Les travaux de Leray sur les équations hyperboliques

Au début des années 50, la méthode d'énergie est devenue un outil important dans les études des équations hyperboliques aux dérivées partielles. On connaissait bien les équations hyperboliques de deuxième ordre dont le prototype est l'équation des ondes

$$C^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta(u) = 0.$$

Une question majeure était de trouver un analogue de la méthode d'énergie dans le cas des équations d'ordre supérieur à deux, à coefficients variables. Ce problème a été résolu par Leray pour les équations strictement hyperboliques, i.e. lorsque les caractéristiques correspondantes sont réelles et distinctes.

Dans les années 60 Leray s'intéresse aux équations aux dérivées partielles de caractéristiques réelles multiples. En général le problème de Cauchy est mal posé dans le cas de caractéristiques multiples : il faut ajouter des hypothèses supplémentaires sur les termes d'ordre inférieur appelées les conditions de Levi-Lax. En collaboration avec Ohya, Leray démontre le résultat suivant : Soit $a(x, D) = a_1(x, D) \dots a_p(x, D)$ un produit de p opérateurs hyperboliques de caractéristiques distinctes dont les coefficients sont de classe de Gevrey G^α avec $\alpha > 1$. Soit m l'ordre de a et b un opérateur différentiel d'ordre $m - p + q$, $q < p$. On s'intéresse au problème de Cauchy pour l'opérateur $a + b$. Leray et Ohya montrent que si les données initiales sont de classes de Gevrey G^α avec $1 < \alpha < p/q$, alors le problème de Cauchy admet une et une seule solution dans G^α dans un intervalle de temps $[0, T]$. En fait les hypothèses dans l'article de Leray et Ohya sont presque nécessaires.

Dans un article en collaboration avec Hamada et Wagschal, Leray étudie la propagation des singularités des solutions des équations hyperboliques. Le résultat principal dit que les singularités analytiques se propagent le long de caractéristiques de l'opérateur.

(Georgi Popov)