C0

INTRODUCTION :

Ce cours est la suite et le prolongement du cours d'analyse fonctionnelle du premier semestre de M1. Il est divisé en trois fois deux parties.

- Complément sur la formule des résidus.
- Théorie de Sturm-Liouville .
- Rappels et compléments sur les espaces de Hilbert.
- Le théorème spectral pour les opérateurs compacts auto-adjoints.
- Convexité et dualité.
- Convergence faible.

La première est un peu décalée par rapport aux deux autres parties, le but est d'étudier l'équation de Sturm-Liouville :

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}y(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

ceci à l'aide de la théorie des équations différentielles et de la formule des résidus. On commencera donc par quelque rappels sur la formule des résidus.

La seconde partie est une suite de l'étude rapide des espaces de Hilbert que vous avez découvert au premier semestre. On introduira des nouveaux espaces de Hilbert : les espaces de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n)$ que l'on étudiera particulièrement en dimension 1. L'objectif de cette partie est d'introduire les outils et concepts qui permettent d'élargir l'étude faite dans la première partie sur les équations de Sturm-Liouville ; l'objectif de la théorie développée dans ces deux leçons est le théorème spectral pour les opérateurs auto adjoint compact qui permet de diagonaliser certains opérateurs en dimension infini.

La troisième partie se consacre principalement à la notion de convergence faible qui permet de contourner le manque de compacité dans les problèmes d'optimisation en dimension infinie. Pour cela elle contient une étude de la dualité et de la convexité dans les espaces vectoriels normés.

Pour finir on donne quelques références bibliographiques qui permettent de compléter et de prolonger le cours :

- W. Rudin : *Analyse réelle et complexe*, Masson.
- E-C. Titchmarsch : *The theory of functions,* Oxford university press.
- L. Alfors : *Complex analysis : an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable,* McGraw-Hill.
- E-C. Titchmarsch : *Eigenfunctions expansions part I,* Clarendon Press (Oxford).
- H. Brezis : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Masson / Dunod.
- W. Rudin : *Analyse fonctionnelle*, Ediscience international.
- F.Riesz et B-S. Nagy : *Leçons d'analyse fonctionnelle,* Akademiai Kiaodo Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences.
- A-N. Kolmogorov et S. Fomin : *ČÉlements de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle,* Mir, Moscou, 1974 (traduit en anglais, la version française est presque introuvable).
- F.Hirsh et G. Lacombe : *Élement d'Analyse fonctionnelle,* Masson.
- L. Schwartz : *Analyse : topologie générale et analyse fonctionnelle,* Hermann
- S. Banach : *Théorie des opérations linéaires,* Chealsea publishing company.
- J. Dieudonné : *Éléments d'analyse. T. I -fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars fr Paris 1968

C1

COMPLÉMENTS SUR LA FORMULE DES RÉSIDUS.

On va dans cette leçon complèter ce qui a été vu en L3.

Notations :

On idenfiera $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ via $z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$.

Pour $p \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on notera

- $D(p, r] = \{z \in \mathbb{C}, |z - p| \leq r\}$ le disque fermé de centre p et de rayon r
- $D(p, r[= \{z \in \mathbb{C}, |z - p| < r\}$ le disque ouvert de centre p et de rayon r
- $S(p, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - p| = r\}$ le cercle de centre p et de rayon r.

2.1. **Intégrale de chemin.**

2.1.1. *Définition.*

Définition 2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $P, Q : \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues. Lorsque $\gamma : [a, b] \to \Omega$ est une courbe $\mathcal{C}^1$, on note*

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_a^b P(\gamma(t)).\dot{x}(t)dt + \int_a^b Q(\gamma(t)).\dot{y}(t)dt$$

$$\int_\gamma Pdz = \int_a^b P(\gamma(t)).\dot{\gamma}(t)dt$$

où

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t).$$

2.1.2. *Dépendance par rapport au paramètrage.*

L'intégrale de chemin ne dépend pas du paramétrage (positif) choisi pour paramétrer la courbe γ : si $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ est $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$ alors

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_{\gamma\circ\varphi} Pdx + Qdy.$$

Alors que si l'on change le sens de parcours de γ alors l'intégrale de chemin change de signe : si $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(b + a - t), t \in [a, b]$ alors

$$\int_{\widetilde{\gamma}} Pdx + Qdy = -\int_\gamma Pdx + Qdy.$$

2.1.3. *Exemples de base :*

i) Si γ paramètre un segment $[z_0, z_1]$:

$$\gamma(t) = tz_1 + (1 - t)z_0$$

alors

$$\int_\gamma Pdz = \int_0^1 P\left(tz_1 + (1 - t)z_0\right)(z_1 - z_0)dt$$

ii) Si γ paramètre un arc de cercle

$$\gamma(t) = \omega + re^{it},\ t \in [\alpha, \beta]$$

$$\int_\gamma Pdz = \int_\gamma Pdx + iPdy = \int_\alpha^\beta P\left(\omega + re^{it}\right) re^{it} idt.$$

Un calcul utile

Lemme 2.2. *Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ alors pour $k \in \mathbb{Z}$ on a*

$$\int_{S(\omega,r)} \frac{dz}{(z - \omega)^k} = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration.

$$\int_{S(\omega,r)} \frac{dz}{(z - \omega)^k} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^k e^{ikt}} ire^{it}dt = i\int_0^{2\pi} r^{1-k}e^{i(1-k)t}idt$$

Soit

$$\int_{S(\omega,r)} \frac{dz}{(z - \omega)^k} = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } k = 1 \\ ir^{1-k}\left[\frac{e^{i(1-k)t}}{i(1-k)}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } k \neq 1. \end{cases}$$

□

2.1.4. *Formule de Green-Riemann.*

Définition 2.3. *On dit qu'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est à bord $\mathcal{C}^1$ si en chaque point du bord de Ω possède un voisinage de la forme $]a, b[\times]c, d[$ et que*

- *Soit il existe une fonction $\varphi :]a, b[\to]c, d[$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que*

$$\partial\Omega \cap (]a, b[\times]c, d[) = \{(x, \varphi(x)), x \in]a, b[\}$$

- *Soit il existe une fonction $\psi :]c, d[\to]a, b[$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que*

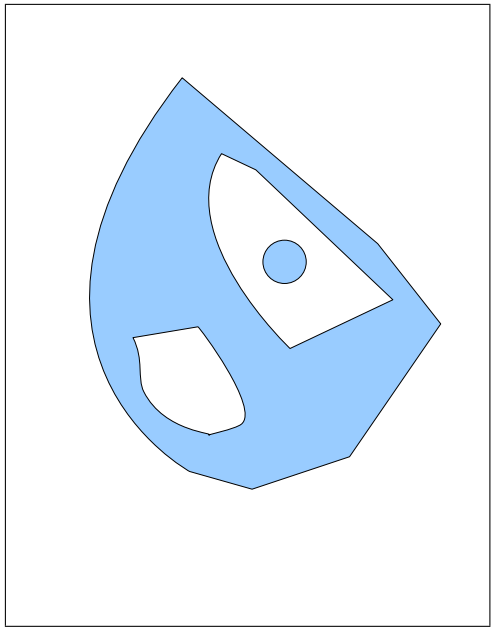
$$\partial\Omega \cap (]a, b[\times]c, d[) = \{(y, \varphi(y)), y \in]c, d[\}.$$

On peut démontrer que si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{C}$ est à bord $\mathcal{C}^1$, alors $\partial\Omega$ est la réunion disjointe de courbes $\mathcal{C}^1$ fermées simples régulières ; c'est à dire qu'il existe $\gamma_1, ..., \gamma_k \ : \ [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

— $\partial\Omega = \bigcup_i \gamma_i([0,1])$,
— $\forall j, \forall t \in [0,1], \ \gamma_j'(t) \neq 0$, (i.e. les courbes γ_j sont *régulières*),
— $\forall j, \ \gamma_j(0) = \gamma_j(1)$, (i.e. les courbes γ_j sont *fermées*),
— $\forall j, \ \gamma_j \ :]0,1[\to \mathbb{C}$ est injective, (i.e. les courbes γ_j sont *simple*).

Définition 2.4. *On dit qu'un ouvert borné Ω de $\mathbb{C}$ est à bord $\mathcal{C}^1$ par morceaux si $\partial\Omega$ est la réunion disjointe de courbes $\mathcal{C}^1$ par morceaux fermées simples régulières ; c'est à dire qu'il existe $\gamma_1, ..., \gamma_k \ : \ [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux telles que*

— $\partial\Omega = \bigcup_i \gamma_i([0,1])$,
— $\forall j, \forall t \in [0,1] \gamma_j'(t+) \neq 0$ *et* $\gamma_j'(t-) \neq 0$,
— $\forall j, \ \gamma_j(0) = \gamma_j(1)$,
— $\forall j, \ \gamma_j \ :]0,1[\to \mathbb{C}$ *est injective.*



Un ouvert à bord $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Théorème 2.5. *Soit Ω un ouvert borné à bord C^1 par morceaux et P, Q deux fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ et $\mathcal{C}^1$ sur Ω et dont les dérivées partielles sont continues sur $\overline{\Omega}$ alors*

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy$$

où $\partial\Omega$ est la réunion de courbes $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ que l'on parcourt de façon à laisser Ω sur sa "gauche".

Deux exemples :

— Si
$$\Omega = \{(x,y) \in]a,b[\times \mathbb{R}, 0 < y < f(x)\}$$
où f est une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ alors
$$\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b P(x, f(x))dx - \int_a^b P(x,0)dx.$$
— si Ω un ouvert borné à bord C^1 par morceaux alors
$$\text{Aire}\,(\Omega) = \int_\Omega dxdy = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} xdy - ydx.$$

2.1.5. *La formule de Cauchy.*

Théorème 2.6. *Soit Ω un ouvert borné à bord C^1 par morceaux et $f \ : \ \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, holomorphe sur Ω alors pour tout $\zeta \in \Omega$*

$$f(\zeta) = \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - \zeta} \frac{dz}{2i\pi}.$$

Démonstration. Soit $\zeta \in \Omega$ puisque Ω est ouvert, il y a $r_0 > 0$ tel que

$$D(\zeta, r_0] = \{z \in \mathbb{C}, |z - \zeta| \leq r_0\} \subset \Omega$$

on pose alors pour $\varepsilon \leq r_0$

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus D(\zeta, \varepsilon]$$

C'est un ouvert borné à bord C^1 par morceaux :

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \gamma_\varepsilon([0, 2\pi])$$

où

$$\gamma_\varepsilon(t) = \zeta + \varepsilon e^{-it}$$

On définit

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - \zeta}.$$

C'est une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{\zeta\}$ elle vérifie donc les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Avec la formule de Green-Riemann on obtient

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(z)dz = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

On a donc

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(z)dz = \int_{\partial\Omega} g(z)dz + \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz.$$

On évalue alors

$$\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz = \int_0^{2\pi} f\left(\zeta + \varepsilon e^{-it}\right)(-i)dt$$

On a donc l'égalité

$$i\int_0^{2\pi} f\left(\zeta + \varepsilon e^{-it}\right)dt = \int_{\partial\Omega} g(z)dz = \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz$$

Par continuité de f en ζ on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} f\left(\zeta + \varepsilon e^{-it}\right)(i)dt = 2i\pi f(\zeta)$$

D'où le résultat énoncé. □

2.2. **Convergence de fonctions holomorphes.**

2.2.1. *Intégrale à paramètre holomorphe.* Pour commencer nous avons un théorème de convergence dominée holomorphe :

Théorème 2.7. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, on suppose que $f : U \times \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable telle que*

i) p.p. $x \in U$ la fonction $z \mapsto f(x,z)$ est holomorphe.

ii) Il y a $g \in \mathcal{L}^1(U)$ tel que

$$p.p. x \in U, \forall z \in \Omega\ |f(x,z)| \leq g(x)$$

Alors la fonction F définie sur Ω par

$$F(z) = \int_U f(x,z)dx$$

est holomorphe et

$$F'(z) = \int_U \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)dx.$$

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega$, il y a $r_0 > 0$ tel que $D(\omega, r_0] \subset \Omega$.
Si on montre que pour tout $\zeta \in \Omega$ tel que $|\zeta - \omega| < r_0$ alors

$$F(\zeta) = \int_{S(\omega,r_0)} \frac{F(z)}{z-\zeta}\frac{dz}{2i\pi}$$

alors on aura montré que F vérifie la formule de Cauchy donc que F est holomorphe.
Or cette identité est une conséquence de la formule de Fubini appliquée à la fonction

$$u(x,t) = \frac{f\left(x, \omega + r_0 e^{it}\right)}{\omega + r_0 e^{it} - \zeta} i r_0 e^{it}$$

sur $U \times [0, 2\pi]$, c'est une fonction mesurable de plus puisque

$$p.p.(x,t) \in U \times [0,2\pi],\ \text{on a } |u(x,t)| \leq g(x)(r_0 - |\zeta - \omega|)^{-1}$$

cette fonction est intégrable , on a donc

$$\begin{aligned}\int_{S(\omega,r_0)} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz &= \int_{[0,2\pi]}\left(\int_U u(x,t)dx\right)dt \\ &= \int_U \left(\int_{[0,2\pi]} u(x,t)dt\right)dx\ ,\end{aligned}$$

or par hypothèse pour p.p. $x \in U$

$$\int_{[0,2\pi]} u(x,t)dt = \int_{S(\omega,r_0)} \frac{f(x,z)}{z-\zeta}dz = 2i\pi f(x,\zeta)$$

Donc

$$\int_{S(\omega,r_0)} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz = 2i\pi\int_U f(x,\zeta)dx = 2i\pi F(\zeta).$$

Une application identique du théorème de Fubini montre que

$$\begin{aligned}F'(\zeta) &= \int_{S(\omega,r_0)} \frac{F(z)}{(z-\zeta)^2}\frac{dz}{2i\pi} \\ &= \int_U \left(\int_{S(\omega,r_0)} \frac{f(x,z)}{(z-\zeta)^2}\frac{dz}{2i\pi}\right)dx \\ &= \int_U \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)dx.\end{aligned}$$

□

2.2.2. *Limites uniformes.*

Théorème 2.8. *Une limite uniforme de fonctions holomorphe est holomorphe. Plus exactement : Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes toute définies sur Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f_\infty : \Omega \to \mathbb{C}$; si pour tout compact $K \subset \Omega$, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f_∞ sur K :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{z\in K} |f_n(z) - f_\infty(z)| = 0$$

alors f_∞ est holomorphe. De plus pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout entier ℓ, $(f_n^\ell)_n$ converge uniformément vers f_∞^ℓ sur K.

