

---

## Résumé de travaux en vue de la soutenance d'une Habilitation à Diriger des Recherches en Mathématiques Appliquées

Présentée par Hélène Mathis  
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray  
Université de Nantes et UMR 6629

---

Mes travaux de recherche concernent le développement, l'analyse et l'approximation numérique de systèmes d'équations aux dérivées partielles hyperboliques. L'entropie est un outil central de mon activité de recherche.

Dans le contexte de la modélisation de fluides multiphasiques compressibles, l'entropie thermodynamique est une fonction qui caractérise les propriétés thermiques, chimiques et mécaniques du fluide considéré. Le second principe de la thermodynamique établit le résultat suivant : les états d'équilibre thermodynamique sont ceux qui maximisent la fonction d'entropie sur un domaine de contraintes.

Ma démarche s'appuie sur ce résultat et consiste à construire des entropies de fluides multiphasiques par des procédés d'optimisation sous contraintes, puis à en caractériser les propriétés géométriques. Je m'intéresse particulièrement à des contraintes extensives qui autorisent des mélanges complexes liquide-vapeur-gaz.

La connaissance d'une entropie à l'équilibre thermodynamique est cruciale car elle permet la construction et l'analyse des systèmes de lois de conservation qui décrivent la dynamique des fluides compressibles étudiés. On en déduit une entropie de Lax pour le système à l'équilibre thermodynamique et l'on parvient également à construire des systèmes hyperboliques de relaxation, obtenus à partir des systèmes à l'équilibre, formant ainsi une hiérarchie de modèles, thermodynamiquement cohérente.

Ainsi j'ai développé des modèles triphasiques originaux avec des phases miscibles. En mettant l'hypothèse de convexité de l'entropie en défaut, j'ai également proposé et analysé une gamme de modèles décrivant des écoulements métastables. Les extrema du problème d'optimisation sous contraintes sont cette fois caractérisés comme les équilibres asymptotiques d'un système dynamique, construit de manière *ad hoc*, de sorte à dissiper l'entropie du mélange.

Je me suis également intéressée à la simulation numérique de ces modèles. J'ai notamment développé des méthodes d'adaptation de modèles, permettant de coupler de manière optimale, dans un sens particulier, deux modèles hyperboliques issus d'une même hiérarchie.

Un deuxième axe de ma recherche concerne l'analyse numérique de schémas de type volumes finis, utilisant principalement la notion d'entropie relative. Il s'agit d'un développement au premier ordre de l'entropie, associée au système d'équations aux dérivées partielles qui nous intéresse, autour d'une solution particulière du système. L'entropie relative se comporte comme une mesure de l'écart entre une solution du système et la solution particulière. On retrouve des techniques d'entropie relative dans de nombreuses références, notamment dans les travaux de

Dafermos et DiPerna pour démontrer un résultat d'unicité fort-faible ou dans les travaux de Tzavaras pour étudier l'asymptotique de systèmes hyperboliques de relaxation.

Je me suis attelée à définir un cadre discret de ces résultats en vue de la simulation numérique. Par exemple, j'ai adapté la méthode d'entropie relative à l'analyse d'un schéma préservant l'asymptotique diffusive des solutions du  $p$ -système, sur domaine infini ou borné. Ce même type d'outil a permis de démontrer un résultat général de convergence pour une classe de schémas volumes finis explicites appliqués à un système hyperbolique général et plus récemment, l'analyse d'un schéma volumes finis pour un modèle de semi-conducteurs.

Ma présentation aura pour but de présenter le spectre de mes résultats, allant de la modélisation, l'analyse des modèles au développement et l'analyse de méthodes numériques jusqu'à leur implémentation. Au gré de ma présentation seront distillées des perspectives possibles de mes travaux.