Nouvelles formules sommatoires de Poisson

Nir Lev et Alexander Olevskii

27 mars 2015

1 Introduction

La masse de Dirac en x est notée δ_x. La transformée de Fourier au sens des distributions $\hat{\mu}$ du peigne de Dirac $\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$ est un peigne de Dirac sur le réseau dual $2\pi\mathbb{Z}$. C'est la formule sommatoire de Poisson qui se généralise à plusieurs dimensions et qui joue un rôle crucial en biologie moléculaire etc.

Nir Lev et Alexander Olevskii ont réussi à construire une famille $\mathcal{M}$ de mesures μ conduisant à de nouvelles formules de sommation. Plus précisément $\mu \in \mathcal{M}$ ssi les propriétés (a) et (b) sont vérifiées :

(a) $\mu = \sum_{\lambda\in\Lambda} a(\lambda)\delta_\lambda$ où Λ est un ensemble fermé et discret et où les coefficients $a(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, sont des nombres réels ou complexes.

(b) La transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de $\mu \in \mathcal{M}$ est aussi une somme de masses de Dirac $\hat{\mu} = \sum_{y\in S} b(y)\delta_y$ où S est un ensemble discret et fermé.

Si Λ et S sont uniformément discrets, alors le peigne de Dirac (avec ses variantes évidentes) est l'unique mesure vérifiant (a) et (b).

L'outil principal dans ce résultat est une modification de la notion de *model set*. On désigne par $\Gamma \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ un réseau tel que les deux projections p_1, $p_2 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, une fois restreintes à Γ, soient injectives et d'images denses. On part d'un *model set* Λ_I construit par l'algorithme *cut and projection*. La fenêtre correspondante est un intervalle $I = [-a, a]$. On a donc

$$(1) \qquad \Lambda_I = \{\lambda = p_1(\gamma);\ \gamma \in \Gamma, p_2(\gamma) \in I\}$$

Ensuite on remplace I par une suite croissante d'intervalles centrés $I_1 = [-h_1, h_1] \subset I_2 = [-h_2, h_2] \subset \ldots$ telle que $\cup_1^\infty I_k = \mathbb{R}$. La suite correspondante de *model sets* est Λ_k, $k \in \mathbb{N}$. On a

$$(2) \qquad \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \ldots \subset \Lambda_k \subset \ldots$$

et $\bigcup_1^\infty \Lambda_k = p_1(\Gamma)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. *Soit a_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite de nombres réels tendant en croissant vers l'infini. Un model set enrichi est défini par*

$$(3) \qquad \tilde{\Lambda} = \bigcup_1^\infty \tilde{\Lambda}_k$$

où

$$(4) \qquad \tilde{\Lambda}_k = \{\lambda \in \Lambda_k;\ |\lambda| \geq a_{k-1}\}$$

Lemme 1.1. *Soit $E = \{k + m\sqrt{2};\ k, m \in \mathbb{N}\}$. Alors $\Lambda = E \cup (-E)$ est un model set enrichi.*

Pour démontrer le lemme, il suffit d'appliquer la définition 1.1 avec les choix:

$$\Gamma = \{(k + m\sqrt{2}, k - m\sqrt{2});\ k, m \in \mathbb{Z}\},\ h_k = a_k = k.$$

Un *model set* ne peut être un *model set* enrichi. En effet la densité d'un set est finie et celle d'un *model set* enrichi est toujours infinie.

