UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES
ET DES TECHNIQUES

STAGE MASTER 2

SUR UN THÉORÈME DE CHÂTELET

2021

Brandon VIZIOLI MARION

encadré par

Susanna ZIMMERMANN

Université de Nantes – LAREMA

Master 2 – Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Introduction

Le but de ce mémoire est de prouver le théorème de CHÂTELET :

Soit X une k-variété de Severi-Brauer de dimension n. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $X \simeq \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.

(2) X **est birationnelle à** $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.

(3) $X(\mathbf{k}) \neq \emptyset$.

On commencera par définir des notions de base, comme les **k**-variétés, les points rationnels d'une **k**-variété, les applications rationnelles et les variétés projectives.

Pour cela, on prouvera le théorème de LANG-NISHIMURA qui donne l'existence d'un point rationnel pour une **k**-variété projective et régulière.

Par la suite, on introduira la cohomologie des groupes dans le cas non commutatif et plus particulièrement, la cohomologie galoisienne. Cela servira à classifier les formes d'une **k**-variété projective.

Enfin, le dernier outil pour prouver le théorème de CHÂTELET, est le fameux théorème 90 de HILBERT dans sa forme la plus générale :

Soit K/k une extension galoisienne quelconque, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(\mathbf{K}/\mathbf{k}\right), \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})\right) = 1.$$

Table des matières

1 RAPPELS

Dans toute la suite **k** désigne un corps quelconque.

1.1 Définitions des k-variétés

Commençons par établir quelques définitions de base qui nous serviront tout au long de ce mémoire.

Ainsi, on définit les objets centraux qui nous intéresseront pour ce mémoire, à savoir les **k**-*variétés*. On appelle **k-variété**, tout **k**-schéma **séparé**, **intègre** et **de type fini**. Définissons précisément ces trois termes :

- **séparé** : un **k**-schéma X est dit *séparé* si son morphisme structural π_X : $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbf{k})$ est séparé ; c'est à dire que son morphisme diagonal associé, $\Delta : X \longrightarrow X \times_{\mathbf{k}} X$ induit par $(\mathrm{Id}_X, \mathrm{Id}_X)$ est une immersion fermée. Ce qui signifie que Δ induit un homéomorphisme de X sur un fermé de $X \times X$ et que son morphisme de faisceaux associé est surjectif.
- **intègre** : un **k**-schéma X est dit *intègre* s'il est irréductible et que pour tout $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit. Si un schéma vérifie la dernière condition, on dit que le schéma est réduit.
- **de type fini** : un **k**-schéma X est dit *de type fini* si son espace topologique induit est quasi-compact et si pour tout ouvert affine U de X, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est une **k**-algèbre de type fini. Comme les corps sont noethériens, alors toute section $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est une **k**-algèbre noethérienne, où U est un ouvert affine. Dans un cadre général, si un schéma vérifie cette condition alors, on dit que le schéma est *noethérien*.

Dans la littérature, la définition d'une **k**-variété omet souvent l'intégrité du

k-schéma. On a donc, ici, fait le choix qu'une **k**-variété soit toujours intègre.

1.2 Extension du corps de base

Si X est un **k**-variété et que **K** est une extension du corps **k**, alors on peut obtenir une **K**-variété à partir de X par le produit fibré $X \times_{\mathbf{k}} \mathbf{K}$. On appelle ce foncteur entre la catégorie des **k**-variétés vers la catégorie des **K**-variétés, **extension du corps de base**. On note $X_{\mathbf{K}}$, la **K**-variété $X \times_{\mathbf{k}} \mathbf{K}$.

1.3 Régularité

On définit maintenant le concept de variétés **régulières**. Si X est une **k**-variété et $x \in X$. On dit que x est *régulier* si l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est régulier, c'est à dire, $\dim_{\kappa(x)} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \dim \mathscr{O}_{X,x}$. On dira que X est *régulière* si tous les points de X sont réguliers. Les points qui ne sont pas réguliers sont dits *singuliers*.

1.4 K-points et corps des fonctions

Tout d'abord, on rappelle la définition d'un **K-point**, d'une **k**-variété où **K**/**k** est une extension de corps. Ainsi, on appelle **K**-*point* d'une **k**-variété X, tout **k**-morphisme dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathrm{Spec}\,(\mathbf{K}), X)$. On note $X(\mathbf{K})$, l'ensemble des **K**-*points* de X. De plus, on appelle les **k**-*points* de X, les **points rationnels** de X. Grâce à la bijection suivante :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathrm{Spec}\,(\mathbf{K}), X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\Gamma(X, \mathscr{O}_X), \mathbf{K}),$$

on peut considérer les **K**-points comme étant les morphismes de **k**-algèbres de la section globale vers le corps **K**.

Dans le cas de **k**-variétés, on peut caractériser les **K**-points avec un élément de X et une injection de corps. Pour cela, on définit au préalable le **corps résiduel en un point**. Si X est une **k**-variété et x un de ses éléments. On appelle *corps résiduel en x* le corps $\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$, où $\mathfrak{m}_x$ est l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$.

On note ce corps $\kappa(x)$. Maintenant, on peut énoncer la proposition suivante, qui caractérise les **K**-points.

PROPOSITION 1.1. — Soit X un **k**-schéma et **K**/**k** une extension de corps. Se donner un **K**-point sur X est équivalent à se donner un point x de X et un **k**-morphisme de corps de $\kappa(x)$ vers K.

PREUVE : Considérons un **K**-point sur X, $f : \mathrm{Spec}(\mathbf{K}) \longrightarrow X$. Comme **K** est un corps, Spec (**K**) ne possède qu'un seul élément (0). Posons alors x l'image par f de (0). Par ailleurs, on a aussi le morphisme de faisceaux associé à f, $f^{\#} : f^{-1}\mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbf{K})}$. On obtient alors un morphisme induit sur les germes : $f^{\#}_{(0)} : \mathscr{O}_{X,f(0)} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbf{K}),(0)}$. Ainsi, on a le morphisme de **k**-algèbres suivant $f^{\#}_{(0)} : \mathscr{O}_{X,x} \longrightarrow \mathbf{K}$. Comme $f^{\#}_{(0)}$ est local et que (0) est l'unique idéal maximal de **K**, Ker $f^{\#}_{(0)} = \mathfrak{m}_x$. Il vient alors le **k**-morphisme de corps $\kappa(x) \longrightarrow \mathbf{K}$.

Réciproquement, considérons un élément $x \in X$ et un **k**-morphisme $\varphi : \kappa(x) \longrightarrow \mathbf{K}$. Construisons, maintenant, $(f, f^{\#}) : (\mathrm{Spec}(\mathbf{K}), \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbf{K})}) \longrightarrow (X, \mathscr{O}_X)$, un morphisme de **k**-schémas. On définit $f : \mathrm{Spec}(\mathbf{K}) \longrightarrow X$ par $f(0) = x$. Pour $f^{\#}$, on définit des morphismes de **k**-algèbres $f^{\#}_U : \Gamma(U, \mathscr{O}_X) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbf{K})})$ pour U ouvert de X. Soit U un ouvert de X, si $x \notin U$, alors $f^{-1}(U) = \emptyset$ donc $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbf{K})}(\emptyset) = 0$ d'où $f^{\#}_U$ est le morphisme de **k**-algèbres nul. Si $x \in U$, alors $f^{-1}(U) = (0)$ donc $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbf{K})}(0) = \mathbf{K}$. Ainsi, on définit $f^{\#}_U : \Gamma(U, \mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathbf{K}$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma(U,\mathscr{O}_X) & \longrightarrow & \mathscr{O}_{X,x} & \longrightarrow & \kappa(x) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ s & \longmapsto & s_x & \longmapsto & \pi(s_x) & \longmapsto & \varphi \circ \pi(s_x). \end{array}$$

Par conséquent, on a bien défini un morphisme de faisceaux. Il reste à montrer que les applications induites sur les germes sont des morphismes locaux. Soit $y \in X$ alors, si $y \neq x$, on obtient le morphisme nul $f^{\#}_y$ qui est bien local. Maintenant, si $y = x$, on constate que l'application induite sur les germes $f^{\#}_x$ est $\varphi \circ \pi$ et que son noyau est $\mathfrak{m}_x$, ce qui implique que $f^{\#}_x$ est un morphisme de **k**-algèbres locales. En somme, le couple $(f, f^{\#})$ est bien un morphisme de **k**-schémas. □

De ce résultat, on peut en déduire une caractérisation des points rationnels.

COROLLAIRE 1.2. — L'ensemble des **k**-points de X s'identifie à l'ensemble des éléments de X de corps résiduel **k**.

Dans des espaces topologiques, il peut exister un ou plusieurs points distingués que l'on appelle **points génériques**. Ces points sont les éléments qui sont denses dans leur espace. Dans les **k**-variétés, un tel point existe et est unique :

PROPOSITION 1.3. — Soit X un schéma irréductible. Alors l'espace topologique induit par X contient un unique point générique.

PREUVE : Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est irréductible alors on sait que X possède un unique point générique qui est l'unique idéal premier minimal de A à savoir son nilradical. Si X est un schéma irréductible quelconque, un point générique doit, en particulier, être dans tout ouvert affine non vide de X car ce point est dense. Par conséquent, cela prouve l'unicité de ce point.

Montrons à présent son existence. Si $U = \mathrm{Spec}(A)$ est un ouvert affine non vide (donc irréductible) de X dont on note η le point générique. Alors, tout ouvert non vide V de X vérifie $U \cap V \neq \emptyset$ (car X est irréductible) donc $U \cap V$ contient η, vu que c'est un ouvert non vide de U. Ainsi $\{\eta\}$ rencontre tout ouvert de X ce qui montre que $\{\eta\}$ est dense dans X, d'où η est un point générique de X. □

Ce point est très particulier, car l'anneau local des germes en ce point est un corps.

PROPOSITION 1.4. — Soit X un schéma intègre, alors si η est le point générique de X, l'anneau $\mathscr{O}_{X,\eta}$ est un corps. De plus, ce corps est le corps des fractions de $\Gamma(U,\mathscr{O}_X)$ pour tout ouvert affine non vide U de X.

PREUVE : Soit X un schéma intègre. On vient de voir que le point générique η de X est aussi le point générique d'un ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$. Par intégrité de X on obtient l'intégrité de $\Gamma(U,\mathscr{O}_X) = A$. Par conséquent, $\eta = (0)$ et $\mathscr{O}_{X,\eta} \simeq \mathscr{O}_{U,(0)} \simeq A_{(0)} = \mathrm{Frac}(A)$. □

On appelle ce corps, le **corps des fonctions** de X. On le note $\kappa(X)$. Par ailleurs, $\mathscr{O}_{X,\eta}$ étant un corps, son idéal maximal est l'idéal nul, donc on a l'égalité : $\kappa(X) = \kappa(\eta)$.

Maintenant que l'on a défini le corps des fonctions d'une **k**-variété, on peut définir une relation d'équivalence sur les **k**-variétés. On dit que deux **k**-variétés sont **birationnelles** si leur corps des fonctions sont **k**-isomorphes.

1.5 Applications rationnelles

Dans cette partie, on posera plusieurs définitions concernant les applications rationnelles entre deux **k**-variétés. Une *application rationnelle* étant une classe d'équivalence d'une certaine relation, on commence donc par définir cette relation d'équivalence.

Soit X et Y deux **k**-variétés, U et V deux sous-schémas ouverts denses de X, φ et ψ deux **k**-morphismes de X vers Y. On dit que les couples (U,φ) et (V,ψ) sont équivalents s'il existe $W \subset U \cap V$ un sous-schéma ouvert dense de X tel que $\varphi_{|W} = \psi_{|W}$. Une classe d'équivalence d'un tel couple (U,φ) est appelée **application rationnelle**. On les note ainsi : $X \dashrightarrow Y$. Cette définition est équivalente avec la suivante [**POO**, 3.6.1] :

$$\{X \dashrightarrow Y\} := \varinjlim_{U} \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(U,Y). \tag{1.1}$$

On peut ainsi définir le **domaine de définition** d'une application rationnelle comme étant la réunion de tous les sous-schémas ouverts denses parcourant la classe d'équivalence. Cette définition est utile car elle permet d'obtenir un représentant canonique d'une application rationnelle. En effet, *si W est le domaine de définition d'une application rationnelle $X \dashrightarrow Y$, où X et Y sont deux **k**-variétés. Alors, il existe un unique morphisme $\xi : W \longrightarrow Y$ tel que (W,ξ) appartienne à la classe d'équivalence*, [**POO**, 3.6.3].

Avant d'aborder la notion d'*application birationnelle*, il manque la notion d'**application rationnelle dominante**. On dit d'une *application rationnelle* qu'elle est *dominante* s'il existe un représentant (U,φ) tel que $\varphi(U)$ est dense dans Y. Dans cette définition, on aurait pu remplacer « il existe » par « pour tout », [**POO**, 3.6.6].

Ainsi, on peut parler d'**applications birationnelles**. Dans la catégorie ayant pour objets les **k**-variétés et pour morphismes, les applications rationnelles dominantes, les isomorphismes sont appelés *applications birationnelles*. Le fait suivant, justifie la définition de **k**-variétés *birationnelles*. Le foncteur $X \longmapsto \kappa(X)$ entre la catégorie des **k**-variétés munie des applications rationnelles dominantes et la catégorie opposée des extensions de type fini de **k** munie des morphismes de

k-algèbres est une équivalence de catégories, [$\mathbf{HAR}_1$, I.4.4]. Ainsi, on a bien, deux **k**-variétés X et Y sont *birationnelles* si, et seulement si, il existe une *application birationnelle* $X \dashrightarrow Y$. De plus, on rappelle un résultat connu qui nous servira dans la preuve du théorème de CHÂTELET :

Soit** X **et** Y **deux k-variétés. Alors,** X **et** Y **sont birationnelles si, et seulement si, il existe un ouvert** U **de** X **et un ouvert** V **de** Y **tel que** U **soit isomorphe à** V**.

1.6 Variétés projectives

Dans ce mémoire, un certain type de **k**-variétés nous intéressera, celui des **k-variétés projectives** qui sont bien des **k**-variétés selon la définition énoncée dans la première partie.

