grand. On peut montrer dans le cas considéré que la fermeture de K défini au départ sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ est un opérateur maximale accrétive qui est une des conditions pour pouvoir définir un semi-groupe.
Ensuite, si on montre que K est maximal accrétif et à résolvante compacte, il suffit pour avoir le retour à l'équilibre exponentiel de démontrer l'existence d'un opérateur auto-adjoint $(\Lambda, D(\Lambda)), \Lambda \geq 1$ et trois constantes $C > 0$, $M \geq m > 0$ telles que

$$\|\Lambda^m u\|^2 \leq C(\|(K - i\nu)u\|^2 + \|u\|^2), \forall \nu \in \mathbb{R}, \forall u \in D(K), \tag{1.7}$$

$$\|Ku\|^2 \leq C\|\Lambda^M u\|^2, \forall u \in D(\Lambda^M). \tag{1.8}$$

On est donc conduit à localiser le spectre (ou plutôt le pseudo-spectre), estimer la résolvante, et montrer le retour à l'équilibre pour l'opérateur K.
On peut montrer aussi dans ce cas une propriété de régularisation de l'opérateur e^{-tK}.

Notre objectif dans ce rapport est de montrer d'abord les conditions ci-dessus en se basant sur une Hypothèse sur le potentiel V. On note que l'inégalité (1.7) nécessite particulièrement des estimations plus fines. À partir des ces conditions, on peut enfin conclure le retour à l'équilibre de l'opérateur Fokker-Planck K.

2 Analyse de l'opérateur Fokker-Planck

2.1 Étude de l'accrétivité maximale de l'opérateur Fokker-Planck

Dans cette partie, on va étudier la première condition du retour à l'équilibre qui est l'accrétivité maximale de l'opérateur Fokker-Planck.

Proposition 2.1. *Soit V un potentiel de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. Alors la fermeture de K défini sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ est maximale accrétive.*

Démonstration. On applique le Théorème 4.6 dans l'Appendice 4.2 avec $H = L^2(\mathbb{R}^{2n})$ et $D(K) = C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.
Supposons que toutes les fonctions sont réelles et que K est un opérateur réel. Montrons d'abord que K est accrétif.
Soit $u \in D(K)$. On a

$$\begin{aligned}\langle Ku, u\rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} Ku.u \;\; dxdv\\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} (-\Delta_v u + \frac{1}{4}|v|^2 u - \frac{n}{2}u + X_0 u).u \;\; dxdv\\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} -\Delta_v u.u + \frac{1}{4}|v|^2|u|^2 - \frac{n}{2}|u|^2 + X_0 u.u \;\; dxdv\\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} (-\Delta_v + \frac{1}{4}|v|^2 - \frac{n}{2})u.u \;\; dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} X_0 u.u \;\; dxdv\\ &= (1) + (2).\end{aligned}$$

On peut écrire (1) d'une autre façon. On a

$$\begin{aligned}(-\partial_v + \frac{v}{2})(\partial_v + \frac{v}{2})u &= -\Delta_v u - \frac{v}{2}.\partial_v u - \frac{n}{2}u + \frac{v}{2}\partial_v u + \frac{v^2}{2}\\ &= (\Delta_v + \frac{1}{4}|v|^2 - \frac{n}{2})u.\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}(2) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} -\nabla_x V(x)\partial_v u.u \;\; dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} v\partial_x u.u \;\; dxdv\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} -\frac{1}{2}\nabla_x V(x)dx(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_v |u|^2 dv) + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}v(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_x |u|^2 dx)dv\\ &= 0\end{aligned}$$

car $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.
En effectuant une intégration par partie, on obtient

$$\langle Ku, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left|(\partial_v + \frac{v}{2})u\right|^2 \;\; dxdv \geq 0$$

D'où, K est accrétif.
Maintenant, on va montrer que $\overline{K}$ est maximal accrétif. Pour cela, il suffit de trouver $\lambda_1 > 0$ tel que $\mathrm{Im}(K + \lambda_1 I)$ soit dense dans $H = L^2(\mathbb{R}^{2n})$.
Prenons $\lambda_1 = (\frac{n}{2} + 1)$, $T = K + (\frac{n}{2} + 1)I$ et montrons que $\mathrm{Im}(T)^{\perp} = H$.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ tel que $f \in \mathrm{Im}(T)^{\perp}$. On a

$$\langle f, Tu \rangle = 0 \quad \forall u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n}). \tag{2.1}$$

Montrons que $f = 0$. On suppose que f est réel , on a

$$\begin{aligned} \langle f, Tu \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle T^* f, u \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle T^* f, u \rangle_{D'D} &= 0 \quad \forall u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n}) \end{aligned}$$

car $T^* f \in L^2(\mathbb{R}^{2n}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n})$, ce qui implique que $T^* f \in D'(\mathbb{R}^{2n})$, donc $T^* f = (-\Delta_v + \frac{1}{4}|v|^2 + 1 - X_0).f = 0$ dans $D'(\mathbb{R}^{2n})$.
Or T^* est un opérateur hypoelliptique (K est un opérateur hypoelliptique de type II)(voir [Hor67]).
De plus, on a $f \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$, alors $f \in D'(\mathbb{R}^{2n})$. Or $T^* f = 0$, alors $T^* f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$, d'où $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$.

Maintenant on introduit la famille des fonctions de troncature définies par
$\zeta_k(x, v) = \zeta_{k_1,k_2}(x, v) = \zeta_{k_1}(x)\zeta_{k_2}(v); (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$
où $\zeta_{k_1}(x) = \zeta(\frac{x}{k_1})$, $\zeta_{k_2}(v) = \zeta(\frac{v}{k_2})$, $\zeta \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \zeta \leq 1$ avec $\zeta = 1 \quad x \in \overline{B}(0, 1)$ et $\mathrm{supp}\zeta \subset B(0, 2)$.
Soit $u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$. On a

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \nabla_v(\zeta_k u).\nabla_v(\zeta_k u) \;\; dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} \zeta_k^2(\frac{v^2}{2} + 1)uf \;\; dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(X_0({\zeta_k}^2 u)) \;\; dxdv \tag{2.2}$$

$= (1) + (2) + (3)$.
Or on a

$$\begin{aligned} (1) = &\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\nabla_v \zeta_k|^2 fu \, dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} \zeta_k \nabla_v(\zeta_k) f \nabla_v(u) \, dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} \zeta_k u \nabla_v(\zeta_k).\nabla_v(f) \, dxdv \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{2n}} {\zeta_k}^2 \nabla_v(f).\nabla_v(u) \;\; dxdv. \end{aligned}$$

On peut écrire (2.2) de la manière suivante

$$\begin{aligned} (2.2) &= (1) + (2) + (3) + \int_{\mathbb{R}^{2n}} \nabla_v({\zeta_k}^2 u).\nabla_v(f) \;\; dxdv - \int_{\mathbb{R}^{2n}} \nabla_v({\zeta_k}^2 u).\nabla_v(f) \;\; dxdv \\ &= < f, T({\zeta_k}^2 u) > + \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\nabla_v \zeta_k|^2 fu \;\; dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} (f \nabla_v(u) - u \nabla_v(f)) \zeta_k \nabla_v \zeta_k \, dxdv \\ &= < f, T({\zeta_k}^2 u) > + \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\nabla_v \zeta_k|^2 fu \;\; dxdv + \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^{2n}} (f \partial_{v_i}(u) - u \partial_{v_i}(f)) \zeta_k \partial_{v_i} \zeta_k \, dxdv. \end{aligned}$$

Pour f vérifiant (2.1) et $u = {\zeta_k}^2 u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, on obtient

$$\langle f, T({\zeta_k}^2 u)\rangle = 0.$$

Par conséquence

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \nabla_v(\zeta_k u).\nabla_v(\zeta_k u)\ \ dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} \zeta_k^2(\frac{v^2}{2}+1)uf\ \ dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(X_0({\zeta_k}^2 u))\ \ dxdv$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\nabla_v \zeta_k|^2 fu\ \ dxdv + \sum_{i=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^{2n}} (f\partial_{v_i}(u) - u\partial_{v_i}(f))\zeta_k\partial_{v_i}\zeta_k\ \ dxdv.$$

On a que (2.2) est vrai pour tout $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, et en particulier pour $u = f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \nabla_v(\zeta_k f).\nabla_v(\zeta_k f)\ \ dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} \zeta_k^2(\frac{v^2}{2}+1)|f|^2\ \ dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(X_0({\zeta_k}^2 f))\ \ dxdv$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\nabla_v \zeta_k|^2 |f|^2\ \ dxdv.$$

Mais on a

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(X_0({\zeta_k}^2 f))\ \ dxdv$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} -f\nabla_x V(x).\partial_v({\zeta_k}^2 f)\ \ dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} fv\partial_x({\zeta_k}^2 f)\ \ dxdv$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} -f\nabla_x V(x)(2\zeta_k\partial_v\zeta_k f + {\zeta_k}^2\partial_v f)\ \ dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} fv(2\zeta_k\partial_x\zeta_k f + {\zeta_k}^2\partial_x f)\ \ dxdv$$
$$= 2\int_{\mathbb{R}^{2n}} f^2\zeta_k(-\nabla_x V(x)\partial_v\zeta_k + v\partial_x\zeta_k)\ \ dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} f^2\zeta_k(-\nabla_x V(x)\partial_v f + v\partial_x f)\ \ dxdv$$
$$= 2\int_{\mathbb{R}^{2n}} f^2\zeta_k(-\nabla_x V(x)\partial_v\zeta_k + v\partial_x\zeta_k)\ \ dxdv - \int_{\mathbb{R}^{2n}} f^2\zeta_k(-\nabla_x V(x)\partial_v\zeta_k + v\partial_x\zeta_k)\ \ dxdv$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f^2\zeta_k(X_0(\zeta_k))\ \ dxdv,$$

alors on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \nabla_v(\zeta_k f)\nabla_v(\zeta_k f)\ \ dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} \zeta_k^2(\frac{v^2}{2}+1)|f|^2\ \ dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} f^2\zeta_k(X_0(\zeta_k))\ \ dxdv$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\nabla_v \zeta_k|^2 |f|^2\ \ dxdv. \tag{2.3}$$

Regardons chaque terme de (2.3) à part. On a
Terme 1 :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{2n}} \nabla_v(\zeta_k f).\nabla_v(\zeta_k f) \ dxdv\\&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\nabla_v(\zeta_k f)|^2 \ dxdv \geq 0.\end{aligned}$$

Terme 2 :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{2n}} \zeta_k^2(\frac{v^2}{2}+1)|f|^2 \ dxdv\\&= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^{2n}} |(\zeta_k v f)|^2 \ dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} |(\zeta_k f)|^2 \ dxdv\\&= \frac{1}{4}\|\zeta_k v f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} + \|\zeta_k f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}.\end{aligned}$$

Terme 3 :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{2n}} f^2\zeta_k(X_0(\zeta_k)) \ dxdv\\&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f^2\zeta_k(-\nabla_x V(x).\partial_v\zeta_k) \ dxdv + \int_{\mathbb{R}^{2n}} f^2\zeta_k v.\partial_x\zeta_k \ dxdv\\&= (3)_1 + (3)_2.\end{aligned}$$

De plus, on a
$\partial_v\zeta_k = \frac{1}{k_2}\zeta(\frac{x}{k_1})\zeta^{'}(\frac{v}{k_2})$
$\partial_x\zeta_k = \frac{1}{k_1}\zeta^{'}(\frac{x}{k_1})\zeta(\frac{v}{k_2})$.
Remarquons que $\zeta^{'}$ est borné car $\zeta^{'} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $\exists c \geq 0; 0 \leq \zeta^{'} \leq c$.
Terme $(3)_1$:

$$|(3)_1| \leq \frac{c}{k_2}\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\zeta_k f \nabla_x V(x).f| \ dxdv.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$(3)_1 \leq \frac{c}{k_2}\|\nabla_x V(x)\zeta_k f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}$$

car $\nabla_x V(x)\zeta_k f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^{2n})$.
Terme $(3)_2$:

$$\begin{aligned}|(3)_2| &\leq \frac{c}{k_1}\int_{\mathbb{R}^{2n}} |v\zeta_k f.f| \ dxdv\\&\leq \frac{c}{k_1}\|v\zeta_k f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}\end{aligned}$$

car $\quad \zeta_k f \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$.
Terme 4 :

$$\begin{aligned}(4) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\nabla_v \zeta_k|^2 |f|^2 \ dxdv \\ &\leq \frac{c^2}{k_2^2} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}.\end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\|\zeta_k v f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} + \|\zeta_k f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \leq{}& \frac{c^2}{k_2^2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} + \frac{c}{k_1}\|v\zeta_k f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \\ &+ \frac{c}{k_2}\|\nabla_x V(x)\zeta_k f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}.\end{aligned}$$