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega$ il y a $r_\omega > 0$ tel que $D(\omega, r_\omega] \subset \Omega$. On sait donc que (f_n) converge uniformément vers f_∞ sur le compact $D(\omega, r_\omega]$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{z\in D(\omega,r_\omega]} |f_n(z) - f_\infty(z)| = 0.$$

Or pour $\zeta \in \Omega$ tel que $|\omega - \zeta| < r_\omega$, on sait que

$$f_n(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{S(\omega,r_\omega)} \frac{f_n(z)}{z-\zeta} dz$$

Nos hypothèses nous permettent d'affirmer que lorsqu'on l'on fait tendre n vers l'infini :

$$f_\infty(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{S(\omega,r_\omega)} \frac{f_\infty(z)}{z-\zeta} dz$$

Ainsi f_∞ est bien holomorphe. Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Puisque

$$f_n^\ell(\zeta) = \frac{\ell!}{2i\pi} \int_{S(\omega,r_\omega)} \frac{f_n(z)}{(z-\zeta)^{\ell+1}} dz \quad ,$$

on en déduit que si $|\omega - \zeta| \leq r_\omega/2$ alors

$$\left| f_n^\ell(\zeta) - f_\infty^\ell(\zeta) \right| \leq \frac{2^{\ell+1}\,\ell!}{2\pi r_\omega^{\ell+1}} (2\pi r_\omega) \sup_{z\in D(\omega,r_\omega]} |f_n(z) - f_\infty(z)|.$$

Donc

$$\sup_{z\in D(\omega,r_\omega/2]} \left| f_n^\ell(z) - f_\infty^\ell(z) \right| \leq \frac{2^{\ell+1}\,\ell!}{r_\omega^\ell} \sup_{z\in D(\omega,r_\omega)} |f_n(z) - f_\infty(z)|.$$

Maintenant si $K \subset \Omega$ est un compact alors pour tout $k \in K$ on trouve comme précédement $r_k > 0$, tel que

$$\sup_{z\in D(k,r_k/2]} \left| f_n^\ell(z) - f_\infty^\ell(z) \right| \leq \frac{2^{\ell+1}\,\ell!}{r_\omega^\ell} \sup_{z\in D(k,r_k)} |f_n(z) - f_\infty(z)|.$$

On a donc

$$K \subset \bigcup_{k\in K} D(k, r_k/2[$$

Puisque K est compact, on peut extraire de ce recouvrement ouvert, un sous recouvrement fini : c'est à dire, on peut trouver $k_1, ..., k_N \in K$ tel que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} D(k_i, r_{k_i}/2[$$

Si $\delta = \min_i r_{k_i}$, on obtient

$$\sup_{z\in K} \left| f_n^\ell(z) - f_\infty^\ell(z) \right| \leq \frac{2^{\ell+1}\,\ell!}{\delta^\ell} \sup_i \sup_{z\in D(k_i,r_i]} |f_n(z) - f_\infty(z)|.$$

Ainsi la suite (f_n^ℓ) converge uniformément vers f_∞^ℓ sur K. □

En reprenant la preuve et en utilisant le théorème de convergence dominée, on remarque que la même conclusion persiste avec des hypothèses plus faibles :

Théorème 2.9. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphe toute définies sur Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et qui converge simplement vers f_∞ si pour tout compact $K \subset \Omega$:*

$$\sup_n \sup_{z\in K} |f_n(z)| < \infty$$

alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f_∞ sur les compacts de Ω et f_∞ est holomorphe.

2.3. **Quelques applications de la formule de Cauchy.**

2.3.1. *Théorème de Liouville.*

Théorème 2.10. *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe bornée alors f est constante.*
Mieux si

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \sup_{|z|=r} |f(z)| = 0$$

alors f est constante.

Démonstration. On utilise la formule de Cauchy : pour $|\zeta| < r$, on a

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{S(0,r)} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz$$

et

$$f'(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{S(0,r)} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^2}dz$$

On en déduit

$$|f'(\zeta)| \leq r\frac{\sup_{|z|=r}|f(z)|}{(r-|\zeta|)^2}.$$

L'hypothèse est qu'il existe une suite croissante tendant vers l'infini (r_j) telle que

$$\liminf_{j\to+\infty} \frac{1}{r_j}\sup_{|z|=r_j}|f(z)| = 0.$$

On applique l'inégalité précédente en r_j et on fait tendre j vers l'infini, et on obtient $f'(\zeta) = 0$. Ceci pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$ donc f est constante. □

2.3.2. *Principe du prolongement analytique.*

Théorème 2.11. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $p \in \Omega$ et f une fonction holomorphe sur $\Omega\backslash\{p\}$. Si f est borné au voisinnage de p alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.*

Démonstration. L'hypothèse est qu'il y a $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tels que

$$0 < |z-p| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(z)| \leq M.$$

Soit alors $\zeta \in \Omega$ tel que $0 < |\zeta - p| \leq \varepsilon$ alors pour $\delta \in]0, |p-\zeta|[$, la formule de Cauchy implique

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(p+\varepsilon e^{it}\right)}{p+\varepsilon e^{it}-\zeta}\varepsilon e^{it}idt - \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(p+\varepsilon e^{it}\right)}{p+\delta e^{it}-\zeta}\delta e^{it}idt$$

Or notre hypothèse implique que

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{f\left(p+\varepsilon e^{it}\right)}{p+\delta e^{it}-\zeta}\delta e^{it}idt\right| \leq M\frac{\delta}{|p-\zeta|-\delta}$$

Ainsi cette intégrale tend vers zéro lorsque δ tend vers 0 et on a pour tout $\zeta \in \Omega$ tel que $0 < |\zeta - p| \leq \varepsilon$

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{S(p,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz,$$

Ainsi en posant

$$f(p) = \lim_{\zeta\to p} f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{S(p,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-p}dz,$$

on obtient une fonction holomorphe sur Ω. □

2.3.3. *Un exemple :* On va utiliser les résultats précédents pour démontrer la formule (classique) suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} :$$

$$\pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

On pose pour $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$:

$$\Psi(z) = \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

et

$$\Phi(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

et pour $N \in \mathbb{N}$

$$\Phi_N(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{N}\frac{2z}{z^2-n^2} = \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n}.$$

Il est facile de démontrer que (Φ_N) converge uniformément vers Φ sur les compacts de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$: En effet si $R > 0$, on a pour $|z| \leq R$ et $N > R$

$$|\Phi(z) - \Phi_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2R}{|n^2-z^2|} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2R}{n^2-R^2}.$$

Donc Φ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, de plus par construction

$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},\ \Phi(z+1) = \Phi(z)$$

À l'aide du théorème de prolongement analaytique, il est facile de démontrer que la fonction $\Psi - \Phi$ peut être prolongée en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, cette fonction sera 1-périodique et donc

$$L := \sup_{|\operatorname{Im} z|\leq 1}|(\Psi-\Phi)(z)| = \sup_{|\operatorname{Im} z|\leq 1;|\operatorname{Re} z|\leq 1/2}|(\Psi-\Phi)(z)|$$

est fini.

Supposons maintenant que $\operatorname{Im} z \geq 1$, on a

$$\left|e^{2i\pi z}\right| = e^{-2\pi \operatorname{Im} z} \leq e^{-2\pi}$$

$$|\Psi(z)| = \pi \left|\frac{e^{2i\pi z}+1}{e^{2i\pi z}-1}\right| \leq \frac{2\pi}{1-e^{-2\pi}}$$

On obtient la même majoration si $\operatorname{Im} z \leq -1$. Pour $z = x+iy$ vérifiant $|x| \leq 1/2$ et $|y| \geq 1$, nous allons majorer $|\Phi(z)|$.
Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{2z}{z^2-n^2}\right|^2 &= \frac{4(x^2+y^2)}{(y^2+(n-x)^2)(y^2+(n+x)^2)} \\ &\leq \frac{4(1+y^2)}{(y^2+(n-1/2)^2)^2} \\ &On\ utilise\ 1 \leq y^2 \\ &\leq \frac{8y^2}{(y^2+(n-1/2)^2)^2}\end{aligned}$$

En utilisant la comparaison série-intégrale, on en déduit

$$\begin{aligned}|\Phi(z)| &\leq 1 + 4|y| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y^2+(n-1/2)^2} \\ &\leq 1 + 4|y| \int_0^{\infty} \frac{1}{y^2+(t-1/2)^2} dt \\ &\leq 1 + 4|y| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2+(t-1/2)^2} dt = 1 + 4\pi\end{aligned}$$

Puis par 1-périodicité de Φ, on en déduit que

$$|\operatorname{Im} z| \geq 1 \Rightarrow |\Phi(z)| \leq 1 + 4\pi$$

On en déduit donc que le fonction $\Phi - \Psi$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et borné par

$$\max\left\{L, \frac{2\pi}{1-e^{-2\pi}} + 1 + 4\pi\right\}$$

C'est donc une fonction constante qui de plus est impaire donc elle est nulle.

2.4. **Fonctions méromorphes.**

2.4.1. *Définitions.*

Définition 2.12. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction f est méromophe sur Ω si elle est holomorphe sur Ω privé d'un ensemble discret $\mathcal{P}$* [1] *et si pour chaque $p \in \mathcal{P}$, il y a un entier k tel que la fonction $z \mapsto (z-p)^k f(z)$ soit borné au voisinage de p.*

Dans ce cas, pour chaque $p \in \mathcal{P}$, la fonction $g(z) = (z-p)^k f(z)$ admet un prolongement homomorphe dans un voisinage de p, elle est donc dévellopable en séries entières au voisinage de p, il y a donc des nombres complexes $a_0, \ldots, a_{k-1}$ et une fonction holomorphe h définit au voisinage de p tels que :

$$g(z) = (z-p)^k f(z) = a_0 + a_1(z-p) + \ldots + a_{k-1}(z-p)^{k-1} + (z-p)^k h(z).$$

Soit encore

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-p)^k} + \frac{a_1}{(z-p)^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{z-p} + h(z).$$

On aura pout $\ell \in \{0, \ldots, k-1\}$

$$a_\ell = \frac{1}{2i\pi} \int_{S(p,\varepsilon)} \frac{f(z)}{(z-p)^{\ell-k+1}} dz$$

Définition 2.13. *Les pôles de f sont les points de $\mathcal{P}$ et la multiplicité de p comme pôle de f est le plus petit entier k tel que la fonction $z \mapsto (z-p)^k f(z)$ soit bornée au voisinage de p.*
De plus le coefficient a_{k-1} est le résidu de f en p :

$$\operatorname{res}(f,p) = \frac{1}{2i\pi} \int_{S(p,\varepsilon)} f(z)\, dz. \tag{1}$$

Par exemple, le quotient de deux fonctions holomorphes est une fonction méromorphe.

2.4.2. *La formule des résidus.*

Théorème 2.14. *Soit Ω un ouvert et f une fonction méromorphe sur Ω, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de f. On suppose que $\Delta \subset \Omega$ est un ouvert borné à bord C^1 par morceaux inclus dans Ω et que le bord de Δ est exempt de pôle de f alors*

$$\sum_{p \in \Delta \cap \mathcal{P}} \operatorname{res}(f,p) = \int_{\partial\Delta} f(z) \frac{dz}{2i\pi}.$$

1. C'est à dire que pour tout $p \in \mathcal{P}$, il y a $\varepsilon > 0$ tel que $D(p,\varepsilon] \cap \mathcal{P} = \{p\}$.

Démonstration. On remarque que Δ ne contient qu'un nombre fini de pôle. En effet si $p \in \mathcal{P}$, il y a ε_p tel que

$$D(p, \varepsilon_p] \cap \mathcal{P} = \{p\}.$$

Puisque $\bar{\Delta} \cap \mathcal{P}$ est un ensemble compact recouvert par les disques ouverts $D(p, \varepsilon_p[)$ on peut extraire de ce recouvrement un sous recouvrement fini i.e. on trouve $p_1, \ldots, p_N \in \mathcal{P} \cap \bar{\Delta}$ tel que

$$\bar{\Delta} \cap \mathcal{P} \subset \bigcup_{i=1}^{N} D(p_i, \varepsilon_{p_i}[$$

ce qui montre que

$$\bar{\Delta} \cap \mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_N\}.$$ [2]

On a alors $\{p_1, \ldots, p_N\} \subset \Delta$ car le bord de Δ ne contient pas de pôle de f. Dès que $\varepsilon > 0$ est assez petit on a : pour tout i $D(p_i, \varepsilon] \subset \Delta$ et pour $i \neq j$, $D(p_i, \varepsilon] \cap D(p_j, \varepsilon] = \emptyset$. Lorsque l'on applique la formule de Green-Riemann sur $\Delta \setminus \bigcup_{i=1}^{N} D(p_i, \varepsilon]$, on trouve

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{N} \int_{S(p_i,\varepsilon)} f(z) dz.$$

Or d'après (1) :

$$\int_{S(p_i,\varepsilon)} f(z) dz = 2i\pi \operatorname{res}(f, p_i).$$

□

2.4.3. *Exemple d'applications à un calcul d'intégrale.* On va calculer

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

lorsque x est un nombre complexe tel que

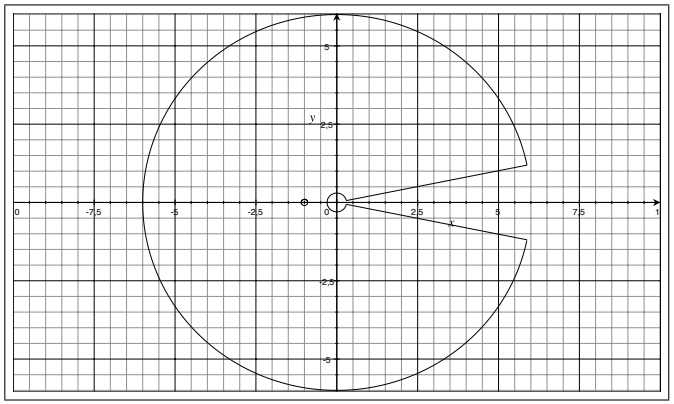
$$0 < \operatorname{Re} x < 1.$$

Sous ces conditions, l'intégrale ci dessus est absolument convergente. La fonction $f(z) = \frac{\exp((x-1)\ln z)}{1+z}$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ avec un seul pôle en $z = -1 = e^{i\pi}$ dont le résidu est

$$\exp\left((x-1)\ln\left(e^{i\pi}\right)\right) = e^{i\pi(x-1)} = -e^{i\pi x}.$$

2. Ce qui est en fait montré ici est plus général : un ensemble discret et compact est fini.

On considère le domaine $\Delta_{\varepsilon,R}$



dont le bord est constitué de deux arcs de cercles de rayon $\varepsilon \in]0, 1[$ et $R > 1$ paramétrés par $t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \mapsto Re^{it}$ et $t \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \mapsto \varepsilon e^{-it}$ et des deux segments $\left[\varepsilon e^{i\varepsilon}, Re^{i\varepsilon}\right]$ et $\left[\varepsilon e^{-i\varepsilon}, Re^{-i\varepsilon}\right]$.
Le formule des résidus montre que

$$\int_{\partial\Delta_{\varepsilon,R}} f(z) dz = -2i\pi e^{i\pi x}$$

Lorsque l'on fait tendre $\varepsilon \to 0$, on obtient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial\Delta_{\varepsilon,R}} f(z) dz = \left(1 - e^{2i\pi x}\right) \int_0^R \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_0^{2\pi} \frac{R^x}{1+Re^{it}} ie^{itx} dt.$$

Puisque l'on a la majoration

$$\left| \frac{R^x}{1+Re^{it}} ie^{itx} \right| \leq \frac{R^x}{R-1}$$

on obtient en faisant tendre R vers l'infini :

$$\left(1 - e^{2i\pi x}\right) \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = -2i\pi e^{i\pi x}\ ,$$

ce qui permet d'obtenir

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Cette formule permet de démontrer la formule de symétrie pour la fonction Γ :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Égalités que l'on montre d'abord pour x un nombre complexe tel que $0 < \operatorname{Re} x < 1$., le cas général s'en déduit car les deux termes de l'égalité sont holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
On calcule le produit $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ grL'ce au théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \left(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\right)\left(\int_0^\infty s^{-x}e^{-s}dt\right) \\
&= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} t^{x-1}s^{-x}e^{-t-s}dtds \\
&\text{on effectue le changement de variables } : \tau\sigma = t, \sigma = s \\
&= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \tau^{x-1}e^{-\tau\sigma-\sigma}d\tau d\sigma \\
&= \int_0^\infty \tau^{x-1}\left(\int_0^\infty e^{-\tau\sigma-\sigma}d\sigma\right)d\tau \\
&= \int_0^\infty \tau^{x-1}\frac{1}{1+\tau}d\tau \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi x)}
\end{aligned}$$

2.5. **Applications.**

2.5.1. *Théorème de Rouche.* Remarquons que si f est une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ alors la fonction f'/f est méromorphe sur Ω, ses pôles corespondent aux zéros de f et le résidu d'un pôle est la multiplicité de celui ci comme zéro de f. En effet si p est un zéro de f de multiplicité k alors il y a une fonction holomorphe g défini au voisinage de p tel que $g(p) \neq 0$ et

$$f(z) = (z-p)^k g(z)$$

ainsi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-p} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

On a donc

Proposition 2.15. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et soit $\Delta \subset \Omega$ un ouvert borné à bord C^1 par morceaux inclus dans Ω et le bord de Δ est exempt de zéro de f alors $\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta}\frac{f'(z)}{f(z)}dz =$ Nombre de zéro de f dans Δ compté avec leurs multiplicités.*

Ceci permet de démontrer le théorème de Rouche :

Théorème 2.16. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $\Delta \subset \Omega$ un ouvert borné à bord C^1 par morceaux tel que $\bar{\Delta} \subset \Omega$. Si f, g sont deux fonctions holomorphes sur Ω telles que*

$$\forall z \in \partial\Delta,\ |f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

alors f et g ont le même nombre de zéro dans Δ compté avec multiplicités.