Théorème 1.1. *Tout model set enrichi $\tilde{\Lambda}$ contient le support d'une mesure μ (non identiquement nulle) dont la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ est aussi portée par un model set enrichi S.*

2 Construction de μ

Les deux suites strictement croissantes tendant vers l'infini, a_k, h_k, $k \in \mathbb{N}$, fournissent une partition du plan en deux ensembles A (fermé) et B (ouvert) où

$$A = \bigcup_1^\infty \{(x,y);\ |x| \geq a_{n-1},\ |y| \leq h_n\} \tag{5}$$

$$B = \bigcup_1^\infty \{(x,y);\ |x| < a_n,\ |y| > h_n\} \tag{6}$$

On définit de même A^* et B^* à l'aide de deux autres suites a_n^*, h_n^*, $n \in \mathbb{N}$. En fait les trois premières suites a_n, h_n, a_n^*, $n \in \mathbb{N}$, sont choisies arbitrairement tandis que le choix de h_n^* se fera par une subtile récurrence. Le *model set* enrichi défini par A est:

$$\Lambda = \{p_1(\gamma);\ \gamma \in \Gamma \cap A\} \tag{7}$$

On pose ensuite:

$$Q = \{p_2(\gamma);\ \gamma \in \Gamma \cap B\} \tag{8}$$

$$S = \{p_1^*(\gamma^*);\ \gamma^* \in \Gamma^* \cap A^*\} \tag{9}$$

$$Z = \{p_1^*(\gamma^*);\ \gamma^* \in \Gamma^* \cap B^*\} \tag{10}$$

Admettons le lemme suivant:

Lemme 2.1. *Il existe une fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (non identiquement nulle) telle que*

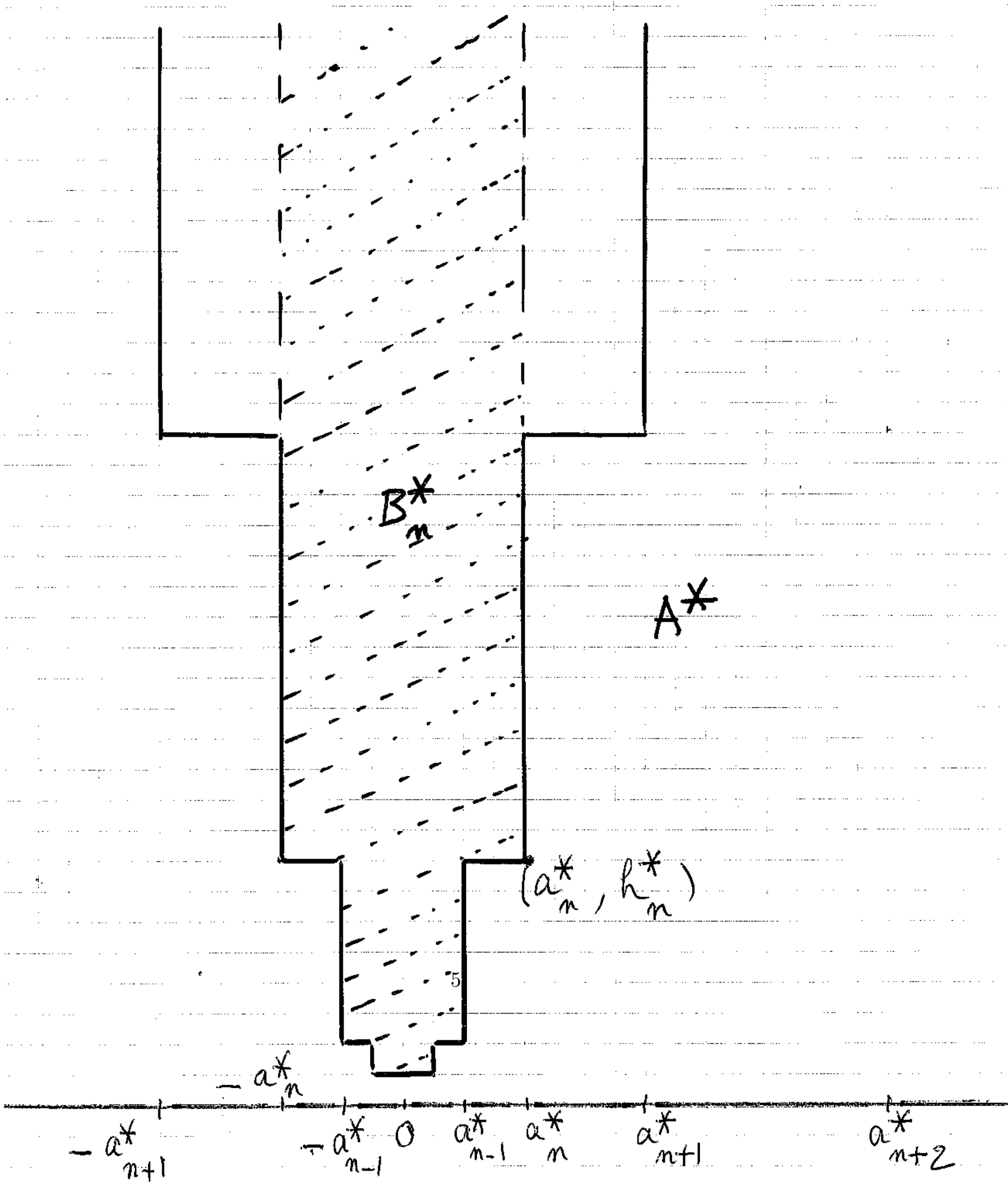
$$\phi = 0 \text{ sur } Z,\ \hat{\phi} = 0 \text{ sur } Q \tag{11}$$