Or, on a $\mathrm{supp}\zeta_{k_1,x} \subset \overline{B}(0, 2k_1)$ et $\nabla_x V(x) \in C^\infty$ sur $\overline{B}(0, 2k_1)$ alors

$$|\nabla_x V(x)| \leq \sup_{|x|\leq 2k_1} |\nabla_x V(x)| = c(k_1),$$

alors en utilisant les estimations des termes et l'inégalité de Young on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\|\zeta_k v f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} + \|\zeta_k f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} &\leq \frac{2c^2}{k_2^2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} + \frac{2c^2}{k_1^2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \\ &\quad + \frac{1}{8}\|\zeta_k v f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} + \frac{2c^2 c(k_1)^2}{{k_2}^2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \\ &\quad + \frac{1}{2}\|\zeta_k f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \\ \frac{1}{8}\|\zeta_k v f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} + \frac{1}{2}\|\zeta_k f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} &\leq 2c^2\left(\frac{1}{{k_2}^2} + \frac{c(k_1)^2}{{k_2}^2} + \frac{1}{{k_1}^2}\right)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \\ \|\zeta_k f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} &\leq c_1\left(\frac{\widehat{c}(k_1)}{{k_2}^2} + \frac{1}{{k_1}^2}\right)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \\ \left\|\zeta\left(\frac{x}{k_1}\right)\zeta\left(\frac{v}{k_2}\right)f\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} &\leq c_1\left(\frac{\widehat{c}(k_1)}{{k_2}^2} + \frac{1}{{k_1}^2}\right)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \forall k_1, k_2\ .\end{aligned}$$

Prenons $k_2 \to +\infty$,ce qui donne

$$\left\|\zeta\left(\frac{x}{k_1}\right)f\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \leq \frac{c_1}{{k_1}^2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}$$

car $\zeta(0) = 1$.
Et pour $k_1 \to +\infty$, on obtient
$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = 0$, alors $f = 0$ presque partout dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, donc $\mathrm{Im}(T)^\perp = 0$ ce qui implique que $\mathrm{Im}(T)$ est dense dans $H = L^2(\mathbb{R}^{2n})$.
Par suite $\overline{K}$ est maximal accrétif. On notera K cet opérateur. $\square$

2.2 Conditions suffisantes pour la compacité de la résolvante de l'opérateur Fokker-Planck

2.2.1 L'hypothèse principale

On peut écrire l'opérateur K d'une autre manière en utilisant le formalisme des opérateurs de création et d'annihilation :

$$K = X_0 + b^*b \tag{2.4}$$

et

$$X_0 = b^*a - a^*b. \tag{2.5}$$

Avec

$$b = \partial_v + \frac{v}{2} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}, \quad a = \partial_x + \frac{1}{2}\partial_x V(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Les adjoints de a et b sont alors

$$b^* = -\partial_v + \frac{v}{2} = \left(b_1^*, ..., b_n^*\right), \quad a^* = -\partial_x + \frac{1}{2}\partial_x V(x) = \left(a_1^*, ..., a_n^*\right). \tag{2.7}$$

On introduit l'opérateur Λ défini par

$$\Lambda^2 = a^*a + b^*b + Id.$$

On note que Λ est auto-adjoint et que $\Lambda \geq Id$ (voir page 208 dans [HeNi04]). On notera aussi que

$$a^*a = \Delta^{(0)}_{V/2} = -\Delta_x + \frac{1}{4}|\nabla_x V(x)|^2 - \frac{1}{2}\Delta_x V(x), \quad b^*b = -\Delta_v + \frac{1}{4}|v|^2 - \frac{n}{2}, \tag{2.8}$$

et que

$$a^*a + b^*b = -\Delta_x + \frac{1}{4}|\nabla_x V(x)|^2 - \frac{1}{2}\Delta_x V(x) - \Delta_v + \frac{1}{4}|v|^2 - \frac{n}{2} = \Delta^{(0)}_{\Phi/2}. \tag{2.9}$$

On introduit les notations suivantes pour $s \in \mathbb{R}$

$$h(x) = \sqrt{1 + |\nabla_x V(x)|^2}, \quad \langle x \rangle^s = (1 + |x|^2)^{s/2},$$

et l'hypothèse du théorème principal qui permet de démontrer le retour à l'équilibre de l'opérateur K.

Hypothèse 1. Le potentiel $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et vérifie les inégalités :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad |\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha h(x), \tag{2.10}$$

$$\exists M, C \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^n, h(x) \leq C \langle x \rangle^M, \tag{2.11}$$

$$\exists C \geq 1, \frac{1}{2}|\nabla_x V(x)|^2 - \Delta_x V(x) \geq C^{-1}|\nabla_x V(x)|^2 \quad \text{pour} \quad |x| \geq C, \tag{2.12}$$

et une condition de coercivité

$$\exists M, C \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^n, C^{-1} \langle x \rangle^{1/M} \leq h(x). \tag{2.13}$$

2.2.2 Une métrique adaptée aux équations de Fokker-Planck

Comme on travaille avec des opérateurs pseudo-différentiels, on introduit une métrique adaptée aux analyses des équations de Fokker-Planck
(voir l'Appendice 4.1).
On considère sur $\mathbb{R}^{4n}_{x,v,\xi,\eta} = T^*\mathbb{R}^{2n}_{x,v}$ la métrique suivante :

$$g = dx^2 + dv^2 + \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{\Psi^2}, \tag{2.14}$$

avec

$$\Psi(x, v, \xi, \eta)^2 = 1 + |\xi|^2 + |\eta|^2 + \frac{1}{4}|v|^2 + \frac{1}{4}|\nabla V(x)|^2. \tag{2.15}$$

2.2.3 Propriétés algébrique de l'opérateur Fokker-Planck

Avant de commencer la preuve de Théorème 2.5, on rappelle les propriétés algébriques de l'opérateur Fokker-Planck.
Le commutateur de deux opérateurs A et B est défini par

$$[A, B] = AB - BA. \tag{2.16}$$

On dit que les opérateurs A et B commutent si

$$[A, B] = 0. \tag{2.17}$$

a) La relation de commutation canonique pour les opérateurs de création et d'annihilation b_j, b_j^* est vérifiée

$$[b_j, b_k] = \left[b_j^*, b_k^*\right] = 0 \quad et \quad [b_j, b_k^*] = \delta_{jk}. \tag{2.18}$$

b) De plus avec $\partial_{x_j}\partial_{x_k}V = \partial_{x_k}\partial_{x_j}V$, on a :

$$[a_j, a_k] = [a_k, a_j] = 0 \quad et \quad [a_j, a_k^*] = \partial^2_{x_j x_k}V. \tag{2.19}$$

c) a_j, b_j, a_j^*, b_j^* vérifient la relation suivante :

$$\left[a_j^{\dagger}, b_k^{\sharp}\right] = 0. \tag{2.20}$$

avec $a^{\dagger}$(resp.$b^{\sharp}$) égale a ou a^* (resp.b ou b^*)
d) a_j, a_j^* sont dans l'algèbre de Lie généré par b_j, b_j^* et X_0 :

$$[b_j, X_0] = a_j \quad et \quad \left[b_j^*, X_0\right] = a_j^*. \tag{2.21}$$

e) On peut obtenir b_j, b_j^* à partir de a_j, a_j^* et X_0 :

$$[a_j, X_0] = -\sum_{k=1}^{n} (\partial^2_{x_j x_k} V) b_k \quad et \quad \left[a_j^*, X_0\right] = -\sum_{k=1}^{n} b_k^* (\partial^2_{x_j x_k} V). \tag{2.22}$$

f) Pour tout $r, r^{'}$, on a :

$$\left[\Lambda^r, (1 + a^* a)^{r^{'}}\right] = \left[\Lambda^r, (1 + b^* b)^{r^{'}}\right] = 0. \tag{2.23}$$

g) Les relations (2.21) et (2.22) sont résumées par

$$\begin{aligned} &[b, X_0] = a, && [b^*, X_0] = a^*, \\ &[a, X_0] = -\mathrm{Hess}V b, && [a^*, X_0] = -b^* \mathrm{Hess}V. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Par combinaison des formules on obtient

$$\left[\Lambda^2, X_0\right] = -b^*(\mathrm{Hess}V - Id)a - a^*(\mathrm{Hess}V - Id)b \tag{2.25}$$

et

$$b(b^* b) = (b^* b + 1)b. \tag{2.26}$$

Remarque 2.2. Comme on travaille avec des opérateurs pseudo-différentiels qui appartiennent à des classes associées à la métrique g et la fonction poids Ψ, tous les commutateurs seront définis comme opérateurs continus de $S(\mathbb{R}^{2n})$ à $S(\mathbb{R}^{2n})$ ou de $S^{'}(\mathbb{R}^{2n})$ à $S^{'}(\mathbb{R}^{2n})$.

2.2.4 Estimations hypoelliptiques

Dans cette partie, on va démontrer le théorème principal qui conduit au retour à l'équilibre. Pour cela, on va utiliser des estimations hypoelliptiques et un lemme de base.
On a les estimations suivantes

$$\|\Lambda^{2\rho-2} a^*\| \leq 1 \tag{2.27}$$

et

$$\|\Lambda^{2\rho-2} b^*\| \leq 1 \tag{2.28}$$

pour tout $\rho \leq 1/2$.

Démonstration. On prend u dans $S(\mathbb{R}^{2n})$. Si $\rho \leq \dfrac{1}{2}$, alors $2 - 2\rho \geq 1$.
Comme Λ est supérieur ou égal à Id et est auto-adjoint, alors on a $\Lambda^{4-4\rho} \geq \Lambda^2$.
De plus, $\Lambda^2 = a^*a + b^*b + Id$ alors

$$\begin{aligned}\|au\|^2 = \langle a^*au, u\rangle &\leq \langle (a^*a + b^*b + Id)u, u\rangle \\ &\leq \left\langle \Lambda^2 u, u\right\rangle \\ &\leq \left\langle \Lambda^{4-4\rho} u, u\right\rangle \\ &\leq \left\langle \Lambda^{2-2\rho} u, \Lambda^{2-2\rho} u\right\rangle \\ &\leq \|\Lambda^{2-2\rho} u\|^2.\end{aligned}$$

Posons $v = \Lambda^{2-2\rho}u$ alors $u = \Lambda^{2\rho-2}v$.
On obtient

$$\begin{aligned}\|a\Lambda^{2\rho-2}v\| &\leq \|v\| \\ \Rightarrow \|a\Lambda^{2\rho-2}\| &\leq 1 \\ \Rightarrow \|\Lambda^{2\rho-2}a^*\| &\leq 1.\end{aligned}$$

Pour (2.28) on a

$$\begin{aligned}\|bu\|^2 = \langle b^*bu, u\rangle &\leq \langle (a^*a + b^*b + Id)u, u\rangle \\ &\leq \left\langle \Lambda^2 u, u\right\rangle \\ &\leq \left\langle \Lambda^{4-4\rho} u, u\right\rangle \\ &\leq \left\langle \Lambda^{2-2\rho} u, \Lambda^{2-2\rho} u\right\rangle \\ &\leq \|\Lambda^{2-2\rho} u\|^2.\end{aligned}$$

Posons $v = \Lambda^{2-2\rho}u$. On a donc $u = \Lambda^{2\rho-2}v$.
On obtient

$$\begin{aligned}\|b\Lambda^{2\rho-2}v\| &\leq \|v\| \\ \Rightarrow \|b\Lambda^{2\rho-2}\| &\leq 1 \\ \Rightarrow \|\Lambda^{2\rho-2}b^*\| &\leq 1.\end{aligned}$$