Avant toute chose, on rappelle quelques notations. Soit $B = \bigoplus_{d\geq 0} B_d$ un anneau gradué. On note $\mathrm{Proj}(B)$ l'ensemble des idéaux premiers homogènes de B qui ne contiennent pas $B_+ := \bigoplus_{d>0} B_d$. Les *ouverts principaux* de $\mathrm{Proj}(B)$ sont les $\mathrm{D}_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(B)\ ,\ f \notin \mathfrak{p}\}$, où f est un élément homogène de B. Les $\mathrm{D}_+(f)$, avec f de degré strictement positif, forment une base de la topologie correspondante. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier homogène, alors on note $B_{(\mathfrak{p})}$, l'ensemble des éléments homogènes de degré zéro dans le localisé de B par rapport aux éléments homogènes non dans $\mathfrak{p}$, c'est a dire, les éléments de la forme $\frac{a}{b}$, avec a,b homogènes de même degré et $b \notin \mathfrak{p}$. Si f est un élément homogène de B, alors on note $B_{(f)}$ le sous-anneau de B_f constitué des éléments homogènes de degré zéro, où l'on a gradué B_f par la formule $\deg\left(x/f^k\right) := \deg(x) - k\deg(f)$. Ainsi, $B_{(f)}$ est l'ensemble des a/f^N, avec a homogène de degré $N\deg(f)$.

On peut décrire les **k**-*variétés projectives* comme suit [$\mathbf{HAR}_2$, 1.24,1.25] : *une* ***k****-variété projective est un* ***k****-schéma de la forme* $\mathrm{Proj}\left(\boldsymbol{k}[x_0,\cdots,x_n]/\mathfrak{p}\right)$*, où* $\mathfrak{p}$ *est un idéal homogène premier et muni d'un faisceau* $\mathscr{O}$ *tel que* $\mathscr{O}_{\mathfrak{q}} \simeq \left(\boldsymbol{k}[x_0,\cdots,x_n]/\mathfrak{p}\right)_{(\mathfrak{q})}$ *et* $\mathscr{O}(\mathrm{D}_+(f)) \simeq \left(\boldsymbol{k}[x_0,\cdots,x_n]/\mathfrak{p}\right)_{(f)}$. Par ailleurs, l'espace projectif $\mathrm{Proj}\,(\mathbf{k}[x_0,\cdots,x_n])$, que l'on note $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, est recouvert par les ouverts affines $\mathrm{D}_+(x_i)$ et la section globale est isomorphe à $\mathbf{k}$, [$\mathbf{HAR}_2$, p.20].

Les **k**-variétés projectives ont l'avantage d'être **propres**. C'est à dire, que leur morphisme structural est *de type fini*, *séparé* et *universellement fermé*. Si on note X

la $\mathbf{k}$-variété projective, la dernière condition signifie que le morphisme structural est fermé et que pour tout $\mathbf{k}$-schéma Y, la projection $X \times_{\mathbf{k}} Y \longrightarrow Y$ est fermée.

On énonce un résultat important sur la propriété de projectivité des variétés qui reste invariante par changement de corps de base.

PROPOSITION 1.5. [**GÖR**, 14.55] — Soit X une $\mathbf{k}$-variété et $\mathbf{K}$ une extension de $\mathbf{k}$. Alors, $X_{\mathbf{K}}$ est une $\mathbf{K}$-variété projective si, et seulement si, X est une $\mathbf{k}$-variété projective.

2 THÉORÈME DE LANG-NISHIMURA

Le but de ce chapitre est de prouver le théorème de LANG-NISHIMURA, qui permettra de démontrer le théorème de CHÂTELET. Avant cela, on introduit quelques notions qui sont en jeu dans le théorème de LANG-NISHIMURA.

2.1 Complétion et théorème de structure de COHEN

On rappelle la définition d'un **anneau local complet** :

DÉFINITION 2.1 (Anneau local complet)**.** [**STA**, 10.159.1] — Soit $(A,\mathfrak{m})$ un anneau local. On dit que A est *complet* si le morphisme canonique :

$$A \longrightarrow \varprojlim_n A/\mathfrak{m}^n,$$

est un isomorphisme.

Pour un anneau local quelconque A on dit que $\varprojlim_n A/\mathfrak{m}^n$ est le complété de A et on le note $\widehat{A}$. À noter que le complété d'un anneau local n'est pas forcément complet. Par contre, si l'anneau est noethérien (ou plus précisément si son idéal maximal est de type fini) alors le complété est complet, [**STA**, 10.159].

Voici un résultat intéressant qui applique le lemme de NAKAYAMA et qui sera utilisé lors de la preuve du théorème de LANG-NISHIMURA :

PROPOSITION 2.2 (KRULL)**.** — Si A est un anneau local *noethérien*, alors le morphisme canonique, $A \longrightarrow \varprojlim_n A/\mathfrak{m}^n$ est une injection.

PREUVE : Explicitons, dans un premier temps la limite projective canonique du

système $\left(\left(A/\mathfrak{m}^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*},\left(\mu_{ij}\right)_{i\leq j\in\mathbb{N}^*}\right)$. Ainsi, on a [**WIK**$_1$, 2] :

$$\widehat{A}=\left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in\prod_{n\in\mathbb{N}^*}A/\mathfrak{m}^n\ ;\ \forall i\leq j\in\mathbb{N}^*\ ,\ x_i=\mu_{ij}(x_j)\right\}.$$

Par conséquent, on peut expliciter le morphisme canonique comme suit :

$$\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \widehat{A} \\ a & \longmapsto & (\pi_1(a),\cdots,\pi_n(a),\cdots), \end{array}$$

où π_n est la surjection canonique de A vers $A/\mathfrak{m}^n$. Ainsi, il est clair que Ker $\varphi=\bigcap_n\mathfrak{m}^n$. Il reste a montrer que cette intersection est nulle. Pour cela on applique le lemme de NAKAYAMA :

***Soit** A **un anneau commutatif,** M **un** A**-module de type fini et** I **un idéal de** A **tel que** $M\subset IM$**. Alors, il existe un élément** a **de** I **tel que** $(1+a)M=0$**.**

Comme A est noethérien, le A-module $\bigcap_n\mathfrak{m}^n$ est de type fini. Considérons l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Alors, $\bigcap_n\mathfrak{m}^n\subset\mathfrak{m}\bigcap_n\mathfrak{m}^n$. En effet, si $x\in\bigcap_n\mathfrak{m}^n$, alors pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathfrak{m}^N$, donc pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{N-1}$, d'où pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathfrak{m}\bigcap_{n=0}^{N-1}\mathfrak{m}^n$ car la suite $(\mathfrak{m}^n)$ est décroissante. Ainsi, on obtient bien $x\in\mathfrak{m}\bigcap_n\mathfrak{m}^n$ et donc l'inclusion. D'après le lemme de NAKAYAMA, il existe $a\in\mathfrak{m}$ tel que

$$(1+a)\bigcap_n\mathfrak{m}^n=0.$$

Comme $\mathfrak{m}$ est l'ensemble des éléments non inversibles de A, il est clair que $1+a$ est inversible. Par conséquent, on a bien :

$$\bigcap_n\mathfrak{m}^n=0.$$

On en conclut alors que A s'injecte dans $\widehat{A}$. □

Voici le théorème de structure de COHEN qui sera aussi utile pour prouver le théorème de LANG-NISHIMURA.

PROPOSITION 2.3 (Théoreme de structure de Cohen)**.** [**BOU**$_1$, VIII.§5.n°2.cor3] — Soit A une $\mathbf{k}$-algèbre locale, noethérienne et régulière de dimension de Krull égale à n dont le corps résiduel est $\mathbf{k}$. Alors, son complété $\widehat{A}$ est isomorphe à $\mathbf{k}[[X_1,\cdots,X_n]]$.

2.2 Preuve du théorème

Avant d'énoncer le théorème, montrons quelques lemmes. Voici le premier lemme qui donne une bijection entre les applications rationnelles de X vers Y et les $\kappa(X)$-points de Y.

LEMME 2.4. — Soit X et Y deux $\mathbf{k}$-variétés. Alors, on a la bijection suivante :

$$\{X \dashrightarrow Y\} \simeq Y(\kappa(X)).$$

PREUVE : Avant de commencer la preuve de ce lemme on a besoin du résultat suivant [**EGA**$^3_{\text{IV}}$, 8.14.2.2] :

Soit A ***une k-algèbre de dimension finie. Alors, pour tout système inductif filtrant*** (C_i) ***de k-algèbres, l'application canonique :***

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(A,C_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(A,\varinjlim C_i), \tag{2.1}$$

est une bijection.

Tout sous-schéma ouvert de X contient un sous-schéma ouvert affine. Cela signifie que le système projectif filtrant $(\mathrm{Spec}\,(A_i))$ de sous-schémas ouverts affines de X est cofinal dans le système de tous les sous-schémas ouverts. Par conséquent, les A_i forment un système inductif filtrant, [**EGA**$^3_{\text{IV}}$, 8.1.2.a]. Ainsi, on obtient les bijections suivantes :

$$
\begin{aligned}
\{X \dashrightarrow Y\} &\overset{1.1}{=} \varinjlim_U Y(U) \\
&\overset{\star}{\simeq} \varinjlim Y(A_i) \\
&= \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathrm{Spec}\,(A_i), Y) \\
&\simeq \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\Gamma(Y,\mathscr{O}_Y), A_i) \\
&\overset{2.1}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\Gamma(Y,\mathscr{O}_Y), \varinjlim A_i) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathrm{Spec}\left(\varinjlim A_i\right), Y) \\
&= Y(\varinjlim A_i) \\
&= Y(\varinjlim \Gamma(\mathrm{Spec}\,(A_i),\mathscr{O}_X)) \\
&\overset{\star}{\simeq} Y(\varinjlim_U \Gamma(U,\mathscr{O}_X)) \\
&= Y(\mathscr{O}_{X,\eta}) \\
&= Y(\kappa(X)).
\end{aligned}
$$

Les isomorphismes $\star$ se justifient par le fait que le système projectif filtrant $(\mathrm{Spec}\,(A_i))$ est cofinal dans le système de tous les sous-schémas ouverts et par l'application de [**BOU**$_2$, E III.66, Prop 8.]. □

On énonce un deuxième lemme. Celui-ci utilise le critère valuatif de proprété que l'on rappellera.

LEMME 2.5. — Soit Y une $\mathbf{k}$-variété projective, $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ une extension de corps et $\mathbf{K}((t))$ le corps des séries de Laurent formelles sur $\mathbf{K}$. Si Y possède un $\mathbf{K}((t))$-point, alors Y a un $\mathbf{K}$-point.

PREUVE : Comme Y est une $\mathbf{k}$-variété projective, alors on sait qu'elle est propre. Par ailleurs, $\mathbf{K}$ étant un corps, $\mathbf{K}[[t]]$ est un anneau de valuation discrète. Voici le critère valuatif de propreté, [**POO**, 3.2.12] :

Soit Y ***une k-variété. Alors,*** Y ***est propre si, et seulement si, pour tout k-schéma affine*** $\mathrm{Spec}\,(A)$***, où*** A ***est un anneau de valuation discrète, l'application canonique*** $Y(A) \longrightarrow Y(\mathrm{Frac}(A))$ ***est une bijection.***

D'après ce critère, on a la bijection $Y(\mathbf{K}[[t]]) \simeq Y(\mathbf{K}((t)))$. Par conséquent, si Y possède un $\mathbf{K}((t))$-point, Y a un $\mathbf{K}[[t]]$-point. Maintenant, considérons π la réduction modulo (t), $\mathbf{K}[[t]] \longrightarrow \mathbf{K}$. Si le morphisme de $\mathbf{k}$-algèbres $f : \Gamma(Y,\mathscr{O}_y) \longrightarrow \mathbf{K}[[t]]$ est un $\mathbf{K}[[t]]$-point, alors $\pi \circ f : \Gamma(Y,\mathscr{O}_Y) \longrightarrow \mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-point. D'où le résultat. □

Pour finir, on énonce et on prouve le théorème de LANG-NISHIMURA.

THÉORÈME 2.6 (LANG, NISHIMURA)**.** — Soit $X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle entre deux $\mathbf{k}$-variétés projectives. Si X possède un $\mathbf{k}$-point régulier, alors Y a aussi un $\mathbf{k}$-point.

PREUVE : Soit $x \in X(\mathbf{k})$, un point rationnel régulier, et posons $n := \dim X$. Par hypothèse, $\mathscr{O}_{X,x}$ est régulier et, d'après Corollaire 1.2, $\kappa(x) \simeq \mathbf{k}$. Ainsi $\dim \mathscr{O}_{X,x} = n$, et, d'après le théorème de structure de COHEN, Proposition 2.3, $\widehat{\mathscr{O}}_{X,x} \simeq \mathbf{k}[[t_1, \cdots, t_n]]$. Or, comme $\mathscr{O}_{X,x}$ est neothérien, d'après Proposition 2.2, $\mathscr{O}_{X,x}$ s'injecte dans $\widehat{\mathscr{O}}_{X,x}$ et $\mathbf{k}[[t_1, \cdots, t_n]]$ s'injecte dans son corps des fractions $F := \mathbf{k}((t_1)) \cdots ((t_n))$. Il s'ensuit que $\mathscr{O}_{X,x}$ s'injecte dans F, d'où $\mathrm{Frac}(\mathscr{O}_{X,x}) = \kappa(X)$ se plonge dans F. D'après Lemme 2.4, l'application rationnelle donne un élément de $Y(\kappa(X))$ et donc un élément de $Y(F)$ par l'injection de $\kappa(X)$ dans F. Maintenant, d'après Lemme 2.5, comme $Y(F) = Y(\mathbf{k}((t_1)) \cdots ((t_n)))$ est non vide, $Y(\mathbf{k}((t_1)) \cdots ((t_{n-1})))$ est non vide. On applique Lemme 2.5 n fois et on obtient le résultat voulu : $Y(\mathbf{k})$ est non vide. □

Ce résultat reste vrai pour les $\mathbf{k}$-variétés propres. Il s'ensuit un corollaire immédiat.

COROLLAIRE 2.7. — Soit X et Y deux $\mathbf{k}$-variétés régulières, projectives et birationnelles. Alors, $X(\mathbf{k}) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $Y(\mathbf{k}) \neq \emptyset$.

3 FORMES ET COHOMOLOGIE

Le but de ce chapitre est de classifier les formes d'une **k**-variété projective grâce à la cohomologie galoisienne.

3.1 Cohomologie des groupes non-abélienne

3.1.1 Définitions de $\mathbf{H}^0$ et $\mathbf{H}^1$

Dans cette sous-section, on va définir les deux premiers **ensembles de cohomologie** que sont $\mathbf{H}^0$ et $\mathbf{H}^1$. Tous les groupes introduits ne sont pas nécessairement abéliens. Soit G un **groupe topologique profini**, c'est à dire que G est la limite projecive de groupes finis discrets. Soit A un groupe muni d'une structure de G-**groupe** discret. C'est à dire que l'on muni A de la topologie discrète et que G agit sur A continûment et de manière compatible avec la structure de groupe de A. Si G est fini alors il est discret. Ainsi, on ne se préoccupe plus des considérations topologiques car tout est continu.

