

Modification locale dans l'algorithme de gradient projeté appliqué au problème de Bingham

Stage Master 2 MACS - rapport final

Benoît SENARD

Encadrant : Nicolas ROQUET

Université Gustave Eiffel - Laboratoire GPEM

4 avril - 17 août 2022

Contents

1	Introduction	3
2	Un problème modèle	4
2.1	Propriétés d'analyse fonctionnelle	5
3	L'algorithme de gradient projeté (ou ISTA/Uzawa)	7
4	Première approche théorique du gradient projeté localement pondéré (LWPG)	9
4.1	Convergence pour R connue à l'avance	9
4.2	Minimisation de la fonctionnelle Φ - ordre de convergence pour R connu à l'avance	10
4.3	Pénalisation	12
5	L'algorithme d'Uzawa modifié appliqué au problème de Poiseuille plan	12
5.1	Hypothèse sur ρ	13
5.2	Réurrence explicite du schéma de Poiseuille	14
6	Tests et résultats pour le problème de Couette	18
6.1	Tests LWPG	21
6.2	L'algorithme LPWPG	23
6.3	Tests LPWPG comparés avec ISTA	26
6.4	Comparaison LPWPG/ISTA avec le terme de second membre f	29
6.5	Tests pour $2 \leq a_R \leq 20$	29
7	Conclusion et perspectives	30
	Bibliographie	31

1 Introduction

Le laboratoire GPEM (Granulats et Procédés d'Elaboration des Matériaux), rattaché au campus de Nantes (Bouguenais) de l'université Gustave Eiffel, est composé de chercheurs aux compétences très diverses qui vont des mathématiques appliquées au génie civil en passant par la physique, le génie des procédés ou encore la chimie. Ces compétences sont mobilisées pour développer l'économie circulaire de la ville et les procédés qui y sont associés.

Une thématique commune à toutes les recherches du laboratoire concerne les pâtes granulaires. Ce sont des matériaux viscoplastiques, c'est-à-dire qu'ils se comportent comme un fluide ou un solide localement : plus ils sont soumis à une forte sollicitation à un endroit, plus ils s'écoulent de façon liquide au voisinage de cet endroit, comme de la purée. Au-delà des préoccupations du laboratoire (fabrication de béton, tri des déchets, construction en terre, etc.), la modélisation des écoulements de pâtes granulaires offre de nombreuses applications en génie civil (boues d'épuration), environnementales (coulées de boue, avalanches), biologiques (fluides corporels tels que le sang). Le modèle de Bingham ([Bin22]) est un modèle viscoplastique que l'on utilise en général comme prototype, car il contient la difficulté fondamentale de la viscoplasticité : l'effet de seuil. Cette difficulté se traduit par l'existence de zones de l'écoulement (dites *rigides*) de mesure de Lebesgues non-négligeables dans lesquelles le taux de déformation (partie symétrique du gradient de vitesse) est nul. La régularité du champ de vitesse est *a priori* limitée au voisinage du bord des zones rigides. Plus précisément le champs de vitesse n'est *a priori* pas dans l'espace de Sobolev $H^3(\Omega)$ (où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est le domaine de l'écoulement), même lorsque les données du problème sont très régulières. Cette particularité conduit à de nombreuses limitations dans les méthodes d'approximation connues. Ainsi, de nombreuses recherches visent à réduire à ces limitations. Dans le présent travail, c'est la vitesse de convergence d'une classe d'algorithmes pour la non-linéarité décrite par l'effet de seuil qui est concernée.

Généralement, sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, le modèle de Bingham s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \|\tau\| \leq g \iff D(u) = 0 \\ \|\tau\| > g \iff \tau = 2\mu D(u) + g \frac{D(u)}{\|D(u)\|} \end{cases}$$

où u est le champ de vitesse, $D(u) := (\nabla u + (\nabla u)^T)/2$ son taux de déformation, et τ le déviateur du tenseur de contrainte¹. On utilise la norme $\|w\| = \sqrt{w : w}$ associée au produit scalaire tensoriel $w : v = \sum_{i,j} w_{ij}v_{ij}$. On définit aussi g le seuil de plasticité du matériau, parfois aussi noté τ_y dans la littérature, et la viscosité μ .

Ce modèle, complété par les équations de conservation de la mécanique des milieux continus, ainsi que des conditions initiales et aux limites, définit un système d'équations aux dérivées partielles décrivant complètement l'écoulement. Dans le cas présent, l'objectif étant de travailler sur la résolution de la non-linéarité de l'effet de seuil, on se concentre sur une description stationnaire et sans effet d'inertie, à masse volumique ρ constante :

$$\begin{cases} \rho (\nabla u) \cdot u - \operatorname{div} \tau - \nabla p = f = 0 & \text{(conservation de la quantité de mouvement)} \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{(conservation de la masse)} \end{cases}$$

avec le produit scalaire $(\nabla u) \cdot u$ négligé (précisément ce que signifie "sans effet d'inertie").

La plupart des algorithmes de la littérature consacrés à la résolution de ce problème non linéaire considère une formulation dans le cadre de l'optimisation convexe sous contraintes. La non-différentiabilité de la fonctionnelle à minimiser pour trouver u rend difficile l'obtention d'algorithmes performants (c'est-à-dire dont les temps de calcul sont compatibles avec les besoins de simulation, et plus généralement avec les taux de convergence les meilleurs possibles), c'est l'objet de nombreuses recherches depuis une cinquantaine d'années ([GLT81], [BT09], [Ble17a], [Ble17b], [Sar16], [SW17]).

¹Le tenseur de contrainte (noté souvent σ par les mécaniciens) se décompose en sa partie déviatrice (ici τ) et sa partie sphérique qui est la pression isostatique notée p .

On trouve des méthodes itératives de calcul de point de selle dans [GLT81], [RS03], [BT09] et ses variantes récentes, robustes et simples à programmer mais dont la lenteur reste insatisfaisante en pratique malgré la populaire accélération récente initiée dans [BT09] pour le traitement d’images à partir de travaux généraux de [Nes83], puis appliquée à Bingham dans [Tre+18].

Des approches plus récentes [Ble17a], [Ble17b] et [Sar16] montrent des performances supérieures d’un ordre dans leur taux de convergence, mais avec un coût unitaire de l’itération bien supérieur et avec davantage de complexité de mise en oeuvre. Le problème reste donc largement ouvert.

On peut également mentionner une classe de méthode au succès déclinant mais encore très utilisées, consistant à régulariser l’effet de seuil de manière à pouvoir appliquer des méthodes efficaces pour minimiser des fonctionnelles différentiables. La plus populaire est [Pap87]. Cependant, il est délicat d’interpréter physiquement et de fixer le paramètre de régularisation, ce qui a conduit à une grande difficulté d’utilisation fiable en pratique. En outre, les performances sont fortement dégradées lorsque le modèle régularisé tend vers le modèle initial.

Dans le présent travail, il s’agit d’utiliser des propriétés locales pour modifier un algorithme de gradient projeté connu sous le nom ISTA ([BT09]) ou Uzawa ([GLT81]) selon le contexte applicatif. C’est une approche originale, car toutes les recherches actuelles utilisent des propriétés globales. Notre motivation vient du fait que les propriétés locales d’un matériau viscoplastique ne sont pas les mêmes partout.

Plus précisément, dans le cadre du stage, on présentera un problème modèle (celui de Bingham), pour ensuite se focaliser sur un pas de descente variable en espace (dans l’algorithme de gradient projeté), en privilégiant notamment des valeurs différentes dans les zones rigides, les zones complémentaires dites fluides. Dans un premier temps, on s’intéresse à des valeurs constantes du pas dans les deux types de région et on examine les performances sur des cas mono-dimensionnels simples (Sections 2 à 5), tout en démontrant la convergence de l’algorithme de gradient projeté localement pondéré (LWPG). L’un semble pouvoir être traité explicitement (problème de Poiseuille plan, quitte à adapter l’algorithme ; Section 5), l’autre numériquement (problème de Couette, Section 6). Dans un second temps (Section 6), on réalisera des tests numériques sur le problème de Couette avec l’algorithme LWPG ainsi que la variante de pénalisation (LPWPG) pour mettre en évidence les gains de performances qu’on espère obtenir par rapport à l’algorithme ISTA.

2 Un problème modèle

La solution du problème qu’on propose consiste à appliquer une méthode de gradient projeté en trouvant λ (défini par $\tau = 2\mu D(u) + g\lambda$) comme l’argument minimum d’une fonctionnelle qu’on explicitera dans cette section-ci.

Sans perte de généralité, on formule dans cette section l’écoulement stationnaire d’un matériau de Bingham confiné dans une conduite droite de section constante Ω . Ce cadre est introduit ici pour simplifier la présentation. Le matériau est mis en mouvement par une chute linéique de pression f et le fluide adhère aux parois. Le champ de vitesse se réduit alors à une seule composante parallèle à l’axe de la conduite, encore notée u . Les contraintes se réduisent aux composantes de cisaillement, en particulier $D(u)$ se réduit à ∇u . La viscosité est fixée à 1 dans le but de simplifier l’écriture, puisque le paramètre physique pertinent est le seuil de plasticité g . Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . On définit pour les fonctions $u, v \in H_0^1(\Omega)$ le produit scalaire $((u, v)) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$, et la norme associée $\|u\| = \sqrt{((u, u))}$.

Soit la fonctionnelle

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + g \int_{\Omega} |\nabla v| - \int_{\Omega} f v.$$

On définit aussi l’ensemble convexe $K = \{\nu \in (L^2(\Omega))^2; |\nu| \leq 1 \text{ p.p. sur } \Omega\}$. Pour introduire l’algorithme d’Uzawa pour le problème de Bingham avec un pas ρ constant, on définit la vitesse u et le champ de tension $\lambda \in K$ liés par le problème de Bingham : avec (\cdot, \cdot) le produit scalaire de

$(L^2(\Omega))^2$,

$$\begin{cases} ((u, v) + g(\lambda, \nabla v) = (f, v), & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ (\mu - \lambda, \nabla u) \leq 0 & \forall \mu \in K \end{cases} \quad (1)$$

On peut montrer ([GLT81]) que (1) est une formulation variationnelle du présent problème d'écoulement et qu'on a les caractérisations suivantes :

$$u \in \underset{H_0^1(\Omega)}{\operatorname{argmin}} J \Leftrightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) + g \int_{\Omega} |\nabla v| - g \int_{\Omega} |\nabla u| \geq \int_{\Omega} f(v - u), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in K \text{ et } \exists ! u \in H_0^1(\Omega) \text{ tels que (1) est vérifié.}$$

Pour $\mu \in (L^2(\Omega))^2$ donné, on pose $u(\mu) \in H_0^1(\Omega)$ l'unique fonction (d'après le théorème de Lax-Milgram) qui vérifie

$$\int_{\Omega} \nabla u(\mu) \cdot \nabla v + g \int_{\Omega} \mu \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

la fonctionnelle $\Phi(\mu) = \frac{1}{2g} \int_{\Omega} |\nabla u(\mu)|^2$ pour $\mu \in K$ ainsi que

$$\Psi(\mu) = \Phi(\mu) + \mathbf{1}_K(\mu), \quad \mu \in (L^2(\Omega))^2$$

où la fonction indicatrice de l'analyse convexe est $\mathbf{1}_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{si } x \notin K \end{cases}$.

On a alors

$$\lambda \in \operatorname{argmin} \Psi \Leftrightarrow (\mu - \lambda, \nabla u(\lambda)) \leq 0 \quad \forall \mu \in K.$$

Autrement dit, minimiser Φ sur K revient à minimiser Ψ sur $(L^2(\Omega))^2$ et à trouver une solution de (1). On peut ainsi écrire différentes formulations variationnelles du problème de Bingham, mais c'est la minimisation de Ψ et la formulation (1) que nous utilisons dans ce travail.

2.1 Propriétés d'analyse fonctionnelle

On résume ici quelques résultats utiles pour comprendre et analyser la convergence des algorithmes de gradient projeté.

Lemme 2.1. *Les assertions suivantes sont vraies sur $L^2(\Omega)^2$:*

- Φ est convexe et lipschitzienne.
- Φ est dérivable sur K , de dérivée $\Phi'(\mu) = -\nabla u(\mu)$.
- Φ' est continue et g -lipschitzienne.

Preuve. • *Convexité.* La fonction $u(\cdot)$ vérifie de par sa définition, pour tout $\alpha \in [0; 1]$, $\lambda, \mu \in K$,

$$u(\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu) = \alpha u(\lambda) + (1-\alpha) u(\mu)$$

Ainsi $2g \Phi(\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu) \leq 2g(\alpha \Phi(\lambda) + (1-\alpha) \Phi(\mu))$ par inégalité triangulaire et composition des fonctions u , $u \mapsto \|u\|$ et $x \mapsto x^2$.

- *Dérivabilité.* On prend la première ligne du problème (1) avec $v = u(\mu + \eta) - u(\mu)$,

$$\begin{aligned} \|u(\mu + \eta) - u(\mu)\|^2 &= -g(\eta, \nabla(u(\mu + \eta) - u(\mu))) \\ &\leq g|\eta| \|u(\mu + \eta) - u(\mu)\| \\ &\leq \frac{g^2}{2} |\eta|^2 + \frac{1}{2} \|u(\mu + \eta) - u(\mu)\|^2 \end{aligned}$$

avec les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, ce qui entraîne $\|u(\mu + \eta) - u(\mu)\|^2 = \mathcal{O}(|\eta|^2)$. Or pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$2g(\Phi(\mu + \eta) - \Phi(\mu)) = \|u(\mu + \eta) - u(\mu)\|^2 + 2((u(\mu + \eta) - u(\mu), u(\mu)))$$

et d'autre part $((u(\mu + \eta) - u(\mu), u(\mu)) = -g(\eta, \nabla(u(\mu)))$.

On a aussi $((u(\lambda) - u(\mu), v)) = -g(\lambda - \mu, \nabla v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ puis en prenant $v = u(\lambda) - u(\mu)$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient $|\nabla u(\lambda) - \nabla u(\mu)| = \|u(\lambda) - u(\mu)\| \leq g|\lambda - \mu|$.

- *Continuité.* Enfin pour la continuité lipschitzienne de Φ ,

$$\begin{aligned} \|u(\lambda)\|^2 - \|u(\mu)\|^2 &= \|u(\lambda) - u(\mu)\|^2 + 2((u(\lambda) - u(\mu), u(\mu))) \\ &= -g(\lambda\mu, \nabla(u(\lambda) - u(\mu))) - 2g(\lambda - \mu, \nabla u(\mu)) \\ &= -g(\lambda\mu, \nabla(u(\lambda) + u(\mu))) \end{aligned}$$

Par conséquent, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\|u(\lambda)\|^2 - \|u(\mu)\|^2| \leq g|\lambda - \mu| \|u(\lambda) + u(\mu)\|$. Sachant que $((u(\lambda) + u(\mu), v)) = 2(f, v) - g(\lambda + \mu, \nabla v)$, on obtient

$$\|u(\lambda) + u(\mu)\| \leq 2|f| + g|\lambda + \mu| \leq 2(|f| + g)$$

donc

$$|\Phi(\lambda) - \Phi(\mu)| \leq \frac{1}{2g} \cdot g|\lambda - \mu| \cdot 2(|f| + g) = (|f| + g)|\lambda - \mu|$$

□

Pour déterminer l'existence d'un minimiseur de Ψ , on va fournir les définitions et le théorème tirés de [Pey15] :

Définition 2.1. Soient X un espace séparé (ou de Hausdorff), et une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

- f est dite **propre** lorsque son **domaine effectif** $\text{dom } f = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ n'est pas vide.
- On dit que f est **semi-continue inférieurement** en un point $x_0 \in X$ si, pour tout $\alpha < f(x_0)$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(y) > \alpha$ pour tout $y \in V$. Si f est semi-continue inférieurement en tout point de X , on dit que f est **semi-continue inférieurement sur X** .