□

Lemme 2.3. *Pour tout $\rho \in [0\,;1/4]$ on a l'estimation suivante*

$$\begin{aligned}\|\Lambda^\rho u\|^2 \leq\; &Re\,\langle Ku, (L + L^*)u\rangle - Re\,\langle A^*bu, u\rangle + Re\,\langle LKu, Lu\rangle \\ &- Re\,\langle A^*bu, Lu\rangle + 3\|bu\|^2 + 3\|u\|^2,\end{aligned} \tag{2.29}$$

pour tout $u \in S(\mathbb{R}^{2n})$, avec

$$L = \Lambda^{2\rho-2}a^*b$$

et

$$A^* = \left[\Lambda^{2\rho-2}a^*, X_0\right].$$

Démonstration. La preuve sera traité en 3 étapes.
Étape 1.
On va montrer que

$$\|\Lambda^\rho u\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle X_0 u, (L+L^*)u\rangle - \operatorname{Re}\langle A^* bu, u\rangle + \|bu\|\|u\| + \|\Lambda^{\rho-1}u\|^2. \tag{2.30}$$

On commence par

$$\begin{aligned}
\|\Lambda^\rho u\|^2 &= \langle \Lambda^\rho u, \Lambda^\rho u\rangle \\
&= \langle (\Lambda^\rho)^* \Lambda^\rho u, u\rangle \\
&= \left\langle \Lambda^{2\rho} u, u\right\rangle \\
&= \left\langle \Lambda^{2\rho-2}\Lambda^2 u, u\right\rangle \\
&= \left\langle \Lambda^{2\rho-2}(a^*a + b^*b + 1)u, u\right\rangle \\
&= \left\langle \Lambda^{2\rho-2}a^*au, u\right\rangle + \left\langle \Lambda^{2\rho-2}b^*bu, u\right\rangle + \left\langle \Lambda^{2\rho-2}u, u\right\rangle \\
&= (1) + (2) + (3).
\end{aligned}$$

Mais on a

$$a = [b, X_0] = bX_0 - X_0 b.$$

Alors

$$\begin{aligned}
(1) &= \left\langle \Lambda^{2\rho-2}a^* bX_0 u, u\right\rangle - \left\langle \Lambda^{2\rho-2}a^* X_0 bu, u\right\rangle \\
&= (1)_1 + (1)_2.
\end{aligned}$$

Regardons les termes $(1)_1$,$(1)_2$ on a

$$\begin{aligned}
(1)_1 &= \langle LX_0 u, u\rangle \\
&= \langle X_0 u, L^* u\rangle \\
(1)_2 &= -\left\langle X_0 \Lambda^{2\rho-2} a^* bu, u\right\rangle - \langle A^* bu, u\rangle .
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
-\left\langle X_0\Lambda^{2\rho-2}a^*bu, u\right\rangle &= -\langle X_0 L u, u\rangle \\
&= \langle Lu, X_0 u\rangle \\
&= \overline{\langle X_0 u, Lu\rangle}.
\end{aligned}$$

On peut maintenant écrire (1) de la manière suivante

$$\begin{aligned}
(1) &= (1) + \langle X_0 u, Lu\rangle + \overline{\langle X_0 u, L^* u\rangle} - \langle X_0 u, Lu\rangle - \overline{\langle X_0 u, L^* u\rangle} \\
&= 2\operatorname{Re}\langle X_0 u, (L+L^*)u\rangle - \langle X_0 u, Lu\rangle - \overline{\langle X_0 u, L^* u\rangle} - \langle A^* bu, u\rangle \\
&= 2\operatorname{Re}\langle X_0 u, (L+L^*)u\rangle + \langle -L^* X_0 u + X_0 L^* u, u\rangle - \langle A^* bu, u\rangle \\
&= 2\operatorname{Re}\langle X_0 u, (L+L^*)u\rangle + \left\langle -b^* a\Lambda^{2\rho-2}X_0 u + X_0 b^* a\Lambda^{2\rho-2}u, u\right\rangle - \langle A^* bu, u\rangle \\
&= 2\operatorname{Re}\langle X_0 u, (L+L^*)u\rangle - \langle b^* Au, u\rangle - \left\langle \Lambda^{2\rho-2}a^* au, u\right\rangle - \langle A^* bu, u\rangle \\
&= 2\operatorname{Re}\langle X_0 u, (L+L^*)u\rangle - \overline{\langle A^* bu, u\rangle} - \langle A^* bu, u\rangle - \left\langle \Lambda^{2\rho-2}a^* au, u\right\rangle \\
&= \operatorname{Re}\langle X_0 u, (L+L^*)u\rangle - \operatorname{Re}\langle A^* bu, u\rangle .
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\|\Lambda^\rho u\|^2 &= \operatorname{Re}\langle X_0u,(L+L^*)u\rangle - \operatorname{Re}\langle A^*bu,u\rangle + \left\langle \Lambda^{2\rho-2}b^*bu,u\right\rangle + \left\langle \Lambda^{2\rho-2}u,u\right\rangle \\ &\leq \|\Lambda^{2\rho-2}b^*\|\|bu\|\|u\| + \operatorname{Re}\langle X_0u,(L+L^*)u\rangle - \operatorname{Re}\langle A^*bu,u\rangle + \|\Lambda^{\rho-1}u\|^2 \\ &\leq \|bu\|\|u\| + \operatorname{Re}\langle X_0u,(L+L^*)u\rangle - \operatorname{Re}\langle A^*bu,u\rangle + \|\Lambda^{\rho-1}u\|^2.\end{aligned}$$

Donc on a montré (2.30).

Étape 2.

On va montrer que

$$\operatorname{Re}\langle X_0u,(L+L^*)u\rangle \leq \operatorname{Re}\langle Ku,(L+L^*)u\rangle - 2\operatorname{Re}\langle b^*bu,Lu\rangle + \|bu\|\|u\|. \tag{2.31}$$

On a

$$\begin{aligned}\langle X_0u,(L+L^*)u\rangle &= \langle Ku,(L+L^*)u\rangle - \langle b^*bu,(L+L^*)u\rangle \\ &= \langle Ku,(L+L^*)u\rangle - \langle b^*bu,Lu\rangle - \langle b^*bu,L^*u\rangle.\end{aligned}$$

Alors on a

$$\operatorname{Re}\langle X_0u,(L+L^*)u\rangle = \operatorname{Re}\langle Ku,(L+L^*)u\rangle - \operatorname{Re}\langle b^*bu,Lu\rangle - \operatorname{Re}\langle b^*bu,L^*u\rangle.$$

Ensuite, on va calculer le dernier terme

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle b^*bu,L^*u\rangle &= \operatorname{Re}\left\langle b^*bu,b^*a\Lambda^{2\rho-2}u\right\rangle \\ &= \operatorname{Re}\left\langle bb^*bu,a\Lambda^{2\rho-2}u\right\rangle.\end{aligned}$$

En utilisant

$$b(b^*b) = (b^*b+1)b,$$

alors

$$\operatorname{Re}\langle b^*bu,L^*u\rangle = \operatorname{Re}\left\langle b^*bbu,a\Lambda^{2\rho-2}u\right\rangle + \operatorname{Re}\left\langle bu,a\Lambda^{2\rho-2}u\right\rangle.$$

Or on a

$$\left[\Lambda^{2\rho-2},b^*b\right] = 0,$$

alors

$$\Lambda^{2\rho-2}b^*b = b^*b\Lambda^{2\rho-2}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle b^*bu,L^*u\rangle &= \operatorname{Re}\left\langle bu,b^*ba\Lambda^{2\rho-2}u\right\rangle + \operatorname{Re}\left\langle bu,a\Lambda^{2\rho-2}u\right\rangle \\ &= \operatorname{Re}\left\langle bu,ab^*b\Lambda^{2\rho-2}u\right\rangle + \operatorname{Re}\left\langle bu,a\Lambda^{2\rho-2}u\right\rangle \\ &= \operatorname{Re}\left\langle bu,a\Lambda^{2\rho-2}b^*bu\right\rangle + \operatorname{Re}\left\langle bu,a\Lambda^{2\rho-2}u\right\rangle \\ &= \operatorname{Re}\left\langle \Lambda^{2\rho-2}a^*bu,b^*bu\right\rangle + \operatorname{Re}\left\langle bu,a\Lambda^{2\rho-2}u\right\rangle \\ &= \operatorname{Re}\langle b^*bu,Lu\rangle + \operatorname{Re}\left\langle bu,a\Lambda^{2\rho-2}u\right\rangle.\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}|\left\langle bu, a\Lambda^{2\rho-2}u\right\rangle| &= |\left\langle \Lambda^{2\rho-2}a^*bu, u\right\rangle| \\ &\leq \|\Lambda^{2\rho-2}a^*\|\|bu\|\|u\|.\end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (2.27) on obtient

$$|\left\langle bu, a\Lambda^{2\rho-2}u\right\rangle| \leq \|bu\|\|u\|.$$

Par suite

$$-\mathrm{Re}\left\langle bu, a\Lambda^{2\rho-2}u\right\rangle \leq \|bu\|\|u\|.$$

Alors

$$-\mathrm{Re}\left\langle b^*bu, L^*u\right\rangle \leq -\mathrm{Re}\left\langle b^*bu, Lu\right\rangle + \|bu\|\|u\|.$$

Ainsi on a montré (2.31).
Étape 3.
On va montrer que

$$\mathrm{Re}\left\langle b^*bu, Lu\right\rangle \leq \frac{3}{2}\|bu\|^2 + \mathrm{Re}\left\langle Lku, Lu\right\rangle - \mathrm{Re}\left\langle A^*bu, Lu\right\rangle + \frac{1}{2}\|u\|^2. \quad (2.32)$$

On a

$$|\mathrm{Re}\left\langle b^*bu, Lu\right\rangle| \leq \|bu\|\|bLu\|$$

$$\mathrm{Re}\left\langle b^*bu, Lu\right\rangle \geq -\|bu\|\|bLu\|$$

en utilisant Young avec $\theta = \dfrac{1}{2}$ on obtient

$$-2\mathrm{Re}\left\langle b^*bu, Lu\right\rangle \leq \|bu\|^2 + \|bLu\|^2.$$

Par suite, on a

$$-2\mathrm{Re}\left\langle b^*bu, Lu\right\rangle \leq \|bu\|^2 + \mathrm{Re}\left\langle KLu, Lu\right\rangle,$$

car on a

$$\begin{aligned}\|bLu\|^2 &= \left\langle bLu, bLu\right\rangle \\ &= \left\langle b^*bLu, Lu\right\rangle \\ &= \left\langle KLu, Lu\right\rangle - \left\langle X_0Lu, Lu\right\rangle.\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}\langle X_0 Lu, Lu\rangle &= \langle (b^*a - a^*b)Lu, Lu\rangle \\ &= \langle b^*aLu, Lu\rangle - \langle a^*bLu, Lu\rangle \\ &= \langle b^*aLu, Lu\rangle - \langle Lu, b^*aLu\rangle \\ &= \langle b^*aLu, Lu\rangle - \overline{\langle b^*aLu, Lu\rangle} \\ &= 2i\mathrm{Im}\,\langle b^*aLu, Lu\rangle\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Re}\,\langle X_0 Lu, Lu\rangle = 0$$

et

$$\|bLu\|^2 = \mathrm{Re}\,\langle KLu, Lu\rangle\,.$$

Maintenant on peut écrire

$$-2\mathrm{Re}\,\langle b^*bu, Lu\rangle \leq \|bu\|^2 + \mathrm{Re}\,\langle [K, L]\, u, Lu\rangle + \langle LKu, Lu\rangle\,,$$

car

$$[K, L] = KL - LK.$$

De plus

$$\begin{aligned}[K, L] &= KL - LK \\ &= X_0L + b^*bL - LX_0 - Lb^*b.\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}X_0L - LX_0 &= X_0\Lambda^{2\rho-2}a^*b - \Lambda^{2\rho-2}a^*bX_0 \\ &= \Lambda^{2\rho-2}a^*X_0b - A^*b - \Lambda^{2\rho-2}a^*bX_0 \\ &= -\Lambda^{2\rho-2}a^*a - A^*b,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}b^*bL - Lb^*b &= b^*b\Lambda^{2\rho-2}a^*b - \Lambda^{2\rho-2}a^*bb^*b \\ &= b^*b\Lambda^{2\rho-2}a^*b - \Lambda^{2\rho-2}a^*b^*bb - \Lambda^{2\rho-2}a^*b \\ &= \Lambda^{2\rho-2}b^*ba^*b - \Lambda^{2\rho-2}a^*b^*bb - L \\ &= \Lambda^{2\rho-2}a^*b^*bb - \Lambda^{2\rho-2}a^*b^*bb - L,\end{aligned}$$

alors

$$[K, L] = -L - A^*b - \Lambda^{2\rho-2}a^*a.$$

Par suite

$$\begin{aligned}-2\mathrm{Re}\left\langle b^*bu, Lu\right\rangle &\leq \|bu\|^2 - \mathrm{Re}\left\langle Lu, Lu\right\rangle - \mathrm{Re}\left\langle A^*bu, Lu\right\rangle \\ &\quad - \mathrm{Re}\left\langle \Lambda^{2\rho-2}a^*au, Lu\right\rangle + \mathrm{Re}\left\langle LKu, Lu\right\rangle \\ &\leq \|bu\|^2 - \|Lu\|^2 - \mathrm{Re}\left\langle A^*bu, Lu\right\rangle \\ &\quad + \mathrm{Re}\left\langle LKu, Lu\right\rangle - \mathrm{Re}\left\langle a\Lambda^{4\rho-4}a^*au, bu\right\rangle.\end{aligned}$$