DÉFINITION 3.1 ($\mathbf{H}^0$)**.** — On définit $\mathbf{H}^0(G,A)$ comme suit :

$$\mathbf{H}^0(G,A) = A^G = \left\{a \in A \mid \forall s \in G,\ {}^s a = a\right\}.$$

On définit maintenant l'ensemble $\mathbf{H}^1$. pour cela, on introduit, d'abord, l'ensemble des **cocycles** $\mathbf{Z}^1(G,A)$ comme étant l'ensemble des applications continues $s \mapsto a_s$ de G vers A telles que :

$$\forall s,t \in G,\ a_{st} = a_s\, {}^s a_t.$$

On définit sur $\mathbf{Z}^1(G,A)$ une relation d'équivalence $\sim$. Deux *cocycles* a et a' sont dit **cohomologues** $\left(a' \sim a\right)$ si :

$$\exists b \in A,\ \forall s \in G,\ a'_s = b^{-1} a_s\ {}^s b.$$

Remarque. Même si un cocycle n'est pas un morphisme de groupes, c'est un morphisme d'ensembles pointés car un cocycle envoie l'unité sur l'unité. En effet, si $a : G \longrightarrow A$ est un cocycle, alors $a_{1_G} = a_{1_G 1_G} = a_{1_G}\ {}^{1_G} a_{1_G} = a_{1_G} a_{1_G}$. D'où $a_{1_G} = 1_A$.

DÉFINITION 3.2 ($\mathbf{H}^1$). — On définit $\mathbf{H}^1(G,A)$ comme suit :

$$\mathbf{H}^1(G,A) = \mathbf{Z}^1(G,A) \Big/ \sim .$$

On appelle cet ensemble, le *premier ensemble de cohomologie de G dans A*.

Contrairement à $\mathbf{H}^0(G,A)$ qui est un groupe, $\mathbf{H}^1(G,A)$ n'est pas généralement un groupe car on travaille dans le cas non-commutatif.

Le premier ensemble de cohomologie possède un élément distingué appelé **élément neutre** qui est la classe du cocycle unité $s \mapsto 1_A$. On le note $\mathbb{1}_A$. Ainsi, $(\mathbf{H}^1(G,A), \mathbb{1}_A)$ est alors un ensemble pointé par rapport à son élément neutre.

3.1.2 Suites exactes

Soit A,B,C trois G-groupes munis de la topologie discrète. Soit $\psi : A \longrightarrow B$ et $\varphi : B \longrightarrow C$ deux G-morphismes de G-groupes topologiques tels que la suite :

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\varphi} C \longrightarrow 1,$$

est exacte. On va construire une suite exacte longue induite par celle ci-dessus. Mais avant cela, on prouve deux lemmes qui seront utiles pour cette construction.

LEMME 3.3. — Avec les hypothèse ci-dessus, pour tout $b,b' \in B$, $\varphi(b') = \varphi(b)$ si, et seulement si, il existe $a \in A$ tel que $b' = b\psi(a)$.

PREUVE : Commençons par l'implication directe. Soit b,b' deux éléments de B tels que $\varphi(b') = \varphi(b)$. Alors, on a $\varphi(b')\varphi(b)^{-1} = 1_C$, donc $\varphi(b'b^{-1}) = 1_C$. Par conséquent, $b'b^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$. Par hypothèse, la suite étant exacte, $b'b^{-1} \in \operatorname{Im}\psi$. Ainsi, il

existe bien un $a \in A$, tel que $b'b^{-1} = \psi(a)$. On trouve bien le résultat escompté $b' = b\psi(a)$. L'implication réciproque est évidente car l'exactitude de la suite nous donne $\varphi \circ \psi = 1_C$. □

Voici un deuxième lemme qui caractérise les actions continues.

LEMME 3.4. — Soit A un G-groupe discret et G un groupe topologique. Alors, l'action de G sur A est continue si, et seulement si, pour tout $a \in A$, son stabilisateur S_a est un sous-groupe ouvert de G.

PREUVE : On commence par le sens direct. Supposons que l'action de G sur A est continue. Soit a un élément de A. On définit l'application $i : G \longrightarrow G \times A$, par $i(s) = (s,a)$. Si l'on note $\phi : G \times A \longrightarrow A$ l'action de G sur A, on trouve $S_a = (\phi \circ i)^{-1}(\{a\})$. Le stabilisateur S_a est bien ouvert car ϕ est continue par hypothèse et i est continue de manière évidente.

Prouvons l'implication réciproque. Supposons que pour tout $a \in A$, le stabilisateur S_a est un sous-groupe ouvert de G. Soit $a \in A$. Prenons $(s,b) \in \phi^{-1}(a)$. Alors, $sS_b \times \{b\}$ est un ouvert du produit qui est envoyé sur ${}^s b = a$. En effet, si $(st,b) \in sS_b \times \{b\}$, alors $\phi(st,x) = {}^{st}b = {}^s({}^t b) = {}^s b = a$. Ceci prouve bien que $\phi^{-1}(a)$ est ouvert et donc que ϕ est continue. □

PROPOSITION 3.5. — Avec les hypothèses de cette sous-section, il existe une suite exacte longue d'ensembles pointés :

$$1 \longrightarrow \mathbf{H}^0(G,A) \xrightarrow{\psi_0} \mathbf{H}^0(G,B) \xrightarrow{\varphi_0} \mathbf{H}^0(G,C) \xrightarrow{\delta} \mathbf{H}^1(G,A) \xrightarrow{\psi_1} \mathbf{H}^1(G,B) \xrightarrow{\varphi_1} \mathbf{H}^1(G,C).$$

PREUVE : Tout d'abord, on définit les applications ψ_0 et φ_0 et on montre qu'elles sont bien définies. Soit $a \in \mathbf{H}^0(G,A)$, alors $a \in A$ et on pose $\psi_0(a) = \psi(a)$. Montrons alors que $\psi_0(a) \in \mathbf{H}^0(G,B)$. Soit $s \in G$, ${}^s\psi_0(a) = {}^s\psi(a) = \psi({}^s a) = \psi(a) = \psi_0(a)$. Donc, $\psi_0(a) \in \mathbf{H}^0(G,B)$. On fait le même raisonnement pour φ_0.

Maintenant, on définit les applications ψ_1 et φ_1 et on montre qu'elles sont bien définies. Soit $\alpha \in \mathbf{Z}^1(G,A)$ un cocycle. Alors, posons, $\psi_1([\alpha]) = [\psi \circ \alpha]$. Montrons que ψ_1 est bien définie. Tout d'abord, comme ψ est continue, $\psi \circ a$ est bien continue. Ensuite, si g et s sont deux éléments du groupe G, alors $\psi \circ \alpha(st) =$

$\psi(\alpha_{st}) = \psi(\alpha_s\ {}^s\alpha_t) = \psi(\alpha_s)\psi({}^s\alpha_t) = \psi(\alpha_s)\ {}^s\psi(\alpha_t) = \psi\circ\alpha(s)\ {}^s(\psi\circ\alpha(t))$. Par conséquent, $\psi\circ c$ est bien dans $\mathbf{Z}^1(G,B)$. À présent, on montre que cette application ne dépend pas des classes de cohomologie. Soit α,α' deux cocycles de G dans A cohomologues. Ainsi, il existe un $a\in A$ tel que pour tout $s\in G$, on a $\alpha'_s = a^{-1}\alpha_s\ {}^s a$. Par conséquent, pour tout $s\in G$, $\psi(\alpha'_s) = \psi(a)^{-1}\psi(\alpha_s)\ {}^s\psi(a)$, ce qui montre que $[\psi\circ\alpha] = [\psi\circ\alpha']$. D'où l'application ψ_1 est bien définie. On raisonne de la même manière pour montrer que φ_1 est bien définie.

Pour finir, définissons l'application de connexion δ qui fait le lien entre le 0ème et le premier ensemble de cohomologie. Considérons $c\in\mathbf{H}^0(G,C) := C^G$. Par hypothèse, φ est surjective, donc il existe un b dans B tel que $\varphi(b) = c$. On a alors l'égalité suivante, pour tout $s\in G$: $\varphi({}^s b) = {}^s\varphi(b) = {}^s c = c = \varphi(b)$. Ainsi, d'après Lemme 3.3, il existe $\alpha_s\in A$ tel que ${}^s b = b\psi(\alpha_s)$. Ce α_s est unique grâce à l'injectivité de ψ. En effet, si α'_s est un autre élément de A tel que ${}^s b = b\psi(\alpha'_s)$, alors $\psi(\alpha_s) = \psi(\alpha'_s)$, d'où, $\alpha_s = \alpha'_s$. On aimerait poser $\delta(c) = [\alpha]$. Pour cela, il faut montrer que α est un cocycle et que sa définition ne dépend pas du choix de b. Si $b'\in B$ est un autre antécédent de c par φ, alors on obtient une autre application $\alpha' : G\longrightarrow A$. Il vient, pour tout $s\in G$:

$$\psi(\alpha'_s) = b'^{-1}\ {}^s b' = (b\psi(a))^{-1}\ {}^s(b\psi(a)) = \psi(a)^{-1}\psi(\alpha_s)\ {}^s\psi(a) = \psi(a^{-1}\alpha_s\ {}^s a),$$

où a est un élément de A donné par Lemme 3.3. Ceci implique que, si α' et α sont des cocycles alors ils sont cohomologues grâce à l'injectivité de ψ. Montrons que α est bien un cocycle. Pour cela montrons d'abord la continuité de α. On fait le calcul direct :

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(1) &= \{s\in G \mid \alpha_s = 1\}\\ &= \{s\in G \mid \psi(\alpha_s) = 1\}\\ &= \{s\in G \mid b^{-1}\ {}^s b = 1\}\\ &= S_b.\end{aligned}$$

Donc $\alpha^{-1}(1)$ est bien ouvert car l'action de G sur B est continue et on applique Lemme 3.4. Ainsi, α est continu. Maintenant, soit s,t deux éléments de G, alors $\psi(\alpha_{st}) = b^{-1}\ {}^{st}b = b^{-1}\ {}^s b\ {}^s b^{-1}\ {}^{st}b = b^{-1}\ {}^s b\ {}^s(b^{-1}\ {}^t b) = \alpha_s\ {}^s\alpha_t$. Ceci finit de prouver que α est bien un cocycle, et δ est bien définie. On notera, pour la suite α^c pour $\delta(c)$.

Toutes ces applications sont des morphismes d'ensembles pointés. En effet, $\delta(1_C) = [\alpha^{1_C}]$. Et, pour tout $s \in G$, $\psi(\alpha_s^{1_C}) = 1_B^{-1}\ {}^s 1_B = 1_B$. Comme ψ est injective, on a bien $[\alpha^{1_C}] = \mathbb{1}_A$. Le fait que les autres applications sont des morphismes d'ensembles pointés est évident.

Après avoir défini toutes ces applications, montrons qu'elles forment une suite exacte.

Commençons par montrer que ψ_0 est injective. On a $\operatorname{Ker}\psi_0 = \{a \in A^G \mid \psi_0(a) = 1\} = \operatorname{Ker}\psi \cap A^G = \{1\}$. Donc ψ_0 est bien injective.

Montrons que $\operatorname{Im}\psi_0 = \operatorname{Ker}\varphi_0$. On a $\operatorname{Im}\psi_0 = \operatorname{Im}\psi \cap B^G = \operatorname{Ker}\varphi \cap B^G = \operatorname{Ker}\varphi_0$.

Montrons que $\operatorname{Im}\varphi_0 = \operatorname{Ker}\delta$. On commence par l'inclusion directe $\subset$. Soit $c \in \operatorname{Im}\varphi_0 \subset C^G$. Considérons alors $b \in B^G$ un antécédent de c par φ_0. Ainsi, $\varphi_0(b) = c$. Par conséquent, pour tout $s \in G$, $\psi(\alpha_s^c) = b^{-1}\ {}^s b = b^{-1}b = 1$. Comme ψ est injective, $\alpha_s^c = 1_A$ pour tout $s \in G$, donc $\delta(c) = \mathbb{1}_A$. D'où, $c \in \operatorname{Ker}\delta$.
Penchons nous sur l'inclusion réciproque. Soit $c \in \operatorname{Ker}\delta$ et $b \in \varphi^{-1}(c)$. Un tel b existe car φ est surjective par hypothèse. Montrons que c est dans $\operatorname{Im}\varphi_0$. Comme c est dans le noyau de δ alors $[\alpha^c] = \mathbb{1}_A$ dans $\mathbf{H}^1(G,A)$. Ainsi, il existe $a \in A$ tel que, pour tout $s \in G$, $\alpha_s^c = a^{-1}\ {}^s a$. Donc, en appliquant ψ, on obtient $b^{-1}\ {}^s b = \psi(a)^{-1}\ {}^s(\psi(a))$. En conséquence, $\psi(a)b^{-1} = {}^s(\psi(a))\ {}^s b^{-1} = {}^s(\psi(a)b^{-1})$. Il vient alors, $\psi(a)b^{-1}$ est un point fixe dans B. D'où $c^{-1} = \varphi(b^{-1}) = \varphi(\psi(a)b^{-1}) \in \operatorname{Im}\varphi_0$. Ce qui implique que $c \in \operatorname{Im}\varphi_0$. On a bien montré le résultat voulu.

Montrons à présent que $\operatorname{Im}\delta = \operatorname{Ker}\psi_1$. L'inclusion directe $\subset$ est assez immédiate. En effet, soit $[\alpha] \in \operatorname{Im}\delta$. Considérons $c \in C^G$, un antécédent de $[\alpha]$ par δ. Alors, $\alpha = \alpha^c$. Par définiton, $\psi_1([\alpha^c]) = [\psi \circ \alpha^c]$. Par conséquent, si $b \in \varphi^{-1}(c)$, on a bien, pour tout $s \in G$, $\psi \circ \alpha_s^c = b^{-1}\ {}^s b = b^{-1}1_B\ {}^s b$. Ceci prouve exactement que $[\psi \circ \alpha^c] = \mathbb{1}_B$.
Pour l'inclusion réciproque. Soit $[\alpha] \in \operatorname{Ker}\psi_1$. Alors, le cocycle $\psi \circ \alpha$ est cohomologue au cocycle unité. C'est à dire qu'il existe un $b \in B$ tel que pour tout $s \in G$, $\psi \circ \alpha_s = b^{-1}\ {}^s b$. Or, $b^{-1}\ {}^s b = \psi \circ \alpha_s^{\varphi(b)}$. Par l'injectivité de ψ on obtient bien $\alpha_s = \alpha_s^{\varphi(b)}$ pour tout $s \in G$. On sait que $\alpha^{\varphi(b)}$ est dans l'image de δ. D'où, $\alpha \in \operatorname{Im}\delta$.