Théorème 2.1 (existence d'un minimiseur de f). Soient X un espace séparé (ou de Hausdorff), et une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si f est propre, semi-continue inférieurement, convexe et coercive (pour les suites dans X), alors $\text{argmin}_X f$ est non-vide et faiblement compacte. De plus, si f est strictement convexe, alors $\text{argmin}_X f$ est un singleton (autrement dit f admet un unique minimiseur sur son domaine).

Corollaire 2.1. La fonctionnelle Ψ admet au moins un minimiseur $\lambda \in K$.

Preuve. En prenant $X = (L^2(\Omega))^N$, on cherche à caractériser Ψ , sachant qu'elle coïncide avec Φ sur K .

- *Propreté.* Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ bornée et telle que ∇v soit borné aussi, et $\mu \in K$. On a bien $((u(\mu), v)) = (f, v) - g(\mu, \nabla v)$ qui est fini. On peut montrer avec les outils classiques que si $\mu \in K$, on a :

$$\begin{aligned} \|u(\mu)\|^2 &= |(f, u(\mu)) - g(\mu, \nabla u(\mu))| \\ &\leq |(f, u(\mu))| + g|\mu| \cdot \|u(\mu)\| \\ &\leq \|f\|_* \|u(\mu)\| + g|\Omega|^{1/2} \cdot \|u(\mu)\| \end{aligned}$$

On obtient donc la majoration $\sqrt{2g\Phi(\mu)} = \|u(\mu)\| \leq \|f\|_* + g|\Omega|^{1/2}$. En effet, on définissant $H^{-1}(\Omega)$ comme le dual topologique de $H_0^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ peut être identifié à un sous-ensemble de $H^{-1}(\Omega)$ (les deux espaces sont même isomorphes d'après le théorème de Riesz).

En notant encore f l'élément de $H^{-1}(\Omega)$ défini par : $v \mapsto (f, v)$ pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on peut écrire sa norme H^{-1} :

$$\|f\|_* = \sup_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{|f(v)|}{\|v\|}$$

De plus, comme $|\mu(x)| \leq 1$ p.p. sur Ω , la norme L^2 de μ est bien majoré par $|\Omega|^{1/2}$. On a donc bien Φ finie, et donc aussi Ψ finie puisque μ est pris dans K . Cela signifie donc que $\text{dom } \Psi = K$. En fait, il suffit ici de remarquer que $\Psi(0) = 0$, donc $\text{dom } \Psi$ n'est pas vide.

- *Semi-continuité inférieure.* Ψ est déjà continue sur $\text{int } K$ (intérieur de K) parce qu'elle y coïncide avec Φ . Par sa définition, K est fermé dans $(L^2(\Omega))^N$ pour la norme L^2 , ce qui donne $\partial K \subset K$. Il suffit alors de montrer sa semi-continuité inférieure sur K ou son complémentaire. Pour cela, il faut considérer un voisinage V de μ dans lequel $\Psi(\mu) > a$ (avec $a > 0$ donné), ensuite :
 - d'une part $V \cap K$, dans ce cas la continuité Lipschitzienne de Ψ permet de définir explicitement V tels que tous éléments de V évaluent Ψ à une valeur plus grande que a .
 - d'autre part $V \cap ((L^2(\Omega))^2 \setminus K)$, dans ce cas la définition de semi-continuité s'applique immédiatement quel que soit V puisque $\Psi = \infty > a$.
- *Convexité.* Ψ est convexe sur K d'après le Lemme 2.1, et tend vers $+\infty$ dès qu'on dépasse ∂K . Donc Ψ est convexe sur tout son domaine.
- *Coercivité.* En utilisant la définition d'une fonction coercive par [Pey15], Ψ est coercive car elle vaut $+\infty$ en dehors de K .

□

Théorème 2.2. *Soient H un espace de Hilbert, et K une partie non-vide, fermée et convexe de H . Alors la projection orthogonale P_K vérifie, pour tous $x \in H, y \in K$,*

$$\langle x - P_K(x), y - P_K(x) \rangle_H \leq 0.$$

Dans le cas présent, P_K la projection orthogonale sur K est définie par :

$$P_K(\mu) = \begin{cases} \mu & \text{si } |\mu| \leq 1 \\ \frac{\mu}{|\mu|} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour comprendre l'algorithme qui vient, on peut synthétiser dans un lemme différentes expressions équivalentes du modèle de Bingham, lorsqu'on utilise λ plutôt que τ . Cet algorithme dit *de gradient projeté* est caractérisé par $\lambda^{n+1} = \lambda^n - \rho G_\rho(\lambda^n)$ où

$$G_\rho(\mu) = \frac{1}{\rho}(\mu - P_K(\mu - \rho \Psi'(\mu)))$$

Cette manière d'écrire l'itération en λ^n permet d'identifier à la fois une direction de descente G_ρ et un pas de descente ρ .

Lemme 2.2. *Soit $\lambda \in (L^2(\Omega))^2$ et $u \in H_0^1(\Omega)$. Alors les trois relations sont équivalentes :*

- $(\mu - \lambda, \nabla u) \leq 0, \forall \mu \in K$
- $\lambda \cdot \nabla u = |\nabla u|, |\lambda| \leq 1$ p.p. sur Ω
- $\lambda = P_K(\lambda + \rho \nabla u), \forall \rho > 0$

3 L'algorithme de gradient projeté (ou ISTA/Uzawa)

Algorithme 3.1 (algorithme classique d'Uzawa, ISTA). *Soit $\rho > 0$ et $\lambda^0 \in K$. Par récurrence, la suite des $(u^{n+1}, \lambda^{n+1}) \in H_0^1(\Omega) \times K$ se calcule comme suit:*

$$\begin{cases} ((u^{n+1}, v) + g(\lambda^n, \nabla v) = (f, v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \lambda^{n+1} = P_K(\lambda^n + \rho \nabla u^{n+1}) \end{cases} \quad (2)$$

qui reflète l'équation (1).

Remarque 3.1. En fait, on pourrait aussi décrire un algorithme de minimisation pour J , c'est l'approche qui est utilisée dans les méthodes très populaires de Lagrangien augmenté ([RS03], [SW17]). Nous ne le faisons pas car elle introduit une formulation à trois champs, ce qui est plus coûteux en mémoire alors que, dans le modèle de Bingham écrit en (u, λ) , nous n'utilisons que deux champs. L'avantage des méthodes de Lagrangien augmenté est qu'elles convergent sans conditions sur leur paramètre (un paramètre semblable à ρ). Mais, outre le coût mémoire des trois champs, il peut être plus coûteux de résoudre le sous-problème linéaire qui apparaît à chaque itération des méthodes de Lagrangien augmenté, car, dans Uzawa, nous avons à résoudre un simple problème de Poisson pour lequel des méthodes très performantes existent ([Du+09], [ZZ20]), tandis que le sous-problème linéaire des méthodes de Lagrangien augmenté est formé par l'opérateur $\operatorname{div}(D(\cdot))$ (ou $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(\cdot))$ dans le cas présent), qui après discrétisation spatiale est différent de la discrétisation du Laplacien et également souvent plus cher à résoudre numériquement en terme de coût CPU et mémoire.

Preuve de convergence ([GLT81]). Comme P_K est la projection sur K , donc une contraction, on a $|\lambda^{n+1} - \lambda| = |P_K(\lambda^n + \rho \nabla u^{n+1}) - P_K(\lambda + \rho \nabla u)| \leq |\lambda^n - \lambda + \rho \nabla(u^{n+1} - u)|$ d'où, par définition de la norme $\|\cdot\|$,

$$\underbrace{|\lambda^{n+1} - \lambda|^2}_{s^{n+1}} \leq \underbrace{|\lambda^n - \lambda|^2}_{s^n} + 2\rho(\lambda^n - \lambda, \nabla(u^{n+1} - u)) + \rho^2 \|u^{n+1} - u\|^2$$

En posant $v = u^{n+1} - u$, la première ligne du schéma (2) et celle de l'équation (1) entraînent

$$\|u^{n+1} - u\|^2 + g(\lambda^n - \lambda, \nabla(u^{n+1} - u)) = 0$$

On a alors $s^{n+1} \leq s^n + (\rho^2 - \frac{2\rho}{g})\|u^{n+1} - u\|^2$.

Si $\rho < \frac{2}{g}$, alors

$$0 < \rho \left(\frac{2}{g} - \rho \right) \|u^{n+1} - u\|^2 + s^{n+1} \leq s^n$$

$s^{n+1} \leq s^n$, ainsi la suite $(s^n)_n$ est décroissante et bornée entre 0 et s^0 , donc elle converge : $s^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$. On en déduit aussi par le théorème des gendarmes (ρ étant constante) que $\|u^{n+1} - u\|^2$ tend vers zéro.

Soit $\lambda^n \in K$. Comme sa norme est majorée par 1, presque partout sur Ω , on a

$$\left(\int_{\Omega} \|\lambda^n\|^2 \right)^{1/2} \leq |\Omega|^{1/2}$$

d'où $\lambda^n \xrightarrow[w]{} \tilde{\lambda}$ (convergence faible). Donc :

$$((u, v)) + g(\tilde{\lambda}, \nabla v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

On se rappelle la deuxième ligne du schéma :

$$\lambda^{n+1} = P_K(\lambda^n + \rho \nabla u^{n+1});$$

de par le Théorème 2.2,

$$\begin{aligned} 0 &\geq (\mu - \lambda^{n+1}, \rho \nabla u^{n+1} - \lambda^{n+1} + \lambda^n) \\ &\geq (\mu, \rho \nabla u^{n+1} - \lambda^{n+1} + \lambda^n) - (\lambda^{n+1}, \rho \nabla u^{n+1}) - (\lambda, \lambda^n - \lambda + \lambda - \lambda^{n+1}) \\ &\quad - \underbrace{(\lambda^{n+1} - \lambda, \lambda^n - \lambda + \lambda - \lambda^{n+1})} \\ &= \frac{1}{2} \{ |\lambda^n - \lambda - (\lambda^{n+1} - \lambda)|^2 + |\lambda^{n+1} - \lambda|^2 - |\lambda^n - \lambda|^2 \} \end{aligned}$$

or, on a $|\lambda^n - \lambda|^2 \xrightarrow[n]{} l$ et l'accolade est justifiée par

$$|a^n|^2 = |a^n - a^{n+1} + a^{n+1}|^2 = |a^n - a^{n+1}|^2 + |a^{n+1}|^2 + 2(a^{n+1}, a^n - a^{n+1})$$

en écrivant $a^n = \lambda^n - \lambda$. L'inégalité ci-dessus nous donne $(\mu - \tilde{\lambda}, \rho \nabla u) \leq 0$; donc

$$(u, \tilde{\lambda}) \in H_0^1(\Omega) \times K$$

est bien solution du problème (1). □

4 Première approche théorique du gradient projeté localement pondéré (LWPG)

La zone rigide R peut être définie de plusieurs manières différentes et équivalentes :

$$\begin{aligned} \nabla u &= 0 \\ \iff |\nabla u + g \lambda| &< g \\ \iff |\lambda + \rho \nabla u| &< 1, \forall \rho > 0 \end{aligned}$$

Or, la caractérisation $\nabla u = 0$ n'est pas utilisable en arithmétique flottante, et ces équivalences sont donc très utiles en pratique. Alors, on choisit de ne pas utiliser la troisième caractérisation pour éviter de la rendre dépendante d'un paramètre numérique, même si elle a un intérêt pratique puisqu'elle est en partie calculée dans l'opération de projection dans l'algorithme. L'algorithme LWPG (avec détermination dynamique de la zone rigide R^k) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} ((u^{n+1}, v)) + g(\lambda^n, \nabla v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \rho^n = \begin{cases} \rho_R & \text{si } |\nabla u^{n+1} + g \lambda^n| < g \\ \rho_F & \text{sinon} \end{cases} \\ \lambda^{n+1} = P_K(\lambda^n + \rho^n \nabla u^{n+1}) \end{array} \right. \quad (3)$$

Cet algorithme et celui décrit juste après sont étudiés dans le cadre décrit dans les sections 2 et 3. De fait, on verra qu'on peut établir des résultats de convergence dans le cas simplifié où R est connue à l'avance.

4.1 Convergence pour R connue à l'avance

Proposition 4.1. (algorithme LWPG-R) Pour Ω ouvert borné de \mathbb{R}^2 , $\rho_R, \rho_F > 0$, $\rho(x) = \rho_R \chi_R + \rho_F \chi_F$ où F est la zone fluide ; on suppose que la zone rigide R est connue à l'avance. Soit $\lambda^0 \in K$, et pour $n \in \mathbb{N}$, soit l'algorithme :

$$\left\{ \begin{array}{l} ((u^{n+1}, v)) + g(\lambda^n, \nabla v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \lambda^{n+1} = P_K(\lambda^n + \rho \nabla u^{n+1}) \end{array} \right.$$

On suppose que $\rho_R, \rho_F \in]0; \frac{2}{g}[$. Alors les suites $(u^n)_n$ et $(\lambda^n)_n$ convergent faiblement (et $(u^n)_n$ converge aussi fortement) vers une solution du problème (1).

Preuve. On restreint les produits scalaires et leurs normes associées sur Ω à n'importe quel partie ouverte $\mathcal{O} \subset \Omega$:

$$\begin{aligned} (\lambda, \mu)_{\mathcal{O}} &= \int_{\mathcal{O}} \lambda(x) \mu(x) dx ; \quad |\lambda|_{\mathcal{O}}^2 = (\lambda, \lambda)_{\mathcal{O}} \\ ((u, v))_{\mathcal{O}} &= \int_{\mathcal{O}} \nabla u \cdot \nabla v dx ; \quad \|u\|_{\mathcal{O}}^2 = ((u, u))_{\mathcal{O}} \end{aligned}$$

Sachant que $\Omega = R \cup F$ (réunion disjointe), on reprend la première inégalité de la preuve de convergence de l'algorithme (2) en l'appliquant sur R et F en désignant les produits scalaires/normes

restreints sur ces deux zones par les lettres R et F , et en notant $\bar{\lambda}^n = \lambda^n - \lambda$ et $\bar{u}^n = u^n - u$:

$$(L_1) \quad |\bar{\lambda}^{n+1}|_R^2 \leq |\bar{\lambda}^n|_R^2 + 2\rho_R (\bar{\lambda}^n, \nabla \bar{u}^{n+1})_R + \rho_R^2 \|\bar{u}^{n+1}\|_R^2$$

$$(L_2) \quad |\bar{\lambda}^{n+1}|_F^2 \leq |\bar{\lambda}^n|_F^2 + 2\rho_F (\bar{\lambda}^n, \nabla \bar{u}^{n+1})_F + \rho_F^2 \|\bar{u}^{n+1}\|_F^2$$

$(l^n)_n$ converge car décroissante et bornée, donc il y a convergence forte de u^n vers u ($\nabla u^n \rightrightarrows_{L^2} \nabla u$ et $u^n \rightrightarrows_{L^2} u$ grâce à l'inégalité de Poincaré car $u \in H_0^1(\Omega)$). $\lambda^n \in K$ et le caractère borné de Ω entraînent que la suite $(\lambda^n)_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, et converge donc faiblement vers λ à une sous-suite près.