Mais en utilisant (2.27) pour $\rho \leq 1/4$ on a

$$\begin{aligned}-\mathrm{Re}\left\langle a\Lambda^{4\rho-4}a^*au, bu\right\rangle &= -\mathrm{Re}\left\langle a\Lambda^{4\rho-2}\Lambda^{-1}a^*a\Lambda^{-1}u, bu\right\rangle \\ &\leq \|bu\|\|u\|.\end{aligned}$$

En utilisant Young avec $\theta = 1/2$ on obtient

$$-\mathrm{Re}\left\langle a\Lambda^{4\rho-4}a^*au, bu\right\rangle \leq \frac{1}{2}\|bu\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2.$$

Donc on a

$$\begin{aligned}-2\mathrm{Re}\left\langle b^*bu, Lu\right\rangle &\leq \|bu\|^2 - \mathrm{Re}\left\langle A^*bu, Lu\right\rangle + \mathrm{Re}\left\langle LKu, Lu\right\rangle + \frac{1}{2}\|bu\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 \\ &\leq \frac{3}{2}\|bu\|^2 + \mathrm{Re}\left\langle LKu, Lu\right\rangle - \mathrm{Re}\left\langle A^*bu, Lu\right\rangle + \frac{1}{2}\|u\|^2.\end{aligned}$$

En utilisant l'étape 1,2,3 on a

$$\begin{aligned}\|\Lambda^\rho u\|^2 &\leq \mathrm{Re}\left\langle Ku, (L+L^*)u\right\rangle + \frac{3}{2}\|bu\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 \\ &\quad + \mathrm{Re}\left\langle LKu, Lu\right\rangle - \mathrm{Re}\left\langle A^*bu, Lu\right\rangle + \|bu\|\|u\| \\ &\quad - \mathrm{Re}\left\langle A^*bu, u\right\rangle + \|bu\|\|u\| + \|\Lambda^{\rho-1}u\|^2 \\ &\leq \mathrm{Re}\left\langle Ku, (L+L^*)u\right\rangle + \frac{1}{2}\|bu\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 \\ &\quad + \frac{3}{2}\|bu\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 + \mathrm{Re}\left\langle LKu, Lu\right\rangle \\ &\quad - \mathrm{Re}\left\langle A^*bu, Lu\right\rangle - \mathrm{Re}\left\langle A^*bu, u\right\rangle + \frac{1}{2}\|bu\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\|u\|^2 + \|u\|^2 \\ &\leq \mathrm{Re}\left\langle Ku, (L+L^*)u\right\rangle - \mathrm{Re}\left\langle A^*bu, u\right\rangle + \mathrm{Re}\left\langle LKu, Lu\right\rangle \\ &\quad - \left\langle A^*bu, Lu\right\rangle + \frac{5}{2}\|bu\|^2 + \frac{5}{2}\|u\|^2 \\ &\leq \mathrm{Re}\left\langle Ku, (L+L^*)u\right\rangle - \mathrm{Re}\left\langle A^*bu, u\right\rangle + \mathrm{Re}\left\langle LKu, Lu\right\rangle \\ &\quad - \left\langle A^*bu, Lu\right\rangle + 3\|bu\|^2 + 3\|u\|^2.\end{aligned}$$

Ainsi on a montré le lemme. $\square$

Remarque 2.4. On remarque, en utilisant l'Appendice 4.1, que
$a, a^*, b, b^* \in Op(S^1_\psi)$,
$aa^*, bb^*, X_0, K \in Op(S^2_\psi)$,
$\partial^2_{x_i x_j} V \in Op(S^1_\psi)$,
$\Lambda^r \in Op(S^r_\psi)$,
$Op(S^{r_1}_\psi) \circ Op(S^{r_2}_\psi) \subset Op(S^{r_1+r_2}_\psi)$,
$\Big[Op(S^{r_1}_\psi), Op(S^{r_2}_\psi)\Big] \subset Op(S^{r_1+r_2-1}_\psi)$.

Théorème 2.5. *Si le potentiel $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et vérifie Hypothèse 1, alors il existe une constante $C > 0$ tel que :*

$$\forall u \in S(\mathbb{R}^{2n}), \quad \|\Lambda^{1/4} u\|^2 \leq C(\|Ku\|^2 + \|u\|^2). \tag{2.33}$$

Démonstration. D'après le Lemme 2.3, pour tout $\rho \in [0\,;1/4]$ on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\|\Lambda^\rho u\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle Ku, (L+L^*)u\rangle - \operatorname{Re}\langle A^* bu, u\rangle + \operatorname{Re}\langle LKu, Lu\rangle \\ - \operatorname{Re}\langle A^* bu, Lu\rangle + 3\|bu\|^2 + 3\|u\|^2\end{aligned}$$

pour tout $u \in S(\mathbb{R}^{2n})$.
Ensuite on va estimer les six termes.

<u>Terme 1</u> :
$|\langle Ku, (L+L^*)u\rangle| \leq |\langle Ku, Lu\rangle| + |\langle Ku, L^* u\rangle|$.
Pour $\langle Ku, Lu\rangle$, on a

$$\begin{aligned}|\langle Ku, Lu\rangle| &\leq \|Ku\|\|Lu\| \\ &\leq \|Ku\|\|\Lambda^{2\rho-2} a^* bu\| \\ &\leq \|Ku\|\|\Lambda^{2\rho-2} a^*\|\|bu\| \\ &\leq \|Ku\|\|bu\|.\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}\|bu\|^2 &= \langle bu, bu\rangle \\ &= \langle b^* bu, u\rangle \\ &= \operatorname{Re}\langle Ku, u\rangle \\ &\leq \|Ku\|\|u\|,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}|\langle Ku, Lu\rangle| &\leq \|Ku\|^{3/2}\|u\|^{1/2} \\ &\leq \|Ku\|(\|Ku\|\|u\|)^{1/2} \\ &\leq (\|Ku\|^2 + \|u\|^2)^{1/2}(\|Ku\|^2 + \|u\|^2)^{1/2} \\ &\leq (\|Ku\|^2 + \|u\|^2).\end{aligned}$$

Pour $|\langle Ku, L^*u\rangle|$ on a

$$|\langle Ku, L^*u\rangle| \leq \|Ku\|\|L^*u\|.$$

Or on a

$$L^* = b^*a\Lambda^{2\rho-2}(1+b^*b)^{-1/2}(1+b^*b)^{1/2} = b^*(1+b^*b)^{-1/2}a\Lambda^{2\rho-2}(1+b^*b)^{1/2},$$

car $(1+b^*b)^{-1/2}$ commute avec a et $\Lambda^{2\rho-2}$.
De plus on a $b^*(1+b^*b)^{-1/2} \in Op(S_\psi^{1-2(1/2)=0}) \subset \mathcal{L}(L^2)$ (voir Théorème 4.1 dans l'Appendice 4.1) alors

$$\begin{aligned}
\|L^*u\| &\leq \|b^*(1+b^*b)^{-1/2}\|\|a\Lambda^{2\rho-2}\|\|(1+b^*b)^{1/2}u\| \\
&\leq c\|(1+b^*b)^{1/2}u\| \\
&\leq c(\|bu\|^2+\|u\|^2)^{1/2} \\
&\leq c(\|u\|\|Ku\|+\|u\|^2)^{1/2} \\
&\leq c(2\|Ku\|^2+2\|u\|^2)^{1/2} \\
&\leq c_1(\|Ku\|^2+\|u\|^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Par conséquence

$$\begin{aligned}
|\langle Ku, L^*u\rangle| &\leq \|Ku\|\|L^*u\| \\
&\leq c_1\|Ku\|(\|Ku\|^2+\|u\|^2)^{1/2} \\
&\leq c_1(\|Ku\|^2+\|u\|^2)^{1/2}(\|Ku\|^2+\|u\|^2)^{1/2} \\
&\leq c_1(\|Ku\|^2+\|u\|^2).
\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$|\mathrm{Re}\,\langle Ku, (L+L^*)u\rangle| \leq c_1^{'}(\|Ku\|^2+\|u\|^2).$$

<u>Terme 5 et 6</u> :
On a

$$\begin{aligned}
3\|bu\|^2+3\|u\|^2 &= 3(\|bu\|^2+\|u\|^2) \\
&\leq 3(\|Ku\|\|u\|+\|u\|^2) \\
&\leq 3(2\|Ku\|^2+2\|u\|^2) \\
&\leq c_2(\|Ku\|^2+\|u\|^2).
\end{aligned}$$

<u>Terme 3</u> :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\langle LKu, Lu\rangle &= \mathrm{Re}\,\left\langle \Lambda^{2\rho-2}a^*bKu, \Lambda^{2\rho-2}a^*bu\right\rangle \\
&= \mathrm{Re}\,\left\langle a\Lambda^{4\rho-4}a^*bKu, bu\right\rangle.
\end{aligned}$$

Mais on a

$$a\Lambda^{4\rho-4}a^*b \in Op(S_\psi^{1+4\rho-4+1+1}) = Op(S_\psi^{4\rho-1}) \subset \mathcal{L}(L^2) \quad \text{pour} \quad \rho \leq 1/4,$$

alors

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Re}\left\langle a\Lambda^{4\rho-4}a^*bKu, bu\right\rangle| &\leq c_3\|Ku\|\|bu\| \\
&\leq c_3\|Ku\|(\|Ku\|\|u\|)^{1/2} \\
&\leq c_3(\|Ku\|^2+\|u\|^2)^{1/2}(\|Ku\|^2+\|u\|^2)^{1/2} \\
&\leq c_3(\|Ku\|^2+\|u\|^2).
\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$|\mathrm{Re}\left\langle LKu, Lu\right\rangle| \leq c_3(\|Ku\|^2+\|u\|^2).$$

<u>Terme 4</u> :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\langle A^*bu, Lu\right\rangle &= \mathrm{Re}\left\langle\left[\Lambda^{2\rho-2}a^*, X_0\right]bu, Lu\right\rangle \\
&= \mathrm{Re}\left\langle\left[\Lambda^{2\rho-2}a^*, X_0\right]bu, \Lambda^{2\rho-2}a^*bu\right\rangle \\
&= \mathrm{Re}\left\langle a\Lambda^{2\rho-2}\left[\Lambda^{2\rho-2}a^*, X_0\right]bu, bu\right\rangle.
\end{aligned}$$

Or, $X_0 \in Op(S_\psi^2)$, $\Lambda^{2\rho-2}a^* \in Op(S_\psi^{2\rho-1})$, $\left[\Lambda^{2\rho-2}a^*,\ X_0\right] \in Op(S_\psi^{2\rho-1+2-1}) = Op(S_\psi^{2\rho})$, $a\Lambda^{2\rho-2}\left[\Lambda^{2\rho-2}a^*,\ X_0\right] \in Op(S_\psi^{2\rho+1+2\rho-2}) = Op(S_\psi^{4\rho-1}) \subset \mathcal{L}(L^2)$ pour $\rho \leq 1/4$.
Alors

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Re}\left\langle a\Lambda^{2\rho-2}\left[\Lambda^{2\rho-2}a^*, X_0\right]bu, bu\right\rangle| &\leq |\left\langle a\Lambda^{2\rho-2}\left[\Lambda^{2\rho-2}a^*, X_0\right]bu, bu\right\rangle| \\
&\leq c_4\|bu\|^2 \\
&\leq c_4(\|u\|^2+\|Ku\|^2).
\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$-\mathrm{Re}\left\langle A^*bu, Lu\right\rangle \leq c_4(\|u\|^2+\|Ku\|^2).$$