Pour finir, montrons que $\operatorname{Im}\psi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_1$. On commence par l'inclusion directe. Soit $[\beta] \in \operatorname{Im}\psi_1$. Alors, il existe α un cocycle de G dans A tel que $[\beta] = [\psi \circ \alpha]$. Donc, il existe $b \in B$ tel que pour tout $s \in G$, $\beta_s = b^{-1}\psi(\alpha_s)\ {}^s b$. Ainsi, il est clair que, pour

tout $s \in G$, $\varphi(\beta_s) = \varphi(b^{-1}\psi(\alpha_s)\ {}^s b) = \varphi(b)^{-1}\varphi(\psi(\alpha_s))\ {}^s\varphi(b) = \varphi(b)^{-1}\ {}^s\varphi(b)$. Par conséquent, $\varphi_1([\beta]) = [\varphi \circ \beta] = \mathbb{1}_C$. Ce qui prouve la première inclusion.
Montrons l'inclusion réciproque. Soit $[\beta] \in \operatorname{Ker} \varphi_1$. Alors, $[\varphi \circ \beta] = \mathbb{1}_C$, donc, il existe $c \in C$ tel que pour tout $s \in G$, $\varphi(\beta_s) = c^{-1}\ {}^s c$. Comme φ est surjective, il existe $b \in B$ tel que $\varphi(b) = c$. Ainsi, pour tout $s \in G$, $\varphi(\beta_s) = \varphi(b)^{-1}\ {}^s(\varphi(b)) = \varphi(b^{-1}\ {}^s b)$. D'après Lemme 3.3, pour tout $s \in G$, il existe $\alpha_s \in A$ tel que $\beta_s = b^{-1}\ {}^s b\psi(\alpha_s)$. Alors, pour tout $s \in G$, $\psi(\alpha_s) = {}^s b^{-1} b\beta_s$. On écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \beta_s &= b^{-1}\ {}^s b\psi(\alpha_s) \\ &= b^{-1}\ {}^s b\psi(\alpha_s)\ {}^s b^{-1}\ {}^s b \\ &= b^{-1}\psi(\alpha'_s)\ {}^s b, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\psi(A)$ est normal dans B. Par conséquent, si α' est bien un cocycle, alors $[\beta]$ appartient bien à $\operatorname{Im} \psi_1$. Il reste alors à montrer que α' est un cocycle. La continuité est évidente. Calculons α'_{st} pour tout $s,t \in G$.

$$\begin{aligned} \psi(\alpha'_{st}) &= b\beta_{st}\ {}^{st}b^{-1} \\ &= b\beta_s\ {}^s\beta_t\ {}^{st}b^{-1} \\ &= b\beta_s\ {}^s b^{-1}\ {}^s b\ {}^s(\beta_s\ {}^t b^{-1}) \\ &= b\beta_s\ {}^s b^{-1}\ {}^s(b\beta_t\ {}^t b^{-1}) \\ &= \psi(\alpha'_s)\ {}^s(\psi(\alpha'_t)) \\ &= \psi(\alpha'_s\ {}^s\alpha'_t). \end{aligned}$$

L'injectivité de ψ permet de conclure. □

3.2 Topologie de Krull

Soit **k** un corps et **K**/**k** une extension galoisienne, c'est à dire, algébrique, normale et séparable. Notons $\mathfrak{G}$ son groupe de Galois. Tout d'abord, on définit une topologie sur ce groupe de Galois que l'on appelle **topologie de Krull**. Pour cela, on sait, par un résultat de topologie des groupes, qu'il suffit de définir une base de voisinages de l'unité.

DÉFINITION 3.6 (Topologie de Krull)**.** — Les sous-groupes $\mathrm{Gal}(\mathbf{K}/\mathbf{F})$ de $\mathfrak{G}$ où **F** parcours les extensions galoisiennes finies intermédiaires de **K**/**k** forment une

base de voisinages de l'unité. On appelle la topologie sur $\mathfrak{G}$ induite par cette base compatible avec la structure de groupe, la *topologie de Krull*.

D'après [**BOR**, *p.*113], un groupe de Galois muni de la topologie de Krull est *compact* et *totalement discontinu*, c'est à dire que la composante connexe de tout point x est le singleton $\{x\}$. En fait, tout groupe de Galois est un groupe profini.

PROPOSITION 3.7. [**GUG**, 1.4.7] — Notons $\mathscr{F}$ l'ensemble des extensions galoisiennes intermédiaires finies de $\mathbf{K}/\mathbf{k}$. Si l'on muni $\mathfrak{G}$ de la topologie de Krull, alors on a un isomorphisme de groupes topologiques :

$$\mathfrak{G} \simeq \varprojlim_{\mathscr{F}} \mathrm{Gal}\,(\mathbf{F}/\mathbf{k}).$$

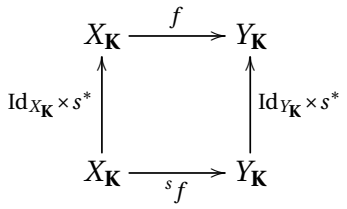
Pour aller plus loin, on a les équivalences suivantes :

PROPOSITION 3.8. — Un groupe topologique est profini, si, et seulement si, il est compact et totalement discontinu, si, et seulement si, il est un groupe de Galois.

Le fait qu'un groupe profini est un groupe de Galois est justifié par [**GUG**, 1.4.11].

3.3 Formes

On note $\mathrm{Var}_{\bullet}$ la catégorie des $\bullet$-variétés projectives. On note $\mathfrak{F} : \mathrm{Var}_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathrm{Var}_{\mathbf{K}}$ le foncteur covariant *extension du corps de base* restreint au variétés projectives : si X est un objet de $\mathrm{Var}_{\mathbf{k}}$ alors on pose $\mathfrak{F}(X) = X_{\mathbf{K}} := X \times_{\mathbf{k}} \mathbf{K}$. Ce foncteur est bien définie car on sait que si X est projective alors $X_{\mathbf{K}}$ l'est aussi. Pour les morphismes si $f : X \longrightarrow Y$ est un $\mathbf{k}$-morphisme alors on pose $\mathfrak{F}(f) = f \times \mathrm{Id}_{\mathrm{Spec}(\mathbf{K})}$. On définit maintenant une action à gauche de $\mathfrak{G}$ sur $\mathrm{Iso}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}}, Y_{\mathbf{K}})$, où X et Y sont deux objets de $\mathrm{Var}_{\mathbf{k}}$. Soit $s \in \mathfrak{G}$, et $f \in \mathrm{Iso}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}}, Y_{\mathbf{K}})$. On définit ${}^s f$ le $\mathbf{K}$-isomorphisme qui rend le diagramme suivant commuatif :



où s^* est le $\mathbf{k}$-automorphisme de $\mathrm{Spec}(\mathbf{K})$ induit par s. Ainsi, $\mathrm{Id}_{X_{\mathbf{K}}} \times s^*$ n'est pas, en général, un $\mathbf{K}$-automorphisme mais seulement un $\mathbf{k}$-automorphisme.

On a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.9. [**BRU**, 3.2] — Sous toutes les hypothèses ci-dessus, on a les assertions suivantes :

1. Soit X, Y et Z trois $\mathbf{k}$-variétés projectives, et $f : X_{\mathbf{K}} \longrightarrow Y_{\mathbf{K}}$, $g : Y_{\mathbf{K}} \longrightarrow Z_{\mathbf{K}}$ deux $\mathbf{K}$-isomorphismes. Alors, pour tout $s \in \mathfrak{G}$:

$$ {}^s\left(g \circ f\right) = \left({}^s g\right) \circ \left({}^s f\right). $$

2. Pour toutes $\mathbf{k}$-variétés X et Y, on a :

$$ \mathfrak{F}\left(\mathrm{Iso}_{\mathbf{k}}(X,Y)\right) = \mathrm{Iso}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}}, Y_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{G}}. $$

Le fait que la variété est projective n'est pas necessaire pour la validité de ce résultat.

Maintenant définissons ce que sont les **formes** d'une $\mathbf{k}$-variété.

DÉFINITION 3.10 (Forme)**.** — Soit X une $\mathbf{k}$-variété projective, on appelle $\mathbf{K}/\mathbf{k}$-*forme* de X un élément de l'ensemble suivant :

$$ \mathrm{E}(\mathbf{K}/\mathbf{k}, X) := \left\{ Y \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Var}_{\mathbf{k}}) \mid X_{\mathbf{K}} \simeq Y_{\mathbf{K}} \right\} \Big/ {}_{\mathbf{k}-\text{isomorphisme}}. $$

On verra $\mathrm{E}(\mathbf{K}/\mathbf{k}, X)$ comme un ensemble pointé dont l'élément distingué est la classe de X.

On peut aussi définir les formes pour des $\mathbf{k}$-variétés quelconques ou même

plus généralement à d'autres catégories avec un foncteur vérifiant les deux conditions de Proposition 3.9, comme les **k**-variétés pointées.

Dans la suite, on va prouver que $\mathrm{E}(\mathbf{K}/\mathbf{k},X)$ est isomorphe à $\mathbf{H}^1(\mathfrak{G},\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}}))$. Mais avant tout, montrons que le groupe de Galois $\mathfrak{G}$ de l'extension $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ agit continuement sur $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}})$, pour justifier l'existence de ce premier ensemble de cohomologie. Pour cela, voici un résultat de topologie des groupes qui nous servira aussi pour le chapitre suivant.

LEMME 3.11. — Soit G un groupe topologique. Si H est un sous-groupe de G contenant un sous-ensemble ouvert $U \neq \emptyset$, alors H est un ouvert.

PREUVE : Tout d'abord, on remarque que $H = \bigcup_{h\in H} hU$. En effet, montrons l'inclusion directe. Soit $s \in H$ et montrons qu'il existe $h \in H$ tel que $s \in hU$. Considérons t un élément de U (U étant non vide). Alors, $t^{-1}U$ contient l'élément neutre. Par conséquent, posons $h = st^{-1} \in H$. Alors, $hU = st^{-1}U$ contient s. D'où l'existence d'un $h = st^{-1} \in H$ tel que $s \in hU$. Ainsi, on a bien $H \subset \bigcup_{h\in H} hU$.

Pour l'inclusion réciproque, soit $s \in \bigcup_{h\in H} hU$. Alors, il existe $h \in H$ tel que $s \in hU \subset H$.

On vient de montrer l'égalité $H = \bigcup_{h\in H} hU$. Comme les hU sont ouverts (car les translations sont des homéomorphismes) H est bien ouvert. □

Montrons que ses stabilisateurs sont ouverts. Soit $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}})$, alors f est la donnée d'un nombre fini de polynômes homogènes et donc d'un nombre fini de coefficients dans $\mathbf{K}$. Si on note $\mathscr{P}$, l'ensemble de ces coefficients, alors $\mathbf{k}(\mathscr{P})$ est une extension finie de $\mathbf{k}$ car l'extension est algébrique et contenant $\mathscr{P}$. Par conséquent, il est clair que le stabilisateur S_f contient $\mathrm{Gal}(\mathbf{K}/\mathbf{k}(\mathscr{P}))$ qui est ouvert par définition de la topologie de Krull. Ainsi, d'après Lemme 3.11, S_f est ouvert. Par conséquent, d'après Lemme 3.4, l'action est bien continue. Donc on peut considérer le premier ensemble de cohomologie $\mathbf{H}^1(\mathfrak{G},\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}}))$.

PROPOSITION 3.12. — Soit X une **k**-variété projective et soit Y une $\mathbf{K}/\mathbf{k}$-forme de X, soit $f : Y_{\mathbf{K}} \longrightarrow X_{\mathbf{K}}$ un **K**-isomorphisme. On définit l'application suivante :

$$\tau_Y : \begin{array}{ccc} \mathfrak{G} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}}) \\ s & \longmapsto & f \circ {}^s\left(f^{-1}\right) \end{array}.$$

Alors, $\tau_Y \in \mathbf{Z}^1(\mathfrak{G},\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}}))$ et l'application :

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathrm{E}(\mathbf{K}/\mathbf{k},X) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(\mathfrak{G},\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}})) \\ [Y] & \longmapsto & [\tau_Y] \end{array},$$

est injective. De plus, γ est un morphisme d'ensembles pointés.

PREUVE : Avant toute chose, on prouve que γ est bien défini. Pour cela, on montre que $\tau := \tau_Y$ est un cocycle. Soit s et t deux éléments de $\mathfrak{G}$.

$$\begin{aligned} \tau(st) &= f \circ {}^{st}\left(f^{-1}\right) \\ &= f \circ {}^{s}\mathrm{Id}_{Y_{\mathbf{K}}} \circ {}^{st}\left(f^{-1}\right) \\ &= f \circ {}^{s}\left(f^{-1} \circ f\right) \circ {}^{st}\left(f^{-1}\right) \\ &= f \circ {}^{s}\left(f^{-1}\right) \circ {}^{s}f \circ {}^{s}\left({}^{t}\left(f^{-1}\right)\right) \\ &= \left(f \circ {}^{s}\left(f^{-1}\right)\right) \circ \left({}^{s}\left(f \circ {}^{t}\left(f^{-1}\right)\right)\right) \\ &= \tau(s) \circ {}^{s}\tau(t). \end{aligned}$$

Ainsi, τ est bien un cocycle.
À présent, on montre que la classe de τ ne dépend pas du choix de f. Considérons un autre $\mathbf{K}$-isomorphisme $f' : Y_{\mathbf{K}} \longrightarrow X_{\mathbf{K}}$. Ainsi, on obtient l'application :

$$\tau' : \begin{array}{ccc} \mathfrak{G} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}}) \\ s & \longmapsto & f' \circ {}^{s}\left(f'^{-1}\right) \end{array}.$$

Montrons que τ et τ' sont cohomologues. Soit $s \in \mathfrak{G}$:

$$\begin{aligned} \tau'(s) &= f' \circ {}^{s}\left(f'^{-1}\right) \\ &= \left(f' \circ f^{-1} \circ f\right) \circ {}^{s}\left(\left(f' \circ f^{-1} \circ f\right)^{-1}\right) \\ &= \left(f' \circ f^{-1}\right) \circ f \circ {}^{s}\left(f^{-1} \circ f \circ f'^{-1}\right) \\ &= \left(f \circ f'^{-1}\right)^{-1} \circ \left(f \circ {}^{s}f^{-1}\right) \circ {}^{s}\left(f \circ f'^{-1}\right). \end{aligned}$$

Posons $h = f \circ f'^{-1}$. L'application h est bien un élément de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}})$ et est indépendante de s. On a alors :

$$\tau'(s) = h^{-1} \circ \tau(s) \circ {}^{s}h.$$

Ceci prouve bien que τ' et τ sont bien cohomologues et donc que la classe de τ ne dépend pas de f.
Pour finir, il reste à prouver que $[\tau_Y]$ ne dépend que de la classe de Y. Pour cela, on considère une $\mathbf{k}$-variété Y', $\mathbf{k}$-isomorphe à Y. Par conséquent, il existe un $\mathbf{k}$-isomorphisme $\alpha : Y' \longrightarrow Y$. Ainsi, $\mathfrak{F}(\alpha) : Y'_{\mathbf{K}} \longrightarrow Y_{\mathbf{K}}$ est un $\mathbf{K}$-isomorphisme. Il vient alors un $\mathbf{K}$-isomorphisme de $Y'_{\mathbf{K}}$ vers $X_{\mathbf{K}}$ avec $f \circ \mathfrak{F}(\alpha)$. Avec ce $\mathbf{K}$-isomorphisme, on obtient l'application :

$$\tau_{Y'} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{G} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}}) \\ s & \longmapsto & \left(f \circ \mathfrak{F}(\alpha)\right) \circ {}^{s}\left(\left(f \circ \mathfrak{F}(\alpha)\right)^{-1}\right) \end{array}.$$

Soit $s \in \mathfrak{G}$, on a :

$$\tau_{Y'}(s) = f \circ \mathfrak{F}(\alpha) \circ {}^{s}\left(\mathfrak{F}(\alpha)^{-1}\right) \circ {}^{s}\left(f^{-1}\right).$$

Or, d'après la condition 2. de Proposition 3.9, ${}^{s}\left(\mathfrak{F}(\alpha)^{-1}\right) = \mathfrak{F}(\alpha)^{-1}$. D'où, $\tau_{Y'} = \tau_Y$. En conclusion, on a bien montré que γ est bien défini.