Démonstration. Le bord de Δ étant compact il existe un réel $\rho \in]0,1[$ tel que

$$\forall z \in \partial\Delta,\ |f(z) - g(z)| < \rho|f(z)|.$$

Et l'ensemble $U := \{z \in \Omega, |f(z) - g(z)| < \rho|f(z)|\}$ est un ouvert contenant $\partial\Delta$ et sur cet ouvert la fonction f ne s'annule pas et la fonction $Q(z) = g(z)/f(z)$ vérifie

$$\forall z \in U, |Q(z) - 1| < \rho$$

Ceci assure que l'on peut trouver une fonction v holomorphe sur U telle que

$$\forall z \in U, Q(z) = e^{v(z)}.$$

On a en fait

$$v(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(Q(z)-1)^n}{n}.$$

On aura alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta}\frac{Q'(z)}{Q(z)}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta}v'(z)dz$$

Or $\partial\Delta$ est la réunion de courbes fermées i.e. de courbes $\gamma\ [a,b] \to \mathbb{C}$ telles que $\gamma(a) = \gamma(b)$ or le long d'une telle courbe

$$\int_\gamma v'(z)dz = \int_a^b v'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \left[v \circ \gamma\right]_a^b = 0\ ,$$

ce qui montre que

$$0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta}\frac{Q'(z)}{Q(z)}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta}\frac{g'(z)}{g(z)}dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

La conclusion est donc une conséquence de la proposition (2.15) □

2.5.2. *Formule d'inversion de Lagrange.*

Théorème 2.17. *Soit f une fonction holomorphe définie au voisinage de 0 on suppose $f(0) \neq 0$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $\omega \in D(0,a)$ l'équation*

$$\frac{z}{f(z)} = \omega$$

a une unique solution $z(\omega)$ dans $D(0,b)$.
De plus cette solution est donnée par la formule : $z(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega^k$ où

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\bigg|_{z=0} (f(z))^k \ .$$

Démonstration. On a

$$\frac{z}{f(z)} - \frac{z}{f(0)} = \frac{z}{f(0)} \frac{f(0) - f(z)}{f(z)}.$$

Il y a donc $b > 0$ tel que pour tout $z \in D(0,b)$

$$\left| \frac{z}{f(z)} - \frac{z}{f(0)} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{z}{f(0)} \right|. \tag{2}$$

Posons $a = \frac{b}{4|f(0)|}$. Alors si $\omega \in D(0,a)$ on a pour $z \in S(0,b)$:

$$\left| \left(\frac{z}{f(z)} - \omega \right) - \left(\frac{z}{f(0)} - \omega \right) \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{z}{f(0)} \right|$$

De plus pour $z \in S(0,b)$:

$$\left| \frac{z}{f(0)} - \omega \right| \geq \left| \frac{z}{f(0)} \right| - |\omega| \geq \frac{b}{|f(0)|} - a \geq \frac{3}{4} \left| \frac{z}{f(0)} \right| \ .$$

On a donc pour $z \in S(0,b)$

$$\left| \left(\frac{z}{f(z)} - \omega \right) - \left(\frac{z}{f(0)} - \omega \right) \right| \leq \frac{2}{3} \left| \frac{z}{f(0)} - \omega \right|.$$

Le théorème de Rouche nous garantit alors que la fonction $z \mapsto \frac{z}{f(z)} - \omega$ a un unique zéro dans le disque $D(0,b)$. Ce zéro est l'unique racine de la fonction $z - \omega f(z)$, C'est donc le résidu de la fonction méromorphe $z \frac{1 - \omega f'(z)}{z - \omega f(z)}$. On a donc

$$z(\omega) = \frac{1}{2i\pi} \int_{S(0,b)} z \frac{1 - \omega f'(z)}{z - \omega f(z)} dz$$

Or

$$z \frac{1 - \omega f'(z)}{z - \omega f(z)} = \frac{1 - \omega f'(z)}{1 - \frac{\omega f(z)}{z}}.$$

Or dans notre cadre on a

$$|\omega| \leq \frac{b}{4|f(0)|}$$

et pour $z \in S(0,b)$, l'inégalité (2) implique

$$\frac{1}{2} \left| \frac{z}{f(0)} \right| \leq \left| \frac{z}{f(z)} \right| \leq \frac{3}{2} \left| \frac{z}{f(0)} \right|,$$

et donc pour $z \in S(0,b)$:

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 2 \frac{|f(0)|}{b}$$

On obtient donc

$$\left| \frac{\omega f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{2} < 1$$

ainsi on peut écrire

$$z(\omega) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{S(0,b)} \left(\frac{\omega f(z)}{z} \right)^{\ell} \left(1 - \omega f'(z) \right) dz.$$

Soit

$$\begin{aligned} z(\omega) = & \sum_{\ell=0}^{\infty} \omega^{\ell} \frac{1}{2i\pi} \int_{S(0,b)} \left(\frac{f(z)}{z} \right)^{\ell} dz \\ & - \sum_{\ell=0}^{\infty} \omega^{\ell+1} \frac{1}{2i\pi} \int_{S(0,b)} \left(\frac{f(z)}{z} \right)^{\ell} f'(z) dz. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{S(0,b)} \left(\frac{f(z)}{z} \right)^{\ell} dz = \frac{1}{(\ell-1)!} \frac{d^{\ell-1}}{dz^{\ell-1}}\bigg|_{z=0} (f(z))^{\ell}$$

et

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{S(0,b)} \left(\frac{f(z)}{z} \right)^{\ell} f'(z) dz = \frac{1}{(\ell-1)!} \frac{d^{\ell-1}}{dz^{\ell-1}}\bigg|_{z=0} f'(z) \left(f(z) \right)^{\ell}$$

On en déduit donc que $c_0 = 0$ et que pour $\ell \geq 1$

$$c_{\ell} = \frac{1}{(\ell-1)!} \frac{d^{\ell-1}}{dz^{\ell-1}}\bigg|_{z=0} (f(z))^{\ell} - \frac{1}{(\ell-2)!} \frac{d^{\ell-2}}{dz^{\ell-2}}\bigg|_{z=0} f'(z) \left(f(z) \right)^{\ell-1}$$

Or

$$\frac{d^{\ell-2}}{dz^{\ell-2}}\bigg|_{z=0} f'(z) \left(f(z) \right)^{\ell-1} = \frac{1}{\ell} \frac{d^{\ell-2}}{dz^{\ell-2}}\bigg|_{z=0} \frac{d}{dz} \left(f(z) \right)^{\ell}$$

d'où

$$c_\ell = \left(\frac{1}{(\ell-1)!} - \frac{1}{\ell(\ell-2)!} \right) \frac{d^{\ell-1}}{dz^{\ell-1}}\bigg|_{z=0} (f(z))^\ell = \frac{1}{\ell!} \frac{d^{\ell-1}}{dz^{\ell-1}}\bigg|_{z=0} (f(z))^\ell .$$

$\square$

C2

THÉORIE DE STURM-LIOUVILLE

Dans cette leçon, on considère

$$q\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$$

une fonction continue et on étudie l'équation différentielle d'inconnue

$$y \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{C}) :$$

$$\begin{cases} -y'' + qy - \lambda y = f \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{C})$ sont donnés. On posera $\lambda = s^2$ où $\operatorname{Im} s \geq 0$.

3.1. **Le cas où $q = 0$.** On peut résoudre l'équation :

$$\begin{cases} -y'' - s^2 y = f \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

de deux façons

3.1.1. *Avec la méthode de variations des constantes.* Pour $s \notin \pi\mathbb{Z}^*$, les fonctions $x \mapsto \frac{\sin(sx)}{s}$ et $x \mapsto \frac{\sin(s(x-1))}{s}$ forment une base de l'espace des solutions de l'équation différentielle homogène :

$$-y'' - s^2 y = 0$$

Le wronskien[3] de ces deux solutions est égale Ĺ

$$w(\lambda) = \frac{\sin(s)}{s} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{(2k+1)!}\ .$$

3. On rappelle que si φ et ψ sont deux solutions d'une équation différentielle homogène : $y''(x) + a(x)y' + b(x)y(x) = 0$, alors le wronskien de ces deux solutions est la fonction définie par $x \mapsto \varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x)$. Le wronskien vérifie l'équation différentielle du premier ordre : $w'(x) + a(x)w(x) = 0$. Ainsi si la fonction a est nulle (ce qui est le cas dans notre étude) alors le wronskien est une fonction constante. En général, s'il s'annule quelque part, il est donc identiquement nul. Il s'avŕre que le wronskien est identiquement nul si et seulement si les deux fonctions φ et ψ sont proportionnelles. Ainsi si le wronskien n'est pas nulle alors (φ, ψ) forme une base de l'espace des solutions de l'équation différentielle homogŕne $y''(x) + a(x)y' + b(x)y(x) = 0$.

On cherche les solutions de l'équation différentielle

$$-y'' - s^2 y = f$$

sous la forme $y(x) = A(x)\frac{\sin(sx)}{s} + B(x)\frac{\sin(s(x-1))}{s}$ avec

$$\begin{cases} A'(x)\frac{\sin(sx)}{s} + B'(x)\frac{\sin(s(x-1))}{s} = 0 \\ A'(x)\cos(sx) + B'(x)\cos(s(x-1)) = -f(x) \end{cases}$$

On a

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\sin(sx)}{s} & \frac{\sin(s(x-1))}{s} \\ \cos(sx) & \cos(s(x-1)) \end{pmatrix} = \frac{\sin(s)}{s} = w(\lambda)$$

On trouve alors

$$A'(x) = -f(x)\frac{\sin(s(x-1))}{\sin(s)} \text{ et } B'(x) = f(x)\frac{\sin(sx)}{\sin(s)}$$

On en déduit l'existence de constantes C_0, C_1 telles que

$$\begin{aligned} y(x) = {} & C_0\frac{\sin(sx)}{s} + C_1\frac{\sin(s(x-1))}{s} \\ & - \frac{\sin(sx)}{s}\int_0^x f(t)\frac{\sin(s(t-1))}{\sin(s)}dt + \frac{\sin(s(x-1))}{s}\int_0^x f(t)\frac{\sin(st)}{\sin(s)}dt \end{aligned}$$

Si de plus $y(0) = 0$ alors on doit avoir $C_1 = 0$ et si $y(1) = 0$ alors

$$C_0\frac{\sin(s)}{s} - \frac{\sin(s)}{s}\int_0^1 f(t)\frac{\sin(s(t-1))}{\sin(s)}dt = 0.$$

On a supposé $s \notin \pi\mathbb{Z}^*$, ceci implique donc que

$$C_0 = \int_0^1 f(t)\frac{\sin(s(t-1))}{\sin(s)}dt = 0;$$

on a donc obtenu :

(3)

$$y(x) = \frac{\sin(sx)}{s}\int_x^1 \frac{\sin(s(1-t))}{\sin(s)}f(t)dt + \frac{\sin(s(x-1))}{s}\int_0^x \frac{\sin(st)}{\sin(s)}f(t)dt.$$

Remarque 3.1. *Si on était parti de la base $x \mapsto \frac{\sin(sx)}{s}$ et $x \mapsto \cos(sx)$ de l'espace des solutions de l'équation différentielle homogène $-y'' - s^2 y = 0$ alors on aurait trouvé que les solutions de l'équation différentielle*

$$-y'' - s^2 y = f$$

étaient de la forme

$$y(x) = A\frac{\sin(sx)}{s} + B\cos(sx) - \int_0^x \frac{\sin(s(x-t))}{s} f(t)dt.$$

3.1.2. *Avec les séries de Fourier.* La seconde façon est d'utiliser les séries de Fourier. On pose $e_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$, il est facile de vérifier que (e_k) est une famille orthornormée de $L^2([0,1])$. C'est de plus une base Hilbertienne de $L^2([0,1])$.
En effet, on commence par remarquer qu'une "fonction" $f \in L^2([0,1])$ peut sétendre en une fonction impaire $\tilde{f}$ de $L^2([-1,1])$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Une base Hilbertienne de $L^2([-1,1])$ est donnée par la réunion de la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_k\right)$ et par la famille (c_k) définie par $c_0 = 1/\sqrt{2}$ et $c_k(x) = \cos(k\pi x)$ si $k \geq 1$. Or la fonction $\tilde{f}$ étant impaire, on a :

$$\tilde{f} = \sum_{k\geq 1} \frac{b_k}{\sqrt{2}} e_k$$

où

$$b_k = \int_{-1}^1 \frac{\tilde{f}(t)}{\sqrt{2}} e_k(t)dt = 2\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{2}} e_k(t)dt = \sqrt{2}\int_0^1 f(t)e_k(t)dt.$$

Considèrons donc $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ et dévellopons f en séries de Fourier :

$$f = \sum_{k\geq 1} b_k e_k \text{ avec } b_k = \int_0^1 f(t)e_k(t)dt.$$

Supposons que $y \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{C})$ vérifie le systŘme déquations :

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = f \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Alors on calcule les coefficients de Fourier de y en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^1 y(x)\sin(k\pi x)dx &= \int_0^1 \left(-y''(x) - f(x)\right)\sin(k\pi x)dx \\ &= -\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)dx + \left[-y'(x)\sin(k\pi x)\right]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 y'(x)(k\pi)\cos(k\pi x)dx \\ &= -\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)dx \\ &\quad + \int_0^1 y'(x)(k\pi)\cos(k\pi x)dx \end{aligned}$$

On calcule de mŘme :

$$\begin{aligned} -k^2\pi^2 \int_0^1 y(x)\sin(k\pi x)dx &= \int_0^1 y(x)\frac{d^2}{dx^2}\sin(k\pi x)dx \\ &= \left[y(x)\frac{d\sin(k\pi x)}{dx}\right]_0^1 - \int_0^1 y'(x)\frac{d\sin(k\pi x)}{dx}dx \\ &= -\int_0^1 y'(x)(k\pi)\cos(k\pi x)dx \end{aligned}$$

La comparaison entre ces deux égalités montre que

$$(\lambda - (\pi k)^2)\int_0^1 y(x)\sin(k\pi x)dx = -\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)dx.$$