<u>Terme 2</u> :
On a

$$A^* = \left[\Lambda^{2\rho-2}a^*, X_0\right] = \Lambda^{2\rho-2}a^*X_0 - X_0\Lambda^{2\rho-2}a^*.$$

Or

$$[a^*, X_0] = a^*X_0 - X_0a^*.$$

Alors

$$\begin{aligned}\left[\Lambda^{2\rho-2}a^*, X_0\right] &= \Lambda^{2\rho-2}X_0a^* - X_0\Lambda^{2\rho-2}a^* + \Lambda^{2\rho-2}\left[a^*, X_0\right] \\ &= \left[\Lambda^{2\rho-2}, X_0\right]a^* - \Lambda^{2\rho-2}b^*\mathrm{Hess}V \\ &= (1+b^*b)^{1/2}(1+b^*b)^{-1/2}\left[\Lambda^{2\rho-2}, X_0\right]a^* \\ &- (1+b^*b)^{1/2}\Lambda^{2\rho-2}(1+b^*b)^{-1/2}b^*\mathrm{Hess}V \\ &= (1+b^*b)^{1/2}(A_1 - A_2),\end{aligned}$$

avec

$$A_1 = (1+b^*b)^{-1/2}\left[\Lambda^{2\rho-2}, X_0\right]a^*,$$

et

$$A_2 = \Lambda^{2\rho-2}(1+b^*b)^{-1/2}b^*\mathrm{Hess}V.$$

On a

$$A_1 \in Op(S_\psi^{-1+2\rho-2+2-1+1}) = Op(S_\psi^{2\rho-1}) \subset \mathcal{L}(L^2) \quad \text{pour} \quad \rho \leq 1/4 \leq 1/2,$$

$$A_2 \in Op(S_\psi^{2\rho-2-1+1+1}) = Op(S_\psi^{2\rho-1}) \subset \mathcal{L}(L^2) \quad \text{pour} \quad \rho \leq 1/4 \leq 1/2.$$

Alors

$$\begin{aligned}|\mathrm{Re}\,\langle A^*bu, u\rangle\,| &= |\mathrm{Re}\left\langle (A_1 - A_2)bu, (1+b^*b)^{1/2}u\right\rangle| \\ &\leq c_5\|bu\|\|(1+b^*b)^{1/2}\| \\ &\leq c_5(\|u\|^2 + \|bu\|^2)^{1/2}(\|u\|^2 + \|bu\|^2)^{1/2} \\ &\leq c_5^{'}(\|u\|^2 + \|Ku\|^2).\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$-\mathrm{Re}\,\langle A^*bu, u\rangle \leq c_5^{'}(\|u\|^2 + \|Ku\|^2).$$

En utilisant les estimations des termes on a

$$\forall \rho \leq 1/4, \forall u \in S(\mathbb{R}^{2n}), \|\Lambda^\rho u\|^2 \leq C(\|Ku\|^2 + \|u\|^2).$$

Pour $\rho = 1/4$, on a

$$\forall u \in S(\mathbb{R}^{2n}), \|\Lambda^{1/4}u\|^2 \leq C(\|Ku\|^2 + \|u\|^2).$$

□

En ajoutant un terme $i\nu$ à K avec $\nu \in \mathbb{R}$, la preuve ne change pas car la partie réelle de K ne change pas. Donc le Théorème 2.5 admet une extension qui est la suivante.

Théorème 2.6. *Si le potentiel V appartient à $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et vérifie l'Hypothèse 1, alors il existe une constante $C > 0$ tel que*

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \forall u \in D(K), \|\Lambda^{1/4}u\|^2 \leq C(\|(K - i\nu)u\|^2 + \|u\|^2). \tag{2.34}$$

Corollaire 2.7. *Si $V \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ vérifie l'Hypothèse 1, alors K est à résolvante compacte.*

Démonstration. On a $\overline{K}$est maximal accrétif sur $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. De plus, on a

$$(1 + K)^{-1} = \Lambda^{-1/4}[\Lambda^{1/4}(1 + K)^{-1}].$$

Or $\Lambda^{1/4}(1 + K)^{-1}$ est borné, car d'après le Théorème 2.5, on a

$$\begin{aligned} &\|\Lambda^{1/4}u\|^2 \leq C(\|Ku\|^2 + \|u\|^2) \\ &\|\Lambda^{1/4}u\|^2 \leq C(\|(K + 1 - 1)u\|^2 + \|u\|^2) \\ &\qquad\qquad \leq C^{'}(\|(K + 1)u\|^2 + \|u\|^2) \quad \forall u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n}). \end{aligned}$$

Posons $v = (K + 1)u$, alors $u = (K + 1)^{-1}v$, donc

$$\|\Lambda^{1/4}(1 + K)^{-1}v\|^2 \leq C^{'}(\|v\|^2 + \|(K + 1)^{-1}v\|^2).$$

Comme $(1 + K)^{-1}$ est borné, alors

$$\|\Lambda^{1/4}(1 + K)^{-1}v\|^2 \leq C^{"}(\|v\|^2) \quad \forall v \in L^2(\mathbb{R}^{2n}).$$

Ensuite, pour le premier terme on a

$$\Lambda^{-1/4} \in Op(S_{\psi}^{-1/4}) \quad et \quad \lim_{(x,v,\xi,\eta)\to+\infty} \Psi(x, v, \xi, \eta) = +\infty.$$

En effet

$$\begin{aligned} \Psi(x, v, \xi, \eta)^2 &= 1 + |\xi|^2 + |\eta|^2 + \frac{1}{4}|v|^2 + \frac{1}{4}|\nabla V(x)|^2 \\ &= \frac{3}{4} + |\xi|^2 + |\eta|^2 + \frac{1}{4}|v|^2 + \frac{1}{4}(1 + |\nabla V(x)|^2) \\ &= \frac{3}{4} + |\xi|^2 + |\eta|^2 + \frac{1}{4}|v|^2 + \frac{1}{4}(|h(x)|^2). \end{aligned}$$

D'après l'Hypothèse 1, on a

$$\begin{aligned} \Psi(x, v, \xi, \eta)^2 &\geq \frac{3}{4} + |\xi|^2 + |\eta|^2 + \frac{1}{4}|v|^2 + \frac{1}{4}(|h(x)|^2) \\ &\geq \frac{3}{4} + |\xi|^2 + |\eta|^2 + \frac{1}{4}|v|^2 + \frac{1}{4C^2}(1 + |x|^2)^{1/M}. \end{aligned}$$

Prenons $(x, v, \xi, \eta) \to +\infty$, le terme à droite tend vers $+\infty$, alors $\Psi(x, v, \xi, \eta)$ tend vers $+\infty$.
Par conséquence, $\Lambda^{-1/4}$ est un opérateur compact (voir Proposition 4.2 dans l'Appendice 4.1) .
Donc $(1 + K)^{-1}$ est un opérateur compact (la composition d'un opérateur borné avec compact est compact).
On conclut que K est à résolvante compacte. □

2.3 Relation entre l'opérateur Fokker-Planck et le Laplacien de Witten

Proposition 2.8. *On suppose que $V \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.*
i) Si K est à résolvante compacte, alors le Laplacien de Witten $\Delta^{(0)}_{V/2}$ est à résolvante compacte.
ii) Si 0 est dans le spectre essentiel de $\Delta^{(0)}_{V/2}$, alors 0 est dans le spectre essentiel de K .

Démonstration. i) Supposons par contradiction que $\Delta^{(0)}_{V/2}$ n'est pas à résolvante compacte, donc $\sigma_{ess}(\Delta^{(0)}_{V/2}) \neq \emptyset$, alors il existe λ dans $\sigma_{ess}(\Delta^{(0)}_{V/2})$, par suite il existe une suite orthonormale $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, avec $u_k \in D(\Delta^{(0)}_{V/2}) = C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n), u_k \rightharpoonup 0$, tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} \|(\Delta^{(0)}_{V/2} - \lambda I)u_k\| = 0$.
Alors, on a

$$\left\langle u_k, \Delta^{(0)}_{V/2} u_k \right\rangle = \langle u_k, a^* a u_k \rangle = \|a u_k\|^2.$$

Ensuite, comme $u_k \rightharpoonup 0$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \langle u_k, a^* a u_k \rangle = 0$, par suite $\|a u_k\|^2$ est borné.
Maintenant prenons

$$U_k(x,v) = u_k(x) \otimes (2\pi)^{-n/4} e^{-v^2/4}.$$

On a U_k est une suite orthonormale dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ car

$$\begin{aligned}
\|U_k\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |u_k|^2 (2\pi)^{-n/2} e^{-v^2/2} \;\; dxdv \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |u_k|^2 dx \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} e^{-v^2/2} dv \\
&= (2\pi)^{-n/2} (2\pi)^{n/2} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

et $\langle U_k, U_{k'} \rangle = 0 \quad \forall k \neq k'$ car $\langle u_k, u_{k'} \rangle = 0$.
De plus, U_k vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N}, K U_k = a u_k \otimes (2\pi)^{-n/4} v e^{-v^2/4} \quad dans \quad D'(\mathbb{R}^{2n}).$$

On note $\mu(v) = (2\pi)^{-n/4} e^{-v^2/4}$.

Dans $D'(\mathbb{R}^{2n})$, on a

$$\begin{aligned}
KU_k &= X_0(u_k \otimes \mu) + (-\partial_v + \frac{v}{2})(\partial_v + \frac{v}{2})(u_k \otimes \mu) \\
&= (-\partial_x V(x).\partial_v + v.\partial_x)(u_k \otimes \mu) + (-\partial_v + \frac{v}{2})(\partial_v + \frac{v}{2})(u_k \otimes \mu) \\
&= v.\partial_x(u_k \otimes \mu) - \partial_x V(x).\partial_v(u_k \otimes \mu) + (-\partial_v + \frac{v}{2})(\partial_v + \frac{v}{2})(u_k \otimes \mu) \\
&= \partial_x u_k \otimes (2\pi)^{-n/4} v e^{-v^2/4} + \frac{\partial_x V(x)}{2} u_k \otimes (2\pi)^{-n/4} v e^{-v^2/4} \\
&+ u_k \otimes (-\partial_v + \frac{v}{2})(\partial_v + \frac{v}{2})\mu \\
&= (\partial_x + \frac{\partial_x V(x)}{2}) u_k \otimes (2\pi)^{-n/4} v e^{-v^2/4} + u_k \otimes 0 \\
&= a u_k \otimes (2\pi)^{-n/4} v e^{-v^2/4}.
\end{aligned}$$

K est maximal accrétif,
$U_k \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ et $KU_k \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ (car $au_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $(2\pi)^{-n/4} v e^{-v^2/4} \in L^2(\mathbb{R}^n)$), alors $U_k \in D(K)$.
Si K est à résolvante compacte, alors il existe $\lambda \in \rho(K)$ tel que $(K - \lambda I)^{-1}$ est un opérateur compact.
On peut écrire $U_k = (K - \lambda I)^{-1}(K - \lambda I)U_k$. Comme $(K - \lambda I)U_k$ est borné dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ et $(K - \lambda I)^{-1}$ est un opérateur compact, alors U_k admet une sous suite convergente qui est alors une suite de Cauchy. On note cette sous suite par U_k.
Mais on a

$$\|u_k - u_{k'}\| \leq \|U_{k'} - U_{k'}\|.$$

Comme U_k est une suite de Cauchy, alors $\lim\limits_{k,k' \to +\infty} \|u_k - u_{k'}\| = 0$, on conclut que u_k est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ donc, c'est une suite convergente : contradiction car u_k est une suite orthonormale.
ii) En utilisant (i), si $0 \in \sigma_{ess}(\Delta^{(0)}_{V/2})$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} \left\langle u_k, \Delta^{(0)}_{V/2} u_k \right\rangle = \lim\limits_{k \to +\infty} \|au_k\|^2 = 0$. Par conséquence, $\lim\limits_{k \to +\infty} \|KU_k\| = 0$. De plus $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormale dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ avec $U_k \in D(K)$, donc $0 \in \sigma_{ess}(K)$. $\square$

3 Retour à l'équilibre pour l'opérateur de Fokker-Planck

Dans cette dernière section, on va d'abord montrer le retour à l'équilibre pour tout opérateur qui vérifie les conditions de l'introduction, et ensuite on va démontrer que l'opérateur Fokker-Planck vérifie ces conditions pour enfin conclure le retour à l'équilibre de l'opérateur de Fokker-Planck.