On pose ensuite:

$$\mu = \sum_{(x,y)\in\Gamma} \hat{\phi}(y)\delta_x = \sum_{(x,y)\in\Gamma\cap A} \hat{\phi}(y)\delta_x = \sum_{\lambda\in\Lambda} \hat{\phi}(\overline{\lambda})\delta_\lambda \tag{12}$$

où $(\lambda, \overline{\lambda}) \in \Gamma$. On a de même

$$\hat{\mu} = \sum_{(u,v)\in\Gamma^*} \phi(v)\delta_u = \sum_{(u,v)\in\Gamma^*\cap A^*} \phi(v)\delta_u = \sum_{u\in S} \phi(\overline{u})\delta_u \tag{13}$$


B_n^*
A^*
(a_n^*, h_n^*)
$-a_n^*$
$-a_{n+1}^*$
$-a_{n-1}^*$
0
a_{n-1}^*
a_n^*
a_{n+1}^*
a_{n+2}^*

Théorème 2.1. *Si ϕ est définie par le lemme 2.1, la mesure μ définie par* (12) *est portée par l'ensemble fermé discret Λ défini par* (7) *et sa transformée de Fourier $\hat{\mu}$ est portée par l'ensemble fermé et discret S défini par* (9).

Toutes les propriétés de μ résultent de sa construction. Il suffit donc de démontrer le lemme 2.1. A cet effet, nous définissons :

$$X_n = \{p_2(\gamma^*);\ \gamma^* \in \Gamma^*, |p_1(\gamma^*| < a_n^*\}$$

$$B_n^* = \bigcup_1^n \{|x| < a_j^*,\ |y| > h_j^*\}$$

$$Z_n = \{p_2^*(\gamma^*);\ \gamma^* \in \Gamma^* \cap B_n^*\} \subset X_n$$

On construit une réunion finie d'intervalles compacts Ω_n telle que

$$\Omega_n = -\Omega_n,\ \Omega_n \subset \mathbb{R} \setminus Q,\ mes\,\Omega_n > \frac{2a_n^*}{det\,\Gamma^*}$$

On part de $\phi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $spec(\phi_0) \subset \Omega_0$, $\phi_0(0) = 1$ et l'on construit les couples (ϕ_n, h_n^*) par récurrence:

$$\phi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$
$$\phi_n(0) = 1$$
$$spec(\phi_n) \subset \Omega_n$$
$$\|\phi_n - \phi_{n-1}\|_{(m,k)} < 2^{-n},\ 0 \leq m, k \leq n$$
$$\phi_n = 0 \text{ sur } Z_n$$

On a posé

$$\|f\|_{(m,k)} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m f^{(k)}(x)|$$

Alors $\phi_n \to \phi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et ϕ a les propriétés désirées.

Il reste à construire les ϕ_n.