Montrons que γ est un morphisme d'ensembles pointés. Prenons $f = \mathrm{Id}_{X_{\mathbf{K}}}$, alors f est bien un $\mathbf{K}$-isomorphisme. Ainsi, pour tout $s \in \mathfrak{G}$, $f \circ {}^{s}\left(f^{-1}\right)$ est égal à l'identité de $X_{\mathbf{K}}$. En somme, on obtient bien $[\tau_X] = \mathbb{1}_{\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}})}$, d'où, $\gamma([X]) = \mathbb{1}_{\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}})}$. Ceci prouve bien que γ est un morphisme d'ensembles pointés.

Enfin, prouvons que γ est injectif. Soit $[Y]$ et $[Z]$ deux $\mathbf{K}/\mathbf{k}$-formes de X telles que $\gamma([Y]) = \gamma([Z])$. Par définition $Y_{\mathbf{K}}$ et $Z_{\mathbf{K}}$ sont $\mathbf{K}$-isomorphes. Notons $q : Z_{\mathbf{K}} \longrightarrow Y_{\mathbf{K}}$ un $\mathbf{K}$-isomorphisme. Soit $f : Y_{\mathbf{K}} \longrightarrow X_{\mathbf{K}}$ un $\mathbf{K}$-isomorphisme. Ainsi, $\gamma([Y])$ est représenté par τ_Y, avec pour tout $s \in \mathfrak{G}$, $\tau_Y = f \circ {}^{s}\left(f^{-1}\right)$. Ainsi, on obtient un autre $\mathbf{K}$-isomorphisme de $Z_{\mathbf{K}}$ vers $X_{\mathbf{K}}$ avec $f \circ q$. Par conséquent, $\gamma([Z])$ est représenté par τ_Z avec, pour tout $s \in \mathfrak{G}$, $\tau_Z(s) = \left(f \circ q\right) \circ {}^{s}\left(\left(f \circ q\right)^{-1}\right)$.
Par ailleurs, l'hypothèse $\gamma([Y]) = \gamma([Z])$ implique que τ_Y et τ_Z sont cohomologues. C'est à dire, qu'il existe $b \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}})$, tel que pour tout $s \in \mathfrak{G}$:

$$\tau_Z(s) = b^{-1} \circ \tau_Y(s) \circ {}^{s}b.$$

Ainsi,

$$(f\circ q)\circ {}^{s}\left((f\circ q)^{-1}\right) = b^{-1}\circ f\circ {}^{s}\left(f^{-1}\right)\circ {}^{s}b.$$

Donc,

$$(f\circ q)\circ {}^{s}\left(q^{-1}\right)\circ {}^{s}\left(f^{-1}\right) = b^{-1}\circ f\circ {}^{s}\left(f^{-1}\right)\circ {}^{s}b.$$

D'où,

$${}^{s}\left(q^{-1}\right)\circ {}^{s}\left(f^{-1}\right)\circ {}^{s}\left(b^{-1}\right)\circ {}^{s}f = q^{-1}\circ f^{-1}\circ b^{-1}\circ f.$$

Enfin,

$${}^{s}\left(q^{-1}\circ f^{-1}\circ b^{-1}\circ f\right) = q^{-1}\circ f^{-1}\circ b^{-1}\circ f.$$

Posons $q' = q^{-1}\circ f^{-1}\circ b^{-1}\circ f$, alors q' est un $\mathbf{K}$-isomorphisme de $Y_{\mathbf{K}}$ vers $Z_{\mathbf{K}}$. De plus, pour tout $s\in\mathfrak{G}$, ${}^{s}q' = q'$. D'après l'hypothèse 2. de Proposition 3.9, il existe un $\mathbf{k}$-isomorphisme $\omega : Y \longrightarrow Z$ tel que $q' = \mathfrak{F}(\omega)$. Par conséquent $[Y] = [Z]$, ce qui prouve bien l'injectivité de γ. □

Maintenant, prouvons que cette application est surjective.

THÉORÈME 3.13. — L'application γ, définie ci-dessus est un isomorphisme d'ensembles pointés.

PREUVE : Tout d'abord, supposons que l'extension est finie. Soit c un cocycle de $\mathfrak{G}$ vers $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}})$. Pour tout $s\in\mathfrak{G}$, s induit un $\mathbf{k}$-automorphisme sur $\mathrm{Spec}\,(\mathbf{K})$, qui à son tour, induit un $\mathbf{k}$-automorphisme sur $X_{\mathbf{K}}$ par $(\mathrm{Id}\times s)$. On note ce $\mathbf{k}$-automorphisme s^*. Par conséquent, on obtient une action de $\mathfrak{G}$ sur $X_{\mathbf{K}}$ par $c_{s^{-1}}\circ s^*$. En effet, $c_1\circ 1^* = \mathrm{Id}_{X_{\mathbf{K}}}\circ \mathrm{Id}_{X_{\mathbf{K}}} = \mathrm{Id}_{X_{\mathbf{K}}}$. Pour tout $s_1, s_2\in\mathfrak{G}$,

$$\begin{aligned} c_{(s_1 s_2)^{-1}}\circ (s_1 s_2)^* &= c_{s_2^{-1}s_1^{-1}}\circ s_2^*\circ s_1^* \\ &= c_{s_2^{-1}}\circ {}^{s_2^{-1}}c_{s_1^{-1}}\circ s_2^*\circ s_1^* \\ &= c_{s_2^{-1}}\circ s_2^*\circ c_{s_1^{-1}}\circ (s_2^*)^{-1}\circ s_2^*\circ s_1^* \\ &= (c_{s_2^{-1}}\circ s_2^*)\circ (c_{s_1^{-1}}\circ s_1^*). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que c'est bien une action.

Maintenant, on construit la $\mathbf{k}$-variété quotient $Y := X_{\mathbf{K}}/\mathfrak{G}$, où $\mathfrak{G}$ agit sur $X_{\mathbf{K}}$ avec l'action définie juste ci-dessus. On admet que cette $\mathbf{k}$-variété existe et qu'elle est projective car $X_{\mathbf{K}}$ est projective. On admet aussi que Y est une $\mathbf{K}/\mathbf{k}$-forme

de X. Supposons que $\gamma([Y]) = [c]$. Donc, si $[c] = [c']$, pour un certain cocycle c' alors, le cocycle c' nous donne une autre $\mathfrak{G}$-action sur $X_{\mathbf{K}}$, et notons Y' la $\mathbf{k}$-variété quotient de $X_{\mathbf{K}}$ sous cette action. Ainsi, on a $\gamma([Y']) = [c'] = [c] = \gamma([Y])$. Par conséquent, par injectivité de γ, $[Y] = [Y']$. Ce qui prouve que Y est indépendante du choix du représentant de $[c]$. Ainsi, Y est bien définie.

Prouvons ensuite que $\gamma([Y]) = [c]$. Par définition de γ, on a $\gamma([Y]) = [\tau_Y]$, où, pour un certain $\mathbf{K}$-isomorphisme $f : Y_{\mathbf{K}} \longrightarrow X_{\mathbf{K}}$, $\tau_Y : s \longmapsto f \circ {}^s(f^{-1})$ est un cocycle de $\mathfrak{G}$ vers $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}})$. Soit $s \in \mathfrak{G}$, d'après [**BOR**, 2.6.] il existe un $\mathbf{K}$-isomorphisme f de $Y_{\mathbf{K}}$ vers $X_{\mathbf{K}}$ tel que ${}^s f = f \circ c_s$. Prenons cet isomorphisme dans la définition de τ_Y. Par conséquent, $\tau_Y(s) = f \circ {}^s(f^{-1}) = f \circ f^{-1} \circ c_s = c_s$. Ce qui finit de prouver que $\gamma([Y]) = [c]$.

Maintenant supposons que l'extension est infinie. On admet que $\mathrm{Aut}_\bullet(X_\bullet)$ est un foncteur en groupe, cf. Définition 4.1. Ainsi, d'après Théorème 4.7, on a un isomorphime $\mathbf{H}^1(\mathrm{Gal}(\mathbf{K}/\mathbf{k}), \mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}})) \simeq \varinjlim_{\mathbf{F}} \mathbf{H}^1(\mathrm{Gal}(\mathbf{K}/\mathbf{F}), \mathrm{Aut}_{\mathbf{F}}(X_{\mathbf{F}}))$ où $\mathbf{F}$, parcours l'ensemble des extensions galoisiennes intermédiaires finies. Donc, d'après ce que l'on a montré dans le cas d'une extension finie, $\mathbf{H}^1(\mathrm{Gal}(\mathbf{K}/\mathbf{k}), \mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(X_{\mathbf{K}})) \simeq \varinjlim_{\mathbf{F}} \mathrm{E}(\mathbf{F}/\mathbf{k}, X)$. Il nous reste alors à montrer que $\varinjlim_{\mathbf{F}} \mathrm{E}(\mathbf{F}/\mathbf{k}, X) \simeq \mathrm{E}(\mathbf{K}/\mathbf{k}, X)$. Indexons l'ensemble de ces extensions intermédiaires finies par I, $(\mathbf{F}_i)_i$. On définie les applications $\phi_i : \mathrm{E}(\mathbf{F}_i/\mathbf{k}, X) \longrightarrow \mathrm{E}(\mathbf{K}/\mathbf{k}, X)$, par l'injection canonique. En effet, si Y est une $\mathbf{F}_i/\mathbf{k}$-forme de X alors Y est une $\mathbf{K}/\mathbf{k}$-forme de X. On obtient donc une application $\phi : \varinjlim_{\mathbf{F}} \mathrm{E}(\mathbf{F}/\mathbf{k}, X) \longrightarrow \mathrm{E}(\mathbf{K}/\mathbf{k}, X)$. Comme les ϕ_i sont injectives, ϕ l'est aussi. La surjectivité, provient directement du résultat suivant [**GÖR**, 10.80] :

Soit k un corps, X et Y des k-variétés telles que pour une k-algèbre A, il existe un A-isomorphisme $X_A \simeq Y_A$. Alors, il existe une extension finie F de k telle que $X_F \simeq Y_F$.

Ceci achève la preuve de ce théorème. □

On notera que l'injectivité de γ reste valable si l'on prend n'importe quelle catégorie $\mathfrak{C}_{\mathbf{k}}$, $\mathfrak{C}_{\mathbf{K}}$ et foncteur covariant $\mathfrak{F} : \mathfrak{C}_{\mathbf{k}} \longrightarrow \mathfrak{C}_{\mathbf{K}}$ vérifiant les mêmes propriétés de Proposition 3.9. Par conséquent, l'injectivité demeure vraie en prenant comme catégorie les variétés projectives pointées. Pour la surjectivité, on peut adapter la preuve pour introduire les variétés projectives pointées. Ainsi, Théorème 3.13

reste vrai en prenant les catégories des variétés projectives pointées sur $\mathbf{k}$ et $\mathbf{K}$, ce qui nous servira pour la preuve finale du théorème de CHÂTELET.

4 THÉORÈME 90 DE HILBERT

Le but de ce chapitre est de prouver le théorème 90 de HILBERT dans sa version cohomologique la plus générale :

Soit K/k une extension galoisienne, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $H^1(\mathrm{Gal}(K/k), \mathrm{GL}_n(K)) = 1$**.**

Ce théorème servira, par la suite, pour la preuve du théorème de CHÂTELET. Dans toute la suite, si $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ est une extension galoisienne, on note $\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{K}}$ son groupe de Galois.

4.1 Résultats préliminaires

Tout d'abord, on prouve des résultats qui serviront dans la démonstration du théorème 90 de HILBERT. Pour cela, on commence par définir ce qu'est un **foncteur en groupe**.

DÉFINITION 4.1 (Foncteur en groupe)**.** — On appelle *foncteur en groupe*, tout foncteur $\Phi : \mathrm{Field} : \mathbf{K}/\mathbf{k} \longrightarrow \mathrm{Grp}$, dont les corps de la catégorie de départ sont les sous-corps de $\mathbf{K}$ contenant $\mathbf{k}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. L'action de $\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{K}}$ sur $\Phi(\mathbf{K})$ est continue.
2. Pour toute extension galoisienne intermédiaire finie $\mathbf{F}$, $\Phi(\mathbf{F}) \simeq \Phi(\mathbf{K})^{\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{K}}}$.
3. Si $\mathbf{k} \subset \mathbf{E} \subset \mathbf{F} \subset \mathbf{K}$ sont deux extensions intermédiaires et si $i_{\mathbf{E}}^{\mathbf{F}} : \mathbf{E} \hookrightarrow \mathbf{F}$ est l'inclusion, alors $\Phi\left(i_{\mathbf{E}}^{\mathbf{F}}\right)$ est injectif.