3.1 Analyse abstrait

Soit H un espace de Hilbert séparable, on considère un opérateur maximal accrétif $(K, D(K))$ tel que :

$$\sigma(K) \cap i\mathbb{R} = \sigma_{disc}(K) \cap i\mathbb{R} \subset \{0\} \tag{3.1}$$

On suppose qu'il existe un opérateur positif auto-adjoint $(\Lambda, D(\Lambda)), \Lambda \geq 1$ et trois constants $C > 0$, $M \geq m > 0$ tel que

$$\|\Lambda^m u\|^2 \leq C(\|(K - i\nu)u\|^2 + \|u\|^2), \forall \nu \in \mathbb{R}, \forall u \in D(K). \tag{3.2}$$

On suppose que K vérifie

$$\|Ku\|^2 \leq C\|\Lambda^M u\|^2, \forall u \in D(\Lambda^M). \tag{3.3}$$

On notera Π_0 la projection spectrale .

Théorème 3.1. *Soit K un opérateur maximal accrétif sur H qui vérifie (3.1),(3.2) et (3.3),*
alors le spectre de K vérifie

$$\sigma(K) \subset S_K \cap (\{Re\, z > 0\} \cup \{0\}),$$

avec

$$S_K = \left\{ z \in \mathbb{C}, Re\, z \geq -1/2, |z+1|^{m/M} \leq C'(Re\, z + 1) \right\}.$$

De plus, si $z \notin S_K$ avec $Re\, z \geq -1/2$, la résolvante est estimée par :

$$\|(z - K)^{-1}\| \leq C"|z+1|^{-m/M}.$$

Enfin, il existe deux constantes positives $C, \alpha_1 > 0$ tel que

$$\forall t \geq 0, \|e^{-tK} - \Pi_0\| \leq Ce^{-\alpha_1 t}.$$

Démonstration. La preuve sera divisée en deux parties, la première partie sera traitée en trois étapes.
Partie 1.

Étapes 1.
En utilisant l'estimation (3.2), soit $z = \mu + i\nu \in \mathbb{C}, \mu = \operatorname{Re} z \geq -1/2$, et $u \in D(K)$.
On a

$$\begin{aligned}
\|\Lambda^m u\|^2 &\leq C(\|(K - i\nu)u\|^2 + \|u\|^2) \\
&\leq C(\|(K - i\nu - \mu + \mu)u\|^2 + \|u\|^2) \\
&\leq C(\|(K - z)u\|^2 + \mu^2\|u\|^2 + \|u\|^2) \\
&\leq C(\|(K - z)u\|^2 + (2\mu^2 + 1)\|u\|^2).
\end{aligned}$$

Mais on a $\mu \geq -1/2$ alors $2\mu + 2 \geq 1$, par suite on obtient

$$\begin{aligned}
\|\Lambda^m u\|^2 &\leq C(\|(K - z)u\|^2 + (2\mu^2 + 2\mu + 2)\|u\|^2) \\
&\leq C(2\|(K - z)u\|^2 + 2(\mu + 1)^2\|u\|^2) \\
&\leq 2C(\|(K - z)u\|^2 + (\mu + 1)^2\|u\|^2).
\end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{gathered}
\|\Lambda^m u\|^2 \leq 2C(\|(K - z)u\|^2 + (\operatorname{Re} z + 1)^2\|u\|^2), \\
\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq -1/2, \forall u \in D(K).
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Étapes 2.

Le lemme suivant est vrai pour tout opérateur maximal accrétif. La preuve peut être trouvée dans la page 213 de [HeNi04].

Lemme 3.2. *Soit $(K, D(K))$ un opérateur maximal accrétif sur un espace de Hilbert H, alors pour tout $\eta \in]0, 1[$, on a l'estimation suivante*

$$|z + 1|^{2\eta}\|u\|^2 \leq 4\,\langle((K + 1)^*(K + 1))^\eta u, u\rangle + 4\|(K - z)u\|^2$$

pour tout $u \in D(K)$ et $z \in \mathbb{C}$ avec $Re\, z \geq -1$.

Étapes 3. on a

$$0 \leq (1 + K^*)(1 + K) \leq (1 + \sqrt{C})^2\Lambda^{2M}.$$

En effet, soit $u \in D(K)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle(1 + K^*)(1 + K)u, u\rangle &= \langle(1 + K)u, (1 + K)u\rangle \\
&= \|(1 + K)u\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième inégalité on a

$$\begin{aligned}\langle (1+K^*)(1+K)u, u\rangle &= \|(1+K)u\|^2 \\ &\leq \|Ku\|^2 + \|u\|^2.\end{aligned}$$

Or, on a $\Lambda^0 \leq \Lambda^{2M}$ puis en utilisant (3.3), alors on obtient

$$\begin{aligned}\langle (1+K^*)(1+K)u, u\rangle &\leq \|\Lambda^M u\|^2 + C\|\Lambda^M u\|^2 \\ &\leq (1+C)\|\Lambda^M u\|^2 \\ &\leq (1+\sqrt{C})^2\|\Lambda^M u\|^2.\end{aligned}$$

Ensuite, si deux opérateurs positifs A et B vérifient $A \leq B$, alors $A^\alpha \leq B^\alpha$ pour tout $\alpha \in [0\,,1]$ car $A \longrightarrow A^\alpha$ est un opérateur monotone pour $\alpha \in [0\,,1]$. Alors pour $\alpha = \dfrac{m}{M}$, on a :

$$0 \leq ((1+K^*)(1+K))^{m/M} \leq (1+\sqrt{C})^{2m/M}\Lambda^{2m}.$$

En appliquant le Lemme 3.2 avec $\eta = \dfrac{m}{M}$,pour $\operatorname{Re} z \geq -1/2, u \in D(K)$, on obtient

$$\begin{aligned}|z+1|^{2m/M}\|u\|^2 &\leq 4\left\langle ((K+1)^*(K+1))^{m/M}u, u\right\rangle + 4\|(K-z)u\|^2 \\ &\leq 4\left\langle (1+\sqrt{C})^{2m/M}\Lambda^{2m}u, u\right\rangle + 4\|(K-z)u\|^2 \\ &\leq 4(1+\sqrt{C})^{2m/M}\|\Lambda^m u\|^2 + 4\|(K-z)u\|^2.\end{aligned}$$

D'après (3.4), $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq -1/2, \forall u \in D(K)$, on obtient

$$|z+1|^{2m/M}\|u\|^2 \leq (8C(1+\sqrt{C})^{2m/M}+4)\|(K-z)u\|^2+(8C(1+\sqrt{C})^{2m/M})(\operatorname{Re} z+1)^2\|u\|^2,$$

donc on a
$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq -1/2, \forall u \in D(K)$,

$$|z+1|^{2m/M}\|u\|^2 \leq C_1\|(K-z)u\|^2 + C_2(\operatorname{Re} z+1)^2\|u\|^2. \tag{3.5}$$

Soit $z \in \sigma(K) = \sigma_{disc}(K)$, alors il existe $u \in D(K)$ tel que $(K-z)u = 0$. En se basant sur (3.5), on obtient

$$\begin{aligned}|z+1|^{2m/M}\|u\|^2 &\leq C_1\|(K-z)u\|^2 + C_2(\operatorname{Re} z+1)^2\|u\|^2 \\ |z+1|^{2m/M} &\leq 2C_2(\operatorname{Re} z+1)^2 \\ |z+1|^{m/M} &\leq \sqrt{2C_2}(\operatorname{Re} z+1).\end{aligned}$$

Donc, en choisissant $C^{'} = \sqrt{2C_2}$, on obtient

$$|z+1|^{m/M} \leq C^{'}(\operatorname{Re} z+1), \operatorname{Re} z \geq -1/2,$$

par suite, z appartient à S_K.
De plus, $\mathrm{Num}(K) = \{z; \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$ car K est maximal accrétif mais on a $\sigma(K) \subset \mathrm{Num}(K)$, alors on obtient

$$\sigma(K) \subset S_K \cap (\{\mathrm{Re}\, z > 0\} \cup \{0\})$$

Maintenant, soit $z \notin S_K, \mathrm{Re}\, z \geq -1/2$ alors $z \in \rho(K)$. De plus, z vérifie

$$C_2(\mathrm{Re}\, z + 1)^2 \leq \frac{1}{2}|z+1|^{2m/M}.$$

D'après (3.5), en prenant $v = (K-z)u$, on obtient

$$|z+1|^{2m/M}\|(K-z)^{-1}v\|^2 \leq C_1\|v\|^2 + \frac{1}{2}|z+1|^{2m/M}\|(K-z)^{-1}v\|^2$$
$$\|(K-z)^{-1}v\|^2 \leq 2C_1|z+1|^{-2m/M}\|v\|^2 \quad \forall v \in H.$$

Donc en choisissant $C^{"} = \sqrt{2C_1}$ on obtient

$$\|(K-z)^{-1}\| \leq C^{"}|z+1|^{-m/M}.$$

Par conséquence, on a l'estimation de la résolvante.
Partie 2.
On a K maximal accrétif, d'après la Proposition 4.8 dans l'Appendice 4.2, on peut écrire

$$e^{-tK} = \frac{1}{2i\pi}\int_{+i\infty-0}^{-i\infty-0} e^{-tz}(z-K)^{-1}\ dz.$$

D'après la figure 1, on a que $\partial S_K, \partial S_K^{'}$ orienté de Im z= $+\infty$ à Im z= $-\infty$.
De plus, $e^{-tz}(z-K)^{-1}$ est holomorphe entre les deux contours $[+i\infty - 0, -i\infty - 0]$ et ∂S_K (il n'y a pas de points singuliers), alors on peut déformer $[+i\infty - 0, -i\infty - 0]$ à ∂S_K et on peut écrire

$$e^{-tK} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial S_K} e^{-tz}(z-K)^{-1}\ dz.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} e^{-tK} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_\infty \cup \Gamma_0} e^{-tz}(z-K)^{-1}\ dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_\infty \cup \Gamma_1} e^{-tz}(z-K)^{-1}\ dz + \frac{1}{2i\pi}\int_{\overline{\Gamma}_1 \cup \Gamma_0} e^{-tz}(z-K)^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial S_K^{'}} e^{-tz}(z-K)^{-1}\ dz + e^{-0t}\Pi_0 \end{aligned}$$

On a noté $\overline{\Gamma}_1$ l'inverse du chemin Γ_1, $\Pi_0 = \dfrac{1}{2i\pi}\int_{C_0}(z-K)^{-1}dz$ la projection spectrale avec C_0 le contour du point isolé $\lambda = 0$. Dans notre cas prenons $C_0 = \overline{\Gamma}_1 \cup \Gamma_0$, alors on obtient

$$e^{-tK} - \Pi_0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial S_K^{'}} e^{-tz}(z-K)^{-1}\ dz.$$

En utilisant la décomposition $\partial S_K^{'} = \Gamma_1 \cup \Gamma_\infty$, on va estimer les deux parties de l'intégrale

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial S_K^{'}} e^{-tz}(z-K)^{-1}\ dz &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{-tz}(z-K)^{-1}dz + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_\infty} e^{-tz}(z-K)^{-1}dz \\ &= A + B.\end{aligned}$$

On a Γ_1 appartient à la région où $\operatorname{Re} z = b$, alors on obtient

$$\begin{aligned}\|A\| &\leq \frac{c_1}{2\pi}e^{-bt}\int_{\Gamma_1} dz \\ &\leq l(\Gamma_1)\frac{c_1}{2\pi}e^{-bt} \\ &\leq C_1 e^{-bt}.\end{aligned}$$

avec $l(\Gamma_1)$ la longueur du chemin Γ_1.
Pour la deuxième intégrale, on a $z \in \Gamma_\infty$, alors z vérifie :

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{C'}|z+1|^{m/M} - 1$$

$$\|(K-z)^{-1}\| \leq C"|z+1|^{-m/M}.$$

Par suite, on a

$$\|B\| \leq \frac{C"}{\pi}e^t \int_{(C'(b+1))^{M/m}}^{+\infty} e^{-\frac{t}{C'}y^{\frac{m}{M}}}\, y^{-\frac{m}{M}}\ dy.$$