Dans la preuve de convergence de (2) on avait $\|u^{n+1} - u\|^2 + g(\lambda^n - \lambda, \nabla(u^{n+1} - u)) = 0$ ce qui donne sur R et F :

$$\|\bar{u}^{n+1}\|_{R,F}^2 + g(\bar{\lambda}^n, \nabla(\bar{u}^{n+1}))_{R,F} = 0 \xrightarrow{\text{somme}} (\bar{\lambda}^n, \nabla(\bar{u}^{n+1})) = -\frac{1}{g} \|\bar{u}^{n+1}\|^2$$

En posant $l^n := \frac{1}{\rho_R} |\bar{\lambda}^n|_R^2 + \frac{1}{\rho_F} |\bar{\lambda}^n|_F^2$, l'opération $\frac{1}{\rho_R}(L_1) + \frac{1}{\rho_F}(L_2)$ entraîne

$$\begin{aligned} l^{n+1} &\leq l^n - \frac{2}{g} \|\bar{u}^{n+1}\|^2 + \rho_R \|\bar{u}^{n+1}\|_R^2 + \rho_F \|\bar{u}^{n+1}\|_F^2 \\ &\Rightarrow \left(\frac{2}{g} - \rho_R\right) \|\bar{u}^{n+1}\|_R^2 + \left(\frac{2}{g} - \rho_F\right) \|\bar{u}^{n+1}\|_F^2 + l^{n+1} \leq l^n \\ &\Rightarrow \min\left(\frac{2}{g} - \rho_R, \frac{2}{g} - \rho_F\right) \|\bar{u}^{n+1}\|_F^2 + l^{n+1} \leq l^n \end{aligned}$$

En restreignant $\lambda^{n+1} = P_K(\lambda^n + \rho \nabla u^{n+1})$ à R puis en utilisant les propriétés de P_K comme projection orthogonale, on a bien

$$\begin{aligned} 0 &\geq (\mu - \lambda^{n+1}, \rho_R \nabla u^{n+1} - \lambda^{n+1} + \lambda^n)_R \\ &\geq (\mu, \rho_R \nabla u^{n+1} - \lambda^{n+1} + \lambda^n)_R - (\lambda^{n+1}, \rho_R \nabla u^{n+1})_R - (\lambda, \bar{\lambda}^n - \bar{\lambda}^{n+1})_R \\ &\quad - (\bar{\lambda}^{n+1}, \bar{\lambda}^n - \bar{\lambda}^{n+1})_R \end{aligned}$$

Or $-(\bar{\lambda}^{n+1}, \bar{\lambda}^n - \bar{\lambda}^{n+1})_R = \frac{\rho_R}{2} \left(\left| \frac{\bar{\lambda}^n}{\sqrt{\rho_R}} - \frac{\bar{\lambda}^{n+1}}{\sqrt{\rho_R}} \right|_R^2 + \left| \frac{\bar{\lambda}^{n+1}}{\sqrt{\rho_R}} \right|_R^2 - \left| \frac{\bar{\lambda}^n}{\sqrt{\rho_R}} \right|_R^2 \right) \geq \frac{\rho_R}{2} \left(\left| \frac{\bar{\lambda}^{n+1}}{\sqrt{\rho_R}} \right|_R^2 - \left| \frac{\bar{\lambda}^n}{\sqrt{\rho_R}} \right|_R^2 \right)$
 puis on fait la même décomposition sur F puis en faisant la somme $\frac{1}{\rho_R}(\dots)_R + \frac{1}{\rho_F}(\dots)_F$, il vient

$$0 \geq \left(\mu, \frac{\lambda^n}{\rho} - \frac{\lambda^{n+1}}{\rho} + \nabla u^{n+1} \right) - (\lambda^{n+1}, \nabla u^{n+1}) - \left(\frac{\lambda}{\rho}, \bar{\lambda}^n - \bar{\lambda}^{n+1} \right) + \frac{1}{2} (l^{n+1} - l^n)$$

Par la convergence faible de $(\lambda^n)_n$ et de $(\bar{\lambda}^n)_n$, la convergence forte de ∇u^{n+1} et celle de l^n , il vient

$$0 \geq (\mu, \nabla u) - (\lambda, \nabla u)$$

□

4.2 Minimisation de la fonctionnelle Φ - ordre de convergence pour R connu à l'avance

Proposition 4.2. *La suite $(\lambda^n)_n$ minimise la fonctionnelle Φ sur K (donc Ψ sur $(L^2(\Omega))^2$), sa limite faible λ est aussi un argument minimum ; le couple de fonctions $(u(\lambda), \lambda)$ est une solution du problème de Bingham, et on a l'estimation de convergence pour Φ :*

$$\Phi(\lambda^n) - \Phi(\lambda) \leq \frac{1}{2n} \left| \frac{\lambda^0 - \lambda}{\sqrt{\rho}} \right|^2$$

La preuve de cette proposition fait appel au lemme suivant (en analyse convexe).

Lemme 4.1. *Soient ϕ une fonctionnelle convexe et différentiable sur un espace de Hilbert H , et $M \subset H$ une partie fermée convexe de H . Alors :*

(a) $\phi(\mu) \leq \phi(\zeta) + \langle \phi'(\mu), \mu - \zeta \rangle_H, \forall \mu, \zeta \in M$

(b) si en plus ϕ' est continue et L -lipschitzienne,

$$\phi(\nu) \leq \phi(\mu) + \langle \phi'(\mu), \nu - \mu \rangle_H + \frac{L}{2} |\nu - \mu|_H^2, \forall \nu, \mu \in H$$

Preuve de la Proposition 4.2. Dans la suite, on note $\mu^+ = \mu - \rho G_\rho(\mu)$, un "itéré" de $\mu \in (L^2(\Omega))^N$ selon la direction de descente $G_\rho(\mu)$. La continuité g -lipschitzienne de Φ' et l'estimation (b) dans le lemme donnent :

$$\Phi(\mu^+) \leq \Phi(\mu) - (\Phi'(\mu), \rho G_\rho(\mu)) + \frac{g}{2} |\rho G_\rho(\mu)|^2$$

par suite, sous l'hypothèse $0 \leq \rho \leq 1/g$, on trouve l'inégalité:

$$\Phi(\mu^+) \leq \Phi(\mu) - (\Phi'(\mu), \rho G_\rho(\mu)) + \frac{1}{2} |\sqrt{\rho} G_\rho(\mu)|^2$$

puis, en y insérant le bornage de convexité (a):

$$\Phi(\mu) \leq \Phi(\zeta) - (\Phi'(\mu), \zeta - \mu), \forall \zeta \in (L^2(\Omega))^N$$

il vient

$$\Phi(\mu^+) \leq \Phi(\zeta) + (\Phi'(\mu), \mu^+ - \zeta) + \frac{1}{2} |\sqrt{\rho} G_\rho(\mu)|^2 \quad (4)$$

Par la définition de $G_\rho(\mu)$, $\mu^+ = P_K(\mu - \rho \Phi'(\mu))$, ce qui peut être exprimé de façon variationnelle comme

$$(\xi - \mu^+, \rho[G_\rho(\mu) - \Phi'(\mu)]) = (\xi - \mu^+, \mu - \rho \Phi'(\mu)) \leq 0, \forall \xi \in K$$

Si on prend, d'une part $\xi = \mu^+ \chi_R + \zeta \chi_F$, puis d'autre part, $\xi = \zeta \chi_R + \mu^+ \chi_F$,

$$\begin{aligned} (0, \rho_R[G_\rho(\mu) - \Phi'(\mu)])_R + (\zeta - \mu^+, \rho_F[G_\rho(\mu) - \Phi'(\mu)])_F &\leq 0 \\ (\zeta - \mu^+, \rho_R[G_\rho(\mu) - \Phi'(\mu)])_R + (0, \rho_F[G_\rho(\mu) - \Phi'(\mu)])_F &\leq 0 \end{aligned}$$

puis ajoutant ensemble la première ligne divisée par ρ_F , et la deuxième ligne divisée par ρ_R , on obtient

$$(\zeta - \mu^+, G_\rho(\mu) - \Phi'(\mu)) \leq 0$$

soit $(\Phi'(\mu), \mu^+ - \zeta) \leq (G_\rho(\mu), \mu - \rho G_\rho(\mu) - \zeta) = (G_\rho(\mu), \mu - \zeta) - \rho |G_\rho(\mu)|^2$. L'équation (4) devient

$$\Phi(\mu^+) \leq \Phi(\zeta) + (G_\rho(\mu), \mu - \zeta) - \frac{1}{2} |\sqrt{\rho} G_\rho(\mu)|^2$$

Maintenant, en prenant $\mu = \zeta = \lambda^{i-1}$, et donc $\mu^+ = \lambda^i$, on obtient la relation de descente

$$\Phi(\lambda^i) \leq \Phi(\lambda^{i-1}) - \frac{1}{2} |\sqrt{\rho} G_\rho(\lambda^{i-1})|^2 \leq \Phi(\lambda^{i-1})$$

La dernière estimation s'obtient à partir de l'équation (4) reformulée en prenant $\zeta = \lambda$:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda^i) - \Phi(\lambda) &\leq (G_\rho(\lambda^{i-1}), \lambda^{i-1} - \lambda) - \frac{1}{2} |\sqrt{\rho} G_\rho(\lambda^{i-1})|^2 \\ &\leq \frac{1}{2\rho_R} (|\lambda^{i-1} - \lambda|_R^2 - |\lambda^i - \lambda|_R^2) + \frac{1}{2\rho_F} (|\lambda^{i-1} - \lambda|_F^2 - |\lambda^i - \lambda|_F^2) \end{aligned}$$

En sommant pour $i = 1, \dots, n$ et par décroissance de la suite $(\Phi(\lambda^n))_n$, il vient

$$n(\Phi(\lambda^n) - \Phi(\lambda)) \leq \frac{1}{2\rho_R} (|\lambda^0 - \lambda|_R^2 - |\lambda^n - \lambda|_R^2) + \frac{1}{2\rho_F} (|\lambda^0 - \lambda|_F^2 - |\lambda^n - \lambda|_F^2)$$

□

4.3 Pénalisation

On remarque *a priori* dans LWPG, que ρ_R est limité tandis que ∇u^n tend vers zero dans R^n . Ce qui veut dire que λ^n tend à stagner dans R^n , et que des valeurs de ρ_R plus grande que $\frac{2}{g}$ pourraient alors peut-être offrir de meilleurs résultats. En outre, il est intéressant de chercher à exploiter la propriété $D(u) = 0$ définissant les zones rigides.

C'est ainsi qu'on propose de considérer le problème equivalent à Bingham :

$$\begin{cases} ((u, v)) + a_R ((u, v))_R + g(\lambda, \nabla v) = (f, v) & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ (\mu - \lambda, \nabla u) \leq 0 & \forall \mu \in K \end{cases}$$

où le suffixe R dans le produit scalaire indique que l'intégration se fait sur le sous-domaine R et qu'on introduit l'agorithme LPWPG :

$$\begin{cases} ((u^{n+1}, v)) + a_R ((u^{n+1}, v))_{R^{n+1}} = (f, v) - g(\lambda^n, \nabla v), & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \lambda^{n+1} = P_K(\lambda^n + \rho \nabla u^{n+1}) \end{cases}$$

où R^k est la zone rigide calculée à chaque itération (selon la partition notée $\Omega = R^k \cup F^k$) et a_R un coefficient positif dont le rôle désiré est de forcer le gradient itéré ∇u^{n+1} à converger plus vite vers un gradient de solution ∇u qui est nul dans R et qui vérifie bien la première ligne du système d'équation (2). L'algorithme LWPG devient LPWPG (pour *penalized* en anglais).

La conséquence de cette pénalisation est que ρ_R peut prendre des valeurs jusqu'à $\frac{2}{g}(1 + a_R)$. En effet, en adaptant la preuve de convergence en section 3 à l'algorithme LPWPG et en la restreignant à la zone rigide R^{n+1} , on a bien

$$\underbrace{|\lambda^{n+1} - \lambda|_{R^{n+1}}^2}_{s^{n+1}} \leq \underbrace{|\lambda^n - \lambda|_{R^{n+1}}^2}_{s^n} + 2\rho_R(\lambda^n - \lambda, D(u^{n+1} - u))_{R^{n+1}} + \rho_R^2 \|u^{n+1} - u\|_{R^{n+1}}^2$$

et

$$(1 + a_R) \|u^{n+1} - u\|_{R^{n+1}}^2 + g(\lambda^n - \lambda, D(u^{n+1} - u))_{R^{n+1}} = 0.$$

Il s'ensuit $s^{n+1} \leq s^n + (\rho_R^2 - \frac{2\rho_R}{g}(1 + a_R)) \|u^{n+1} - u\|_{R^{n+1}}^2$.

Si $0 < \rho_R < \frac{2}{g}(1 + a_R)$, on a

$$0 < \rho_R \left(\frac{2}{g}(1 + a_R) - \rho_R \right) \|u^{n+1} - u\|_{R^{n+1}}^2 + s^{n+1} \leq s^n$$

et la convergence est assurée.

5 L'algorithme d'Uzawa modifié appliqué au problème de Poiseuille plan

Il s'agit de l'écoulement d'un fluide de Bingham entre deux plaques parallèles et planes, suffisamment étendues pour réduire le problème à un système mono-dimensionnel. Le cas d'une conduite droite dont la section Ω est un disque fournit des équations et une solution quasi-identiques une fois le problème formulé en coordonnées polaires.

Soient $u \in H_0^1(-1; 1)$ et $\lambda \in K = \{\mu \in L^2(-1; 1); |\mu| \leq 1 \text{ p.p.}\}$ vérifiant

$$\begin{cases} -u'' - g\lambda' = 1 \\ \lambda u' = |u'| \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = P_K(\lambda + \rho u') \quad \forall \rho > 0$$

Soit l'algorithme d'Uzawa modifié suivant, conformément à l'algorithme (3) en section 4 (où on

suppose la continuité des contraintes $u' + \lambda g$:

$$\lambda^0 = 0$$

$$n \geq 0 \begin{cases} -(u^{n+1})'' - g (\lambda^n)' = & 1 \\ \rho^n = & \begin{cases} \rho_R & \text{si } |(u^{n+1})' + g \lambda^n| < g \\ \rho_F & \text{sinon} \end{cases} \\ \lambda^{n+1} = & P_K(\lambda^n + \rho^n (u^{n+1})') \text{ presque partout} \end{cases}$$

où $P_K(\mu) = \begin{cases} \mu & \text{si } \mu < 1 \\ \frac{\mu}{|\mu|} & \text{sinon} \end{cases}$. Dans l'algorithme, on suppose que les fonctions u , ρ sont paires sur $[-1; 1]$, ainsi que leurs itérés successifs, tout comme λ et ses itérés sont impaires. On a aussi $\rho > 0$ comme ses itérés.

On peut vérifier que la solution exacte est unique et définie par :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1-g^2}{2} + g(g-1) & \text{si } 0 \leq |x| < g \\ \frac{1-x^2}{2} + g(|x|-1) & \text{si } g \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} -\frac{x}{g} & \text{si } 0 \leq |x| < g \\ -\text{sgn } x & \text{si } g \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

où sgn désigne la fonction signe définie par

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

5.1 Hypothèse sur ρ

En supposant la zone rigide R connue à l'avance (et on donc on connaît aussi $\rho = \rho^n$) avec $\frac{\rho_F}{g+1} \leq \rho_R \leq \rho_F$, on introduit le lemme suivant sachant que

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_R & \text{si } 0 \leq |x| < g \\ \rho_F & \text{si } g \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

comme $g > 0$, on a bien $\frac{1}{g+1} < 1$ donc l'hypothèse sur ρ_R , ρ_F a bien un sens puisque ρ est toujours strictement positive.

