

De l'indice de Maslov à l'indice de Leray

Dans la préface à son traité "Analyse lagrangienne et mécanique quantique" publié par l'IRMA (Stasbourg) en 1978 et qui fut publié en anglais par MIT Press en 1981 Jean Leray note

Historique.- I.V. Arnold m'a demandé à Moscou, en 1967, comment je comprendrais le traité de V.P. Maslov cité [10], [11]. L'exposé qui suit est donc une réponse, peut-être inachevée, à cette question. Il a largement bénéficié de la très précieuse érudition de J. Lascoux.

En effet, Jean Leray a préfacé la traduction française du livre de Maslov "*Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*" [Dunod 1972] et les traducteurs, Lascoux et Seneor, nous précisent dans leurs remerciements :

Les traducteurs remercient Jean Leray qui a excité leur curiosité en ramenant de Moscou une copie de l'ouvrage de Maslov et Pierre Lelong qui leur a fait confiance.

L'indice de Maslov intervient dans la théorie de l'optique géométrique. L'optique devient l'étude d'ondes électromagnétiques à haute fréquence. On cherche donc des solutions de l'équation $Pu = 0$, asymptotiques pour $\tau \rightarrow \infty$, de la forme

$$u(x, \tau) = \exp(i\tau\phi(x)) \sum_{j \geq \mu} \tau^{-j} a_j(x)$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$. La première équation que l'on obtient en annulant les coefficients des puissances de τ dans le développement de Pu est l'équation eïkonale $f(x, d\phi(x)) = 0$ où f est le symbole principal de P .

Par exemple si P est l'opérateur d'ondes réduit $\Delta + \frac{\tau^2}{c(x)^2}$ alors

$$f(x, \xi) = -|\xi|^2 + \frac{1}{c(x)^2}.$$

C'est une fonction sur le cotangent $T^*\mathbb{R}^n$ que l'on peut munir d'une structure symplectique $\omega = \sum d\xi_j \wedge dx_j$. Avant de chercher la fonction ϕ on cherche le graphe de sa différentielle qui est d'abord une sous-variété lagrangienne Λ de $T^*\mathbb{R}^n$ (i.e., de dimension n et isotrope : ω est nulle sur son tangent).

Λ est incluse dans l'hypersurface C où f est nulle et donc le champs hamiltonien H_f de f est tangent à Λ (H_f est défini par la formule $\forall v \in T_{(x,\xi)}T^*\mathbb{R}^n, df_{(x,\xi)}(v) = \omega(H_f(x, \xi), v)$.) On obtient donc des solutions en poussant une sous-variété isotrope $\Lambda_0 \subset C$ par le flot Φ_t de H_f solution de $\dot{\Phi}_t(x, \xi) = H_f(\Phi_t(x, \xi))$.

Mais en général la variété Λ obtenue n'est pas un graphe sur \mathbb{R}^n , si elle n'est pas transverse à la verticale (le tangent à $T_x^*\mathbb{R}^n$ en (x, ξ)).

Les points de Λ où la condition de transversalité n'est pas satisfaite sont dits caustiques. On est alors amené à chercher des solutions de la forme

$$u(x, \tau) = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{k/2} \int_{\alpha \in \mathbb{R}^k} \exp(i\tau\phi(x, \alpha)) a(\tau, x, \alpha) d\alpha$$

pour une lagrangienne $\Lambda = \{(x, \phi'_x(x, \alpha)); \phi'_\alpha(x, \alpha) = 0\}$, qui permettent "d'appliquer l'optique géométrique au delà des caustiques", dicit Leray.

En un point caustique le théorème de la phase stationnaire prédit que la solution asymptotique ci-dessus aura un déphasage. C'est pour mesurer ce déphasage que Maslov introduit son indice de façon topologique comme quelque chose qui compte (avec un signe) les points d'un chemin lagrangien qui coupent la verticale, voir p.129 de *Théorie des Perturbations* :

Définissons la grassmannienne des lagrangiens

$$\mathcal{L} = \{l, \text{ sous-espace vectoriel de } T^*\mathbb{R}^n; \dim l = n, \omega|_l = 0\}.$$

Arnol'd a montré (dans un texte mis en appendice au livre de Maslov) que l'indice de Maslov sur les chemins fermés de \mathcal{L} est le générateur du groupe de cohomologie $H^1(\mathcal{L}, \mathbb{Z})$ et qu'il est aussi le nombre d'intersection avec la sous-variété Λ_{l_0} , définie pour $l_0 \in \mathcal{L}$ fixée, par

$$\Lambda_{l_0} = \{l \in \mathcal{L}; l \cap l_0 = \{0\}\}.$$

Jean Leray préfère voir cet indice sur le revêtement universel $\tilde{\mathcal{L}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}$ (rappelons que $\Pi_1(\mathcal{L}) = \mathbb{Z}$). Il construit une fonction

$$m : \tilde{\mathcal{L}} \times \tilde{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{Z}$$

qui en deux points u_1, u_2 tels que $\pi(u_1) = \pi(u_2)$ donne le nombre d'Arnol'd et qui vérifie deux propriétés importantes.

- m vérifie une relation de cocycle :

$$m(u_1, u_2) + m(u_2, u_3) + m(u_3, u_1) = \tau(\pi(u_1), \pi(u_2), \pi(u_3))$$

et le cocycle τ est celui introduit par Kashiwara sur \mathcal{L} , il intervient pour définir le cocycle de la représentation de Shale-Weil de l'algèbre d'Heisenberg.

- m est invariant sous l'action du revêtement universel $\widetilde{\text{Sp}}(n)$ du groupe symplectique $\text{Sp}(n)$, rappelons que $\Pi_1(\text{Sp}(n)) = \mathbb{Z}$.

Cela permet de définir à partir de m un indice $\mu : \widetilde{\text{Sp}}(n) \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2}$ qui a été retrouvé en topologie symplectique par Conley, Zehnder, Mc Duff, Salamon, Hofer.... dans les années '90.

La construction de Leray permet aussi de définir des actions transitives de $\text{Sp}_q(n)$, le revêtement à q feuillets non trivial de $\text{Sp}(n)$ sur \mathcal{L}^{2q} , le revêtement à $2q$ feuillets non trivial de \mathcal{L} .

En particulier le groupe métaplectique $\text{Sp}_2(n)$ opère transitivement sur le revêtement à 4 feuillets \mathcal{L}^4 , "résultat essentiel pour la théorie des développements asymptotiques" [Leray].

Dans son programme de travail élaboré en 1998 (publié par les CRAS en Janvier 1999) Jean Leray revenait sur l'indice de Maslov.