Supposons que $\lambda \notin \{\pi^2k^2, k \in \mathbb{N}^*\}$, on en déduit donc qu'alors

$$y = \sum_{k\geq 1} \frac{b_k}{\pi^2k^2 - \lambda} e_k.$$

Réciproquement, supposons que $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ vérifie que lorsqu'on dévellope f en séries de Fourier : $f = \sum_{k\geq 1} b_k e_k$ alors

$$\sum_{k\geq 1} |b_k| < \infty.$$

On définit alors

$$y(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{b_k}{\pi^2k^2 - \lambda} e_k(x)$$

Il est facile de vérifier que cette série converge normalement dans $\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{C})$ et donc on a $y(0)=y(1)=0$. De plus

$$y'(x)=\sqrt{2}\sum_{k\geq 1}\frac{b_k\pi k}{\pi^2k^2-\lambda}\cos(k\pi x)$$

et

$$\begin{aligned}y''(x)&=-\sqrt{2}\sum_{k\geq 1}\frac{b_k(\pi k)^2}{\pi^2k^2-\lambda}\sin(k\pi x)\\&=-\sqrt{2}\sum_{k\geq 1}b_k\frac{(\pi k)^2-\lambda}{\pi^2k^2-\lambda}\sin(k\pi x)-\lambda\sqrt{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{\pi^2k^2-\lambda}\sin(k\pi x)\\&=-f(x)-\lambda y(x)\end{aligned}$$

Donc y est solution de l'équation :

$$\begin{cases}-y''-\lambda y=f\\ y(0)=y(1)=0\end{cases}$$

On peut aussi remarquer que l'on a :

$$\begin{aligned}y(x)&=\sum_{k\geq 1}\frac{b_k}{\pi^2k^2-\lambda}e_k(x)\\&=\sum_{k\geq 1}\frac{\int_0^1 f(t)e_k(t)dt}{\pi^2k^2-\lambda}e_k(x)\\&=\int_0^1 G_\lambda(x,t)f(t)dt;\end{aligned}\tag{4}$$

où

$$\begin{aligned}G_\lambda(x,t)&=\sum_{k\geq 1}\frac{e_k(x)e_k(t)}{\pi^2k^2-\lambda}\\&=\sum_{k\geq 1}\frac{2\sin(k\pi x)\sin(k\pi t)}{\pi^2k^2-\lambda}\end{aligned}\tag{5}$$

La comparaison entre les formules (4,5) et celle (3) obtenue par la méthode de variations des constantes fournit que lorsque $0\leq x\leq t\leq 1$

$$G_\lambda(x,t)=\frac{\sin(sx)}{s}\frac{\sin(s(1-t))}{\sin(s)}$$

Soit encore pour $s\notin\pi\mathbb{Z}^*$ et $0\leq x\leq t\leq 1$

$$\frac{\sin(sx)}{s}\frac{\sin(s(1-t))}{\sin(s)}=\sum_{k\geq 1}\frac{2\sin(k\pi x)\sin(k\pi t)}{\pi^2k^2-\lambda}.$$

On revient donc maintenant au cas général et on commence par étudier l'équation différentielle á l'aide la méthode de variations des constantes.

3.2. **Spectre.**

3.2.1. *La méthode de variations des constantes.*

Définition 3.2. *On note φ_λ la solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases}-y''+qy-\lambda y=0\\ y(0)=0,\ y'(0)=1.\end{cases}$$

Et on note χ_λ la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases}-y''+qy-\lambda y=0\\ y(1)=0,\ y'(1)=1.\end{cases}$$

Le Wronskien de ces deux solutions de l'équation différentielle homogène :

$$-y''+qy-\lambda y=0$$

est

$$w(\lambda)=\varphi_\lambda(x)\chi'_\lambda(x)-\varphi'_\lambda(x)\chi_\lambda(x)=\varphi_\lambda(1)=-\chi_\lambda(0).$$

Lorsque $w(\lambda)\neq 0$, on sait donc que $(\varphi_\lambda,\chi_\lambda)$ est une base de l'espace des solutions de l'équation différentielle homogène

$$-y''+qy-\lambda y=0.$$

On peut alors résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases}-y''+qy-\lambda y=f\\ y(0)=0,\ y(1)=0.\end{cases}$$

à l'aide de la méthode de variations des constantes et on arrive (comme dans le cas où $q=0$) à

$$y(x)=-\frac{\varphi_\lambda(x)}{w(\lambda)}\int_x^1 f(t)\chi_\lambda(t)dt-\frac{\chi_\lambda(x)}{w(\lambda)}\int_0^x f(t)\varphi_\lambda(t)dt.$$

On veut maintenant faire l'analogue de l'analyse de Fourier pour cette équation, pour cela on doit comprendre un peu mieux ce qui se passe lorsque $w(\lambda)=0$.

Dans ce cas les deux solutions φ_λ et χ_λ sont colinéaires. Elles vérifient toutes les deux le systŔme d'équations :

$$\begin{cases} -y'' + qy - \lambda y = 0 \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

3.2.2. *Définitions.* On introduit l'espace

$$\mathcal{C}^2_D([0,1],\mathbb{C}) = \{y \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{C}), y(0) = y(1) = 0\}$$

et l'opérateur de Sturm-Liouville pour les conditions de Dirichlet

$$\begin{aligned} L_D \,:\, \mathcal{C}^2_D([0,1],\mathbb{C}) &\to \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C}) \\ y &\mapsto -y'' + qy \end{aligned}$$

Définition 3.3. *On dira que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de l'opérateur de Strum-Liouville pour les conditions de Dirichlet si il y a une solution non nulle aux équations :*

$$\begin{cases} -y'' + qy - \lambda y = 0 \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

On notera $\operatorname{Sp} L_D$ l'ensemble de ces valeurs propres. Les fonctions vérifiant

$$\begin{cases} -y'' + qy - \lambda y = 0 \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

seront appelées *fonctions propres* de l'opérateur de Strum-Liouville pour les conditions de Dirichlet.
On a donc

$$\operatorname{Sp} L_D = w^{-1}\{0\}.$$

3.2.3. *Propriétés générales.*

Proposition 3.4. *Les valeurs propres de l'opérateur de Strum-Liouville pour les conditions de Dirichlet sont réelles :*

$$\operatorname{Sp} L_D \subset \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soit donc $y \in \mathcal{C}^2_D([0,1],\mathbb{C})$ une fonction propre pour la valeur propre λ. On a

$$\lambda \int_0^1 y(t)\overline{y(t)}dt = \int_0^1 \left(-y''(t) + q(t)y(t)\right)\overline{y(t)}dt.$$

Or si nous intègrons par parties en se servant de $y(0) = y(1) = 0$, on obtient :

$$-\int_0^1 y''(t)\overline{y(t)}dt = \left[-y'(t)\overline{y(t)}\right]_0^1 + \int_0^1 y'(t)\overline{y'(t)}dt = \int_0^1 y'(t)\overline{y'(t)}dt$$

On a donc

$$\lambda \int_0^1 y(t)\overline{y(t)}dt = \int_0^1 y'(t)\overline{y'(t)}dt + \int_0^1 q(t)y(t)\overline{y(t)}dt.$$

Or la fonction q est à valeurs réelles et $\int_0^1 y(t)\overline{y(t)}dt > 0$. D'où le résultat. □

Remarque 3.5. *La démonstration fournit même mieux*

$$\operatorname{Sp} L_D \subset \left[\inf_{t\in[0,1]} q(t), +\infty\right[.$$

3.3. **Etude asymptotique du spectre.**

3.3.1. *Le spectre est discret.*

Théorème 3.6. *La fonction w est holomorphe ainsi $\operatorname{Sp} L_D$ est un ensemble sous ensemble discret de $\mathbb{R}$. De plus les zéros de w sont simples.*

D'après la remarque précédente 3.5, on sait que l'on peut énumerer le spectre de L_D par une suite croissante (éventuellement fini)

$$\operatorname{Sp} L_D = \{\lambda_j, j \geq 1\}$$

Démonstration. L'équation différentielle

$$-y'' + qy - \lambda y = 0$$

dépend de façon holomorphe de λ ainsi les solutions φ_λ et χ_λ dépendent de façon holomorphe de λ, il en est donc de même de $w(\lambda) = \varphi_\lambda(1)$.
On peut donner dans notre cadre une preuve de cette affirmation : posons toujours $\lambda = s^2$ avec $\operatorname{Im} s \geq 0$. On remarque que puisque φ_λ est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = -qy \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

La méthode de variations des constantes (3.1) fournit donc

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{\sin(sx)}{s} + \int_0^x \frac{\sin(s(x-t))}{s} q(t)\varphi_\lambda(t)dt.$$

On définit

$$u_0(\lambda, x) = \frac{\sin(sx)}{s} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

C'est une fonction continue sur $\mathbb{C} \times [0,1]$ qui est holomorphe par rapport à λ. Et on définit par récurrence sur $j \in \mathbb{N}$

$$u_j(\lambda, x) = \int_0^x q(t) \frac{\sin(s(x-t))}{s} u_{j-1}(\lambda, t) dt.$$

Il est facile de vérifier que u_j est une fonction continue sur $\mathbb{C} \times [0,1]$ qui est holomorphe par rapport à λ. Or si $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \sin(z)\sin(\bar{z}) = \frac{1}{2}\left(\cosh(2\operatorname{Im} z) - \cos(2\operatorname{Re} z)\right) \\ |\cos z|^2 &= \cos(z)\cos(\bar{z}) = \frac{1}{2}\left(\cosh(2\operatorname{Im} z) + \cos(2\operatorname{Re} z)\right). \end{aligned} \tag{6}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &\leq e^{2|\operatorname{Im} z|} \\ |\cos z|^2 &\leq e^{2|\operatorname{Im} z|}. \end{aligned} \tag{7}$$

Puisque $u_0(\lambda, x) = \frac{\sin(sx)}{s} = \int_0^x \cos(st) dt$, on a

$$|u_0(\lambda, x)| \leq x e^{x \operatorname{Im} s} \leq e^{x \operatorname{Im} s}.$$

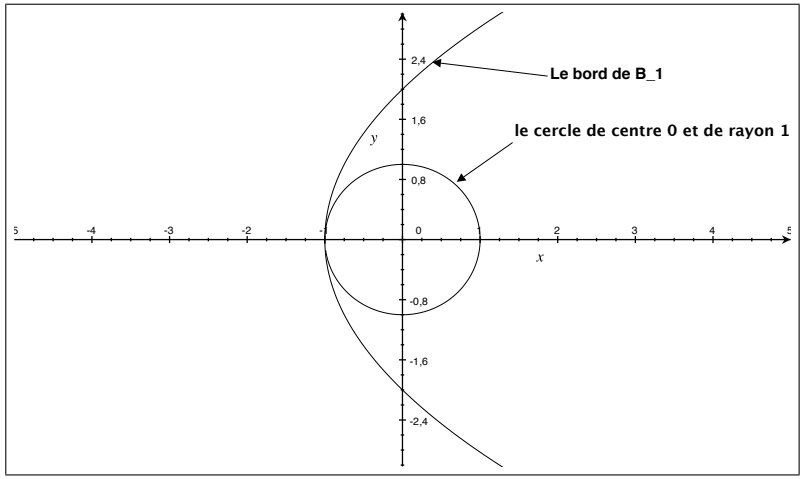
Posons $M = \sup_{x \in [0,1]} |q(x)|$. Une récurrence facile permet de démontrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$|u_j(\lambda, x)| \leq M^j \frac{x^{j+1}}{(j+1)!} e^{x \operatorname{Im} s}.$$

Notons

$$B_\ell := \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} s \leq \ell\} := \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| - \operatorname{Re} \lambda \leq 2\ell^2\}$$

B_ℓ contient le disque fermé de centre 0 et de rayon ℓ^2 :



La série de fonctions de terme général u_j converge donc normalement sur $B_\ell \times [0,1]$, on en déduit que la fonction $f : \mathbb{C} \times [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par $f(\lambda, x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(\lambda, x)$ est continue et holomorphe par rapport à λ. De plus pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in [0,1]$ on a

$$f(\lambda, x) = u_0(\lambda, x) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\lambda, x)$$

et pour $j \geq 1$

$$u_j(\lambda, x) = \int_0^x q(t) \frac{\sin(s(x-t))}{s} u_{j-1}(\lambda, t) dt.$$

En utilisant la convergence normale on obtient que

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j(\lambda, x) = \int_0^x q(t) \frac{\sin(s(x-t))}{s} \left(\sum_{j=1}^{\infty} u_{j-1}(\lambda, t) \right) dt$$

Et donc

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j(\lambda, x) = \int_0^x q(t) \frac{\sin(s(x-t))}{s} f(\lambda, t) dt.$$

f vérifie donc l'équation intégrale :

$$f(\lambda, x) = \frac{\sin(sx)}{s} + \int_0^x \frac{\sin(s(x-t))}{s} q(t) f(\lambda, t) dt.$$

Ceci permet de démontrer que f vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = -qy \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Donc $f(\lambda, x) = \varphi_\lambda(x)$. Ce qui montre que $w(\lambda) = \varphi_\lambda(1)$ dépend de façon holomorphe de λ.
Une étude similaire montrerait que la fonction χ_λ est holomorphe par rapport à λ.
On doit maintenant prouver que les zéros de w sont simples. Pour cela on calcule

$$\lambda \int_0^1 \varphi_\lambda(x)\chi_\mu(x)dx = -\int_0^1 \varphi''_\lambda(x)\chi_\mu(x)dx + \int_0^1 q(x)\varphi_\lambda(x)\chi_\mu(x)dx$$

En intégrant par parties :

$$-\int_0^1 \varphi''_\lambda(x)\chi_\mu(x)dx = -\left[\varphi'_\lambda(x)\chi_\mu(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \varphi'_\lambda(x)\chi'_\mu(x)dx$$

On obtient donc

$$\lambda \int_0^1 \varphi_\lambda(x)\chi_\mu(x)dx = \chi_\mu(0) + \int_0^1 \left[\varphi'_\lambda(x)\chi'_\mu(x) + q(x)\varphi_\lambda(x)\chi_\mu(x)\right] dx$$

Un calcul similaire mène à

$$\mu \int_0^1 \varphi_\lambda(x)\chi_\mu(x)dx = -\varphi_\lambda(1) + \int_0^1 \left[\varphi'_\lambda(x)\chi'_\mu(x) + q(x)\varphi_\lambda(x)\chi_\mu(x)\right] dx$$

On en déduit que

$$w(\lambda) - w(\mu) = \varphi_\lambda(0) + \chi_\mu(0) = (\lambda - \mu)\int_0^1 \varphi_\lambda(x)\chi_\mu(x)dx, \tag{8}$$

et donc pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$w'(\lambda) = \int_0^1 \varphi_\lambda(x)\chi_\lambda(x)dx\ .$$

Maintenant si $w(\lambda) = 0$, on sait que λ est une valeur propre de l'opérateur de Strum-Liouville pour les conditions de Dirichlet et donc : $\lambda \in \mathbb{R}$, φ_λ et χ_λ sont colinéaires et à valeurs réelles, on a mŘme :

$$\chi_\lambda(x) = \frac{\varphi_\lambda(x)}{\varphi'_\lambda(1)}\ , \tag{9}$$

et donc

$$w'(\lambda) = \frac{1}{\varphi'_\lambda(1)}\int_0^1 (\varphi_\lambda(x))^2 dx \neq 0\ . \tag{10}$$

□

3.3.2. *Asymptotique du spectre.*

Théorème 3.7. *Si k est un entier assez grand alors l'intervalle*

$$\left[\pi^2\left(k - \frac{1}{2}\right)^2, \pi^2\left(k + \frac{1}{2}\right)^2\right]$$

contient une et seule valeur propre de l'opérateur de Strum-Liouville pour les conditions de Dirichlet.