Lemme 5.1. *On suppose $\frac{\rho_F}{g+1} \leq \rho_R \leq \rho_F$. Soient les suites $(\xi_n^R)_n$, $(\xi_n^F)_n$, $(\eta_n)_n$ définies par*

$$\xi_n^R = \frac{g}{1 - (1 - \rho_R g)^n}$$

$$\xi_n^F = \frac{g}{1 - (1 - \rho_F g)^n}$$

$$\eta_n = \xi_n^F \left[1 + \rho_F g \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{g}{\xi_i^R} - \frac{g}{\xi_i^F} \right) \right]$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, on a $g < \xi_n^F \leq \xi_n^R$. De plus, ces trois suites sont décroissantes, telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^{R,F} = g$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n \leq g$.

Preuve. On a $0 < \rho_R g \leq \rho_F g < 1$, soit $1 > (1 - \rho_R g)^n \geq (1 - \rho_F g)^n > 0$ pour tout $n \geq 1$. En comparant les $1 - (1 - \rho_{R,F} g)^n$ puis en inversant l'inégalité par l'opération g/\cdot , on a alors $\xi_n^R \geq \xi_n^F > g$.

Soit $\rho \in \{\rho_R, \rho_F\} \subset \mathbb{R}_+^*$. On a déjà $\xi_n^{R,F} > g$ pour tout $n \geq 1$. Comme $(1 - \rho g)^n$ tend vers zéro, les réels ξ_n^R, ξ_n^F définissent deux suites décroissantes qui tendent vers g .

La suite des η_n peut se réécrire

$$\begin{aligned} \eta_n &= \xi_n^F \left[1 + \rho_F g \left(\sum_{i=1}^{n-1} (1 - \rho_F g)^i - \sum_{i=1}^{n-1} (1 - \rho_R g)^i \right) \right] \\ &= \xi_n^F \left[1 + \rho_F g \left((1 - \rho_F g) \frac{1 - (1 - \rho_F g)^{n-1}}{\rho_F g} - (1 - \rho_R g) \frac{1 - (1 - \rho_R g)^{n-1}}{\rho_R g} \right) \right] \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n &= g \left[1 + \rho_F g \left(\frac{1 - \rho_F g}{\rho_F g} - \frac{1 - \rho_R g}{\rho_R g} \right) \right] \\ &= g \left(1 + \frac{\rho_R - \rho_F}{\rho_R g} \right) \leq g \end{aligned}$$

Soit $n \geq 1$. On a bien $1 + \rho_F g \sum_{i=1}^n \left(\frac{g}{\xi_i^R} - \frac{g}{\xi_i^F} \right) = \eta_{n+1}/\xi_{n+1}^F \geq 0$ et ce quotient définit une suite décroissante. Comme les ξ_n^F sont déjà positifs, on a $\eta_{n+1} \leq \eta_n$. \square

Remarque 5.1. La limite $g \left(1 + \frac{\rho_R - \rho_F}{\rho_R g} \right)$ de la suite $(\eta_n)_n$ est positive. En effet $\frac{\rho_F}{g+1} \leq \rho_R \leq \rho_F$ entraîne $\frac{\rho_F}{\rho_R g} \leq \frac{g+1}{g}$, donc $1 + \frac{1}{g} - \frac{\rho_F}{\rho_R g} \geq 0$. Comme la suite $(\eta_n)_n$ décroît vers une limite strictement positive en n , tous ses termes sont positifs. Or, la caractérisation de cette limite et le fait que $\eta_1 = \xi_1^F > g$ impliquent qu'il existe un rang $N_{\text{crit}} > 1$ tel que pour tout n , on a $n \geq N_{\text{crit}} \Leftrightarrow \eta_n \leq g$.

5.2 Récurrence explicite du schéma de Poiseuille

Proposition 5.1. En notant $a_{<} = \min(0, a)$ pour $a \in \mathbb{R}$, le schéma modifié vérifie :

$$\begin{aligned} \lambda^0 &= 0; \quad u^1(x) = \frac{1-x^2}{2} \\ \forall n \in [2; N_{\text{crit}}], \quad u^n(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\xi_{n-1}^R} - 1 \right) (x^2 - g^2)_{<} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\xi_{n-1}^F} - 1 \right) (\max(|x|, g)^2 - \eta_{n-1}^2)_{<} + \left(\frac{g}{\xi_{n-1}^R} - \frac{g}{\xi_{n-1}^F} \right) g (\max(|x|, g) - \eta_{n-1})_{<} \\ &\quad + \frac{1 - \max(|x|, \eta_{n-1})^2}{2} + \left[\frac{g}{\xi_{n-1}^R} - \frac{g}{\xi_{n-1}^F} + 1 + \rho_F \sum_{i=1}^{n-2} \left(\frac{1}{\xi_i^R} - \frac{1}{\xi_i^F} \right) g^2 \right] g (\max(|x|, \eta_{n-1}) - 1) \\ \forall n \geq N_{\text{crit}} + 1, \quad u^n(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\xi_{n-1}^R} - 1 \right) (x^2 - g^2) + \frac{1-g^2}{2} + \frac{g^2}{\xi_{n-1}^R} (g-1) & \text{si } 0 \leq |x| < g \\ \frac{1-x^2}{2} + \frac{g^2}{\xi_{n-1}^R} (|x| - 1) & \text{si } g \leq |x| \leq 1 \end{cases} \\ \forall n \in [1; N_{\text{crit}} - 1], \quad \lambda^n(x) &= \begin{cases} -\frac{x}{\xi_n^R} & \text{si } 0 \leq |x| < g \\ -\frac{x}{\xi_n^F} + \text{sgn}(x) \rho_F \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{g}{\xi_i^R} - \frac{g}{\xi_i^F} \right) g & \text{si } g < |x| < \eta_n \\ -\text{sgn } x & \text{si } \eta_n < |x| \leq 1 \end{cases} \\ \forall n \geq N_{\text{crit}}, \quad \lambda^n(x) &= \begin{cases} -\frac{x}{\xi_n^R} & \text{si } 0 \leq |x| < g \\ -\text{sgn } x & \text{si } g < |x| \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Preuve de l'algorithme. À partir de l'équation $-(u^1)'' - g(\lambda^0)' = 1$, on obtient $(u^1)'' = -1 - g \cdot 0 = -1$. En intégrant deux fois, il vient $u^1(x) = -\frac{x^2}{2} + ax + b$, or u^1 est un polynôme pair, d'où $a = (u^1)'(0) = 0$ (car $(u^1)'$ est impair), et $u^1(\pm 1) = 0$, ce qui entraîne $u^1(x) = \frac{1-x^2}{2}$.

Pour la récurrence, on suppose que la caractérisation explicite du schéma modifié est vrai pour un entier $1 \leq n \leq N_{\text{crit}} - 1$, et on va la prouver au rang $n + 1$.

On résout, pour $0 \leq x \leq 1$, l'équation $-(u^{n+1})'' - g(\lambda^n)' = 1$. On a

$$(u^{n+1})'' = -1 - g(\lambda^n)' = \begin{cases} \frac{g}{\xi_n^R} - 1 & \text{si } 0 \leq x < g \\ \frac{g}{\xi_n^F} - 1 & \text{si } g < x < \eta_n \\ -1 & \text{si } \eta_n < x \leq 1 \end{cases}$$

u^{n+1} doit être paire sur $[-1; 1]$ et continue en $\pm g$ et $\pm \eta_n$, et s'annuler en ± 1 . Sa dérivée est un polynôme impair, et s'annule donc en $x = 0$. D'ailleurs, $(u^{n+1})'$ doit aussi satisfaire à la continuité des contraintes. On obtient alors

$$(u^{n+1})'(x) = \begin{cases} \left(\frac{g}{\xi_n^R} - 1\right) x & \text{si } 0 \leq x \leq g \\ \left(\frac{g}{\xi_n^F} - 1\right) (x - g) + (u^{n+1})'(g) & \text{si } g < x \leq \eta_n \\ -(x - \eta_n) + (u^{n+1})'(\eta_n) & \text{si } \eta_n < x \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{g}{\xi_n^R} - 1\right) x & \text{si } 0 \leq x < g \\ \left(\frac{g}{\xi_n^F} - 1\right) (x - g) + \left(\frac{g}{\xi_n^R} - 1\right) g & \text{si } g \leq x < \eta_n \\ -(x - \eta_n) + \left(\frac{g}{\xi_n^F} - 1\right) (\eta_n - g) + \left(\frac{g}{\xi_n^R} - 1\right) g & \text{si } \eta_n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Pour assurer la continuité de u^n sur $[0; 1]$ et avec la condition $u^n(1) = 0$, on intègre $(u^{n+1})'$ avec les constantes d'intégration a, b, c sur chaque sous-intervalle :

$$u^{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\xi_n^R} - 1\right) x^2 + a & \text{si } 0 \leq x < g \\ \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\xi_n^F} - 1\right) x^2 + \left(\frac{g}{\xi_n^R} - \frac{g}{\xi_n^F}\right) gx + b & \text{si } g \leq x < \eta_n \\ -\frac{x^2}{2} + \left[\frac{g}{\xi_n^F} \cdot \eta_n + \left(\frac{g}{\xi_n^R} - \frac{g}{\xi_n^F}\right) g\right] x + c & \text{si } \eta_n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Les constantes a, b, c sont déterminées par

$$\begin{aligned} a &= u^{n+1}(g) - 1 \text{er polynome en } x = g \\ b &= u^{n+1}(\eta_n) - 2 \text{e polynome en } x = \eta_n \\ c &= -3 \text{e polynome en } x = 1 \end{aligned}$$

donc il vient, pour $1 \leq n \leq N_{\text{crit}} - 1$,

$$u^{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\xi_n^R} - 1\right) (x^2 - g^2) + u^{n+1}(g) & \text{si } 0 \leq |x| < g \\ \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\xi_n^F} - 1\right) (x^2 - \eta_n^2) + \left(\frac{g}{\xi_n^R} - \frac{g}{\xi_n^F}\right) g(|x| - \eta_n) + u^{n+1}(\eta_n) & \text{si } g \leq |x| < \eta_n \\ \frac{1-x^2}{2} + \left[\frac{g}{\xi_n^R} - \frac{g}{\xi_n^F} + 1 + \rho_F \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\xi_i^R} - \frac{1}{\xi_i^F}\right) g^2\right] g(|x| - 1) & \text{si } \eta_n \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

On a pu modifier un peu l'algorithme modifié en lui imposant que

$$\rho = \begin{cases} \rho_R & \text{si } 0 \leq |x| < g \\ \rho_F & \text{sinon} \end{cases}$$

soit déjà connue à l'avance avec l'hypothèse $\frac{\rho_F}{g+1} \leq \rho_R \leq \rho_F$.

Sur l'intervalle $[0; 1]$ on doit évaluer $\lambda^n + \rho^n(u^{n+1})'$ pour calculer λ^{n+1} :

$$\lambda^n + \rho^n(u^{n+1})' = \begin{cases} -\frac{x}{\xi_n^R} + \rho_R \left(\frac{g}{\xi_n^R} - 1 \right) x & \text{si } 0 \leq x < g \\ -\frac{x}{\xi_n^F} + \rho_F \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{g}{\xi_i^R} - \frac{g}{\xi_i^F} \right) g + \rho_F \left(\frac{g}{\xi_n^R} - 1 \right) x + \rho_F \left(\frac{g}{\xi_n^R} - \frac{g}{\xi_n^F} \right) g & \text{si } g < x < \eta_n \\ -1 - \rho_F x + \rho_F \left[\frac{g}{\xi_n^R} - \frac{g}{\xi_n^F} + 1 + \rho_F \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\xi_i^R} - \frac{1}{\xi_i^F} \right) g^2 \right] g & \text{si } \eta_n < x \leq 1 \end{cases}$$

On note $\Xi^R = -\frac{1}{\xi_n^R} + \rho_R \left(\frac{g}{\xi_n^R} - 1 \right)$. La définition de ξ_n^R entraîne, en notant $d = 1 - \rho_R g$,

$$\begin{aligned} \Xi^R &= \frac{d^n - 1}{g} + \rho_R (1 - d^n - 1) \\ &= (d^n - 1) \left(\frac{1}{g} - \rho_R \right) - \rho_R \\ &= \frac{(d^n - 1)d - \rho_R g}{g} \\ &= \frac{d^{n+1} - d - \rho_R g}{g} \\ &= \frac{d^{n+1} - 1}{g} \\ &= -\frac{1}{\xi_{n+1}^R} \end{aligned}$$

de la même manière, $-\frac{1}{\xi_n^F} + \rho_F \left(\frac{g}{\xi_n^F} - 1 \right) = -\frac{1}{\xi_{n+1}^F}$.

Il vient, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$\lambda^n + \rho^n(u^{n+1})' = \begin{cases} -\frac{x}{\xi_{n+1}^R} & \text{si } 0 \leq x < g \\ -\frac{x}{\xi_{n+1}^F} + \rho_F \sum_{i=1}^n \left(\frac{g}{\xi_i^R} - \frac{g}{\xi_i^F} \right) g & \text{si } g < x < \eta_n \\ -1 - \rho_F x + \rho_F \left[\frac{g}{\xi_n^R} - \frac{g}{\xi_n^F} + 1 + \rho_F \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\xi_i^R} - \frac{1}{\xi_i^F} \right) g^2 \right] g & \text{si } \eta_n < x \leq 1 \end{cases}$$

On passe en revue les cas où on a $|\lambda^n + \rho^n(u^{n+1})'| < 1$ lorsque $n \leq N_{\text{crit}} - 2$ (le plus grand rang n tel que $g < \eta_{n+1}$) :

cas 1 : $0 \leq x < g$ et $\frac{x}{\xi_{n+1}^R} < 1$. Ce cas équivaut à $0 \leq x < g$ car $\xi_{n+1}^R > g$.

cas 2 : $g < x < \eta_n$ et $\left| \frac{x}{\xi_{n+1}^F} - \rho_F \sum_{i=1}^n \left(\frac{g}{\xi_i^R} - \frac{g}{\xi_i^F} \right) g \right| < 1$, ce qui implique l'inéquation

$$-1 + \rho_F \sum_{i=1}^n \left(\frac{g}{\xi_i^R} - \frac{g}{\xi_i^F} \right) g < \frac{x}{\xi_{n+1}^F} < 1 + \rho_F \sum_{i=1}^n \left(\frac{g}{\xi_i^R} - \frac{g}{\xi_i^F} \right) g$$

or $\xi_{n+1}^F \left[1 + \rho_F g \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{g}{\xi_i^R} - \frac{g}{\xi_i^F} \right) \right] = \eta_{n+1}$ et la borne gauche dans l'inéquation est strictement négative.