La proposition suivante permet de faire un lien entre le premier ensemble de cohomologie d'un groupe de Galois infini avec le premier ensemble de cohomologie de ses sous-extensions finies.

LEMME 4.2. — Soit G un groupe profini. Soit A un G-groupe discret et A' un G'-groupe discret. Considérons $f : A \longrightarrow A'$ et $\phi : G' \longrightarrow G$ deux morphismes de groupes continues et compatibles, c'est à dire $f\left({}^{\phi(\sigma')}a\right) = {}^{\sigma'}f(a)$, pour $\sigma' \in G'$ et $a \in A$. Alors, f induit deux morphismes d'ensembles pointés :

$$f_* : \begin{array}{ccc} \mathbf{H}^0(G,A) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(G',A') \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array},$$

$$f^* : \mathbf{H}^1(G,A) \longrightarrow \mathbf{H}^1(G',A').$$

PREUVE : Pour f_*, c'est clair. Maintenant, on se penche sur $f^* : \mathbf{H}^1(G,A) \longrightarrow \mathbf{H}^1(G',A')$. On commence par définir l'application suivante :

$$\widetilde{f^*} : \begin{array}{ccc} \mathbf{Z}^1(G,A) & \longrightarrow & \mathbf{Z}^1(G',A') \\ \alpha & \longmapsto & \beta \end{array},$$

où, pour tout $\sigma' \in G'$, $\beta_{\sigma'} = f\left(\alpha_{\phi(\sigma')}\right)$. Il est clair que pour tout $\sigma', s' \in G'$, $\beta_{s'\sigma'} = \beta_{s'}\,{}^{s'}\beta_{\sigma'}$. Maintenant la continuité de β provient du fait que l'on a la composition d'applications continues suivantes :

$$\begin{array}{ccccccccc} G' & \xrightarrow{\phi} & G & \xrightarrow{\alpha} & A & \xrightarrow{f} & A' & & \\ \sigma' & \longmapsto & \phi(\sigma') & \longmapsto & \alpha_{\phi(\sigma')} & \longmapsto & f\left(\alpha_{\phi(\sigma')}\right) & = & \beta_{\sigma'}. \end{array}$$

Donc $\widetilde{f^*}$ est bien définie. Montrons maintenant que l'on peut passer au quotient. Définissons $\widehat{f^*}$ par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}^1(G,A) & \xrightarrow{\widehat{f^*}} & \mathbf{H}^1(G',A') \\ {\scriptstyle \widetilde{f^*}}\downarrow & \nearrow_{p} & \\ \mathbf{Z}^1(G',A') & & \end{array}$$

Prouvons que l'on peut passer la source $\mathbf{Z}^1(G,A)$ au quotient, pour pouvoir définir $f^* : \mathbf{H}^1(G,A) \longrightarrow \mathbf{H}^1(G',A')$. Soit α et α' deux cocycles de G vers A tels que $[\alpha] = [\alpha'] \in \mathbf{H}^1(G,A)$. Montrons que β et β' sont cohomologues dans $\mathbf{H}^1(G',A')$. Comme

$[\alpha] = [\alpha']$, il existe $a \in A$ tel que pour tout $\sigma \in G$, $\alpha'_\sigma = a^{-1}\alpha_\sigma\ {}^\sigma a$. Soit $\sigma' \in G'$:

$$\begin{aligned}\beta'_{\sigma'} &= f\left(\alpha'_{\phi(\sigma')}\right)\\ &= f\left(a^{-1}\alpha_{\phi(\sigma')}\ {}^{\phi(\sigma')}a\right)\\ &= f(a)^{-1}f\left(\alpha_{\phi(\sigma')}\right)f\left({}^{\phi(\sigma')}a\right)\\ &= f(a)^{-1}\beta_{\sigma'}\ {}^{\sigma'}f(a).\end{aligned}$$

La dernière égalité se justifie par la compatibilité des morphismes f et ϕ. Ceci montre bien que f^* est bien définie. De plus, il est clair que f^* envoie l'unité sur l'unité, ce qui achève la preuve de ce lemme. □

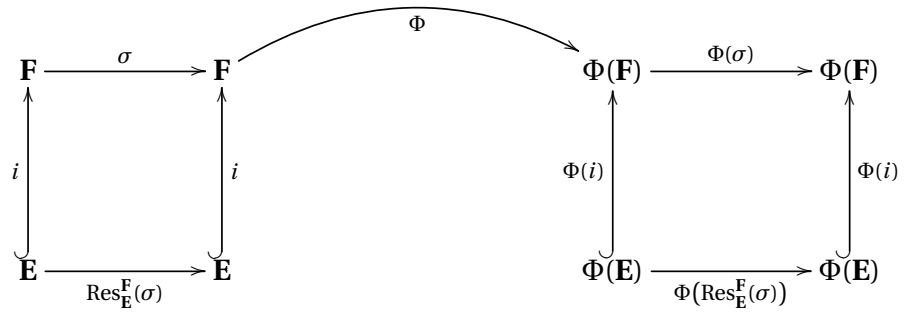
On aimerait prendre la limite inductive des $\mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{F}},\Phi(\mathbf{F})\right)$. Pour cela, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.3. — Soit Φ un foncteur en groupe. Si $\mathscr{F}$ désigne l'ensemble des extensions galoisiennes finies de $\mathbf{k}$ contenues dans $\mathbf{K}$, alors le système suivant, $\left\{\mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{F}},\Phi(\mathbf{F})\right) \mid \mathbf{F} \in \mathscr{F}\right\}$ est inductif.

PREUVE : Soit $\mathbf{k} \subset \mathbf{E} \subset \mathbf{F} \subset \mathbf{K}$ une tour d'extensions galoisiennes. On suppose que $\mathbf{E}/\mathbf{k}$ et $\mathbf{F}/\mathbf{k}$ sont finies. Comme ces dernières sont normales, on peut définir des morphismes de restrictions :

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{F}} : \begin{array}{ccc}\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{F}} & \longrightarrow & \mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{E}}\\ \sigma & \longmapsto & \sigma_{|\mathbf{E}}\end{array}.$$

Le but est de définir un morphisme d'ensembles pointés entre $\mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{E}},\Phi(\mathbf{E})\right)$ et $\mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{F}},\Phi(\mathbf{F})\right)$. Pour cela, on utilise Lemme 4.2. On définit deux morphismes de groupes continues et compatibles. Le premier est $\mathrm{Res}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{F}}$ défini plus haut et le second est $\Phi(i : \mathbf{E} \hookrightarrow \mathbf{F}) : \Phi(\mathbf{E}) \hookrightarrow \Phi(\mathbf{F})$, où i est l'inclusion. On rappelle que $\Phi(i)$ est injectif par définition d'un foncteur en groupe. Montrons la compatibilité de ces deux morphismes. Pour cela, on considère le carré commutatif de gauche qui est envoyé sur celui de droite par le foncteur Φ :



Le carré de droite est commutatif donc $\Phi(i)$ et $\mathrm{Res}^{\mathbf{F}}_{\mathbf{E}}$ sont compatibles. Ainsi, d'après Lemme 4.2, on a un morphisme d'ensembles pointés :

$$\varphi_{\mathbf{EF}} : \mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}^{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}, \Phi(\mathbf{E})\right) \longrightarrow \mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}^{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}, \Phi(\mathbf{F})\right).$$

Explicitons ces morphismes $\varphi_{\mathbf{EF}}$. Toujours d'après Lemme 4.2, $\varphi_{\mathbf{EF}}([\alpha]) = [\beta]$, avec, pour tout $\sigma \in \mathfrak{G}^{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}$, $\beta_\sigma = \Phi(i)\left(\alpha_{\mathrm{Res}^{\mathbf{F}}_{\mathbf{E}}(\sigma)}\right)$. Par ailleurs, si $\mathbf{k} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{E} \subset \mathbf{F} \subset \mathbf{K}$ sont des extensions galoisiennes intermédiaires finies, alors, pour tout $\alpha \in \mathbf{Z}^1\left(\mathfrak{G}^{\mathbf{D}}_{\mathbf{k}}, \Phi(\mathbf{D})\right)$ et pour tout $\sigma \in \mathfrak{G}^{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}$:

$$\left(\varphi_{\mathbf{EF}}\varphi_{\mathbf{DE}}([\alpha])\right)(\sigma) = \varphi_{\mathbf{DF}}([\alpha])(\sigma).$$

On le vérifie par un calcul direct. Par conséquent, cela termine la preuve de cette proposition et on peut considérer le système inductif $\left(\left\{\mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}^{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}, \Phi(\mathbf{F})\right) \mid \mathbf{F} \in \mathscr{F}\right\}, \varphi_{\mathbf{EF}}\right)$ et sa limite. □

Maintenant, prouvons que $\mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}^{\mathbf{K}}_{\mathbf{k}}, \Phi(\mathbf{K})\right) \simeq \varinjlim \mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}^{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}, \Phi(\mathbf{F})\right)$. On commence par des résultats préliminaires.

LEMME 4.4. — Soit $\alpha \in \mathbf{Z}^1(G, A)$, où G est un groupe profini et A un G-groupe discret. Alors, il existe un sous-groupe normal ouvert N de G et une application $\overline{\alpha} : G/N \longrightarrow A$ telle que $\alpha = \overline{\alpha} \circ \pi$, où $\pi : G \longrightarrow G/N$ est la surjection canonique.

PREUVE : Puisque A est muni de la topologie discrète, l'ensemble $I := \alpha^{-1}(1)$ est un ouvert fermé contenant 1. Essayons de trouver un sous-groupe normal N de G tel que α soit constante sur les classes à gauche de N. Pour cela, posons $F = (G \setminus I) \cap I^2$. L'ensemble F est fermé, car $G \setminus I$ est fermé et I^2 aussi. En effet, $I \subset I^2$ car $1 \in I$ donc si $i \in I$, alors $i = i1 \in I^2$. Par ailleurs, I est compact car I est l'image

réciproque d'un compact par une application continue. De plus, comme G est séparé car compact, on peut appliquer le résultat de topologie suivant :

Soit** X **un espace de Haussdorff. Si** $I \subset X$ **est un sous-ensemble compact de** X **alors** X **est fermé.

Ainsi, il en résulte que I^2 est fermé. Soit $x \in I$. Comme I est compact et ouvert (car I est l'image réciproque d'un ouvert), il existe V_x et W_x des voisinages ouverts de x et de 1 respectivement, tels que $V_x, W_x \subset I$ et $V_x W_x \subset G \backslash F$. En effet, le fait que $1, x \in I$ implique l'existence d'ouverts V et W inclus dans I avec $1 \in W$ et $x \in V$. La continuité de la loi de groupe et le fait que $G \backslash F$ est ouvert implique l'existence de deux ouverts V' et W' tels que $(1, x) \in W' \times V' \subset \mu^{-1}(G \backslash F)$, où μ désigne la loi de groupe de G. On peut prendre alors $V_x = V \cap V'$ et $W_x = W \cap W'$. La collection $\{V_x \mid x \in I\}$ est un recouvrement d'ouverts de I et, par compacité de I, il existe $n \in \mathbb{N}$ ainsi que $x_1, \cdots, x_n$ tels que $I \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Posons, $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i}$ et $Z = W \cap W^{-1}$. L'ouvert Z est donc un voisinage ouvert de 1 qui est stable par passage à l'inverse. Cependant, il n'est pas stable par produit. Considérons alors, l'ensemble suivant $H := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z^k$, où Z^k est l'ensemble des produits de k éléments de Z. Montrons ainsi que le sous-groupe H de G est inclus dans I. Pour commencer, montrons que $IZ \subset I$. Soit $x \in IZ$, alors $x \in G \backslash F$ (cela provient de la condition $V_x W_x \subset G \backslash F$ ci-dessus et de la définition de Z). Ceci implique que $x \notin G \backslash F$ ou $x \notin I^2$. Puisque $x \in I^2$, alors $x \in I$. Ainsi, $IZ \subset I$. Par récurrence, on a $IZ^k \subset I$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, $Z^k \subset I$, ce qui implique que $H \subset I$. Il reste à normaliser H. Pour cela, on pose $N := \bigcap_{g \in H} gHg^{-1}$ qui est normal dans G. Comme G est compact et que H est ouvert, il est d'indice fini. En effet, les gH pour $g \in G$ forment un recouvrement de G. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini. Mais comme les gH, $(g \in G)$ forment une partition de G, on en déduit que G/H est fini. Par conséquent, H ne possède qu'un nombre fini de conjugués. Ce qui implique que N est ouvert. Enfin, montrons que α est constante sur les classes à gauche de N. Comme α est un cocycle, α est continu et pour tout $s, t \in G$, $\alpha_{st} = \alpha_s \, {}^s\alpha_t$. Soit g et g' deux éléments de G tels que $\overline{g} = \overline{g'} \in G/N$. Alors, il existe $n \in N$ tel que $g = g'n$. Comme $n \in N \subset I$, alors, on sait que $\alpha_n = a = \alpha_1$. Ainsi, on peut bien définir $\overline{\alpha} : G/N \longrightarrow A$ telle que $\alpha = \overline{\alpha} \circ \pi$. □

PROPOSITION 4.5. — Soit G un groupe profini et A un G-groupe discret. Alors, on a la bijection suivante :

$$\mathbf{Z}^1(G,A) \simeq \varinjlim \mathbf{Z}^1\left(G/N, A^N\right),$$

où N parcourt les sous-groupes normaux ouverts de G.

PREUVE : Montrons tout d'abord que l'action de G sur A se restreint en une action continue de G/N sur A^N. Ainsi, posons, pour $s \in G$ et $a \in A^N$, ${}^{\overline{s}}a = {}^{s}a$. Il est clair que cette action est bien définie. Si $\overline{s} = \overline{s'}$, alors il existe $n \in N$ tel que $s = s'n$ et ${}^{\overline{s}}a = {}^{s}a = {}^{s'n}a = {}^{s'}a = {}^{\overline{s'}}a$. Soit $M \subset N \lhd_o G$, où $\lhd_o$ signifie « sous-groupe normal ouvert ». Alors, on a $\varphi_{MN} : G/M \longrightarrow G/N$, un morphisme de groupes continu. En effet, $M \subset \operatorname{Ker} \varphi_{MN} = N$. On utilise alors le théorème de factorisation. Il est facile de vérifier que le système $\left(G/N, \varphi_N\right)$ est un système projectif. Par ailleurs, on a les morphismes suivants : $\pi : G \longrightarrow G/N$ et $i : A^N \hookrightarrow A$. Ainsi, on obtient un morphisme $\psi_N : \mathbf{Z}^1\left(G/N, A^N\right) \longrightarrow \mathbf{Z}^1(G,A)$, d'après Lemme 4.2. Il est facile de vérifier que les morphismes ψ_N sont compatibles. Par conséquent, il vient le morphisme suivant :

$$\psi : \varinjlim \mathbf{Z}^1\left(G/N, A^n\right) \longrightarrow \mathbf{Z}^1(G,A).$$

Montrons que ψ est bijectif.