En effectuant un changement de variable $x = -\frac{t}{C'}y^{\frac{m}{M}}$, on obtient

$$\begin{aligned}\|B\| &\leq ae^t(t^{1-\frac{M}{m}})\int_{(t(b+1)}^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{M}{m}-2}\ dx \\ &\leq a_1(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \ldots.\frac{1}{t^{\frac{M}{m}-1}})e^{-bt}.\end{aligned}$$

Alors

$$\|B\| \leq C_2 e^{-bt} \quad \text{uniformément pour} \quad t \geq 1.$$

Finalement on a :

$$\forall t \in [0\,,1], \|e^{-tK} - \Pi_0\| \leq 2$$

et

$$\forall t \geq 1, \|e^{-tK} - \Pi_0\| \leq Ce^{-bt}.$$

Donc

$$\forall t \geq 0, \|e^{-tK} - \Pi_0\| \leq \max(C, 2e^b)e^{-bt}.$$

□

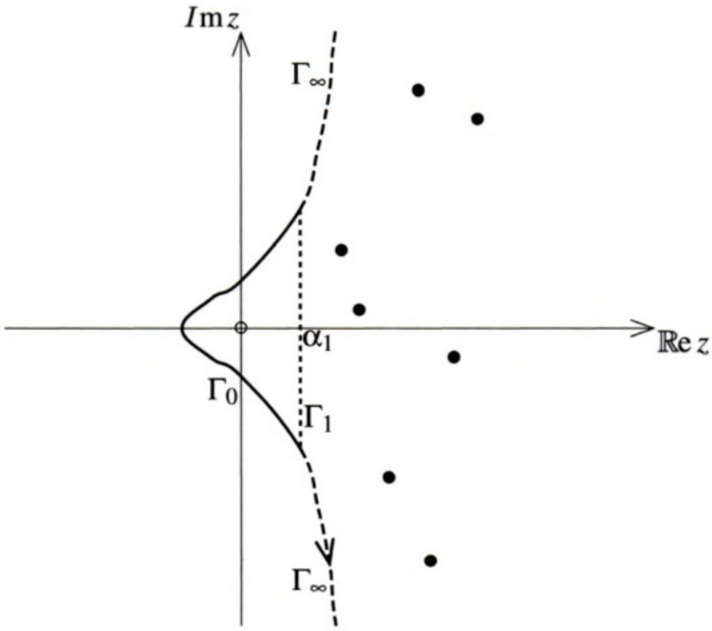

FIGURE 1 – Contours d'intégration: $\partial S_K = \Gamma_0 \cup \Gamma_\infty, \partial S_K^{'} = \Gamma_1 \cup \Gamma_\infty$.

3.2 Application à l'opérateur Fokker-Planck

Dans cette partie, on doit vérifier les conditions du Théorème 3.1 pour l'opérateur Fokker-Planck K, qui permet de localiser le spectre comme montre la figure 1, estimer la résolvante et par suite le retour à l'équilibre.
Maintenant on suppose $\exp -V \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors on a

$$\mathrm{Ker} K = \mathbb{C}e^{-\frac{1}{2}(\Phi(x,v))} = \mathbb{C}e^{-\frac{1}{2}(\frac{v^2}{2}+V(x))}.$$

Ensuite, pour $s \in \mathbb{R}$, on considère l'espace de Hilbert

$$H^s = \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^{2n}), \Lambda^s u \in L^2(\mathbb{R}^{2n}) \right\}$$

muni d'une norme définie par $\|u\|_{H^s} = \|\Lambda^s_{ref} u\|_{L^2}$ (voir l'Appendice 4.3).
On notera par $M(x,v)$ la fonction maxwellienne

$$M(x,v) = e^{-(\frac{v^2}{2}+V(x))}.$$

On notera par Π_0 la projection spectrale qui est orthogonale, et on peut écrire : Si $M \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$, alors

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^{2n}), \quad \Pi_0 u = \frac{M^{1/2}\left\langle u, M^{1/2}\right\rangle}{\int M}.$$

Lemme 3.3. *Avant de commencer par le Théorème 3.4 on va montrer que :*

$$KerK = \mathbb{C}e^{-\frac{1}{2}(\Phi(x,v))} = \mathbb{C}e^{-\frac{1}{2}(\frac{v^2}{2}+V(x))}.$$

Démonstration. Soit $u \in \mathrm{Ker}K$, alors $Ku = 0$, par suite $\langle Ku, u\rangle = 0$. Donc $\|bu\|^2 = 0$, d'où $bu = 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$.
Alors,

$$\begin{aligned}
&(\partial_v + \frac{v}{2})u = 0 \\
&\Rightarrow (\partial_v + \frac{v}{2})ue^{\frac{v^2}{4}} = 0 \\
&\Rightarrow \partial_v(e^{\frac{v^2}{4}}u) = 0 \quad \text{dans} \quad D'(\mathbb{R}^{2n}) \\
&\Rightarrow e^{\frac{v^2}{4}}u = cte(x) \\
&\Rightarrow \exists \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n), u = \varphi(x)e^{-\frac{v^2}{4}} \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}^{2n}).
\end{aligned}$$

Mais on a

$$
\begin{aligned}
& Ku = 0 \\
& \Rightarrow (v.\partial_x - \partial_x V(x).\partial_v + b^*b)(\varphi(x)e^{-\frac{v^2}{4}}) = 0 \\
& \Rightarrow (v.\partial_x - \partial_x V(x).\partial_v)(\varphi(x)e^{-\frac{v^2}{4}}) = 0 \\
& \Rightarrow [v.(\partial_x + \frac{\partial_x V(x)}{2})\varphi(x)]e^{-\frac{v^2}{4}} = 0 \quad \text{presque partout} \quad v \in \mathbb{R}^n \\
& \Rightarrow a\varphi = 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}^n) \\
& \Rightarrow (\partial_x + \frac{\partial_x V(x)}{2})\varphi = 0 \\
& \Rightarrow (\partial_x + \frac{\partial_x V(x)}{2})\varphi e^{\frac{V(x)}{2}} = 0 \\
& \Rightarrow \partial_x(e^{\frac{V(x)}{2}}\varphi(x)) = 0 \quad \text{dans} \quad D'(\mathbb{R}^n) \\
& \Rightarrow \varphi(x) = c_0 e^{-\frac{V(x)}{2}} \text{presque partout dans} \quad L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{car} \quad e^{-V} \in L^1(\mathbb{R}^n) \\
& \Rightarrow u = c_0 e^{-\frac{1}{2}(\frac{v^2}{2}+V(x))}.
\end{aligned}
$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

Théorème 3.4. *On suppose que V vérifie l'Hypothèse 1, soit $K = X_0 + b^*b$. On a, d'après la Section 2.1, que K est un opérateur maximal accrétif. Alors il existe deux constantes positives $C, \alpha_1 > 0$ tel que*

$$\forall u_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2n}), \forall t \geq 0, \|(e^{-tK} - \Pi_0)u_0\| \leq Ce^{-\alpha_1 t}\|u_0\|.$$

Démonstration. On a l'opérateur Fokker-Planck K est maximal accrétif. De plus, d'après la Corollaire 2.7, K est à résolvante compacte. Soit $z = i\lambda \in \sigma(K) \cap i\mathbb{R}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On va étudier $Ku = i\lambda u, u \in D(K)$.

$Ku = i\lambda u \Rightarrow \langle (K - i\lambda)u, u\rangle = 0 \Rightarrow \|bu\|^2 - i\lambda\|u\|^2 = 0 \Rightarrow \|bu\|^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda\|u\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{et} \quad u = c_0 e^{-\frac{1}{2}(\frac{v^2}{2}+V(x))}$.

Alors on obtient

$$\sigma(K) \cap i\mathbb{R} = \sigma_{disc}(K) \cap i\mathbb{R} \subset \{0\}.$$

On a que 0 est une valeur propre simple de fonction propre $u = e^{-\frac{1}{2}(\frac{v^2}{2}+V(x))}$, et comme K à résolvante compacte, alors 0 est un point isolé.

On a d'après le Théorème 2.6 qu'il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\forall u \in S(\mathbb{R}^{2n}), \|\Lambda^{1/4}u\|^2 \leq C(\|(K - i\nu)u\|^2 + \|u\|^2),$$

alors K vérifie (3.2) avec $m = \dfrac{1}{4}$ et Λ un opérateur auto-adjoint, $\Lambda \geq Id$, défini par :

$$\Lambda^2 = a^*a + b^*b + Id.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité (4.2) dans l'Appendice 4.3, on a $K \in Op(S^2_\psi)$, alors il existe $C > 0$ tel que :

$$\|Ku\|^2 \leq C\|\Lambda^2 u\|^2, \forall u \in D(\Lambda^2),$$

alors, K vérifie (3.3) avec $M = 2$.
Donc, d'après le Théorème 3.1, il existe deux constantes positives $C, \alpha_1 > 0$, tel que

$$\forall u_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2n}), \forall t \geq 0, \|(e^{-tK} - \Pi_0)u_0\| \leq Ce^{-\alpha_1 t}\|u_0\|.$$

□

4 Appendice

4.1 Opérateurs pseudo-différentiels

4.1.1 Symboles, opérateurs

Sur $\mathbb{R}^{2n}_{z,\xi}$, pour tout $m \in \mathbb{R}$, nous définissons la classe de symboles comme l'ensemble des fonctions $a(z,\xi)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{2n}$ qui possède la propriété suivante :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha,\beta} > 0, \forall (z,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, |\partial_z^\alpha \partial_\xi^\beta a(z,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \Psi(z,\xi)^{m-|\beta|},$$

avec Ψ une fonction poids de classe C^∞ borné inférieurement par 1 satisfaisant une propriété de lenteur et tempérance (voir page 29 dans [HelNi05]). En introduisant la métrique

$$g = dz^2 + \frac{d\xi^2}{\Psi^2},$$

on peut remplacer la condition au dessus par $|T_1..T_J a(z,\xi)| \leq C_J \Psi^m(z,\xi)$ pour toute suite finie de champs de vecteurs $(T_j)_{j:1....J}$ avec $g(T_j) \leq 1$.On note $S(\Psi^m, g)$ la classe de symboles d'ordre m, qu'on peut noter simplement par S^m_Ψ.
La classe de symboles S^m_Ψ munie par une famille de semi-normes

$$|a|_{k,S^m_\Psi} = \sup_{|\alpha+\beta|\leq k} \sup_{(z,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}} \Psi(z,\xi)^{-m+|\beta|} |\partial_z^\alpha \partial_\xi^\beta a(z,\xi)|, k \in \mathbb{N}$$

est un espace de Fréchet.
À un symbole a dans S^m_Ψ, on associe l'opérateur pseudo-différentiel $Op(a)$ défini comme un opérateur de $S(\mathbb{R}^n)$ à $S'(\mathbb{R}^n)$, qu'on peut écrire $\forall u \in S(\mathbb{R}^n)$:

$$Op(a)u(z) = \int_{\mathbb{R}^n} K_a(z,z')u(z') \ dz',$$

où $K_a(z,z')$ le noyau de $Op(a)$ défini par

$$K_a(z,z') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(z-z').\zeta} a(\frac{z+z'}{2},\zeta) \ d\zeta.$$

On note $Op(S^m_\Psi)$ la classe de l'opérateur associé au symbole d'ordre m.
Pour tout $m \in \mathbb{R}$ et tout $a \in S^m_\Psi$ l'opérateur $Op(a)$ agit continûment sur $S(\mathbb{R}^n)$ et sur $S'(\mathbb{R}^n)$.