Le cas 2 équivaut donc à $g < x < \eta_{n+1}$ car $g < \eta_{n+1} < \eta_n$.

cas 3 : $\eta_n < x \leq 1$ et $\left| 1 + \rho_F x - \rho_F \left[\frac{g}{\xi_n^R} - \frac{g}{\xi_n^F} + 1 + \rho_F \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\xi_i^R} - \frac{1}{\xi_i^F} \right) g^2 \right] g \right| < 1$. Il vient

$$-1 + \rho_F \left(\frac{g}{\xi_n^R} - \frac{g}{\xi_n^F} + \frac{\eta_n}{\xi_n^F} \right) g < 1 + \rho_F x < 1 + \rho_F \left(\frac{g}{\xi_n^R} - \frac{g}{\xi_n^F} + \frac{\eta_n}{\xi_n^F} \right) g$$

ce qui équivaut à

$$-\frac{2}{\rho_F} + \left(\frac{g}{\xi_n^R} - \frac{g}{\xi_n^F} + \frac{\eta_n}{\xi_n^F} \right) g < x < \left(\frac{g}{\xi_n^R} - \frac{g}{\xi_n^F} + \frac{\eta_n}{\xi_n^F} \right) g$$

la borne de gauche est plus petite que $g - \frac{2}{\rho_F} < 0$ (car $\rho_F < \frac{1}{g} < \frac{2}{g}$). Le cas 3 est impossible car il entraînerait $x < g < \eta_n$.

Sur l'intervalle $[0; 1]$, on a

$$\lambda^{n+1} = \frac{\lambda^n + \rho^n (u^{n+1})'}{\sup(|\lambda^n + \rho^n (u^{n+1})'|, 1)} = \begin{cases} -\frac{x}{\xi_{n+1}^R} & \text{si } 0 \leq x < g \\ -\frac{x}{\xi_{n+1}^F} + \rho_F \sum_{i=1}^n \left(\frac{g}{\xi_i^R} - \frac{g}{\xi_i^F} \right) g & \text{si } g < x < \eta_{n+1} \\ -1 & \text{si } \eta_{n+1} < x < \eta_n \\ -1 & \text{si } \eta_n < x \leq 1 \end{cases}$$

En effet, on a $-\frac{x}{\xi_{n+1}^F} + \rho_F \sum_{i=1}^n \left(\frac{g}{\xi_i^R} - \frac{g}{\xi_i^F} \right) g < 0$ par le lemme 5.1 ($\rho_R \leq \rho_F$). Ensuite, on a

$$-1 - \rho_F x + \rho_F \left[\frac{g}{\xi_n^R} - \frac{g}{\xi_n^F} + 1 + \rho_F \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\xi_i^R} - \frac{1}{\xi_i^F} \right) g^2 \right] g < -1 + \rho_F (g - x) < 0$$

lorsque $\eta_n < x \leq 1$ car $g < \eta_n$.

Ainsi la fonction λ^{n+1} peut être étendue à $[-1; 1]$ par imparité (ici, pour $n \leq N_{\text{crit}} - 2$) :

$$\lambda^{n+1}(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\xi_{n+1}^R} & \text{si } 0 \leq |x| < g \\ -\frac{x}{\xi_{n+1}^F} + \text{sgn}(x) \rho_F \sum_{i=1}^n \left(\frac{g}{\xi_i^R} - \frac{g}{\xi_i^F} \right) g & \text{si } g < |x| < \eta_{n+1} \\ -\text{sgn } x & \text{si } \eta_{n+1} < |x| \leq 1 \end{cases}$$

On passe maintenant au rang $n = N_{\text{crit}} - 1$. Le cas 2 utilisé pour définir $\lambda^{n+1} = P_K(\lambda^n + \rho (u^{n+1})')$ devient faux à ce rang car $\eta_{N_{\text{crit}}} \leq g$. Comme $\lambda^{N_{\text{crit}}}$ est déjà défini sur $[0, g[$, on ajoute au cas 3 l'hypothèse $g < x$; ainsi le cas 3 est toujours faux. On obtient alors

$$\lambda^{N_{\text{crit}}} = \begin{cases} -\frac{x}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} & \text{si } 0 \leq |x| < g \\ -\text{sgn } x & \text{si } g < |x| \leq 1 \end{cases}$$

On résout l'équation $-(u^{N_{\text{crit}}+1})'' - g(\lambda^{N_{\text{crit}}})' = 1$ sur $[0; 1]$, sachant que $(u^{N_{\text{crit}}+1})'(0) = 0$ et $u^{N_{\text{crit}}+1}(1) = 0$. On a

$$(u^{N_{\text{crit}}+1})''(x) = -1 - g(\lambda^{N_{\text{crit}}})'(x) = \begin{cases} \frac{g}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} - 1 & \text{si } 0 \leq |x| < g \\ -1 & \text{si } g < |x| \leq 1 \end{cases}$$

ce qui donne par condition à la limite $x = 0$, et continuité en g :

$$(u^{N_{\text{crit}}+1})'(x) = \begin{cases} \left(\frac{g}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} - 1 \right) x & \text{si } 0 \leq x \leq g \\ -(x - g) + \left(\frac{g}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} - 1 \right) g & \text{si } g < x \leq 1 \end{cases}$$

puis par la condition en $x = 1$ et la continuité en g , il vient

$$\begin{aligned} u^{N_{\text{crit}}+1}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} - 1 \right) x^2 + a & \text{si } 0 \leq x < g \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{g^2}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} x + b & \text{si } g \leq x \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} - 1 \right) (x^2 - g^2) + u^{N_{\text{crit}}+1}(g) & \text{si } 0 \leq x < g \\ \frac{1-x^2}{2} + \frac{g^2}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} (x-1) & \text{si } g \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\lambda^{N_{\text{crit}}} + \rho (u^{N_{\text{crit}}+1})' = \begin{cases} -\frac{x}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} + \rho_R \left(\frac{g}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} - 1 \right) x = -\frac{x}{\xi_{N_{\text{crit}}+1}^R} & \text{si } 0 \leq x < g \\ -1 - \rho_F x + \rho_F \frac{g^2}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} & \text{si } g < x \leq 1 \end{cases}$$

pour étudier les cas où $|\lambda^{N_{\text{crit}}} + \rho (u^{N_{\text{crit}}+1})'| < 1$.

cas 1 : $0 \leq x < g$ et $\frac{x}{\xi_{N_{\text{crit}}+1}^R} < 1$. Ce cas équivaut à $0 \leq x < g$ car $g < \xi_{N_{\text{crit}}+1}^R$.

cas 2 : $g < x \leq 1$ et $\left| 1 + \rho_F x - \rho_F \frac{g^2}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} \right| < 1$. On a, en particulier, $1 + \rho_F x < 1 + \rho_F \frac{g^2}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R}$ mais, comme $g < \xi_{N_{\text{crit}}}^R$, ce cas est faux car, sinon, il donnerait $x < \frac{g^2}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} < \frac{g^2}{g} = g$.

Ainsi, $\lambda^{N_{\text{crit}}+1}$ se définit par

$$\lambda^{N_{\text{crit}}+1} = \begin{cases} -\frac{x}{\xi_{N_{\text{crit}}+1}^R} & \text{si } 0 \leq |x| < g \\ -\text{sgn } x & \text{si } g < |x| \leq 1 \end{cases}$$

la même forme de définition que $\lambda^{N_{\text{crit}}}$ un rang plus haut, car $-1 - \rho_F x + \rho_F \frac{g^2}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} = -1 + \rho_F \left(\frac{g^2}{\xi_{N_{\text{crit}}}^R} - x \right) < -1 + \rho_F (g - x) < 0$.

Ainsi, par récurrence, pour tout $n > N_{\text{crit}} + 1$, u^n sera calculé exactement de la même manière que $u^{N_{\text{crit}}+1}$, et λ^n de la même manière que $\lambda^{N_{\text{crit}}+1}$. □

6 Tests et résultats pour le problème de Couette

On considère ici un cas particulier, celui de l'écoulement entre deux cylindres co-axiaux en rotation, usuellement nommé écoulement de Couette. Il conviendra ici de formuler l'écoulement de Couette sous la forme axisymétrique (symétrique autour d'un axe). Les champs u et λ sont recherchés sous la forme

$$\begin{cases} u(r, \theta) = u_\theta(r) e_\theta \\ \lambda(r, \theta) = \lambda_{r,\theta}(r) e_{r,\theta} \end{cases}$$

en se permettant les notations u_θ et $\lambda_{r,\theta}$ pour les composantes scalaires. On va simplifier le problème en supposant que l'écoulement de Couette est symétrique par rotation selon l'axe des cylindres, ce qui nous donne un système d'équation en 1D radiale. Le symbole **prime** sera utilisé pour la dérivée $\frac{\partial}{\partial r}$, et les équations à résoudre se réduisent alors à :

$$\begin{cases} -\frac{1}{r}(ru')' + \frac{u}{r^2} - g(\lambda' + 2\frac{\lambda}{r}) = 0 \\ \lambda = P_K(\lambda + \rho \frac{r}{2}(\frac{u}{r})') \\ u(R) = \omega R \text{ et } u(1) = 1 \end{cases} \quad (5)$$

où $u \in H^1(R; 1)$, $\lambda \in K := \{\mu \in L^2(R; 1) ; \|\mu\| \leq 1\}$. On remarque que :

- l'incompressibilité est satisfaite.
- le champ de pression nulle est adapté.

On se rappelle aussi que l'opérateur divergence, pour un champ tenseur symétrique μ avec une unique (r, θ) -composante scalaire de cisaillement non nulle encore notée μ , est donnée par $\text{div } \mu = \mu' + 2\frac{\mu}{r}$; et le taux de déformation d'un champ de vecteurs v avec une unique θ -composante scalaire non nulle encore notée c est donné par $D(v) = \frac{r}{2} \left(\frac{v}{r}\right)'$. Ainsi, le norme tensorielle devient $\|\mu\| = \sqrt{2}|\mu|$.

La solution au problème (5) donne la vitesse

$$u = \begin{cases} a^- r + \frac{b^-}{r} + c r \ln(r) & \text{si } r \in]R; r_c] \\ a^+ r + \frac{b^+}{r} & \text{si } r \in]r_c; 1[\end{cases}$$

avec $c = -g\frac{\sqrt{2}}{2}$ et où la condition $D(u) = 0$ sur $]r_c; 1[$ implique $b^+ = 0$. Il vient alors que l'expression de b^+ en fonction de r_c entraîne une condition qui détermine r_c . On obtient la tension :

$$\lambda = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } r \in]R; r_c] \\ \frac{K}{r^2} & \text{si } r \in]r_c; 1[\end{cases}$$

où la constante réelle K obéit à la condition $\|\lambda\| \leq 1, \forall r \in]r_c; 1[$, c'est-à-dire $|K| \leq \frac{r_c^2}{\sqrt{2}}$. Plus précisément, la continuité du champ de tension s'écrit ici $[2D(u) + g\lambda]_{r_c} = 0$. Cependant, comme u est déterminée de telle sorte que $[u]_{r_c} = [u_0]_{r_c} = 0$, la condition de transmission des contraintes devient $[\lambda]_{r_c} = 0$, autrement dit $K = \frac{\sqrt{2}}{2}r_c^2$. Ainsi, les expressions de a^+, b^+, a^- et b^- s'obtiennent des conditions aux limites en $r = R$ et $r = 1$, ainsi que des conditions de continuité de u et u' en $r = r_c$:

$$\begin{aligned} a^+ &= \frac{R^2}{1-R^2} \left[\frac{1}{R^2} - \omega - \frac{c}{2} \left(\ln \left(\frac{r_c}{R} \right)^2 - \left(\frac{r_c}{R} \right)^2 + 1 \right) \right] \\ b^+ &= \frac{R^2}{1-R^2} \left[\omega - 1 + \frac{c}{2} \left(\ln \left(\frac{r_c}{R} \right)^2 - \left(\frac{r_c}{R} \right)^2 + 1 \right) \right] \\ a^- &= \frac{1-\omega R^2}{1-R^2} - \frac{c}{1-R^2} \left(\ln r_c + \frac{1-r_c^2}{2} \right) \\ b^- &= \frac{R^2}{1-R^2} \left[\omega - 1 + c \left(\ln \frac{r_c}{R} + \frac{1-r_c^2}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

La condition $b^+ = 0$ permet d'évaluer $r_c \in]R; 1[$:

$$\omega - 1 + \frac{c}{2} \left(\ln \left(\frac{r_c}{R} \right)^2 - \left(\frac{r_c}{R} \right)^2 + 1 \right) = 0$$

de plus, la condition $r_c \in]R; 1[$ (en prenant ici $R = \frac{1}{2}$) équivaut à une condition sur g :

$$g = \frac{1-\omega}{\frac{\sqrt{2}}{4} \left(\ln \left(\frac{r_c}{R} \right)^2 - \left(\frac{r_c}{R} \right)^2 + 1 \right)} \in [g_0; +\infty[$$

avec

$$g_0 = 2\sqrt{2} \frac{1-\omega}{2 \ln R + \frac{1}{R^2} - 1}.$$

Cela signifie que les zones rigides peuvent ne pas exister pour g assez petit, alors que la situation de blocage $R = \Omega$ ne survient que pour $g \rightarrow +\infty$. Pour $g \leq g_0$, il vient :

$$u = \frac{1-\omega R^2 - g\frac{\sqrt{2}}{2} R^2 \ln R}{1-R^2} \cdot r + \frac{\omega - 1 + g\frac{\sqrt{2}}{2} \ln R}{1-R^2} \cdot \frac{R^2}{r} - g\frac{\sqrt{2}}{2} r \ln r$$

Cela implique aussi que les deux cas $g < g_0$ et $g \geq g_0$ devraient être analysés, dans la mesure où ils peuvent induire des performances différentes dues à des régularités différentes : le cas $g < g_0$ est

en effet une des rares situations où la solution devient régulière car l'effet de seuil ne se manifeste pas. C'est donc aussi un cas "dégénéré", moins pertinent pour notre propos, il ne sera donc pas traité ici.

Dans le programme `OneCouette` (Fortran) utilisé dans tous les tests en Section 7, il y a une option "-f" qui résout le problème de Couette pour un terme $f(r) = 1000 \cos(10\pi(r - R))$. Cela permet, à moindre coût de calcul, de tester un cas plus complexe. Par contre, on ne dispose alors plus de solution connue explicitement.

On va d'abord tester l'algorithme LWPG et d'autres (à venir) dans le cas de Couette. On veut simuler l'écoulement d'un fluide viscoplastique deux cylindres co-axiaux en rotation, de rayons (resp. intérieur et extérieur) $R = r_1$ et $r = 1$, et de vitesses angulaires $\omega = \omega_1$ et $\omega = 1$.

Dans ce programme, une discrétisation en éléments finis est utilisée pour calculer les approximations respectives u_h et λ_h de u et λ , et ensuite pour comparer les itérés discrets u_h^k et λ_h^k . Pour $1 \leq i \leq N + 1$, soit $r_i \in \mathbb{R}$ tel que $r_1 < \dots < r_N < r_{N+1} = 1$, et

$$V_h = \{v_h \in C^0([r_1; 1]) ; v(r) = a_i r + b_i, \forall r \in]r_i; r_{i+1}[, a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$$

ainsi que $V_{h,0} = V_h \cap H_0^1(r_1; 1)$. On considère :

$$M_h = \{\mu_h \in L^2(r_1; 1) ; \mu_h(r) = r_i \in \mathbb{R}, \forall r \in]r_i; r_{i+1}[\}$$

Une approximation par éléments finis $u_h \in V_h$ et $\lambda_h \in M_h \cap K$ est alors recherchée comme solution de la formulation variationnelle discrète de (5).