Injectivité. Comme $\psi_N(\alpha) = \beta$, où $\beta_\sigma = i\left(\alpha_{\pi(\sigma)}\right) = \alpha_{\overline{\sigma}}$, pour tout $\sigma \in G$. Il est donc évident que ψ_N est injectif. En effet, soit α et α' deux cocycles de G/N vers A^N tels que $\psi_N(\alpha) = \psi_N(\alpha')$. Alors, $\beta = \beta'$, donc pour tout $\sigma \in G$, $\beta_\sigma = \beta'_\sigma$. Par conséquent, $\alpha_{\overline{\sigma}} = \alpha'_{\overline{\sigma}}$, d'où $\alpha = \alpha'$. L'injectivité des ψ_N implique l'injectivité de ψ. Ce dernier fait est facile à vérifier lorsque l'on considère la limite inductive canonique.

Surjectivité. Soit $\alpha \in Z^1(G,A)$, ainsi que $N_1 \lhd_o G$ et $\overline{\alpha}$ comme dans Lemme 4.4. On remarque que, puisque α est continu, que G est profini et que A est discret, il existe un $N_2 \lhd_o G$ tel que $\operatorname{Im} \alpha \subset A^{N_2}$. En effet, les hypothèses impliquent que l'image de α est finie. Posons alors $\operatorname{Im} \alpha = \{a_1, \cdots, a_n\}$. Comme l'action de G sur A est continue, les stabilisateurs $S_{a_1}, \cdots S_{a_n}$ sont ouverts et fermés dans G, d'après Lemme 3.4. Ainsi, $I := \bigcap_{i=1}^n S_{a_i}$ est un ouvert fermé contenant 1, ce qui implique

l'existence de $N_2 \lhd_o G$ avec $N_2 \subset I$ (cf. preuve de Lemme 4.4) et donc Im $\alpha \subset A^{N_2}$. On pose $N = N_1 \cap N_2$ qui est un sous-groupe normal ouvert de G, et on définit un cocyle $\beta : G/N \longrightarrow A$ qui est tel que $\beta \circ \pi = \alpha$, où π est la surjection canonique, et tel que Im $\beta \subset A^N$. L'existence d'un tel cocycle vient du théorème de factorisation pour α. Comme $N \subset N_1$, alors β est bien défini. Montrons que Im $\beta \subset A^N$. Soit $a \in$ Im β alors $a = \beta_{\overline{\sigma}}$, avec $\sigma \in G$. Soit $n \in N$ alors $n \in N_2$ et ${}^n\beta_{\overline{\sigma}} = {}^n\beta_{\pi(\sigma)} = {}^n\alpha_\sigma = \alpha_\sigma = \beta_{\overline{\sigma}}$, où la troisième égalité se justifie par le fait que Im $\alpha \subset A^{N_2}$. D'où Im $\beta \subset A^N$. On constate alors que $\psi_N(\beta) = \alpha$. En effet, soit $\sigma \in G$, $\psi_N(\beta) = \beta_{\overline{\sigma}} = \alpha$. Par conséquent, $\psi \circ \varphi_N(\beta) = \alpha$, où $\varphi_N : \mathbf{Z}^1\left(G/N, A^N\right) \longrightarrow \varinjlim \mathbf{Z}^1\left(G/N, A^N\right)$. Ceci prouve la surjectivité et donc la bijectivité. □

PROPOSITION 4.6. — Soit G un groupe profini et A un G-groupe discret. Alors, on a la bijection suivante :

$$\mathbf{H}^1(G,A) \simeq \varinjlim \mathbf{H}^1\left(G/N, A^N\right),$$

où N parcourt les sous-groupes normaux ouverts de G.

PREUVE : De la même manière que dans Proposition 4.5, on obtient un morphisme induit :

$$\overline{\psi} : \varinjlim \mathbf{H}^1\left(G/N, A^N\right) \longrightarrow \mathbf{H}^1(G,A).$$

Montrons que $\overline{\psi}$ est bijective.

Surjectivité. La surjectivité de $\overline{\psi}$ provient de celle de ψ dans Proposition 4.5.

Injectivité. Pour montrer l'injectivité de $\overline{\psi}$, il suffit de la montrer pour les morphismes $\overline{\psi}_N : \mathbf{H}^1\left(G/N, A^N\right) \longrightarrow \mathbf{H}^1(G,A)$. Supposons que α et α' sont des cocycles tels que $\overline{\psi}_N([\alpha]) = \overline{\psi}_N([\alpha'])$. Ainsi, il existe $a \in A$ tel que $\alpha'_{\pi(\sigma)} = a\alpha_{\pi(\sigma)}\,{}^\sigma a^{-1}$, pour tout $\sigma \in G$. Puisque $\beta_1 = 1$ pour tout cocycle β, on a, pour $n \in N$, $\alpha'_{\overline{1}} = a\alpha_{\overline{1}}\,{}^n a^{-1}$ si, et seulement si, $a = {}^n a$, c'est à dire $a \in A^N$ et donc $[\alpha] = [\alpha']$. Ce qui prouve l'injectivité de $\overline{\psi}$. □

Venons-en à la preuve du théorème clé.

THÉORÈME 4.7. — Soit Φ un foncteur en groupe pour $\mathbf{K}/\mathbf{k}$. Alors, on a un isomorphisme :

$$\mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{K}}, \Phi(\mathbf{K})\right) \simeq \varinjlim \mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{F}}, \Phi(\mathbf{F})\right),$$

où **F** parcours l'ensemble des extensions galoisiennes finies intermédiaires.

PREUVE : On a les isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{rcl} \varinjlim_{\mathbf{F}} \mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{F}},\Phi(\mathbf{F})\right) & \overset{1.}{\simeq} & \varinjlim_{\mathbf{F}} \mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{F}},\Phi(\mathbf{K})^{\mathfrak{G}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{K}}}\right) \\ & \overset{2.}{\simeq} & \varinjlim_{\mathbf{F}} \mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{K}}\Big/\mathfrak{G}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{K}},\Phi(\mathbf{K})^{\mathfrak{G}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{K}}}\right) \\ & \overset{3.}{\simeq} & \mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{K}},\Phi(\mathbf{K})\right). \end{array}$$

Justifions ces isomorphismes.

1. Ce premier isomorphisme se justifie par la définition d'un foncteur en groupe.

2. Ce deuxième isomorphisme, vient du résultat sur la théorie de Galois suivant [**LAN**, VI,1.10] :

Si k est un corps et F une extension galoisienne finie de k. Si $k \subset E \subset F$ est une extension normale de k, alors on a l'isomorphisme suivant :

$$\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{F}}\Big/\mathfrak{G}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{F}} \simeq \mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{E}}.$$

3. Enfin, ce dernier isomorphisme provient de Proposition 4.6 □

4.2 Preuve du théorème 90 de HILBERT

L'idée de cette preuve est de prouver le théorème dans le cas d'une extension finie et, par le théorème clé précédent, de le généraliser aux cas des extensions infinies.

Commençons par prouver une première version du théorème 90 de HILBERT dans le cas des extensions finies.

PROPOSITION 4.8 (Théorème 90 de HILBERT, cas fini)**.** — Si $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ est une extension galoisienne finie, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \mathbf{H}^1\left(\mathrm{Gal}\left(\mathbf{K}/\mathbf{k}\right),\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})\right) = 1.$$

PREUVE : Tout d'abord notons $\mathfrak{G}$ le groupe de Galois de l'extension $\mathbf{K}/\mathbf{k}$. Soit $A : s \longmapsto A_s$ un cocycle de $\mathfrak{G}$ vers $\mathrm{GL_n}(\mathbf{K})$ et soit M une matrice quelconque à coefficients dans $\mathbf{K}$. Comme l'extension $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ est finie, le groupe $\mathfrak{G}$ l'est aussi. On peut alors considérer la matrice suivante :

$$B := \sum_{s\in\mathfrak{G}} A_s\ {}^sM,$$

où ${}^sM = (s(m_{ij}))_{i,j}$. Montrons que pour tout $t \in \mathfrak{G}$, ${}^tB = A_t^{-1}B$. Soit $t \in \mathfrak{G}$, alors,

$${}^tB = {}^t\left(\sum_{s\in\mathfrak{G}} A_s\ {}^sM\right) = \sum_{s\in\mathfrak{G}} {}^tA_s\ {}^{ts}M = \sum_{s\in\mathfrak{G}} A_t^{-1}A_{ts}\ {}^{ts}M.$$

Ainsi,

$${}^tB = A_t^{-1}\sum_{s\in\mathfrak{G}} A_{ts}\ {}^{ts}M = A_t^{-1}\sum_{s\in\mathfrak{G}} A_s\ {}^sM.$$

D'où, ${}^tB = A_t^{-1}B$. À condition que la matrice B soit inversible, cette formule montre que $[A] = \mathbb{1}$. Le but est donc de choisir une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que B soit inversible. Pour cela, on distingue deux cas.

$1^{\mathbf{er}}$ **cas** : Le corps $\mathbf{K}$ est infini. Pour ce cas, on va appliquer le théorème d'indépendance algébrique des automorphismes [**LAN**, VI,§12,12.2] :

Soit K un corps infini et $\sigma_1,\cdots\sigma_n$***,*** n ***éléments d'un groupe fini d'automorphismes de K. Alors,*** $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ ***sont algébriquement indépendants sur K. C'est à dire que pour tout polynôme*** $P \in \boldsymbol{K}[X_1,\cdots,X_n]$ ***non nul, il existe un élément*** $x \in \boldsymbol{K}$ ***tel que*** $P(\sigma_1(x),\cdots,\sigma_n(x)) \neq 0$**.**

Tout d'abord, notons $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ les éléments du groupe $\mathfrak{G}$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, notons $A_{\sigma_k} := \left(a_{ij}^{\sigma_k}\right)_{i,j}$. Considérons le polynôme suivant :

$$P := \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon(\tau)\prod_{i=1}^{n}\sum_{j_1}^{n} X_j a_{i\tau(i)}^{\sigma_j} \in \mathbf{K}[X_1,\cdots,X_n].$$

Montrons que $P \neq 0$.

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau)\prod_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}X_k a_{i\tau(i)}^{\sigma_k}\\
&= \sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau)\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{n}\prod_{i=1}^{n}X_{k_i}a_{i\tau(i)}^{\sigma_{k_i}}\\
&= \sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{n}\sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau)\prod_{i=1}^{n}X_{k_i}a_{i\tau(i)}^{\sigma_{k_i}}\\
&= \sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau)\prod_{i=1}^{n}X_1 a_{i\tau(i)}^{\sigma_1}+\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_n=1\\(k_1,\cdots,k_n)\neq(1,\cdots,1)}}^{n}\sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau)\prod_{i=1}^{n}X_{k_i}a_{i\tau(i)}^{\sigma_{k_i}}\\
&= \det(A_{\sigma_1})X_1^n+\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_n=1\\(k_1,\cdots,k_n)\neq(1,\cdots,1)}}^{n}\sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau)\prod_{i=1}^{n}X_{k_i}a_{i\tau(i)}^{\sigma_{k_i}}.
\end{aligned}$$

La matrice A_{σ_1} est inversible, donc son déterminant est non nul. Par conséquent, le facteur devant X_1^n est non nul, ce qui prouve que P est non nul. D'après le théorème d'indépendance des automorphismes, il existe un $m\in\mathbf{K}$ tel que $P(\sigma_1(m),\cdots,\sigma_n(m))\neq 0$. Considérons un tel m et posons $M:=m\mathrm{Id}_n$. On vérifie facilement que $\det(B)=P(\sigma_1(m),\cdots,\sigma_n(m))$. Par conséquent, $\det(B)\neq 0$ et B est alors inversible comme voulu.

$2^{\textbf{nd}}$ **cas** : Le corps $\mathbf{K}$ est fini. Soit $x\in\mathbf{K}^n$, posons $B(x):=\sum_{s\in\mathfrak{G}}A_s\,{}^s x$. Montrons que $(B(x))_{x\in\mathbf{K}^n}$ engendre $\mathbf{K}^n$ en tant que $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit u une forme linéaire de $\mathbf{K}^n$ nulle sur les $B(x)$. Alors, on a pour tout $h\in\mathbf{K}$:

$$0=u(B(hx))=u\left(\sum_{s\in\mathfrak{G}}A_s\,{}^s h\,{}^s x\right)=\sum_{s\in\mathfrak{G}}{}^s h u(A_s\,{}^s x).$$

Ainsi, comme l'égalité est vraie pour tout $h\in\mathbf{K}$, $\sum_{s\in\mathfrak{G}}{}^s u(A_s\,{}^s x)=0$. On va montrer que pour tout $s\in\mathfrak{G}$, $u(A_s\,{}^s x)=0$. Pour cela, on applique le théorème d'indépendance linéaire des morphismes de corps, [**LAN**, VI,§4,4.1] :

Soit K et L deux corps et $\varphi_1,\cdots,\varphi_n : \boldsymbol{L}\longrightarrow\boldsymbol{K}$ $(n\geq 1)$***, des morphismes de corps distincts. Alors,*** $(\varphi_1,\cdots\varphi_n)$ ***est une famille libre, c'est à dire :***

$$\forall(\alpha_i)\in\boldsymbol{L}^n\ ,\ \forall x\in\boldsymbol{K},\ \left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)=0\Longrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],\ \alpha_i=0\right].$$

Appliquons ce résultat aux éléments de $\mathfrak{G}$. Ainsi, on obtient bien $u(A_s\,{}^s x)$ pour tout $s \in \mathfrak{G}$, donc $u({}^s x) = 0$ pour tout $s \in \mathfrak{G}$ car $A_s \in \mathrm{GL_n}(\mathbf{K})$ d'où $u = 0$. Par conséquent, si les $B(x)$, $x \in \mathbf{K}^n$ appartiennent à un hyperplan, alors il existe une forme linéaire non nulle u telle que $u(B(x)) = 0$, pour tout $x \in \mathbf{K}^n$. Ce qui est absurde d'après ce qui précède. Donc, il n'existe pas d'hyperplan contenant tous les $B(x)$. D'où $(B(x))_{x\in\mathbf{K}^n}$ engendre $\mathbf{K}^n$ en tant que $\mathbf{K}$-espace vectoriel. D'après le théorème de la base extraite, il existe $x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{K}^n$ tels que $y_i := B(x_i)$, $(i \in [\![1,n]\!])$ est une $\mathbf{K}$-base de $\mathbf{K}^n$. Posons $M := [x_1, \cdots, x_n]$ et calculons la matrice B correspondante. Si (e_i) est la base canonique de $\mathbf{K}^n$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$Be_i = \sum_{s\in\mathfrak{G}} A_s\,{}^s M e_i = \sum_{s\in\mathfrak{G}} A_s\,{}^s x_i = B(x_i) = y_i.$$

Par conséquent, B est inversible car (y_i) est une base de $\mathbf{K}^n$. Ceci termine la preuve de cette proposition. □

Prouvons le théorème 90 de HILBERT dans le cas infini.