En conséquence on peut énumerer le spectre de L_D par une suite croissante infinie.

$$\operatorname{Sp} L_D = \{\lambda_j, j \geq 1\}$$

tel que $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = +\infty$ en fait

$$\lambda_j \sim \pi^2 j^2.$$

Nous avons l'estimation suivante de φ_λ :

Lemme 3.8. *Si $|s|$ est assez grand alors*

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{\sin(sx)}{s} + O\left(\frac{e^{x\operatorname{Im} s}}{|s|^2}\right)$$

C'est à dire qu'il y a des constantes r, R tel que si $|s| > r$ et $x \in [0,1]$ alors

$$\left|\varphi_\lambda(x) - \frac{\sin(sx)}{s}\right| \leq R\frac{e^{x\operatorname{Im} s}}{|s|^2}.$$

Démonstration. On pose $\mu(s) = \sup_{x\in[0,1]} e^{-x\operatorname{Im} s}|\varphi_\lambda(x)|$. La formule

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{\sin(sx)}{s} + \int_0^x \frac{\sin(s(x-t))}{s} q(t)\varphi_\lambda(t)dt,$$

implique que l'on a aussi :

$$\begin{aligned} e^{-x\operatorname{Im} s}\varphi_\lambda(x) =& \frac{e^{-x\operatorname{Im} s}\sin(sx)}{s} \\ &+ \int_0^x \frac{e^{-(x-t)\operatorname{Im} s}\sin(s(x-t))}{s} q(t)e^{-t\operatorname{Im} s}\varphi_\lambda(t)dt\ , \end{aligned}$$

et l'estimation (7) permette de démontrer

$$\mu(s) \leq \frac{1}{|s|} + \mu(s)\frac{M}{|s|}$$

où comme précédemment $M = \sup_{x\in[0,1]} |q(x)|$. On en déduit que si $|s| \geq 2M$ alors

$$\mu(s) \leq \frac{2}{|s|}$$

et alors

$$e^{-x\operatorname{Im} s}\left|\varphi_\lambda(x) - \frac{\sin(sx)}{s}\right| \leq \int_0^x \left|\frac{e^{-(x-t)\operatorname{Im} s}\sin(s(x-t))}{s} q(t)\right| \frac{2}{|s|} dt$$
$$\leq \frac{2M}{|s|^2}.$$

□

On démontrera de la même façon :

Lemme 3.9. *Si $|s|$ est assez grand alors*

$$\chi_\lambda(x) = \frac{\sin(s(x-1))}{s} + O\left(\frac{e^{(1-x)\operatorname{Im} s}}{|s|^2}\right)$$

On remarque que si $s \in C$ est tel que $\operatorname{Im} s \leq 0$ on aura :

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{\sin(sx)}{s} + O\left(\frac{e^{x|\operatorname{Im} s|}}{|s|^2}\right)$$

Démonstration. du théorème (3.7) :
On considère maintenant le domaine

$$C_k = \{s \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im} s| \leq \pi/2, |\operatorname{Re} s - \pi k| \leq \pi/2\}$$

On va utiliser le théorème de Rouche pour montrer que $w(s^2)$ et $\sin(s)/s$ ont le même nombre de zéros sur C_k c'est á dire un seul.
Sur les cotés horizontaux de C_k, on a $\operatorname{Im} s = \pm\pi/2$, alors en utilisant (6) et $-\cos(\operatorname{Re} s) \geq -1$, on en déduit :

$$\left|\frac{\sin(s)}{s}\right| \geq \frac{\sinh(\pi/2)}{|s|}$$

et

$$\left|w(s^2) - \frac{\sin(s)}{s}\right| \leq C\frac{e^{\pi/2}}{|s|^2}.$$

Sur les cotés verticaux de C_k, on a donc $\operatorname{Re} s = k\pi \pm \pi/2$ et donc avec (6) on a $|\sin(s)|^2 = \frac{1}{2}(\cosh(2\operatorname{Im} s) - \cos(2\operatorname{Re} s)) = (\cosh(\operatorname{Im} s))^2$ d'où

$$\left|\frac{\sin(s)}{s}\right| = \frac{\cosh(\operatorname{Im} s)}{|s|} \geq \frac{e^{|\operatorname{Im} s|}}{2|s|}$$

On a aussi sur les cotés verticaux

$$\left|w(s^2) - \frac{\sin(s)}{s}\right| \leq C\frac{e^{|\operatorname{Im} s|}}{|s|^2}.$$

Ces estimations montrent que si k est assez grand alors on a

$$\forall s \in \partial C_k, \quad \left|w(s^2) - \frac{\sin(s)}{s}\right| < \left|\frac{\sin(s)}{s}\right|.$$

Le théorème de Rouche 2.16 nous garantit donc que $w(s^2)$ et $\sin(s)/s$ ont un seul zéro dans l'intérieur de ce carré, par ailleurs on sait que les zéros de w sont réels d'où le résultat énoncé. □

3.4. **Dévellopement d'une fonction en somme de fonctions propres.**

3.4.1. *Dévelloppement du noyau de Green.* On pose pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} L_D$

$$G_\lambda(x,t) = -\frac{1}{w(\lambda)}\begin{cases}\varphi_\lambda(x)\chi_\lambda(t) & \text{si } x \leq t \\ \varphi_\lambda(t)\chi_\lambda(x) & \text{si } x \geq t\end{cases},$$

c'est le *noyau de Green* de l'opérateur $L_D - \lambda$.
On a vu que si $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ alors la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} -y'' + qy - \lambda y = f \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

est donnée par

$$y(x) = \int_0^1 G_\lambda(x,t)f(t)dt.$$

Lorsque $0 \leq x \leq t \leq 1$ sont fixés, la fonction $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto G_\lambda(x,t)$ est méromorphe avec des pôles simples en $\operatorname{Sp} L_D$. On énunère maintenant $\operatorname{Sp} L_D$ en une suite strictement croissante

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

De plus si $j \geq 1$ alors le résidu en λ_j de cette fonction est

$$\operatorname{res}(G_\lambda(x,t),\lambda_j) = -\frac{\varphi_{\lambda_j}(x)\chi_{\lambda_j}(t)}{w'(\lambda_j)}.$$

Le calcul déjà fait (9,10) montre que

$$w'(\lambda_j) = \frac{1}{\varphi'_{\lambda_j}(1)} \int_0^1 (\varphi_{\lambda_j}(x))^2 dx$$

et que

$$\chi_{\lambda_j}(x) = \frac{\varphi_{\lambda_j}(x)}{\varphi'_{\lambda_j}(1)}$$

ainsi si on pose

$$\xi_j(x) = \frac{\varphi_{\lambda_j}(x)}{\sqrt{\int_0^1 (\varphi_{\lambda_j}(t))^2 dt}}$$

alors on obtient

$$\operatorname{res}(G_\lambda(x,t), \lambda_j) = -\xi_j(x)\xi_j(t).$$

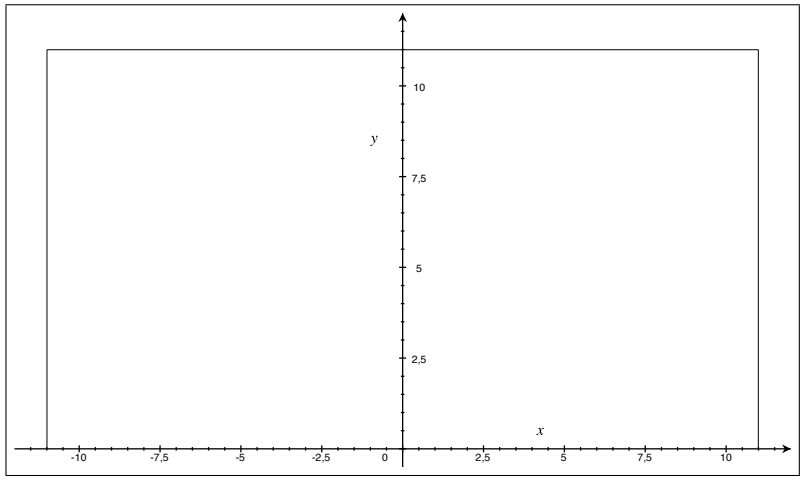
Ce résultat est encore vrai lorsque $t \leq x$.

Théorème 3.10. *Si $\lambda \notin \operatorname{Sp} L_D$ et si $(x,t) \in [0,1]^2$ alors*

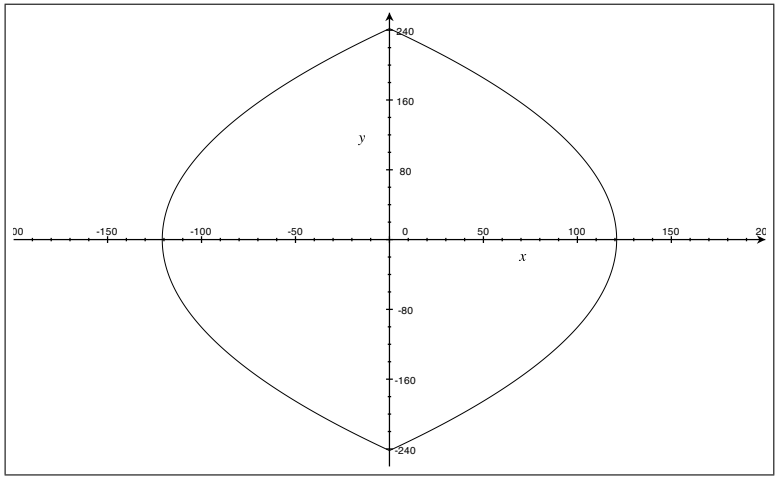
$$G_\lambda(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j(x)\xi_j(t)}{\lambda_j - \lambda}.$$

Démonstration. On considère

$$\Omega_N = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re} s| \leq \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ et } 0 \leq \operatorname{Im} s \leq \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi \right\}$$



Le bord du domaine $\left\{ s \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re} s| \leq \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ et } 0 \leq \operatorname{Im} s \leq \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi \right\}$.



Le bord du domaine $\left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re} s| \leq \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ et } 0 \leq \operatorname{Im} s \leq \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi \right\}$.

Et on va estimer $G_\lambda(x,t)$ sur le bord de Ω_N.
Compte tenu des estimations :

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{\sin(sx)}{s} + O\left(\frac{e^{x \operatorname{Im} s}}{|s|^2}\right).$$

$$\chi_\lambda(x) = \frac{\sin(s(x-1))}{s} + O\left(\frac{e^{(1-x)\operatorname{Im} s}}{|s|^2}\right)$$

On en déduit que si $0 \leq x \leq t \leq 1$ alors

$$G_\lambda(x,t) = \frac{1}{w(s^2)}\left(\frac{\sin(sx)\sin(s(t-1))}{s^2} + O\left(\frac{e^{(t-x)\operatorname{Im} s}}{|s|^3}\right)\right)$$

On a également

$$w(s^2) = \varphi_\lambda(1) = \frac{\sin(s)}{s} + O\left(\frac{e^{\operatorname{Im} s}}{|s|^2}\right).$$

Or lorsque $\operatorname{Im} s = \left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$ et en utilisant (6) , nous avons pour N assez grand

$$\left|\frac{\sin(s)}{s}\right| \geq \frac{e^{\operatorname{Im} s}}{4|s|}$$

et lorsque $\operatorname{Re} s = \pm\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$, on a

$$|\sin(s)|^2 = \frac{1}{2}\left(\cosh(2\operatorname{Im} s) - \cos(2\operatorname{Re} s)\right) = (\cosh(\operatorname{Im} s))^2$$

d'où

$$\left|\frac{\sin(s)}{s}\right| = \frac{\cosh(\operatorname{Im} s)}{|s|} \geq \frac{e^{|\operatorname{Im} s|}}{2|s|}$$

De ces deux estimations on en déduit que si $\lambda \in \partial\Omega_N$ et $s^2 = \lambda$ avec $\operatorname{Im} s \geq 0$ alors

$$\frac{1}{w(s^2)} = \frac{s}{\sin(s)}\left(1 + O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right)$$

et

$$\left|\frac{1}{w(s^2)}\right| = O\left(\frac{|s|}{e^{|\operatorname{Im} s|}}\right)$$

on déduit de ceci que pour N assez grand alors on a pour $\lambda \in \partial\Omega_N$:

$$|G_\lambda(x,t)| \leq \frac{C}{|s|} \leq \frac{C}{N}$$

Soit maintenant $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} L_D$. On choisit alors N_0 assez grand pour avoir l'estimation précédente pour tout $N \geq N_0$ et pour avoir $z \in \Omega_{N_0}$.
On a alors avec la formule des résidus :

$$G_z(x,t) - \sum_{j,\lambda_j \in \Omega_N} \frac{\xi_j(x)\xi_j(t)}{z - \lambda_j} = \int_{\partial\Omega_N} \frac{G_\lambda(x,t)}{z-\lambda} d\lambda.$$

On en déduit que

$$\left|G_z(x,t) - \sum_{j,\lambda_j \in \Omega_N} \frac{\xi_j(x)\xi_j(t)}{z - \lambda_j}\right| \leq \frac{C}{N} \frac{\text{Longueur}\partial\Omega_N}{\min_{\lambda \in \partial\Omega_N}\{|\lambda - z|\}}.$$

Or la longueur de $\partial\Omega_N$ est majorée par $C \times N^2$ et il est facile de voir que pour N assez grand on a :

$$\min_{\lambda \in \partial\Omega_N}\{|\lambda - z|\} \geq (\pi N)^2 - |z|.$$

Car par exemple Ω_N contient le disque de centre 0 et de rayon $(\pi N)^2$. Ce qui implique que pour N assez grand :

$$\left|G_z(x,t) - \sum_{j,\lambda_j \in \Omega_N} \frac{\xi_j(x)\xi_j(t)}{z - \lambda_j}\right| \leq \frac{C\,N}{(\pi N)^2 - |z|}.$$

D'oİ le résultat en faisant tendre N vers $+\infty$. □

3.4.2. *Décomposition Hilbertienne.* Grâce au calcul fait en (8) montre que si $\lambda \neq \mu$ alors

$$(\lambda - \mu)\int_0^1 \varphi_\lambda(x)\chi_\mu(x)dx = w(\lambda) - w(\mu)$$

Ainsi si $j \neq k$ cette formule appliquée en $\lambda = \lambda_j$ et $\mu = \lambda_k$ donne

$$(\lambda_j - \lambda_k)\int_0^1 \varphi_{\lambda_j}(x)\chi_{\lambda_k}(x)dx = 0$$

et puisque $\chi_{\lambda_k}(x) = \varphi_{\lambda_k}(x)/\varphi'_{\lambda_k}(1)$ on en déduit que lorsque $j \neq k$

$$\int_0^1 \varphi_{\lambda_j}(x)\varphi_{\lambda_k}(x)dx = 0$$

Ainsi :

Lemme 3.11. *La famille $(\xi_k)_{k\geq 1}$ est orthornormée.*

Si $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ on définit

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t)\xi_k(t)dt.$$

On a les résultats suivants qui montrent notamment que la famille $(\xi_k)_{k\geq 1}$ est en fait une base Hilbertienne de $L^2([0,1])$.