4.1.2 Une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels

Soit $a \in S_\Psi^{m_1}$ et $b \in S_\Psi^{m_2}$, alors $Op(a) \circ Op(b) = Op(c)$ avec $c \in S_\Psi^{m_1+m_2}$. le symbole c est noté par $c = a\sharp b$ donné par

$$\begin{aligned} a\sharp b &= \left[e^{\frac{i}{2}\sigma(D_{Z_1},D_{Z_2})} a(Z_1)b(Z_2) \right]_{|Z_1=Z_2} \\ &\sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\frac{i}{2}\sigma(D_{Z_1}, D_{Z_2}))^j a(Z_1)b(Z_2)|_{Z_1=Z_2}, \end{aligned}$$

avec $D_Z = \frac{1}{i}\partial_Z$ et σ la forme symplectique sur $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ est donnée par

$$\sigma(Z, Z') = \sum_{j=0}^{n} \zeta_j z'_j - z_j \zeta'_j.$$

Alors l'espace $\cup_{m\in\mathbb{R}} Op(S_\Psi^m)$ est un algèbre avec

$$Op(S_\psi^{m_1}) \circ Op(S_\psi^{m_2}) \subset Op(S_\psi^{m_1+m_2})$$

et

$$\left[Op(S_\psi^{m_1}), Op(S_\psi^{m_2}) \right] \subset Op(S_\psi^{m_1+m_2-1}).$$

4.1.3 Continuité dans L^2

Ces résultats sont montrés dans [Hor85] section 18.

Théorème 4.1. ***(Calderon-Vaillancourt)***
Si $r \leq 0$ alors $Op(S_\psi^r) \hookrightarrow \mathcal{L}(L^2)$.

4.1.4 Opérateurs pseudo-différentiels compacts

On note $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^n))$ l'espace des opérateurs compacts dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 4.2. *Si la fonction poids vérifie $\lim_{(z,\zeta)\to+\infty} \Psi(z, \zeta) = +\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, $Op(S_\psi^{-\varepsilon})$ injecte continûment dans $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}^n))$.*

4.1.5 Ellipticité, paramétrices et chaîne de Sobolov

On notera $S_\psi^{-\infty} = \cap_{m\in\mathbb{R}} S_\Psi^m$. Soit $a \in S_\psi^m$, on dit que $Op(a)$ est un opérateur elliptique s'il existe un $C > 0$ tel que

$$|a(z, \zeta)| \geq C^{-1} \Psi^m(z, \xi).$$

On remarque que l'opérateur de symbole $b = \dfrac{1}{a}$ qu'on note $Op(b)$ appartient à $Op(S_\psi^{-m})$.
Soit $Op(a)$ est un opérateur elliptique. Alors, il existe $Op(b) \in Op(S_\psi^{-m})$ tel que

$$Op(a) \circ Op(b) = I + R_1 \quad Op(b) \circ Op(a) = I + R_2$$

où $R_1, R_2 \in Op(S_\psi^{-\infty})$.$Op(b)$ est appelé la paramétrice de $Op(a)$.
Dans ce cas, on dit que $Op(a)$ est inversible modulo $Op(S_\psi^{-\infty})$.
Maintenant, soient $s \in \mathbb{R}$ et $Op(a) \in Op(S_\psi^s)$ un opérateur elliptique,on définit la chaîne de Sobolev

$$H^s = \left\{ u \in S^{'}(\mathbb{R}^n), Op(a)u \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

muni d'une norme définie par $\|u\|_{H^s} = \|Op(a)u\|_{L^2}$. Cette définition est indépendante de $Op(a)$.
De plus, on a

$$S(\mathbb{R}^n) \subset H^s \subset H^{s'} \subset S^{'}(\mathbb{R}^n), \text{pour} \quad s \geq s',$$

$$\forall s, m \in \mathbb{R}, \forall a \in S_\psi^m, Op(a) \in \mathcal{L}(H^s, H^{s-m}),$$

$$H^0 = L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad (H^s)' = H^{-s}.$$

4.2 Opérateurs accrétifs

Soit H un espace de hilbert réel ou complexe et $\langle ., . \rangle_H$ son produit scalaire.

Définition 4.3. Soit A un opérateur non borné sur H de domaine $D(A)$, on dit que A est accrétif si :

$$\text{Re}\langle Au, u \rangle \geq 0, \forall u \in D(A).$$

Définition 4.4. Un opérateur A est maximal accrétif s'il n'existe pas une extension $\widehat{A}$ accrétive tel que $D(A)$ est inclus strictement dans $D(\widehat{A})$.

Définition 4.5. Soit A un opérateur accrétif tel que $D(A)$ est dense dans H, alors A est fermable et en plus $\overline{A}$ (fermeture de A) est accrétif .

Théorème 4.6. *Soit A un opérateur accrétif, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) $\overline{A}$ est maximal accrétif.
2) Il existe $\lambda_0 > 0$; $A^* + \lambda_0 I$ est injective.
3) Il existe $\lambda_1 > 0$; $Im(A + \lambda_1 I)$ dense dans H.

Théorème 4.7. ***Hille-Yosida*** *Soit A un opérateur fermé tel que A est accrétif, alors les conditions suivantes sont équivalentes*
1) A est maximal accrétif .
2)$(A, D(A))$ est un générateur de semi-groupe fortement continu de contraction $(e^{-tA})_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Démonstration. On peut trouver la démonstration de ce théorème dans [Paz83]. □

Proposition 4.8. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur maximal accrétif sur H, alors*

$$\forall u \in D(A), \forall t \geq 0, e^{-tA}u = \frac{1}{2i\pi}\int_{+i\infty-0}^{-i\infty-0} e^{-tz}(z-A)^{-1}u \ dz.$$

Démonstration. La preuve de cette proposition se trouve dans [RiNa]. □

Remarque 4.9. Soit A un opérateur non borné défini sur $D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, avec $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ on a :
$\overline{A}$ son extension minimale qu'on note $\overline{A}^{min}$ avec $D(\overline{A})$ la fermeture de $D(A)$ pour la norme du graphe .
$\overline{A}^{max}$ son extension maximale avec $D(\overline{A}^{max}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n), Au \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$.
Si A est un opérateur maximal accrétif, alors $\overline{A}^{min} = \overline{A}^{max}$

4.3 Chaîne de Sobolev adaptée à l'analyse de Fokker-Planck

On rappelle que Λ un opérateur auto-adjoint , $\Lambda \geq Id$, défini par :

$$\Lambda^2 = a^*a + b^*b + Id.$$

De plus, $\Lambda^2 \in Op(S_\psi^2)$ avec Ψ la fonction poids défini par :

$$\Psi(x, v, \xi, \eta)^2 = 1 + |\xi|^2 + |\eta|^2 + \frac{1}{4}|v|^2 + \frac{1}{4}|\nabla V(x)|^2.$$

Lemme 4.10. *$\exists C_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda_{ref}^2 = \Lambda^2 + C_0$ est un opérateur elliptique.*

Démonstration. Soit $C_0 \in \mathbb{R}$, on a $\Lambda_{ref}^2 = Op(\lambda_{ref}^2)$ avec λ_{ref}^2 symbole de Λ_{ref}^2.
Soit $\lambda_{ref}^2 = 1 + |\xi|^2 + |\eta|^2 + \frac{1}{4}|v|^2 + \frac{1}{4}|\nabla V(x)|^2 - \frac{1}{2}\Delta_x V(x) - \frac{n}{2} + C_0$.
D'après l'Hypothèse 1, il existe $C \geq 1$, $\frac{1}{2}|\nabla_x V(x)|^2 - \Delta_x V(x) \geq C^{-1}|\nabla_x V(x)|^2$ pour $|x| \geq C$.
Donc $\forall x, |x| \geq C$, on a :
$\lambda_{ref}^2 \geq 1 + |\xi|^2 + |\eta|^2 + \frac{1}{4}|v|^2 + \frac{1}{2C}|\nabla_x V(x)|^2 + C_0 - \frac{n}{2} \geq \frac{1}{2C}\Psi^2$ si $C_0 \geq \frac{n}{2}$.

Si $|x| \leq C$,
$\lambda_{ref}^2 = 1+|\xi|^2+|\eta|^2+\frac{1}{4}|v|^2+\frac{1}{4}|\nabla V(x)|^2+(-\frac{1}{2}\Delta_x V(x)-\frac{n}{2}+C_0) \geq \frac{1}{2C}\Psi^2$
si $\quad C_0 \geq \max\limits_{|x|\leq C}(\frac{1}{2}\Delta_x V(x)+\frac{n}{2})$.
On choisit $C_0 = \max\left[\frac{n}{2}, \max\limits_{|x|\leq C}(\frac{1}{2}\Delta_x V(x)+\frac{n}{2})\right]$.
Finalement, $\forall x$ on a $\lambda_{ref}^2 \geq \frac{1}{2C}\Psi^2$, et par suite Λ_{ref}^2 est un opérateur elliptique. □

Puisqu'on a montré que Λ_{ref}^2 est un opérateur elliptique, alors on définit l'espace de Hilbert

$$H^2 = \left\{u \in S^{'}(\mathbb{R}^{2n}), \Lambda_{ref}^2 u \in L^2(\mathbb{R}^{2n})\right\}$$

muni d'une norme définie par $\|u\|_{H^2} = \|\Lambda_{ref}^2 u\|_{L^2}$.
Les normes $\|\Lambda_{ref}^2 u\|$ et $\|\Lambda^2 u\|$ sont équivalentes :

$$\forall u \in H^2, C_1\|\Lambda_{ref}^2 u\| \leq \|\Lambda^2 u\| \leq C_2\|\Lambda_{ref}^2 u\|$$

avec C_1, C_2 deux constantes positives.

En effet, on a $\Lambda_{ref}^2 = \Lambda^2 + C_0$, alors $\|\Lambda^2 u\| \leq \|\Lambda_{ref}^2 u\| + \|C_0 u\| \leq C_2\|\Lambda_{ref}^2 u\|$.
D'autre part, on a $\|\Lambda_{ref}^2 u\| - \|C_0 u\| \leq \|\Lambda^2 u\|$, mais on a $\|u\| \leq \|\Lambda^2 u\|$ (car $\quad \Lambda^2 = a^*a + b^*b + Id$), alors on obtient $C_1\|\Lambda_{ref}^2 u\| \leq \|\Lambda^2 u\|$.
Donc, on peut définir H^2 ainsi

$$H^2 = \left\{u \in S^{'}(\mathbb{R}^{2n}), \Lambda^2 u \in L^2(\mathbb{R}^{2n})\right\}.$$

Par généralisation, pour $s \in \mathbb{R}$, on considère l'espace de Hilbert

$$H^s = \left\{u \in S^{'}(\mathbb{R}^{2n}), \Lambda^s u \in L^2(\mathbb{R}^{2n})\right\}$$

muni d'une norme définie par $\|u\|_{H^s} = \|\Lambda_{ref}^s u\|_{L^2}$.
D'après ce qui précède, on a montré que Λ_{ref}^M est un opérateur elliptique. Ensuite soit $Op(a) \in Op(S_\psi^M)$,on peut montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|Op(a)u\| \leq C\|\Lambda_{ref}^M u\| \quad \forall u \in D(\Lambda_{ref}^M). \tag{4.1}$$

En effet, on note A= $Op(a)$. Comme Λ_{ref}^M est elliptique, alors il est inversible. Par suite, il existe $\Lambda_{ref}^{-M} \in Op(S_\psi^{-M})$. En prenant $v = \Lambda_{ref}^M u$, montrer (4.1) est équivalent à montrer que

$$\|A\Lambda_{ref}^{-M} v\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in L^2.$$

Or, ceci est vrai car $\mathrm{A}\Lambda_{ref}^{-M} \in Op(S_{\psi}^{M-M}) = Op(S_{\psi}^{0}) \hookrightarrow \mathcal{L}(L^2)$(voir Théorème 4.1 dans l'Appendice 4.1).
Par équivalence des normes $\|\Lambda_{ref}^{M} u\|$ et $\|\Lambda^{M} u\|$ on obtient

$$\|\mathrm{A}u\| \leq C\|\Lambda^{M} u\| \quad \forall u \in D(\Lambda^{M}). \tag{4.2}$$

Bibliographie

[Hor67] L.Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. Acta Mathematica 119 (1967) pp. 147–171.

[Hor85] L.Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators 3.* Springer Verlag (1985).

[HelNi05] B. Helffer and F. Nier.*Hypoelliptic estimates and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians.* Lect. Notes in Maths 1862, (2005).

[HeNi04] F. Hérau and F. Nier. Isotropic hypoellipticity and trend to the equilibrium for the Fokker-Planck equation with high degree potential. Archive for Rational Mechanics and Analysis 171 (2), pp. 151–218 (2004).

[Paz83] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences, Vol 44, Springer (1983).

[RiNa] F. Riesz and B. Sz.-Nagy. *Functional analysis.* Dover Publications Inc., New York, (1990).