Formule de Cauchy-Leray

Pour toute fonction f holomorphe sur le domaine $\bar{D} \subset \mathbb{C}$ à bord rectifiable bD on a

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in bD} \frac{f(z)dz}{z - w}, \quad w \in D.$$

Cette formule a été découverte par A. Cauchy en 1831 pour résoudre “le problème de Cauchy” pour l'équation de Kepler (voir A. Cauchy “Note sur l'intégration des équations différentielles des mouvements planétaires”, 1840).

Il n'existe pas de formule aussi simple et aussi efficace pour les fonctions de plusieurs variables. En vue d'applications en mathématiques et en physique, on a trouvé plusieurs formules pour les fonctions de plusieurs variables dans des domaines particuliers. Parmi les auteurs des formules les plus importantes citons A. Cauchy (1841), S. Bergman (1922), G. Moisil (1931), A. Weil (1932), R. Fueter (1934), E. Martinelli (1938), S. Bochner (1941, 1944), L. Fantappie (1943), Jost, Lehmann, F. Dyson (1958), Hua Lo Ken (1958)...

Laquelle de ces différentes formules peut être considérée comme un véritable analogue de la formule de Cauchy ?

Pour résoudre le problème de Cauchy pour des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients polynomiaux, J. Leray a découvert en 1956-59 la formule remarquable suivante, qui inclut comme cas particuliers toutes les formules citées ci-dessus.

Théorème. (J. Leray, Problème de Cauchy, III, Bull. Soc. Math. France, 87, 1959, p. 153) Soient Ω un domaine à bord rectifiable dans $\mathbb{C}^n$, f une fonction holomorphe sur Ω et $w \in \Omega$. Alors,

$$f(w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{(\eta,z) \in h_w} \frac{f(z)\omega'(\eta) \wedge \omega(z)}{< \eta, z - w >^n},$$

où $\eta \in \mathbb{C}^n$, $\omega(z) = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$, $\omega'(\eta) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \eta_k \wedge_{j \neq k} d\eta_j$, $< \eta, z >= \sum \eta_j z_j$, h_w est un $(2n-1)$-cycle dans le domaine $\{(\eta, z) \in \mathbb{C}^n \times \Omega \ : < \eta, z - w > \neq 0\}$ dont la projection $(\eta, z) \mapsto z$ sur $\Omega \backslash \{w\}$ est homologue à $b\Omega$.

Cette formule est à la fois fondamentale et simple dans sa présentation. Pour la prouver, il faut d'abord montrer que la forme différentielle utilisée au second membre est fermée et ensuite (en utilisant la formule de Stokes) il suffit vérifier la formule pour un cycle $\tilde{h}_w$, le plus simple possible dans la même classe d'homologie que h_w. Pour cela on choisit $\tilde{h}_w$ comme le graphe de l'application $z \mapsto \eta(z) = \bar{z} - \bar{w}$, où z appartient à la sphère $\{z \ : \ |z - w| = \varepsilon\}$ de rayon assez petit. Pour le cycle $\tilde{h}_w$ la formule de Leray se réduit à la formule de la moyenne pour une fonction harmonique.

Une version très efficace de la formule de Leray est la suivante.

Soit $D = \{z \in \mathbb{C}^n \ : \ \rho(z) < 0\}$ un domaine convexe à bord lisse. Pour $z \in bD$ on pose $\eta(z) = \frac{\partial \rho}{\partial z}(z)$. Dans ce cas, la formule de Leray s'écrit sous la forme suivante : pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(\bar{D})$ et pour tout $w \in D$ on a

$$f(w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{z \in bD} \frac{f(z)\omega'(\frac{\partial \rho}{\partial z}(z)) \wedge \omega(z)}{< \frac{\partial \rho}{\partial z}(z), z - w >^n}.$$

L'un des nombreux corollaires de cette formule est la formule d'inversion pour la transformation de Radon. On applique alors la formule précédente au domaine $D_\varepsilon = \{x + iy \in \mathbb{C}^n \ : \ |y| < \varepsilon\}$, où $\varepsilon \to 0$. Alors, la formule de Leray se transforme en une formule de type de Radon :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{\theta \in S^{n-1}} C_+ \frac{d^n}{ds^n} Rf(\theta, s)\big|_{s=\langle x,\theta\rangle} \omega'(\theta),$$

où

$$Rf(\theta, s) = \int_{\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x,\theta\rangle \leq s\}} f(x)dx,$$

$$C_+\varphi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)dt}{t - (s + i0)} \quad \text{(transformation de Cauchy).}$$

La formule de Cauchy-Leray a donné lieu à de nombreuses applications dans divers domaines : analyse fonctionnelle, équations aux dérivées partielles, analyse complexe, géométrie algébrique, géométrie intégrale, physique mathématique.

Voici une liste de travaux où cette formule est utilisée de manière essentielle :
N. Bourbaki (1967), A. Martineau (1967), J.-M. Bony (1976), L. Aizenberg-A. Yuzhakov (1983) D. Schiltz (1988), B. Berndtsson-M. Passare (1989), G. Henkin (1990,95), C. Berenstein- R. Gay- A. Vidras- A. Yger (1993), R. Novikov (1994), B. Sternin, V. Shatalov (1994), A. D'Agnolo, P. Schapira (1996), M. Andersson (1996).

(Gennadi Henkin)