Théorème 3.12. *i) Si $\forall k \geq 1$ $c_k(f) = 0$ alors f est la fonction nulle.*
ii) Si $\sum_{k\geq 1}|c_k(f)| < \infty$ alors $f(x) = \sum_{k\geq 1} c_k(f)\xi_k(x)$.
iii) $\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{k\geq 1}|c_k(f)|^2$.

Démonstration. Démontrons d'abord le point i). On remarque d'abord que les fonctions ξ_k sont uniformément bornées : il y a une constante C (indépendante de k) telle que pour tout k et tout $x \in [0,1]$ alors

$$|\xi_k(t)| \leq C.$$

En effet si j est assez grand on a (avec le lemme 3.8)

$$\varphi_{\lambda_j}(x) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}\,x)}{\sqrt{\lambda_j}} + O\left(\frac{1}{\lambda_j}\right).$$

On en déduit donc que

$$\int_0^1 (\varphi_{\lambda_j}(x))^2 dx = \frac{1}{2\lambda_j} + O\left(\frac{1}{\lambda_j^{3/2}}\right)$$

Ainsi

$$\xi_j(x) = \frac{1}{\int_0^1 (\varphi_{\lambda_j}(x))^2 dx}\, \varphi_{\lambda_j}(x)$$
$$= \sqrt{2}\sin(\sqrt{\lambda_j}\, x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\right).$$

D'où le résultat.
On sait de plus que $\lambda_j \sim \pi^2 j^2$, on peut donc affirmer que si $\lambda \notin \operatorname{Sp} L_D$ alors

$$\int_0^1 G_\lambda(x,t) f(t) dt = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j(x) \int_0^1 \xi_j(t) f(t) dt}{\lambda - \lambda_j}.$$

Fixons maintenant $\lambda \notin \operatorname{Sp} L_D$. Ainsi si $c_k(f) = 0$ pour tout k, on a $\forall x \in [0,1]$:

$$\int_0^1 G_\lambda(x,t) f(t) dt = 0.$$

Ainsi la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} -y'' + qy - \lambda y = f \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

est la fonction nulle donc $f = 0$.
Le point ii) est une conséquence du point i) que l'on applique à la fonction continue $g : x \mapsto g(x) = f(x) - \sum_{k\geq 1} c_k(f)\xi_k(x)$ qui vérifie $c_k(g) = 0$ pour tout entier $k \geq 1$. Ainsi g est la fonction nulle.
Concernant le point iii). Considérons une fonction $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{C})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. On a alors

$$\lambda_k c_k(f) = \int_0^1 \left(-\xi_k''(t) + q\xi_k(t)\right) f(t) dt$$

Or en intégrant par parties on montre facilement

$$-\int_0^1 \xi_k''(t) f(t) dt = \left[-\xi_k'(t) f(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \xi_k'(t) f'(t) dt$$
$$= \int_0^1 \xi_k'(t) f'(t) dt$$
$$= -\int_0^1 \xi_k(t) f''(t) dt$$

On a donc

$$\lambda_k c_k(f) = \int_0^1 \xi_k(t)\left(-f''(t) + qf(t)\right) dt$$

Puisqu'il y a une constante C tel que pour tout k et tout $x \in [0,1]$ $|\xi_k(x)| \leq C$.
On en déduit que la suite $(\lambda_k c_k(f))_k$ est borné compte tenu du fait que

$$\lambda_k \sim \pi^2 k^2$$

on a

$$\sum_{k\geq 1} |c_k(f)| < \infty$$

et donc pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = \sum_{k\geq 1} c_k(f)\xi_k(x)$$

et donc

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{k\geq 1} |c_k(f)|^2.$$

On a donc démontré le point iii) pour toutes les fonctions de $\mathcal{C}_D^2([0,1],\mathbb{C})$ or ce dernier espace est dense dans $L^2([0,1])$ d'où le résultat énoncé.

$\square$

Rappel et complément sur les espaces de Hilbert.

4.1. Définitions.

Définition 4.1. *Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel équipé d'un produit scalaire hermitien $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ tel que pour la norme associée*[4]

$$\|\,v\,\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

l'espace vectoriel normé $(\mathcal{H}, \|\,.\,\|)$ soit complet.

Un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, \|\,.\,\|)$ donc est un espace de Banach.

4.2. Quelques exemples classiques.

i) $\mathbb{C}^n$ équipé du produit scalaire hermitien

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_i \bar{y}_i\ .$$

ii) L'espace des matrices carrées de taille n à coefficients complexes équipés du produit scalaire hermitien :

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Trace}\, AB^* = \sum_{p,q} a_{p,q}\, \overline{b_{p,q}}\ ,$$

où on note $B^* = {}^t\bar{B}$.

iii) L'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ formé des suites (a_k) de nombres complexes telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty$$

équipé d'un produit scalaire hermitien :

$$\langle (a_k), (b_k)\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \bar{b}_k\ .$$

4. C'est à dire que pour tous $u, v, w \in \mathcal{H}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

i) $\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle$

ii) $\langle u, \lambda v + \mu w\rangle = \bar{\lambda}\langle u, v\rangle + \bar{\mu}\langle v, w\rangle$

iii) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

iv) $\langle u, u\rangle \geq 0$

v) $\langle u, u\rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0.$

iv) L'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ équipé du produit scalaire hermitien :

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g}.$$

4.3. Un autre exemple : l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n)$.

On utilisera les notations suivantes :

— Si $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, on notera $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + \ldots h_n^2}$ la norme euclidienne de h.

— Si $R \geq 0$, on notera $\mathbb{B}(0, R)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon R.

4.3.1. *Définition.*

On commence par établir la proposition suivante qui nous permettra de définir l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 4.2. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n$ alors on note $\tau_h f$ la "fonction"*[5] *définie par $\tau_h f(x) = f(x+h)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) Il y a une constante C tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ alors

$$\|\tau_h f - f\|_{L^2} \leq C\|h\|$$

ii) Il y a une constante C tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right| \leq C\|\varphi\|_{L^2}$$

iii) Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe une fonction $g_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\forall\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)\ ,\ -\int_{\mathbb{R}^n} f\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} g_j\varphi.$$

iv) La "fonction" $\xi \mapsto \sqrt{1+\|\xi\|^2}\,\widehat{f}(\xi)$ est de carré sommable :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \|\xi\|^2\right) \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi < \infty.$$

Démonstration. L'équivalence entre les assertions ii) et iii) provient du fait que l'espace $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$ est dense dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ et que la propriété ii) signifie exactement que la forme linéaire

$$\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

5. on devrait dire la classe de fonctions

se prolonge continument à $L^2(\mathbb{R}^n)$. Le théorème de M. Riesz de représentation des formes linéaires continues sur un espace de Hilbert assure qu'il existe $u_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)\ ,\ \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \overline{u_j}.$$

La fonction $g_j = -\overline{u_j}$ convient. Ce qui montre l'assertion $ii) \Rightarrow iii)$. La réciproque est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Démontrons maintenant que $i) \Rightarrow ii)$. Supposons donc que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifie la propriété $i)$: il y a donc une constante C telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\tau_h f - f\|_{L^2} \leq C\|h\|.$$

Et considérons $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$. On notera e_j le j^{ieme} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Puisque φ est $\mathcal{C}^1$ à support compact, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(x + \varepsilon e_j) - \varphi(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\tau_{\varepsilon e_j}\varphi)(x) - \varphi(x)}{\varepsilon}.$$

Il y a de plus une constante k tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \left| \frac{(\tau_{\varepsilon e_j}\varphi)(x) - \varphi(x)}{\varepsilon} \right| \leq k$$

Si le support de φ est inclus dans la boule $\mathbb{B}(0, R)$ de centre 0 et de rayon R, on a pour tout[6] $\varepsilon \in]0, 1]$ et p.p. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left| f(x) \frac{(\tau_{\varepsilon e_j}\varphi)(x) - \varphi(x)}{\varepsilon} \right| \leq k\,|f(x)| \mathbb{1}_{\mathbb{B}(0,R+1)}(x)$$

Le théorème de convergence dominée implique donc que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\tau_{\varepsilon e_j}\varphi - \varphi}{\varepsilon}$$

Or le changement de variables $y = x + \varepsilon e_j$ montre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \tau_{\varepsilon e_j}\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{-\varepsilon e_j} f)\varphi$$

6. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ on notera $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique de A.

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz et notre hypothèse, on a donc :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{(\tau_{-\varepsilon e_j}\varphi) - \varphi}{\varepsilon} \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\tau_{-\varepsilon e_j} f) - f}{\varepsilon} \varphi \right| \\
&\leq \left\| \frac{(\tau_{-\varepsilon e_j} f) - f}{\varepsilon} \right\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \\
&\leq C\|\varphi\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Ce qui démontre que f vérifie la condition $ii)$

Démontrons maintenant que $iii) \Rightarrow iv)$. Supposons donc que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifie la propriété $iii)$: Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe une fonction $g_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)\ ,\ -\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} g_j \varphi.$$

Si $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$, alors la transformée de Fourier de la fonction $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ est :

$$\begin{aligned}
\widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}(\xi) &= \int_{R^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} dx \\
&= -\int_{R^n} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} dx \\
&= 2i\pi\xi_j \widehat{\varphi}(\xi)
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité est une conséquence du fait que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{R^n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\varphi(x) e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} \right] dx \\
&= \int_{R^n} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} \right] dx + \int_{R^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\, e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} dx\ .
\end{aligned}$$

La transformée de Fourier étant une isométrie[7] on en déduit que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n),\ \ -\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(-\xi) 2i\pi\xi_j \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}_j(-\xi) \widehat{\varphi}(\xi) d\xi$$

Ce qui montre que

$$2i\pi\xi_j \widehat{f}(\xi) = g_j(\xi).$$

Puisque $g_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on a donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi_j|^2 \left| \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi < \infty$$

7. On utilisera le fait que $\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}}(\xi)$.

Ceci étant valide pour tout j on en déduit le résultat voulu car

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 = \|\xi\|^2.$$

Démontrons maintenant que $iv) \Rightarrow i)$. On suppose donc $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \|\xi\|^2\right) \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi < \infty.$$

Un changement de variable facile donne

$$\widehat{\tau_h f}\,(\xi) = e^{2i\pi\langle h,\xi\rangle}\,\widehat{f}(\xi),$$

en conséquence :

$$\|\tau_h f - f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{2i\pi\langle h,\xi\rangle} - 1\right|^2 \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Mais on a avec l'inégalité $|\sin(\theta)| \leq |\theta|$ et l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned}\left|e^{2i\pi\langle h,\xi\rangle} - 1\right| &= |\sin(2i\pi\langle h,\xi\rangle)| \\ &\leq 2\pi|\langle h,\xi\rangle| \\ &\leq 2\pi|\|h\|\,\|\xi\|\end{aligned}$$

On a donc

$$\|\tau_h f - f\|_{L^2}^2 \leq 4\pi^2\|h\|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \|\xi\|^2 \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

D'où l'assertion $i)$ pour la constante

$$C = 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|\xi\|^2 \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

□

Définition 4.3. *On note $H^1(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des classes de fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie l'une des propriétés équivalentes de la proposition (4.2). Cette espace est muni de la norme*

$$\|f\|_{H^1}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + 4\pi^2\|\xi\|^2\right) \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

C'est un espace de Hilbert.

Lorsque $f \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$, en intégrant par parties, il est facile de voir que $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ de plus on a

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)\ ,\ 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f\varphi}{\partial x_j} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi + \int_{\mathbb{R}^n} f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\end{aligned}$$

Ainsi la fonction g_j donnée par la propriété $iii)$ est la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Alors si on note

$$\overrightarrow{grad}\, f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

alors la norme H^1 de f est

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\,\overrightarrow{grad}\, f|^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Lorsque $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, la fonction g_j fournit par la propriété $iii)$ sera appelée la **dérivée faible** de f par rapport à x_j est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

on notera de m ême

$$\overrightarrow{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

On a le théorème suivant :

Théorème 4.4. *L'espace $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. On ne donne que les points clés de la preuve. On considère une fonction $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\rho(x) = 1$ si $x \in \mathbb{B}(0,1)$ et $\rho(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{B}(0,2)$. et on considère ρ_R défini par $\rho_R(x) = \rho(x/R)$. Si $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, on note f_R la fonction obtenue en multipliant ρ_R et la transformée de Fourier inverse de la fonction $\rho_R\widehat{f}$:

$$f_R(x) = \rho_R(x) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_R(\xi) e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle}\,\widehat{f}(\xi)d\xi.$$

Il est facile de vérifier que $f_R \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et on peut montrer que

$$\lim_{R\to\infty} \|f_R - f\|_{H^1} = 0.$$

□

Notation : Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, on notera $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ (resp. $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$) l'espace des fonctions lisses sur Ω dont le support est compact et inclus dans Ω.
Par exemple , $f \in \mathcal{C}_0^1(]0,1[)$ si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et si pour un $\varepsilon \in]0, 1/2[$,

$$\forall t \in [0,\varepsilon] \cup [1-\varepsilon, 1] \ , \ f(t) = 0 \ .$$

Définition 4.5. *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on notera $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.*

En particulier si $f \in H_0^1(\Omega)$ alors p.p. $x \notin \Omega$, $f(x) = 0$.
À titre d'exercice démontrer que si $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$ alors $uv \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\frac{\partial uv}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} v + u \frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

4.3.2. *Cas de la dimension* 1*, l'espace* $H^1(\mathbb{R})$. Le cas de la dimension $n = 1$ possède quelques particularités :

Lemme 4.6. *Si $f \in H^1(\mathbb{R})$ alors f a un représentant continue.*

Démonstration. En effet, soit $f \in H^1(\mathbb{R})$, on sait que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)|\widehat{f}\,|^2(\xi) d\xi < \infty.$$

Et donc avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|(\xi) d\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{1+|\xi|^2} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)|\widehat{f}|^2(\xi) d\xi \right)^{1/2}.$$

Donc $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et f a un représentant continue donnée par

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi.$$

□

On a m ême mieux :

Théorème 4.7. *Si f est le représentant continue d'un élément $\tilde{f}$ de $H^1(\mathbb{R})$ et si l'on note f' la dérivée faible de $\tilde{f}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x) dx.$$

La preuve de ce résultat repose sur plusieurs lemmes

Lemme 4.8. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $u, v \in L^1([a,b])$ alors les fonctions U, V définies sur $[a,b]$ par*

$$U(x) = \lambda + \int_a^x u(t)dt \text{ et } V(x) = \mu + \int_a^x v(t)dt$$

sont continues.
De plus on a la formule d"intégration" par parties :

$$\int_a^b U(x)v(x)dx = [U(x)V(x)]_a^b - \int_a^b u(x)V(x)dx.$$

Démonstration. Soit $L > 0$ et $x, y \in [a,b]$ on a

$$U(x) - U(y) = \int_x^y u(t)dt$$

donc

$$\begin{aligned} |U(x) - U(y)| &\leq \left| \int_{[x,y]} |u|(t)dt \right| \\ &\leq L|x-y| + \int_{|u| \geq L} |u|(t)dt \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\lim_{L \to +\infty} \int_{|u|\geq L} |u|(t)dt = 0$. On peut trouve $L > 0$ tel que

$$\int_{|u|\geq L} |u|(t)dt \leq \varepsilon/2$$

Alors si $|x-y| \leq \varepsilon/(2L+1)$ alors

$$|U(x) - U(y)| < \varepsilon$$

Ce qui montre que U est (uniformément) continue sur $[a,b]$. Évidemment cette m ême preuve montre aussi que V est continue sur $[a,b]$.
On démontre d'abord la formule d"intégration" par parties lorsque $\lambda = \mu = 0$.
Dans ce cas on a avec le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} [U(x)V(x)]_a^b &= U(b)V(b) \\ &= \left(\int_a^b u(t)dt \right) \left(\int_a^b v(s)ds \right) \\ &= \int_{[a,b]^2} u(t)v(s)dtdsds. \end{aligned}$$