Pour cela nous utiliserons des résultats sur l'interpolation sur les *model sets.*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ensemble compact. L'espace de Paley-Wiener PW_Ω se compose des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est portée par Ω. Un ensemble discret Λ est un ensemble d'interpolation stable pour PW_Ω si, pour toute suite $c(\lambda) \in l^2(\Lambda)$, il existe $f \in PW_\Omega$ telle que $c(\lambda) = f(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Les *model sets* ont la propriété étonnante suivante.

Lemme 2.2. *Si Ω est un ensemble compact intégrable au sens de Riemann et si la mesure de Ω dépasse la densité du model set Λ, alors Λ est un ensemble d'interpolation stable pour l'espace de Paley-Wiener PW_Ω.*

L'interpolation stable au sens L^2 implique, en toute généralité, l'interpolation des fonctions de la classe de Schwartz, comme l'indique le lemme suivant.

Lemme 2.3. *Soit Λ un ensemble d'interpolation pour PW_Ω. Alors, pour tout entier k, tout entier m et tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C_{m,k}(\Lambda, \Omega, \epsilon)$ telle que pour toute suite $c(\lambda)$ à décroissance rapide et vérifiant l'estimation*

$$|c(\lambda)| \leq \eta(1 + |\lambda|)^{-m},\ \lambda \in \Lambda,$$

il existe une fonction $f \in PW_{\Omega+[-\epsilon,\epsilon]}$, appartenant à la classe de Schwartz, telle que $c(\lambda) = f(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, et que

$$\|f\|_{(m,k)} \leq C_{m,k}(\Lambda, \Omega, \epsilon)\eta$$

Donc f a la même décroissance que $c(\lambda)$ et est, en outre, régulière.

Voici la construction des ϕ_n. On définit ϕ_{n+1} par $\phi_{n+1} = \phi_n - f_n$ où f_n est construite comme suit. On désigne par J une réunion finie d'intervalles telle que

$$J + [-\epsilon, \epsilon] \subset \Omega_{n+1},\ \text{mes}\, J > \frac{2a^*_{n+1}}{det\Gamma^*}$$

Le lemme sera appliqué pour les valeur $m \in [0, n+1]$ et $k \in [0, n+1]$ à X_{n+1} qui est un *model set* dont la définition ne dépend pas de h^*_{n+1}. Cela fournit une constante $C = C_{n+1}(\Lambda, J, \epsilon)$. On choisit maintenant h^*_{n+1} assez grand pour que l'on ait

$$|\lambda| > h^*_{n+1},\ \lambda \in X_{n+1} \Rightarrow |\phi_n(\lambda)|(1+|\lambda|)^{n+1} \leq \frac{1}{C\, 2^{n+1}}$$

Ensuite on définit $c(\lambda)$, $\lambda \in X_{n+1}$, par $c(\lambda) = 0$ si $|\lambda| \leq h^*_{n+1}$ et $c(\lambda) = \phi_n(\lambda)$ si $|\lambda| > h^*_{n+1}$. Le lemme 2.3 fournit une fonction f de la classe de Schwartz avec les estimations $\|f\|_{(m,k)} \leq 2^{-n-1}$, $0 \leq m, k \leq n+1$. On pose $\phi_{n+1} = \phi_n - f$. Pourquoi a-t-on $\phi_{n+1} = 0$ sur Z_{n+1} ? De deux choses l'une: ou bien $|\lambda| \leq h^*_{n+1}$ et l'on observe alors que $Z_{n+1} \cap [-h^*_{n+1}, h^*_{n+1}] \subset Z_n$, que $f(\lambda) = 0$ sur $X_{n+1} \cap [-h^*_{n+1}, h^*_{n+1}]$ et que $\phi_n = 0$ sur Z_n. Si, en revanche, $|\lambda| > h^*_{n+1}$ on a $f = \phi_n$ et $\phi_{n+1} = 0$.

Les ϕ_n convergent vers ϕ dans la classe de Schwartz et ϕ a les propriétés requises.