Dans tous les tests de Couette (réalisés en Fortran), on prend toujours un nombre d'itérations maximal $N_{\text{imax}} = 10000$, avec $f = 0$ (par défaut). Le nombre de Bingham g est désigné dans le programme Fortran par l'étiquette `Bi`. De plus, pour pouvoir obtenir une solution calculée (u, λ) avec autant de précision que voulue, on calcule des résidus (par exemple, $\|u^{n+1} - u^n\|_{H^1}$ ou $|\lambda^{n+1} - \lambda^n|_{L^2}$), et on regarde soit le temps de calcul total ou le nombre d'itérations qu'il a fallu pour que le ou les résidus itérés passent sous un seuil de tolérance `tol` souvent très petit. Par défaut, on prendra `tol = 10^{-10}` pour les tests comparés avec ISTA. On choisit aussi les valeurs de ρ_R, ρ_F dans les intervalles qui leur sont permis (par défaut $[0, \frac{2}{\text{Bi}}]$, on prend les valeurs de $\rho_{R,F}$ comme des multiples $\frac{0.2}{\text{Bi}}k, 1 \leq k \leq 10$).

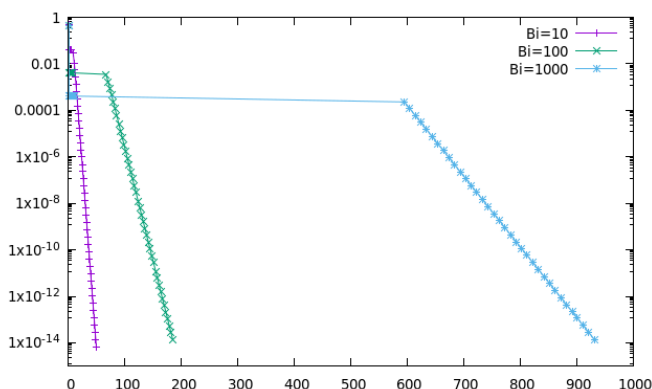


Figure 1: Dans ce premier graphique retenu pour les tests, on a tracé le résidu itéré $\|u^{n+1} - u^n\|_{H^1} + |\lambda^{n+1} - \lambda^n|_{L^2}$ en fonction du nombre d'itérations jusqu'à ce qu'il atteigne `tol`.

Pour réaliser les tests à l'origine du graphique (Figure 1), on a pris les valeurs $\rho_R = 0.06$, $\rho_F = 0.02$, et avec un nombre de points de maillage $N_r = 1024$. Pour `Bi = 10`, la solution (u, λ) est calculée en presque 50 itérations, alors que `Bi = 100` semble demander 190 à 195 itérations, et `Bi = 1000` environ 930 itérations. Mais ensuite il reste à trouver comment le nombre d'itérations varie en fonction de ρ_R et ρ_F . L'erreur d'approximation $|u - u_h|_{H^1}$ et $|\lambda - \lambda_h|_{L^2}$ a été systématiquement calculée et vérifiée à la fin des algorithmes, ce qui a permis de valider l'implémentation du modèle

numérique, l'ordre de convergence $\mathcal{O}(h)$ de l'approximation par élément finis étant bien vérifié pour les deux erreurs calculées (avec des ordres de grandeur respectifs 10^{-8} et 10^{-5} pour les maillages les plus grossiers).

6.1 Tests LWPG

Une campagne de tests avec l'algorithme LWPG a été réalisée en prenant le seuil de tolérance $\text{tol} = 10^{-14}$, les valeurs $\text{Bi} = 10, 100, 1000$, mais aussi $\text{Nr} = 1024, 2048$, $\rho_R = \frac{2}{10 \cdot \text{Bi}} k$, $1 \leq k \leq 10$, et $\rho_F = 1$. Il a été observé, en effet, que le nombre d'itérations semblait varier avec ρ_R , mais pas en fonction de ρ_F . On a, en particulier, pu expliquer ce comportement en regardant le calcul itéré

$$\lambda^{n+1} = P_K(\lambda^n + \rho D(u^{n+1})) ;$$

par symétrie de rotation, Couette se réduit à un problème 1D. Ainsi, λ^{n+1} est égal soit à l'argument de P_K , soit à $+1$ ou -1 . Dans la zone où $|\lambda^n + \rho D(u^{n+1})|$ est plus grand que 1, λ^{n+1} vaut 1 ou -1 et ne dépend donc pas de ρ_F . C'est une limitation importante des tests en 1D ; les améliorations apportées à ISTA n'auront pas forcément la même portée dans des cas généraux 2D ou en 3D car alors λ ne sera plus déterminé de manière exacte dans les zones fluides. Ce qui est mis en évidence en 1D, c'est donc la possibilité d'améliorer les performances en calculant plus efficacement λ dans les zones rigides, mais dans les cas généraux, le gain de performance ne sera peut-être obtenu qu'en ajoutant un autre traitement dans les zones fluides.

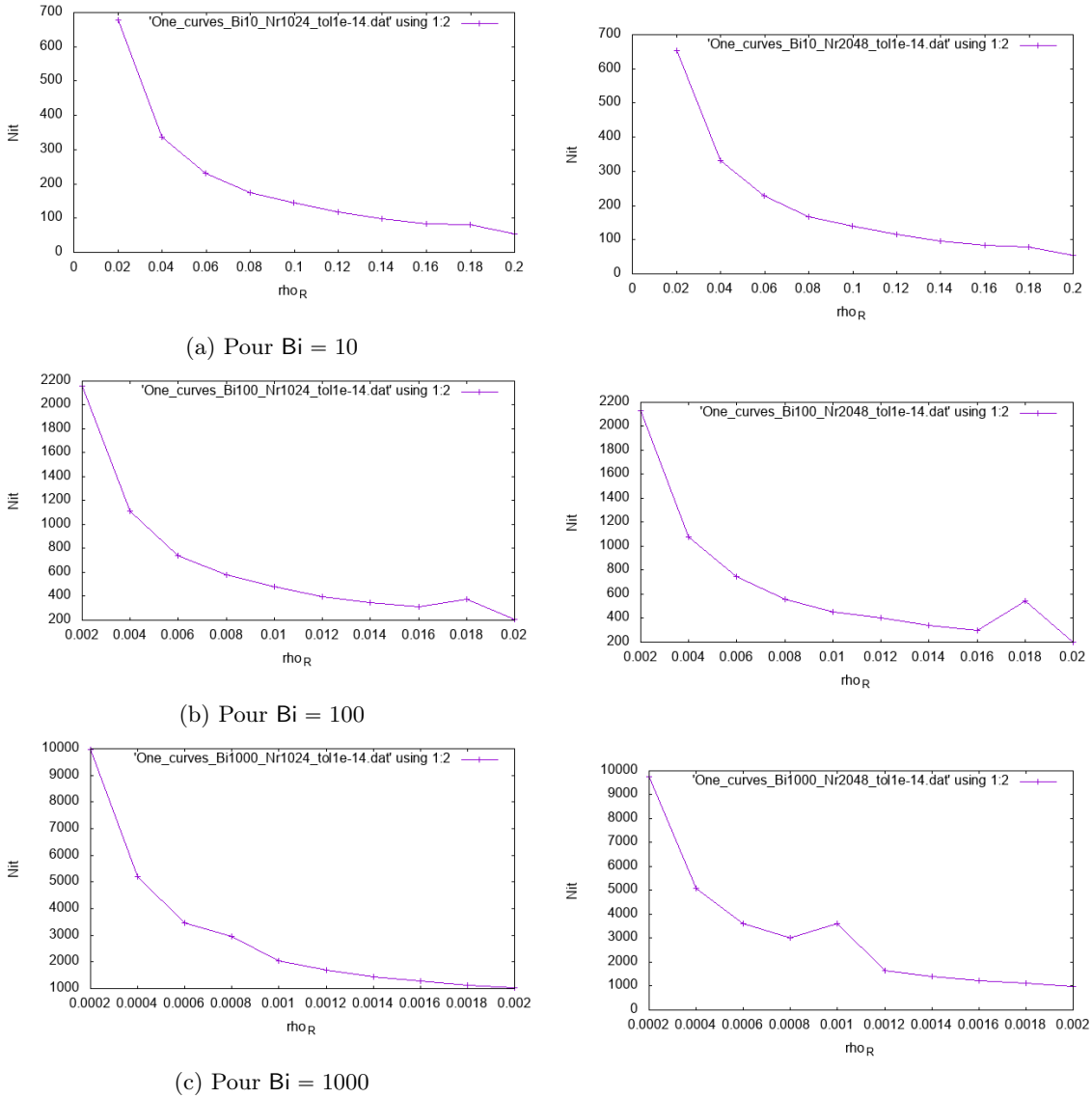


Figure 2: Premiers tests complets réalisés sur l'algorithme LWPG (à gauche $Nr = 1024$, à droite $Nr = 2048$).

Les graphiques Figure 2 représentent le nombre d'itérations final N_{it} en fonction de ρ_R pour chaque couple (Bi, Nr) . Ici, N_{it} semble décroître généralement quand ρ_R s'approche de $\frac{2}{Bi}$, avec au moins un pic local qui peut dépendre de (Bi, Nr) . À l'exception de ces pics, N_{it} ne varie pas beaucoup en fonction de Nr . De fait, on constate surtout que cet algorithme sous cette forme n'a pas été comparé à ISTA, mais comme la valeur de ρ_F semble ne pas intervenir dans les variations de N_{it} , on peut supposer que ces courbes reviendraient au même que le cas ISTA ($\rho_F = \rho_R$). Dans l'ensemble, pour $Bi = 10$, N_{it} descend jusqu'à 100 ; ce nombre d'itérations atteint au moins 200 pour $Bi = 100$, ou encore un minimum de 1000 pour $Bi = 1000$.

Pour cet algorithme, cinq résidus ont été ajoutés en une somme de résidus qui doit tendre vers zéro :

- $\|u^{n+1} - u^n\|_{H^1}$, pour mesurer la convergence en norme L^2 de u^n vers la vitesse u du problème de Bingham (qui est ici celui de Couette), et de même celle de $D(u^n)$ vers $D(u)$.
- $|\lambda^{n+1} - \lambda^n|_{L^2}$, pour vérifier lorsque λ^n est assez proche de λ en norme L^2 .
- la norme infinie $\|\lambda^{n+1} \cdot D(u^{n+1}) - |D(u^{n+1})|_{L^2}\|_{L^\infty}$, parce que, d'après la deuxième ligne du

problème (1) et le Lemme 2.2, la solution (u, λ) vérifie

$$\lambda \cdot D(u) = |D(u)|.$$

- la norme $\|r^{n+1}\|_{L^2}$ où $r^{n+1} = -\Delta u^{n+1} - \text{Bi} \operatorname{div} \lambda^{n+1} - f$ est défini de manière variationnelle, c'est-à-dire par $(r^{n+1}, v) = (D(u^{n+1}), D(v)) + \text{Bi} (\lambda^{n+1}, D(v)) - (f, v)$. Dans le problème (1), on a

$$(D(u), D(v)) + g(\lambda, D(v)) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

- $|D(u^{n+1})|_{L^2} - |D(u^n)|_{L^2}$ qui doit mesurer la convergence de la fonctionnelle Ψ .

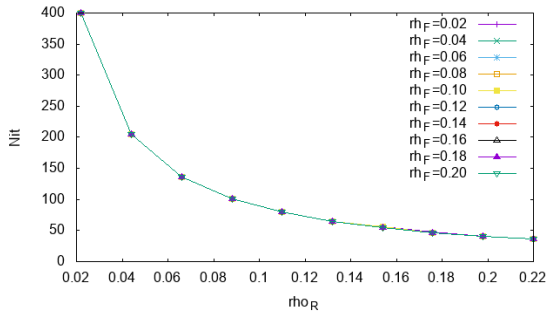
Or, dans quelques tests, il a été observé que le cinquième résidu par lequel on veut contrôler la convergence de $D(u^n)$ pouvait augmenter légèrement avant de descendre.

6.2 L'algorithme LPWPG

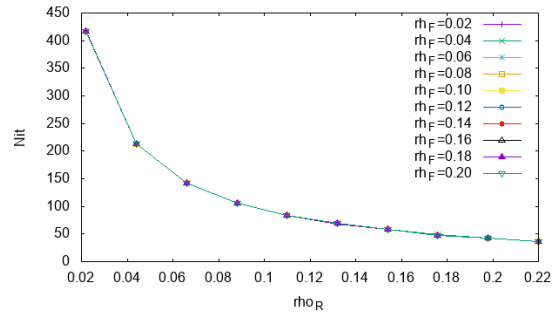
Les résultats des calculs dans la section 6.1 montrent que les performances d'ISTA ne sont pas améliorées. C'est la première justification qui veut qu'on recoure à l'algorithme LPWPG, qui a pour principe de renforcer la rigidité.

Outre les résultats, l'algorithme est justifié principalement par le fait que $D(u) = 0$ sur R , on cherche donc à l'imposer sur R^k au cours des itérations en espérant que cela va accélérer la convergence. On remarque qu'en faisant cela on garde la cohérence avec l'idée première qui est de distinguer ρ_R et ρ_F , car, pour a_R assez grand, l'accélération due à la pénalisation n'est obtenue que pour des ρ_F et ρ_R (très) différents.

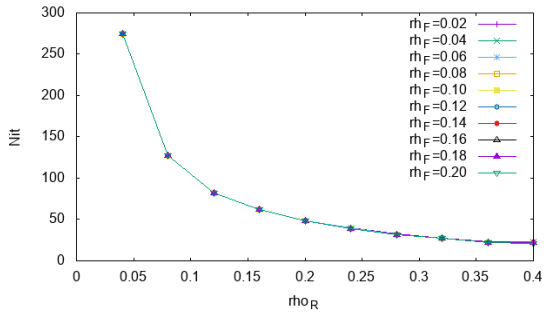
Pour les tests avec $f = 0$, on récupère sachant $\text{tol} = 10^{-8}$ le nombre d'itérations pour $\text{Bi} = 10, 100$; $\text{Nr} = 1024, 8192$ et $a_R = 0.1, 1, 10$. Ici ρ_F reste dans l'intervalle $]0, \frac{2}{\text{Bi}}[$ mais cette fois, ρ_R peut valoir jusqu'à $\frac{2}{\text{Bi}}(1 + a_R)$. On prend aussi $1 \leq j, k \leq 10$ et $\rho_R = \frac{2}{10 \cdot \text{Bi}}(1 + a_R)j$, $\rho_F = \frac{2}{10 \cdot \text{Bi}}k$.



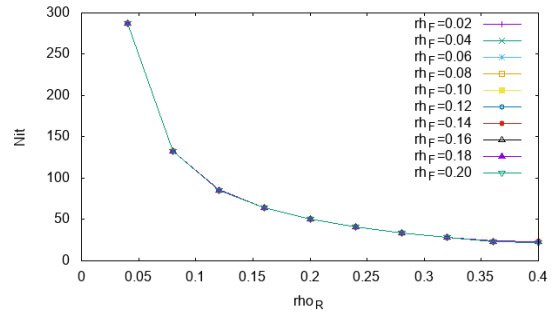
(a) $Bi = 10, Nr = 1024, a_R = 0.1$



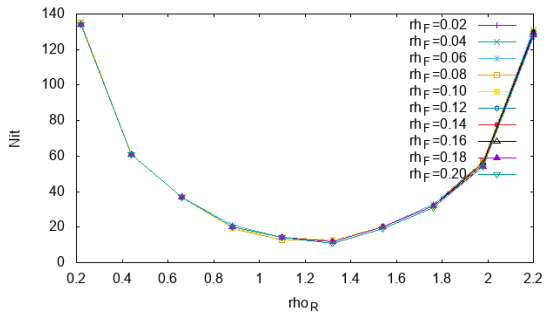
(b) $Bi = 10, Nr = 8192, a_R = 0.1$



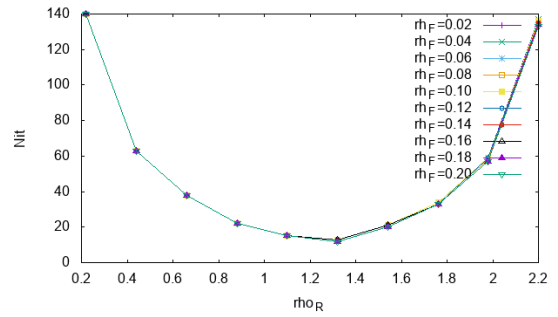
(c) $Bi = 10, Nr = 1024, a_R = 1$



(d) $Bi = 10, Nr = 8192, a_R = 1$



(e) $Bi = 10, Nr = 1024, a_R = 10$



(f) $Bi = 10, Nr = 8192, a_R = 10$

Figure 3: Nombre d'itérations requises pour que le résidu de LPWPG atteigne $tol = 10^{-8}$, en fonction de ρ_R , lorsque $Bi = 10$.

