Directeur de thèse : Abdesslam BOULKHEMAIR

Membres du jury :
— Jean-Marc DELORT,
— Luis VEGA,
— Nicolas LERNER,
— Benoit GREBER,
— Xue Ping WANG,
— Frédéric HERAU

Titre de la thèse : Existence locale et effet régularisant précisés pour des équations non linéaires de Schrödinger généralisées.

Dans cette thèse, on considère le problème de Cauchy dans les espaces de Sobolev habituels et dans des espaces de Sobolev à poids pour des équations non linéaires de la forme

$$\partial_t u = i\mathscr{L}u + F(u, \overline{u}, \nabla_x u, \nabla_x \overline{u}), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Ces équations sont de la forme des équations de Schrödinger.

Nous étudions l'existence locale et l'effet régularisant vérifié par les solutions, pour cela nous suivons une méthode employée par C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega, et nous généralisons et précisons certains de leurs résultats. La non-linéarité F est une fonction régulière nulle à l'ordre 1 en 0 et l'opérateur $\mathscr{L}$ est de la forme

$$\mathscr{L} = \sum_{j \leq k} \partial_{x_j} - \sum_{j > k} \partial_{x_j}.$$

Cet opérateur généralise le Laplacien mais n'est plus elliptique.

Dans le cas où F est nulle à l'ordre 2 en 0, nous prouvons l'existence locale, l'unicité ainsi qu'un effet régularisant pour une donnée initiale $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ avec $s > \frac{n}{2} + 3$.

Dans le cas où F est nulle à l'ordre 1 en 0, nous prouvons l'existence locale, l'unicité ainsi qu'un effet régularisant, par exemple, pour une donnée initiale u_0 telle que, pour $s > n + 5$, pour tout entier $k \leq \frac{n}{2} + 2$, $\langle x \rangle^k u_0 \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$.

Le plan de démonstration reprend celui de C.E. Kenig, G. Ponce et L. Vega, Inventiones Marematicae. Nous précisons les résultats à l'aide du calcul paradifférentiel de J.M. Bony.