On pose

$$\overline{\Delta} = \{(t,s) \in [a,b]^2, s \leq t\}$$

et

$$\underline{\Delta} = \{(t,s) \in [a,b]^2, s \geq t\}$$

On a donc

$$\int_{[a,b]^2} u(t)v(s)dtds = \int_{\overline{\Delta}} u(t)v(s)dtds + \int_{\underline{\Delta}} u(t)v(s)dtds$$

Or toujours avec le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\Delta}} u(t)v(s)dtds &= \int_a^b \left(\int_{s\in[a,b]s\leq t} u(t)v(s)ds \right) dt \\ &= \int_a^b u(t) \left(\int_a^t v(s)ds \right) dt \\ &= \int_a^b u(t)V(t)dt.\end{aligned}$$

et de la même façon :

$$\begin{aligned}\int_{\underline{\Delta}} u(t)v(s)dtds &= \int_a^b v(s) \left(\int_a^s u(t)dt \right) ds \\ &= \int_a^b v(s)U(s)ds.\end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$[U(x)V(x)]_a^b = \int_a^b u(t)V(t)dt + \int_a^b v(s)U(s)ds.$$

Le cas général s'en déduit facilement car si on définit

$$U_0(x) = \int_a^x u(t)dt \text{ et } V_0(x) = \int_a^x v(t)dt,$$

alors d'une part :

$$\begin{aligned}[U(x)V(x)]_a^b &= [U_0(x)V_0(x)]_a^b + \lambda V_0(b) + \mu U_0(b) \\ &= U_0(b)V_0(b) + \lambda V_0(b) + \mu U_0(b)\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\int_a^b u(t)V(t)dt + \int_a^b v(s)U(s)ds &= \int_a^b u(t)V_0(t)dt + \int_a^b \lambda V_0(t)dt \\ &\quad + \int_a^b v(s)U_0(s)ds + \int_a^b \mu U_0(s)ds \\ &= \int_a^b u(t)V_0(t)dt + \int_a^b v(s)U_0(s)ds \\ &\quad + \int_a^b \mu U_0(s)ds + \int_a^b \lambda V_0(t)\end{aligned}$$

Nous venons de démontrer que $U_0(b)V_0(b) = \int_a^b u(t)V_0(t)dt + \int_a^b v(s)U_0(s)ds$, d'oİ le résultat. □

Lemme 4.9. *Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ tel que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} u\varphi' = 0$$

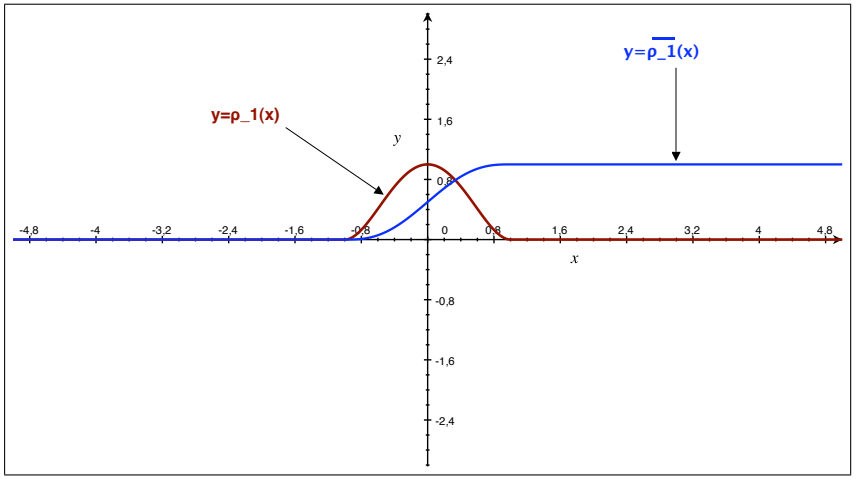
alors u est une fonction constante.

Démonstration. Soit $R > 0$, on considère la fonction $\rho_R \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ définie par

$$\rho_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq R \\ (R^2 - x^2)^2 & \text{si } |x| \leq R \end{cases}$$

et la fonction $\overline{\rho_R}$ définie par

$$\overline{\rho_R}(x) = \frac{15}{16R^5} \int_{-\infty}^x \rho_R(t)dt.$$



On remarquera que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_R(t)dt = \frac{16\,R^5}{15}.$$

On applique alors l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi' = 0$$

à la fonction φ_R définie par

$$\varphi_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq R \\ \int_{-R}^{x} \rho_R(t)u(t)dt - \overline{\rho_R}(x) \int_{-R}^{R} \rho_R(t)u(t)dt & \text{si } |x| \leq R \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\varphi_R \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$ car

$$\varphi_R'(x) = \rho_R(x)u(x) - \frac{3}{2R^3}\rho_R(x) \int_{-R}^{R} \rho_R(t)u(t)dt.$$

On aura alors

$$\int_{-R}^{R} u(x) \left(\rho_R(x)u(x) - \frac{3}{2R^3}\rho_R(x) \int_{-R}^{R} \rho_R(t)u(t)dt \right) dx = 0\ ,$$

On a donc :

$$\int_{-R}^{R} \rho_R(x)u^2(x)dx = \frac{15}{16R^5} \left(\int_{-R}^{R} \rho_R(t)u(t)dt \right)^2.$$

Mais

$$\int_{-R}^{R} \rho_R(t)dt = \frac{16\,R^5}{15},$$

on a donc l'égalité :

$$\left(\int_{-R}^{R} \rho_R(t)u(t)dt \right)^2 = \left(\int_{-R}^{R} \rho_R(t)dt \right) \left(\int_{-R}^{R} \rho_R(t)u^2(t)dt \right).$$

Or l'inégalité de Cauchy-Schwartz montre que

$$\begin{aligned} \left(\int_{-R}^{R} \rho_R(t)u(t)dt \right)^2 &= \left(\int_{-R}^{R} \sqrt{\rho_R(t)}\ \sqrt{\rho_R(t)}u(t)dt \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{-R}^{R} \rho_R(t)dt \right) \left(\int_{-R}^{R} \rho_R(t)u^2(t)dt \right) \end{aligned}$$

Puisque l'on a égalité on en déduit que qu'il y a une constante réelle C telle que

$$\forall t \in [-R, R]\ :\ C\sqrt{\rho_R(t)} = \sqrt{\rho_R(t)}u(t).$$

Ceci montre que u est constante sur tous les intervalles de la forme $]-R, R[$ donc u est constante. □

Remarque 4.10. *Si on retravaille la preuve de ce lemme, on peut montrer qu'en fait si $u \in L^1([a,b])$ est tel que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1([a,b]),\ \int_a^b u\varphi' = 0$$

alors

$$\text{p.p. } x \in [a,b],\ u(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t)dt.$$

On considère en effet pour toutes fonctions v continues sur l'intervalle $[a,b]$ la fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ qui s'annule en a et en b définie par :

$$\varphi(x) = \int_a^x v(t)dt - \frac{x-a}{b-a} \int_a^b v(t)dt.$$

On obtient alors que pour toute fonction v continue sur $[a,b]$:

$$\int_a^b \left[u(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t)dt \right] v(x)dx = 0\ .$$

On peut alors démontrer le théorème (4.7)

Démonstration. Soit donc f le représentant continue d'un élément $\tilde{f}$ de $H^1(\mathbb{R})$ et notons $f' \in L^2(\mathbb{R})$ la dérivée faible de $\tilde{f}$. D'après le lemme (4.8), La fonction G définie par $G(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$ est donc continue et l'on a $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$:

$$-\int_{\mathbb{R}} G(x)\varphi'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx$$

Or par définition de la dérivée faible, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Ainsi on a

$$\int_{\mathbb{R}} (f-G)(x)\varphi'(x)dx = 0.$$

Le lemme (4.9) implique alors que la fonction $f-G$ est constante mais comme elle est nulle en $x=0$, on a bien $f=G$. $\square$

Ces résultats permettent de démontrer que l'espace $H_0^1(]a,b[)$ peut être identifié à l'espace des fonctions $u \in \mathcal{C}^0([a,b])$ telles que

$$u(a) = u(b) = 0$$

et telles qu'il existe $g \in L^2([a,b])$ tel que $u(x) = \int_a^x g(t)dt$.
On définira alors l'espace $H^1([a,b])$ comme l'espace des des fonctions $u \in \mathcal{C}^0([a,b])$ telles qu'il existe $g \in L^2([a,b])$ tel que $u(x) = u(a) + \int_a^x g(t)dt$. On peut démontrer que c'est aussi l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ qui ont un prolongement dans $H^1(\mathbb{R})$. C'est à dire $H^1([a,b])$ est l'image de l'application linéaire qui $f \in H^1(\mathbb{R})$ associe la restriction de son représentant continue à $[a,b]$. On peut aussi démontrer avec les m êmes arguments que ceux utilisés pour démontrer la proposition (4.2) que $H^1([a,b])$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^2([0,1])$ telle qu'il existe une constante C telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(]0,1[,\mathbb{C}),\ \left|\int_a^b f(t)\varphi'(t)\,dt\right| \leq C\|\varphi\|_{L^2}.$$

et que dans ce cas la dérivée faible de f est la fonction $g \in L^2([a,b])$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(]0,1[,\mathbb{C}),\ -\int_a^b f(t)\varphi'(t)dt = \int_a^b g(t)\varphi(t)dt.$$

4.4. **Opérateurs bornés sur un espace de Hilbert.**

4.4.1. *Définitions.* On rappelle que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont deux espaces de Hilbert alors une application linéaire (on dit opérateur) $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ est continue (on dit aussi bornée) si il y a une constante C tel que

$$\forall v \in \mathcal{H}_1,\ \|T(v)\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|v\|_{\mathcal{H}_1}.$$

On notera $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$. On notera $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1)$. C'est un espace de Banach pour la norme d'opérateur

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)} = \sup_{v\in\mathcal{H}_1\setminus\{0\}} \frac{\|T(v)\|_{\mathcal{H}_2}}{\|v\|_{\mathcal{H}_1}}.$$

Il est facile de démontrer que l'on a également :

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)} = \sup_{\|v\|_{\mathcal{H}_1}=1} \|T(v)\|_{\mathcal{H}_2} = \sup_{0<\|v\|_{\mathcal{H}_1}\leq 1} \|T(v)\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Quelques exemples :

i) Sur $\ell^2(\mathbb{N})$: on considère une suite $(m_k) \in \ell^1(\mathbb{N})$ et on introduit l'opérateur de convolution par cette suite $v = (a_k) \in \ell^2(\mathbb{N})$, alors la suite $T(v) = (b_k)$ est définie par

$$b_k = \sum_{p+q=k} m_p a_q = \sum_{q=0}^{k} m_{k-q} a_q.$$

L'application linéaire T ainsi construite est continue.

ii) Sur $\ell^2(\mathbb{N})$, on considère une suite bornée (λ_k) et on introduit l'opérateur Λ qui à une suite (a_k) associe la suite $(\lambda_k a_k)$.

iii) Toujours sur $\ell^2(\mathbb{N})$, on introduit les opérateurs de décalage à droite σ et de décalage à gauche τ : Si $v = (a_k)$ alors $\sigma(v) = (b_k)$ est la suite $b_0 = 0, b_k = a_{k-1}, k \geq 1$. Autrement écrit on a

$$\sigma\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Et $\tau(v) = (c_k)$ est la suite $c_k = a_{k+1}, k \geq 0$; autrement écrit on a :

$$\tau\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

iv) Sur $L^2(\Omega)$ où Ω est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$. Si $f \in L^\infty(\Omega)$, l'opérateur de multiplication par f est continue sur $L^2(\Omega)$.

v) Sur $L^2(\mathbb{R}^n)$: si $m \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors l'opérateur de convolution par m

$$v \mapsto f \star v$$

est continue sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

vi) Sur $L^2(\Omega)$ où Ω est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$. Soit $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Si $v \in L^2(\Omega)$ alors p.p. $x \in \Omega$ la fonction $y \mapsto K(x,y)v(y)$ est intégrable et si on définit

$$T_K(v)(x) = \int_\Omega K(x,y)v(y)dy$$

alors l'opérateur T_K est continue de plus

$$\|T_K\| \leq \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$$

vii) De la même façon si $A = (A_{i,j}) \in \ell^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ alors l'opérateur T_A qui à une suite $v = (a_k)$ associe la suite $T_A(v) = (b_k)$ définie par

$$b_k \sum_{j\in\mathbb{N}} A_{k,j} a_j$$

est borné et sa norme est majorée par

$$\|T_A\| \leq \left(\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |A_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$$

On ne démontre ici que les assertions présentes au $vi)$ les autres sont laissées comme exercices.
Soit $f \in L^2(\Omega)$ et notons $\Omega_N = \Omega \cap \mathbb{B}(0,N)$ ainsi le volume de Ω_N est fini. Grâce au théorème de Fubini et à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, la fonction

$$(x,y) \in \Omega_N \times \Omega \mapsto K(x,y)f(y)$$

est intégrable car

$$\left(\int_{\Omega_N\times\Omega} |K(x,y)||f(y)|dxdy \right)^2 \leq \left(\int_{\Omega_N\times\Omega} |K(x,y)|^2 dxdy \right) \times \left(\int_{\Omega_N\times\Omega} |f(y)|^2 dxdy \right) ,$$

or

$$\int_{\Omega_N\times\Omega} |f(y)|^2 dxdy = \mathrm{vol}(\Omega_N) \int_{\Omega_N} |f(y)|^2 dy \ ;$$

ainsi le théorème de Fubini implique que p.p. $x \in \Omega_N$, la fonction $y \in \Omega \mapsto K(x,y)f(y)$ est intégrable. Puisque Ω est la réunion des $\Omega_N, N \in \mathbb{N}$, on en déduit la première assertion. La même preuve permet de démontrer que si $f, g \in L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}\langle T_K(f), g\rangle &= \int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)f(y)\bar{g}(x)dydx \\ &\leq \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} \left(\int_{\Omega\times\Omega} |f(y)|^2|g(x)|^2 dydx \right)^{1/2} \\ &\leq \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Or on a

$$\|T_K(f)\| = \sup_{g\in L^2(\Omega), \|g\|\leq 1} |\langle T_K(f), g\rangle|$$

D'où

$$\|T_K(f)\| \leq \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

On pouvait aussi dire que T_K était l'opérateur continu associé à la forme sesquilinéaire continue [8] $L^2(\Omega)$ définie par $f, g \in L^2(\Omega)$

$$b(f,g) = \int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)f(y)\bar{g}(x)dydx$$

On dit alors que K est le noyau intégral de l'opérateur T_K .

4.4.2. *Opérateur borné inversible.*

Définition 4.11. *Soit $\mathcal{H}$ un espaces de Hilbert, un opérateur borné $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit inversible s'il existe $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que $T.S = S.T = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$.*

8. On rappelle sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ on appelle forme sesquilinéaire une application $b : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ telle que pour tous $u, v, w \in \mathcal{H}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

i) $b(\lambda u + \mu v, w) = \lambda b(u,w) + \mu b(v,w)$

ii) $b(u, \lambda v + \mu w) = \bar{\lambda} b(u,v) + \bar{\mu} b(v,w)$

Une telle forme est continue si et seulement si il y a une constante C telle que

$$\forall u, v \in \mathcal{H} \ , \ |b(u,v)| \leq \|u\| \, \|v\|.$$

À une forme sesquilinéaire continue $b : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, on associe (grâce au théorème de Riesz) une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $b(u,v) = \langle T(u), v\rangle$.