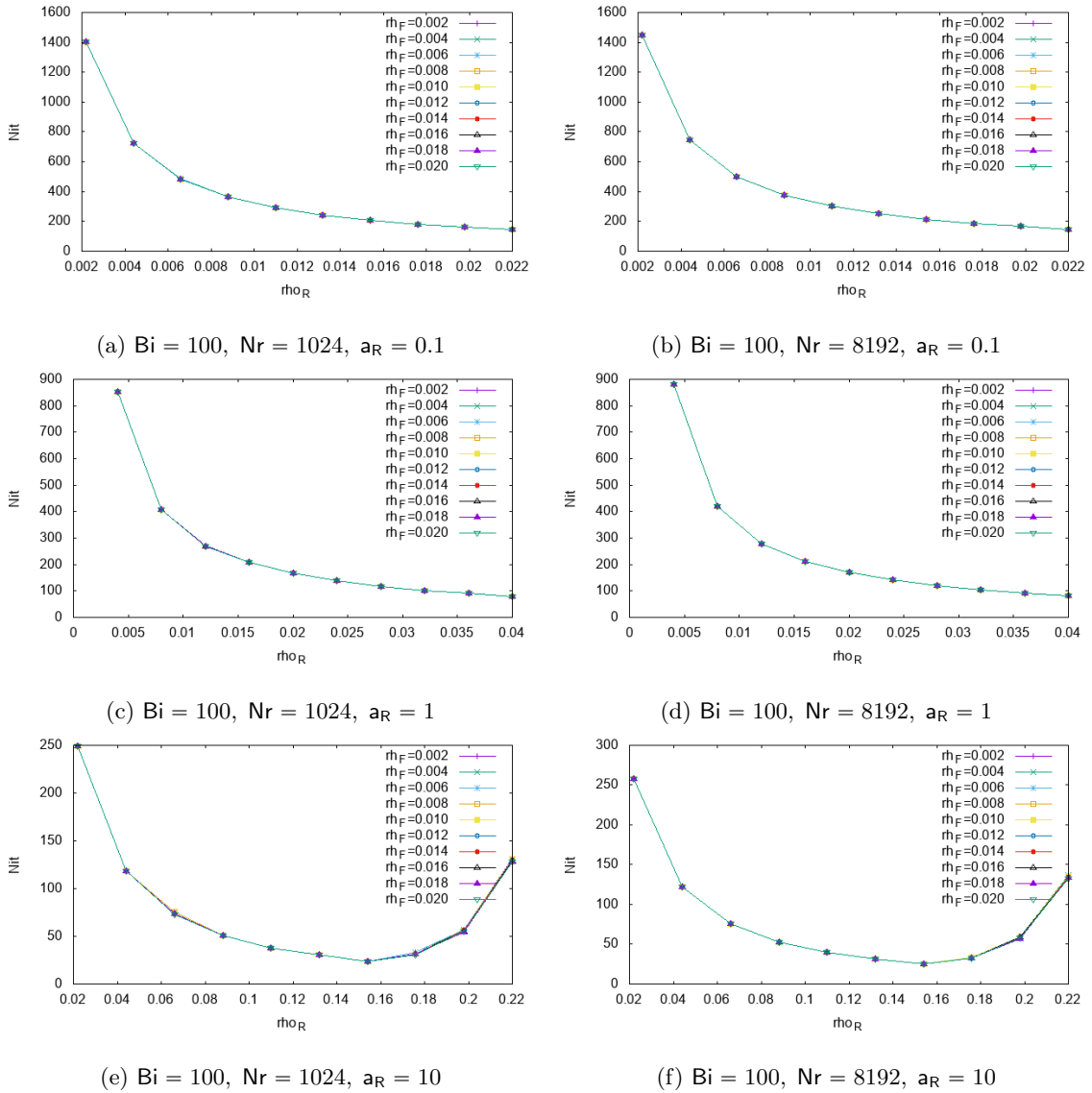


Figure 4: Nombre d'itérations requises, mais pour $Bi = 100$.

Dans ces tests sur LPWPG, il apparaît que la valeur de ρ_F ne fait presque pas varier le nombre d'itérations Nit . Sur les Figures 3 et 4, chaque courbe de Nit en fonction de ρ_R tend toujours à décroître quand ρ_R augmente, sauf pour $a_R = 10$ où elle croît après avoir atteint un minimum ; ainsi, il semble que des valeurs trop grandes de a_R dégradent la précision du calcul itéré de u^n sur la zone rigide, ce qui justifierait dans ce cas la remontée de Nit pour ρ_R proche de $\frac{2}{Bi}(1 + a_R)$; néanmoins, Nit optimal est plus petit (donc meilleur) quand a_R est plus grand. En outre, le nombre de points du maillage radial Nr n'intervient (presque) pas sur les valeurs de Nit .

Ce dernier point est lié à la manière dont le système linéaire est résolu (une méthode directe). C'est ce qui justifie l'expérimentation de `cg_dual_pen_`, dans lequel on espère que la perte de précision numérique n'aura plus lieu, mais au prix d'une résolution itérative, donc plus lente. Cette lenteur affecte les performances CPU globales en 1D puisque la résolution directe, elle, est très efficace (elle est optimale : son coût de calcul est en $\mathcal{O}(Nr)$). Cependant, en 2D ou en 3D, on ne dispose pas a priori de solveurs directs optimaux pour le problème linéaire pénalisé, donc `cg_dual_pen_` peut devenir alors une solution intéressante pour bénéficier des avantages de la pénalisation en 2D et en 3D (il faut que le gain en itérations de LPWPG sur ISTA soit supérieur à la perte due à `cg_dual_pen_` par rapport au solveur de Poisson direct qui est utilisé par ISTA et qui est, lui, optimal) en 2D et en 3D, dans la mesure où on travaille dans le code utilisé ici sur des grilles structurées.

En fait, tol doit être pris plus grand quand \mathbf{a}_R devient grand, sinon le résidu stagne sans jamais atteindre tol . Dans ces conditions, la perte de précision numérique engendrée par la pénalisation devient un facteur limitant. On se retrouve donc pris entre l'intérêt de prendre \mathbf{a}_R grand pour accélérer l'algorithme, et l'impossibilité d'atteindre une tolérance arbitraire.

Remarque 6.1. *cg_dual_pen_ est un algorithme qui fonctionne sur le même principe que LPWPG mais résout l'équation numérique sous forme matricielle.*

En outre, pour $\mathbf{a}_R = 0.1$ les meilleurs Nit (pour $\rho_R \rightarrow \frac{2}{\text{Bi}}(1 + \mathbf{a}_R)$) sont apparemment les mêmes que pour LWPG. Pour $\mathbf{a}_R = 1$, le calcul itéré de (u, λ) a pris deux fois moins d'itérations (en choisissant le ρ_R qui minimise le temps de calcul). Enfin, pour $\mathbf{a}_R = 10$, le meilleur Nit réalisé est en dessous de cinquante itérations, ce qui semble correspondre à un ρ_R plus ou moins proche de $\frac{2}{10 \cdot \text{Bi}}(1 + \mathbf{a}_R) \cdot 6.5$, ou bien de $\frac{14}{\text{Bi}}$ avec une incertitude de $\frac{1}{\text{Bi}}$.

6.3 Tests LPWPG comparés avec ISTA

Pour mieux mettre en évidence le gain de performance de LPWPG (LWPG+pénalisation) par rapport à ISTA (ou LWPG puisque ρ_F ne fait pas varier le calcul itéré de u), on poursuit les tests avec $\text{Bi} = 10, 100$; $\text{Nr} = 1024, 8192$; $\mathbf{a}_R = 0.125, 0.25, 0.5, 1, 2, 4, 8, 10, 16, 32, 64, 100, 128$; $\rho_R = \frac{2}{10 \cdot \text{Bi}}(1 + \mathbf{a}_R)k$ et $\rho_F = \frac{1}{\text{Bi}}$; mais cette fois en comparant explicitement LPWPG à ISTA ($\text{Bi} = 10, 100$; $\text{Nr} = 1024, 8192$; $\mathbf{a}_R = 0$; $\rho_R = \rho_F = \frac{2}{10 \cdot \text{Bi}}k$). Le seuil de tolérance est fixé à $\text{tol} = 10^{-10}$. Afin de ne pas risquer une superposition chargée de courbes qui rendrait les graphiques en Figures 5 et 6 illisibles, les courbes ont été réparties en trois parties pour chaque couple (Bi, Nr) .

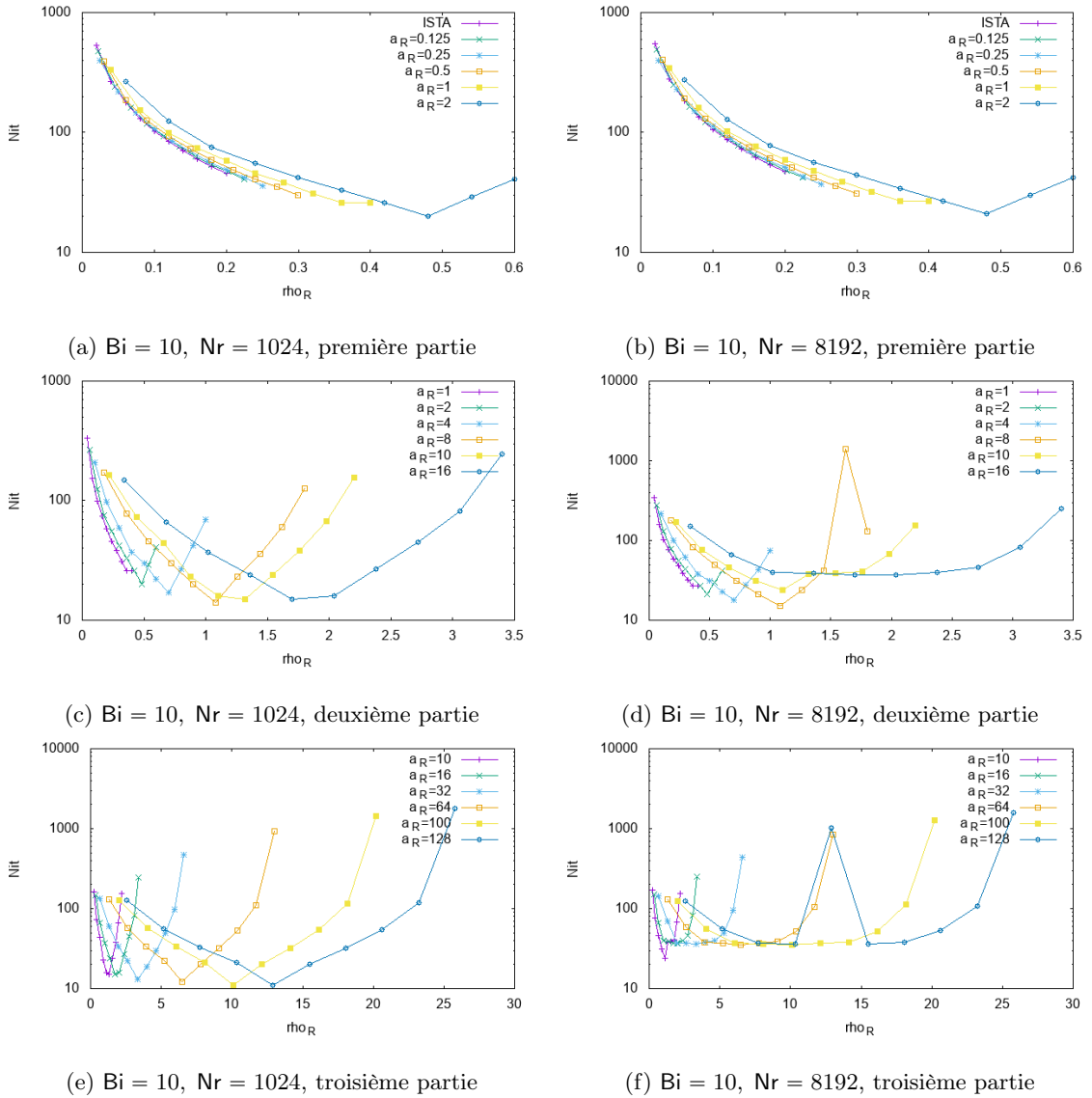


Figure 5: Nombre d'itérations de LPWPG en fonction de ρ_R pour $Nr = 1024$ et 8192 , et $Bi = 10$.

S'il y a un pic, il est possible que le comportement de la courbe soit effectivement non-monotone. Une manière d'avoir davantage d'information aurait consisté à prendre davantage de valeurs de ρ_R au voisinage du pic et de regarder si une courbure se précise, ainsi qu'un extremum local, ou bien si la courbe devient bruitée. Mais pour alléger le travail du stage, on se contentera de vérifier les Nit et ρ_R optimaux atteints sur $2 \leq a_R \leq 20$ (section 6.5).

Du reste, on peut supposer qu'en choisissant le bon ρ_R , on peut encore faire descendre le nombre d'itération Nit à des minima encore plus petits en prenant a_R dans un intervalle approprié. On voit déjà que $2 \leq a_R \leq 10$ permet autour de $\rho_R \approx \frac{10}{Bi}$ un gain de performance sur ISTA. Les gains de performances par rapport à ISTA sont explicités sur la Figure 7.