THÉORÈME 4.9 (Théorème 90 de HILBERT, cas infini)**.** — Soit $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ une extension galoisienne, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{K}}, \mathrm{GL_n}(\mathbf{K})\right) = 1.$$

PREUVE : Pour commencer, on prouve que $\mathrm{GL_n}$ est un foncteur en groupe qui satisfait les hypothèses de Définition 4.1.

Montrons le premier point de la définition qui est que l'action de $\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{K}}$ sur $\mathrm{GL_n}(\mathbf{K})$ est continue. Tout d'abord, on remarque que le stabilisateur $S_M < \mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{K}}$ d'un élément $M \in \mathrm{GL_n}(\mathbf{K})$ contient $\mathfrak{G}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{K}}$ où $\mathbf{F}$ est une extension galoisienne finie intermédiaires telle que $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{F})$. En effet, posons $\mathbf{F} := \mathbf{k}\left((m_{ij})_{i,j}\right)$, alors comme les m_{ij} sont algébriques sur $\mathbf{k}$, $\mathbf{F}/\mathbf{k}$ est une extension finie contenant tous les m_{ij}. Par conséquent, S_M est ouvert. En effet, on applique Lemme 3.11, car $\mathfrak{G}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{K}}$ est un ouvert de $\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{K}}$ pour la topologie de Krull.

Montrons le deuxième point de la définition, à savoir que pour toute extension galoisienne finie intermédiaire $\mathbf{F}$, $\mathrm{GL_n}(\mathbf{F}) \simeq \mathrm{GL_n}(\mathbf{K})^{\mathfrak{G}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{K}}}$. Soit $\mathbf{k} \subset \mathbf{F} \subset \mathbf{K}$ une extension galoisienne intermédiaire finie. On rappelle l'action de $\mathfrak{G}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{K}}$ sur $\mathrm{GL_n}(\mathbf{K})$: soit $\sigma \in \mathfrak{G}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{K}}$ et $X \in \mathrm{GL_n}(\mathbf{K})$, alors ${}^\sigma X = \mathrm{GL_n}(\sigma) = \left(\sigma(x_{ij})\right)_{i,j}$. Posons $\varphi : \mathrm{GL_n}(\mathbf{F}) \longrightarrow \mathrm{GL_n}(\mathbf{K})^{\mathfrak{G}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{K}}}$ le morphisme d'extension des scalaires. Montrons que φ est bien défini. Soit

$X \in \mathrm{GL_n}(\mathbf{F})$ alors, si $\sigma \in \mathfrak{G}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{K}}$, ${}^{\sigma}\varphi(X) = {}^{\sigma}X = X = \varphi(X)$. Ce qui prouve bien que φ est bien défini. Par ailleurs, l'injectivité est évidente. Pour la surjectivité, prenons $Y \in \mathrm{GL_n}(\mathbf{K})^{\mathfrak{G}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{K}}}$. Montrons que les y_{ij} sont dans $\mathbf{F}$. Soit $i,j \in [\![1,n]\!]$. Par définition de Y on a ${}^{\sigma}y_{ij} = y_{ij}$. Donc y_{ij} est dans $\mathbf{K}^{\mathfrak{G}_{\mathbf{F}}^{\mathbf{K}}}$. Par conséquent, d'après [**LAS**, 6.5.1], $y_{ij} \in \mathbf{F}$. Ainsi, $Y \in \mathrm{GL_n}(\mathbf{F})$ et $\varphi(Y) = Y$, d'où la surjectivité.

Le dernier point de la définition est clair.

Ainsi, d'après Théorème 4.7 et le théorème 90 de HILBERT dans le cas fini, on obtient bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{K}}, \mathrm{GL_n}(\mathbf{K})\right) \simeq \varinjlim_{\mathbf{F}} \mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{F}}, \mathrm{GL_n}(\mathbf{F})\right) \simeq \varinjlim \{1\} \simeq \{1\}.$$

□

PROPOSITION 4.10 (Théorème 90 de HILBERT, cas additif)**.** — Soit $\mathbf{K}/\mathbf{k}$ une extension galoisienne. Notons $\mathfrak{G}$ le groupe de Galois de l'extension et $\mathbf{K}_+$ le groupe additif du corps $\mathbf{K}$. Alors, $\mathfrak{G}$ agit continuement sur $\mathbf{K}_+^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $\in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{H}^1(\mathfrak{G}, \mathbf{K}_+^n) = \{0\}$.

PREUVE : Tout d'abord on montre que $\mathfrak{G}$ agit continuement sur $\mathbf{K}_+^n$ de la même manière que dans le cas infini du théorème 90 de HILBERT.

Soit $\alpha : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathbf{K}_+^n$, un cocycle. Posons $b = \sum_{s\in\mathfrak{G}} (\alpha_s + {}^{s}k)$, avec $k \in \mathbf{K}$. Alors, b est bien dans $\mathbf{K}_+^n$. Soit $\sigma \in \mathfrak{G}$, alors on a :

$$\begin{aligned} {}^{\sigma}b &= \sum_{s\in\mathfrak{G}} \left({}^{\sigma}\alpha_s + {}^{\sigma s}k\right) \\ &= \sum_{s\in\mathfrak{G}} \left(\alpha_{\sigma s} - \alpha_{\sigma} + {}^{\sigma s}k\right) \\ &= \sum_{s\in\mathfrak{G}} \left(\alpha_{\sigma s} + {}^{\sigma s}k\right) - \alpha_{\sigma} \\ &= b - \alpha_{\sigma}. \end{aligned}$$

Par conséquent α est bien cohomologue au cocycle unité, ce qui finit de prouver cette proposition. □

5 THÉORÈME DE CHÂTELET

Pour ce dernier chapitre, on montre le théorème de CHÂTELET. On note $\mathbf{k}_s$ la clôture séparable de $\mathbf{k}$ et $\mathfrak{G}_\mathbf{k}$ le groupe de Galois absolu, à savoir, $\mathrm{Gal}(\mathbf{k}_s/\mathbf{k})$.

Commençons par définir ce que l'on appelle les **k-variétés de Severi-Brauer**.

DÉFINITION 5.1 (Variété de Severi-Brauer)**.** — On appelle ***k-variété de Severi-Brauer*** de dimension $n \in \mathbb{N}$, toute $\mathbf{k}_s/\mathbf{k}$-forme de la $\mathbf{k}$-variété $\mathbb{P}^n_\mathbf{k}$. C'est à dire une $\mathbf{k}$-variété X telle que $X_{\mathbf{k}_s}$ est $\mathbf{k}_s$-isomorphe à $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}_s}$.

THÉORÈME 5.2 (CHÂTELET)**.** — Soit X une $\mathbf{k}$-variété de Severi-Brauer de dimension n. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $X \simeq \mathbb{P}^n_\mathbf{k}$.

(2) X est birationnelle à $\mathbb{P}^n_\mathbf{k}$.

(3) $X(\mathbf{k}) \neq \emptyset$.

PREUVE : Démontrons ce résultat en prouvant les implications successives.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : Ce résultat est immédiat. En effet, X est bien un ouvert dans lui-même, pareillement pour $\mathbb{P}^n_\mathbf{k}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : Cette implication se justifie avec le corollaire du théorème de LANG-NISHIMURA. En effet, on sait que $\mathbb{P}^n_\mathbf{k}$ est projective et regulière car recouvert par des ouverts isomorphes à l'espace affine qui est régulier. Maintenant, concernant X, on sait que $X_{\mathbf{k}_s}$ est $\mathbf{k}_s$-isomorphe à $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}_s}$, donc $X_{\mathbf{k}_s}$ est projective et régulière, ainsi, X est projective et régulière d'après Proposition 1.5. Pour finir, montrons que $\mathbb{P}^n_\mathbf{k}$ possède un $\mathbf{k}$-point. Considérons comme point l'idéal $\mathfrak{p} := (X_1, \cdots, X_n)$. Alors, $\mathfrak{p}$ est bien dans $\mathbb{P}^n_\mathbf{k}$. En effet, $\mathfrak{p}$ est homogène, premier et ne contient pas l'ensemble des polynômes non constants. De plus, le point $\mathfrak{p}$ est bien rationnel.

En effet, montrons que $\kappa(\mathfrak{p}) := \mathscr{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{m}_p \simeq \mathbf{k}$. On sait que $\mathscr{O}_\mathfrak{p} = (\mathbf{k}[X_0, \cdots X_n])_{(\mathfrak{p})}$. Donc, définissons le morphisme d'anneaux suivant :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{O}_p & \longrightarrow & \mathbf{k} \\ \dfrac{P}{Q} & \longmapsto & \dfrac{P(1,0,\cdots,0)}{Q(1,0,\cdots,0)} \end{array} .$$

Ce morphisme est bien défini. En effet, $Q(1,0\cdots,0) \neq 0$ car, par définition, $Q \notin \mathfrak{p} := (X_1, \cdots, X_n)$. On vérifie facilement que ϕ est surjective. De plus, son noyau est forcément l'idéal maximal de $\mathscr{O}_\mathfrak{p}$ car, étant un anneau local, $\mathscr{O}_\mathfrak{p}$ possède un seul idéal maximal. Ceci prouve bien que $\mathfrak{p}$ est rationnel.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : Supposons que X possède un point rationnel x. Comme X est une $\mathbf{k}$-variété de Severi-Brauer de dimension n, il existe un $\mathbf{k}_s$-isomorphisme $X_{\mathbf{k}_s} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}_s}$. Composons ce $\mathbf{k}_s$-isomorphisme avec un $\mathbf{k}_s$-automorphisme de $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}_s}$ pour que x soit envoyé sur $\mathfrak{p} := (X_1, \cdots, X_n) \in \mathbb{P}^n_\mathbf{k}$. Ainsi, (X,x) peut être vue comme une $\mathbf{k}_s/\mathbf{k}$-forme de la $\mathbf{k}$-variété pointée $(\mathbb{P}^n_\mathbf{k}, \mathfrak{p})$. Les $\mathbf{k}_s$-automorphismes de $(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}_s}, \mathfrak{p})$ sont les $\mathbf{k}_s$-automorphismes de $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}_s}$ qui fixent $\mathfrak{p}$. D'après [**GÖR**, 11.46], $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbf{k}_s)$ est isomorphe en tant que groupe à $\mathrm{Aut}_{\mathbf{k}_s}(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}_s})$. Par conséquent, les $\mathbf{k}_s$-automorphismes de $(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}_s}, \mathfrak{p})$ forment un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbf{k}_s)$:

$$\mathrm{Aut}_{\mathbf{k}_s}\left(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}_s}, \mathfrak{p}\right) = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \bmod \mathbf{k}_s^\times \simeq \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Considérons l'application qui à une matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ rend une matrice de taille $n \times n$ en supprimant la première ligne et la première colonne. Cette application est un morphisme de groupes de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{k}_s}(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}_s}, \mathfrak{p})$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k}_s)$. Ainsi, on obtient une suite exacte courte de $\mathfrak{G}_\mathbf{k}$-morphismes de groupes :

$$1 \longrightarrow (\mathbf{k}_s)^n \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}_s}\left(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}_s}, \mathfrak{p}\right) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{k}_s) \longrightarrow 1.$$

Par conséquent, d'après Proposition 3.5, on a la suite exacte suivante :

$$\mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_\mathbf{k}, (\mathbf{k}_s)^n\right) \longrightarrow \mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_\mathbf{k}, \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}_s}\left(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}_s}, \mathfrak{p}\right)\right) \longrightarrow \mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_\mathbf{k}, \mathrm{GL}_n(\mathbf{k}_s)\right).$$

D'après les deux versions du théorème 90 de HILBERT dans le cas additif et dans le cas infini, les premiers ensembles de cohomologie aux extrémités sont nuls, ce qui implique que $\mathbf{H}^1\left(\mathfrak{G}_{\mathbf{k}},\mathrm{Aut}_{\mathbf{k}_s}\left(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}_s},\mathfrak{p}\right)\right)$ est nul également. Par conséquent, d'après Théorème 3.13, la $\mathbf{k}$-variété pointée $(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}},\mathfrak{p})$ n'a pas de $\mathbf{k}_s/\mathbf{k}$-formes non triviales. Ainsi, $(X,x) \simeq (\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}},\mathfrak{p})$. En particulier, X est $\mathbf{k}$-isomorphe à $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$. Ce qui achève la preuve du théorème. □

Bibliographie

[**POO**] B. POONEN. *Rational points on varieties*. American Mathematical Society, 2017.

[**HAR**$_1$] R. HARTSHORNE. *Algebraic geometry*. Springer, 1977.

[**HAR**$_2$] D. HARARI. Cours : *Géométrie algébrique, M2, Orsay*. 2009/2010.

[**STA**] The stacks project. Site internet : *https ://stacks.math.columbia.edu/*.

[**BOU**$_1$] BOURBAKI. *Algèbre commutative, chapitre VIII*. Springer, 2006.

[**BOU**$_2$] BOURBAKI. *Théorie des ensembles*. Diffusion C.C.L.S. Paris, 1977.

[**EGA**$^3_{\text{IV}}$] A. GROTHENDIECK. *Éléments de géométrie algébrique, IV, troisième partie*. Numdam, 1966.

[**WIK**$_1$] Wikipedia. *Inverse limit*.

[**BRU**] L. BRÜNJES. *Forms of Fermat Equations and Their Zeta Functions*. World Scientific Publishing, 2004.

[**LAN**] S. LANG. *Algebra*. Springer, troisième édition, 2002.

[**LAS**] Y. LASZLO. *Introduction à la théorie de Galois*. Édition de l'École polytechnique, 2014.

[**GÖR**] U. GÖRTZ, T. WEDHORN. *Algebraic Geometry I : Schemes*. Première édition, 2010.

[**BOR**] A. BOREL, J. -P. SERRE. *Théorème de finitude en cohomologie galoisienne*. 1964.

[**GUG**] R. GUGLIELMETTI. Mémoire universitaire : *Groupes profinis et cohomologie galoisienne*. EPFL.