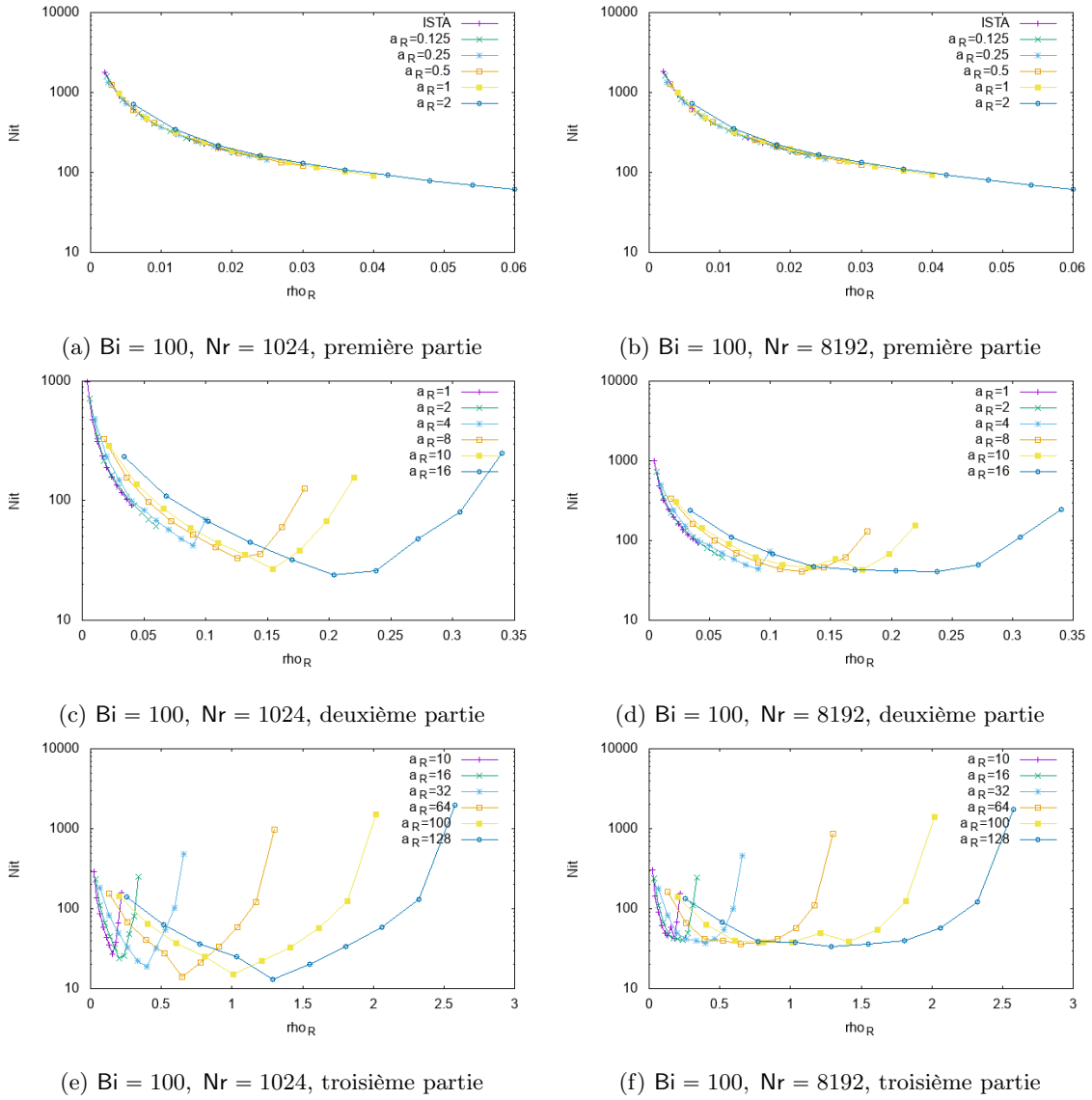


Figure 6: Nombre d'itérations de LPWPG en fonction de ρ_R pour $Nr = 1024$ et 8192 , et $Bi = 100$.

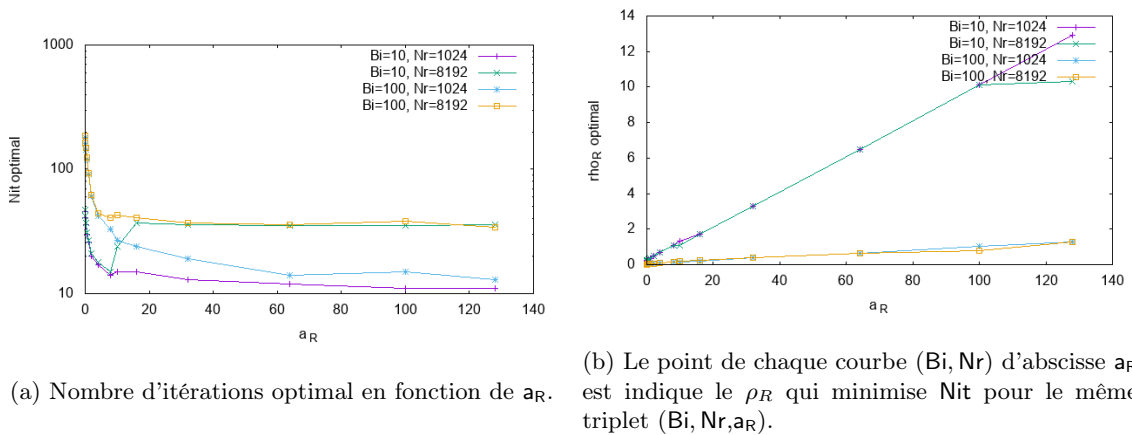
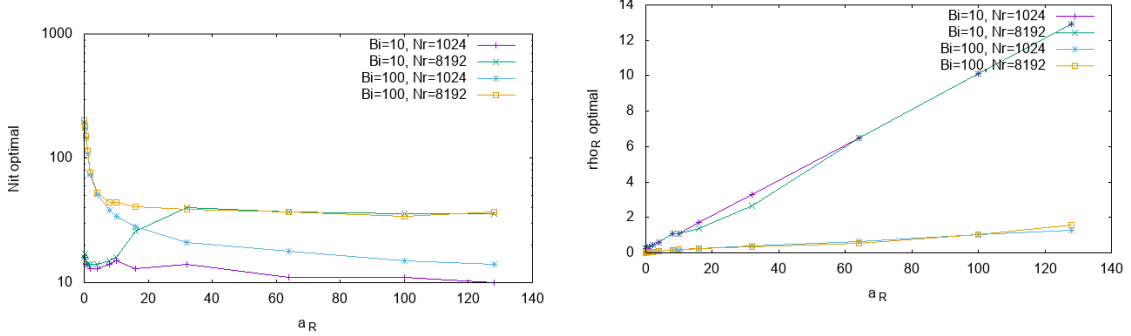


Figure 7: Gains de performances de LPWPG pour $f = 0$. Sur chaque graphique, chaque point d'abscisse $a_R = 0$ correspond au cas ISTA.

6.4 Comparaison LPWPG/ISTA avec le terme de second membre f

Tous les tests LPWPG (sans ISTA) ont pu être faits avec cette option, et toujours avec $\text{tol} = 10^{-10}$, pour vérifier la robustesse de l'algorithme, et il apparaît que le choix de f ne freine pas le gain significatif de performance par rapport à ISTA.



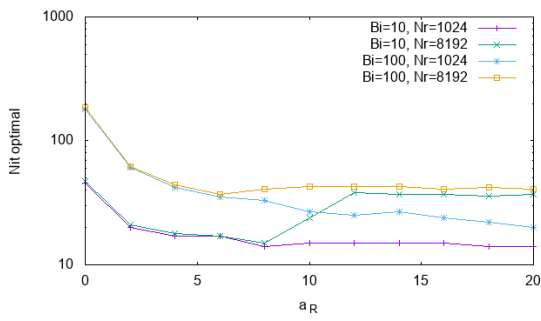
(a) Nombre d'itérations optimal en fonction de a_R .

(b) Le point de chaque courbe (Bi, Nr) d'abscisse a_R est indiqué le ρ_R qui minimise Nit pour le même triplet (Bi, Nr, a_R) .

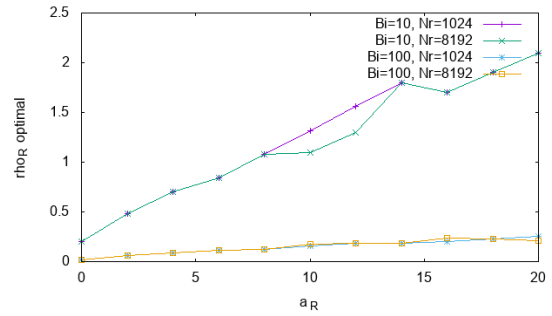
Figure 8: Gains de performances de LPWPG avec l'option "-f". Sur chaque graphique, chaque point d'abscisse $a_R = 0$ correspond au cas ISTA.

6.5 Tests pour $2 \leq a_R \leq 20$

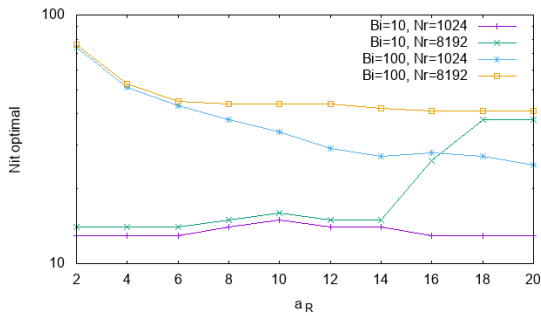
Avec ou sans option "-f" on constate que les courbes de Nit optimal se croisent sur l'intervalle d'abscisse $10 \leq a_R \leq 20$. Ainsi on cherche à refaire les tests pour les mêmes valeurs de Bi , Nr , ρ_R , ρ_F et tol mais cette fois pour $2 \leq a_R \leq 20$. Le gain de performance reste très important avec "-f" pour $Bi = 100$, mais ce n'est pas le cas pour $Bi = 10$ où les performances sont quasi identiques. Ceci vient probablement du fait que les zones rigides sont trop petites dans ce cas pour que la pénalisation joue un rôle. Il s'agit en outre d'un cas où l'amélioration de performances est moins crucial, car l'ensemble des expériences dans le présent travail et dans la littérature met en évidence que les cas les plus coûteux correspondent aux plus grandes valeurs de g .



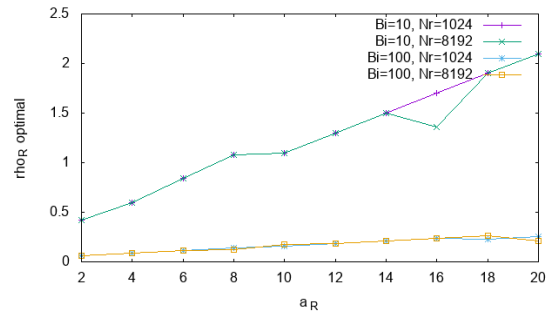
(a) Nombre d'itérations optimal en fonction de $2 \leq a_R \leq 20$, avec $f = 0$



(b) Le point de chaque courbe (Bi, Nr) d'abscisse a_R est indiqué le ρ_R qui minimise Nit pour le même triplet (Bi, Nr, a_R) , avec $f = 0$.



(c) Nombre d'itérations optimal en fonction de $2 \leq a_R \leq 20$, avec l'option "-f"



(d) Les ρ_R optimaux avec "-f".

Figure 9: Gains de performances de LPWPG détaillés sur $2 \leq a_R \leq 20$, avec ou sans l'option "-f". Sur chaque graphique, chaque point d'abscisse $a_R = 0$ correspond au cas ISTA.

7 Conclusion et perspectives

Une nouvelle approche algorithmique a été posée en modifiant *localement* l'algorithme d'Uzawa pour le problème de Bingham. Une tentative explicite de calcul des itérés a été réalisée pour un cas simple en dimension 1, le problème de Poiseuille. En effet, ce problème possède une solution explicite très simple et on peut espérer qu'il en est de même pour le calcul des itérés. Or, la variation de ρ avec n soulevaient des difficultés dans ce calcul explicite qui ont été résolues en supposant R connue à l'avance. L'algorithme a été également programmé pour un autre cas simple, le problème de Couette. *En forçant par pénalisation la rigidité dans des zones R^k convergeant vers la zone rigide finale*, le gain de performance est important comme le montrent les Figures (5),(6) et (9). Une démonstration générale de convergence a pu être établie, dans le cas où l'écoulement a lieu dans une conduite droite de section constante avec une hypothèse simplificatrice : la zone rigide est supposée être connue à l'avance. Cette hypothèse n'a pas de réalité pratique mais elle permet une première exploration théorique des propriétés algorithmiques.

L'étape suivante du travail consiste à poursuivre l'exploration amorcée sur le problème de Poiseuille et le problème de Couette. Parmi les simplifications envisagées pour le problème de Poiseuille, on a considéré que la zone rigide est connue à l'avance. On prévoit également d'investiguer des techniques permettant d'estimer ρ_R et ρ_F à chaque itération afin d'optimiser le nombre d'itérations requises pour atteindre une précision donnée ; on pourra également faire les tests en 2D sur le problème décrit en section 4, afin d'évaluer la généralisation du gain de performance constaté et de voir l'effet d'un λ_F qui n'est plus exact, et donc dans ce cas le rôle de ρ_F^n .

Bibliographie

- [Bin22] Eugene Cook Bingham. *Fluidity and plasticity*. McGraw-Hill, 1922.
- [Ble17a] Jeremy Bleyer. “Advances in the simulation of viscoplastic fluid flows using interior-point methods”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 330 (Nov. 2017). DOI: [10.1016/j.cma.2017.11.006](https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.11.006).
- [Ble17b] Jeremy Bleyer. *Viscoplastic flows : supplementary code for " Advances in the simulation of viscoplastic fluid flows using interior-point methods "*. Oct. 2017. DOI: [10.5281/zenodo.1038519](https://doi.org/10.5281/zenodo.1038519).
- [BT09] Amir Beck and Marc Teboulle. “A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems”. In: *SIAM J. Imaging Sciences* 2 (Jan. 2009), pp. 183–202. DOI: [10.1137/080716542](https://doi.org/10.1137/080716542).
- [Du+09] Kui Du et al. “Matrix decomposition algorithms for the C0-quadratic finite element Galerkin method”. In: *BIT* 49 (Sept. 2009), pp. 509–526. DOI: [10.1007/s10543-009-0233-0](https://doi.org/10.1007/s10543-009-0233-0).
- [GLT81] Roland Glowinski, Jacques-Louis Lions, and Raymond Tremolieres. *Numerical analysis of variational inequalities*. North-Holland, 1981.
- [Nes83] Y. Nesterov. “A method of solving a convex programming problem with convergence rate $\mathcal{O}(1/k^2)$ ”. In: *Soviet Mathematics Doklady* 27 (1983), pp. 372–376.
- [Pap87] Tasos C. Papanastasiou. “Flows of Materials with Yield”. In: *Journal of Rheology* 31.5 (July 1987), pp. 385–404. DOI: [10.1122/1.549926](https://doi.org/10.1122/1.549926).
- [Pey15] Juan Peypouquet. *Convex optimization in normed spaces: Theory, methods and examples*. English. SpringerBriefs in Optimization. Springer, 2015. ISBN: 978-3-319-13709-4.
- [RS03] N. Roquet and P. Saramito. “An Adaptive Finite Element Method for Bingham Fluid Flows around a Cylinder”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), pp. 3317–3341. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(03\)00262-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00262-7).
- [Sar16] Pierre Saramito. “A damped Newton algorithm for computing viscoplastic fluid flows”. In: *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 238 (May 2016). DOI: [10.1016/j.jnnfm.2016.05.007](https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2016.05.007).
- [SW17] Pierre Saramito and Anthony Wachs. “Progress in numerical simulation of yield stress fluid flows”. In: *Rheologica Acta* 56 (Mar. 2017). DOI: [10.1007/s00397-016-0985-9](https://doi.org/10.1007/s00397-016-0985-9).
- [Tre+18] Timm Treskatis et al. “Practical guidelines for fast, efficient and robust simulations of yield-stress flows without regularisation: A study of accelerated proximal gradient and augmented Lagrangian methods”. In: *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 262 (June 2018). DOI: [10.1016/j.jnnfm.2018.05.002](https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2018.05.002).
- [ZZ20] A. A. Zlotnik and I. A. Zlotnik. “Fast Fourier Solvers for the Tensor Product High-Order FEM for a Poisson Type Equation”. In: *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 60.2 (Feb. 2020), pp. 240–257. DOI: [10.1134/s096554252002013x](https://doi.org/10.1134/s096554252002013x). URL: <https://doi.org/10.1134/s096554252002013x>.