Le théorème du graphe fermé de S. Banach implique que T est inversible si et seulement si c'est un isomorphisme. C'est à dire que si T est un opérateur continu sur $\mathcal{H}$ injectif et surjectif alors son inverse est continue.
On note $G\mathcal{L}(\mathcal{H})$ le groupe des opérateur borné est dit inversible de $\mathcal{H}$. On a le résultat suivant (qui est valide aussi dans les espaces de Banach) :

Proposition 4.12. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert alors $G\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est ouvert dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Démonstration. Lidée de la preuve est la suivante : on montre que si $T \in G\mathcal{L}(\mathcal{H})$ alors la boule ouverte de centre T et de rayon $\|T^{-1}\|^{-1}$ est incluse dans $G\mathcal{L}(\mathcal{H})$. En effet si S est dans cette boule ouverte alors

$$S = T(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} + E)$$

où

$$E = T^{-1}.(S - T)$$

L'hypothèse que $\|S - T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ implique que la norme de E vérifie

$$\|E\| < 1.$$

Ceci assure que la série de terme général $(-1)^n E^n$ converge normalement dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et donc on peut définir

$$R = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-E)^n\right) T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

et il est alors facile de vérifier que

$$R.S = S.R = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\,.$$

□

4.4.3. *Adjoint d'un opérateur borné.*

Définition 4.13. *Si $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont deux espaces de Hilbert, et si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est une application linéaire continue, l'opérateur adjoint de T est l'opérateur linéaire continue $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ défini par*

$$\forall (u, v) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2\ ,\ \langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle.$$

Il vérifie les propriétés suivantes qui découlent de la définition :

Proposition 4.14. — *L'adjoint de T^* est l'opérateur T :*

$$(T^*)^* = T.$$

— *Un opérateur borné et son adjoint ont la même norme : $\|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1)} = \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)}$.*
— *Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ est inversible alors T^* est aussi inversible et*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Démonstration de la dernière assertion :. Pour cela il suffit d'utiliser la définition de $(T^{-1})^*$. Si $u, v \in \mathcal{H}_1$ alors

$$\langle T^{-1}(u), T^*v\rangle = \langle T.T^{-1}(u), v\rangle = \langle u, v\rangle$$

et

$$\langle T^{-1}(u), T^*v\rangle = \langle u, (T^{-1})^*.T^*v\rangle = \langle u, v\rangle$$

Donc $(T^{-1})^*.T^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_1}$; un argument identique montre que $T^*.(T^{-1})^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_1}$. □

Un exemple : sur $L^2(\Omega)$ (Ω étant un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$), on considère $K \in L^2(\Omega\times\Omega)$, l'adjoint de l'opérateur T_K est l'opérateur $T_{\tilde{K}}$ de noyau intégral $\tilde{K} \in L^2(\Omega \times \Omega)$ défini par

$$\tilde{K}(x, y) = \overline{K(y, x)}$$

En effet si $f, g \in L^2(\Omega)$ alors

$$\begin{aligned}\langle T_K(f), g\rangle &= \int_{\Omega\times\Omega} K(x, y)f(y)\bar{g}(x)dydx \\ &= \int_{\Omega\times\Omega} f(y)\overline{\tilde{K}(y, x)g(x)}dydx \\ &= \langle f, T_{\tilde{K}}(g)\rangle.\end{aligned}$$

4.5. **Spectre d'un opérateur borné.**

Définition 4.15. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur borné de $\mathcal{H}$. Le spectre de T est l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tel que l'opérateur $T - z\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ ne soit pas inversible. Le spectre de T est noté $\mathrm{Sp}\,T$. Le complémentaire du spectre de T est l'ensemble résolvent et il est noté $\rho(T)$; donc $\rho(T) = \{z \in \mathbb{C},\ T - z\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \in G\mathcal{L}(\mathcal{H})\}$.*

Proposition 4.16. *Le spectre d'un opérateur borné est un compact de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Puisque $G\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un ouvert de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et que l'application $z \mapsto T - z\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ est continue, $\rho(T)$ est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue, $\rho(T)$ est donc un ouvert de $\mathbb{C}$. Son complémentaire est donc un fermé de $\mathbb{C}$. En fait la preuve de la proposition (4.12) montre que si $|z| > \|T\|$ alors l'opérateur

$$T - z\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} = -z\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - z^{-1}T\right)$$

est inversible car $\left\|z^{-1}T\right\| < 1$. On a donc

$$|z| > \|T\| \Rightarrow z \in \rho(T)$$

Donc le spectre de T est inclus dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\|T\|$. On a démontré que $\mathrm{Sp}\,T$ était un fermé borné de $\mathbb{C}$: c'est donc un compact. $\square$

Deux exemples de calculs de spectre :

i) Sur $\ell^2(\mathbb{N})$, on considère une suite bornée (λ_k) et on introduit l'opérateur Λ qui à une suite (a_k) associe la suite $(\lambda_k a_k)$. On considère l'image de la suite (λ_k)

$$A = \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$$

alors on a

$$\mathrm{Sp}\,\Lambda = \bar{A}\ . \tag{11}$$

Il est facile de démontrer que si $\mu \in A$ alors $\Lambda - \mu\,\mathrm{Id}_{\ell^2(\mathbb{N})}$ n'est pas injectif. Et donc on a $\mu \in \mathrm{Sp}\,\Lambda$ et puisque le spectre de Λ est fermé on a

$$\bar{A} \subset \mathrm{Sp}\,\Lambda.$$

Pour montrer l'inclusion réciproque, on considère $z \notin \bar{A}$ puisque le complémentaire de $\bar{A}$ est ouvert, il y a $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \mu \in A,\ |z - \mu| \geq \varepsilon$. C'est à dire que la suite

$$\left(\frac{1}{\lambda_k - z}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

est bornée ainsi l'opérateur

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \mapsto \left(\frac{a_k}{\lambda_k - z}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

est continu sur $\ell^2(\mathbb{N})$ il fournit de plus un inverse à l'opérateur $\Lambda - z\,\mathrm{Id}_{\ell^2(\mathbb{N})}$.

ii) Toujours sur $\ell^2(\mathbb{N})$, on étudie le spectre de l' opérateur de décalage à droite σ Si $v = (a_k)$ alors $\sigma(v) = (b_k)$ est la suite $b_0 = 0, b_k = a_{k-1}, k \geq 1$. C'est à dire

$$\sigma\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

On a

$$\mathrm{Sp}\,\sigma = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}.$$

En effet, pour $z \in \mathbb{C}$ et $(a_k) \in \ell^2(\mathbb{N})$, on a

$$\left(\sigma - z\,\mathrm{Id}_{\ell^2(\mathbb{N})}\right)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -za_0 \\ a_0 - za_1 \\ a_1 - z_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Il est clair que la norme de σ est 1 car

$$\forall v \in \ell^2(\mathbb{N}), \|\sigma(v)\| = \|v\|$$

Donc la preuve précédente fournit l'inclusion

$$\mathrm{Sp}\,\sigma \subset \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}.$$

Pour démontrer l'inclusion réciproque, on montre que si $|z| < 1$ alors l'opérateur $\sigma - z\,\mathrm{Id}_{\ell^2(\mathbb{N})}$ n'est pas surjectif. Ce qui montrera

$$\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\} \subset \mathrm{Sp}\,\sigma,$$

et puisque $\mathrm{Sp}\,\sigma$ est un fermé on aura bien l'égalité voulu. On considère donc $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, et on considère la suite $v = (\bar{z}^k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. Le premier terme de cette suite est 1 elle est donc non nulle. De plus, si $u = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, on calcule

$$\begin{aligned}\langle T(u), v\rangle &= -za_0 + \sum_{k\geq 1}(a_{k-1} - za_k)\overline{\bar{z}^k} \\ &= -za_0 + (a_0 - za_1)z + (a_1 - za_2)z^2 + (a_2 - za_3)z^3 \ldots \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi v est orthogonale à l'image de σ donc σ n'est pas surjective.

En fait ce qui a été utilisé ci dessus est la proposition suivante :

Proposition 4.17. *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ alors*

$$\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp \text{ et } \overline{\operatorname{Im} T^*} = (\ker T)^\perp$$

et le fait que l'adjoint de l'opérateur de décalage à droite et l'opérateur de décalage à gauche τ (vérifiez le en exercice); et que si $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, alors $v = (\bar{z}^k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ker\left(\tau - \bar{z}\operatorname{Id}_{\ell^2(\mathbb{N})}\right)$. On a également le lien suivant entre le spectre d'un opérateur et de son adjoint :

Proposition 4.18. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ alors*

$$\operatorname{Sp} T^* = \overline{\operatorname{Sp} T} = \{z \in \mathbb{C}, \bar{z} \in \operatorname{Sp} T\}.$$

Qui découle immédiatement du fait que $(T - z\operatorname{Id}_{\mathcal{H}})^* = T^* - \bar{z}\operatorname{Id}_{\mathcal{H}}$ et du fait que l'adjoint d'un opérateur inversible est inversible.

4.6. **Opérateur autoadjoint.**

Définition 4.19. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur borné, on dit que T est auto adjoint (ou hermitien) si*

$$T^* = T.$$

Ainsi si T est auto adjoint alors pour $v \in \mathcal{H}$ on a

$$\langle T(v), v\rangle = \langle v, T(v)\rangle = \overline{\langle T(v), v\rangle}$$

Donc pour tout $v \in v \in \mathcal{H}$ $\langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}$. On peut montrer que cette propriété caractérise les opérateurs auto adjoints. La même argumentation montre que la forme sesquilinéaire associée à T définie par

$$b_T(u, v) = \langle T(u), v\rangle$$

est hermitienne c'est à dire

$$\forall u, v \in \mathcal{H},\ b_T(u, v) = \overline{b_T(v, u)}$$

Théorème 4.20. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto adjoint. On définit*

$$m = \inf_{v\in\mathcal{H}, \|v\|\leq 1} \langle T(v), v\rangle$$

et

$$M = \sup_{v\in\mathcal{H}, \|v\|\leq 1} \langle T(v), v\rangle$$

Alors $\operatorname{Sp} T \subset [m, M]$ *et*

$$m, M \in \operatorname{Sp} T$$

Démonstration. On commence par démontrer que le spectre d'un opérateur T auto adjoint est réel. Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on dévellope

$$\begin{aligned}\|T(u) - zu\|^2 &= \|Tu - au - ibu\|^2 \\ &= \|Tu - au\|^2 + \|-ibu\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle (T - a\operatorname{Id})(u), -ibu\rangle\end{aligned}$$

Mais puisque T est auto adjoint :

$$\langle (T - a\operatorname{Id})(u), -ibu\rangle = ib\langle (T - a\operatorname{Id})(u), u\rangle$$

est imaginaire pure, donc

$$\|T(u) - zu\|^2 = \|Tu - au\|^2 + \|-ibu\|^2 \geq b^2\|u\|^2. \tag{12}$$

Ceci montre que si $z \notin \mathbb{R}$ alors $T - z\operatorname{Id}$ est injective. De plus ceci permet aussi de démontrer que si $z \notin \mathbb{R}$ alors l'image de $T - z\operatorname{Id}$ est fermé. En effet si $\left(y_k = (T - z\operatorname{Id})(x_k)\right)_k$ est une suite de l'image de $T - z\operatorname{Id}$ qui converge vers y_∞. Alors l'inégalité (12) implique que la suite $(x_k)_k$ est de Cauchy donc converge vers un vecteur $x_\infty \in \mathcal{H}$. La continuité de T implique alors que $y_\infty = (T - z\operatorname{Id})(x_\infty)$ est bien dans l'image de $(T - z\operatorname{Id})$. Ainsi l'image de $(T - z\operatorname{Id})$ est fermé. Or d'après la proposition (4.17)

$$\operatorname{Im}(T - z\operatorname{Id})^\perp = \ker(T - \bar{z}\operatorname{Id})$$

et puisque $\bar{z}$ n'est pas réel alors

$$\ker(T - \bar{z}\operatorname{Id}) = \{0\}$$

et $(T - z\operatorname{Id})$ est surjective. Ainsi $T - z\operatorname{Id}$ est une bijection et l'inégalité (12) implique que son inverse est continue de norme majorée par $|b|^{-1}$.
La forme sesquilinéaire hermitienne b_M définie par

$$b_M(u, v) = M\langle u, v\rangle - \langle T(u), v\rangle = \langle Mu - T(u), v\rangle$$

est positive :

$$\forall v \in \mathcal{H}, b_M(v, v) \geq 0.$$

Elle vérifie donc l'inégalité de Cauchy-Schwartz : $\forall u, v \in \mathcal{H}$

$$|b_M(u,v)| \leq \sqrt{b_M(u,u)b_M(v,v)}\,.$$

Montrons d'abord que $M \in \operatorname{Sp} T$. Il est facile de voir que

$$M = \sup_{v\in\mathcal{H},\|v\|=1} \langle T(v), v\rangle$$

Considérons donc une suite de vecteurs $v_k \in \mathcal{H}$ telle que

$$\forall k,\ \|v_k\| = 1 \text{ et } \lim_{k\to\infty} \langle T(v_k), v_k\rangle = M\ .$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz obtenue précédemment à v_k et $u \in \mathcal{H}$: on obtient

$$|\langle Mv_k - T(v_k), w\rangle|^2 \left(M - \langle T(v_k), v_k\rangle\right) \left(\langle \mu w - T(w), w\rangle\right)$$

Or on a

$$\langle Mw - T(w), w\rangle \leq (M + \|T\|)\|w\|^2$$

donc on a obtenu $\forall w \in \mathcal{H}$:

$$|\langle Mv_k - T(v_k), w\rangle|^2 \leq (M + \|T\|)\left(M - \langle T(v_k), v_k\rangle\right)\|w\|^2.$$

On déduit de cette inégalité :

$$\|Mv_k - T(v_k)\|^2 \leq (M + \|T\|)\left(M - \langle T(v_k), v_k\rangle\right)$$

Et donc on en déduit que

$$\lim_{k\to\infty} \|Mv_k - T(v_k)\| = 0$$

Ceci montre que l'opérateur $M\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - T$ n'est pas inversible donc $M \in \operatorname{Sp} T$. Soit maintenant $\mu > M$, alors on a $\forall u \in \mathcal{H}$:

$$\|\mu u - T(u)\|\|u\| \geq \langle \mu u - T(u), u\rangle \geq (\mu - M)\|u\|^2$$

On en déduit que

$$\forall u \in \mathcal{H}\ ,\ \|\mu u - T(u)\| \geq (\mu - M)\|u\| \tag{13}$$

Ceci montre que $\mu\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - T$ est injectif puisqu'il est auto adjoint :

$$\overline{\operatorname{Im}(\mu\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - T)} = \ker(\mu\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - T)^{\perp}.$$

Ceci montre que l'image de $\mu\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - T$ est dense. Or l'inégalité (13) implique que l'image de $\mu\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - T$ est fermé : si $(y_k = \mu u_k - T(u_k))$ est une suite convergente de l'image de $\mu\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - T$:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y_\infty$$

(y_k) est donc une suite de Cauchy, l'inégalité (13) implique que (u_k) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}$, (u_k) est donc une suite convergente, il y a $u_\infty \in \mathcal{H}$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u_\infty$$

Donc par continuité de $\mu\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - T$:

$$y_\infty = \mu u_\infty - T(u_\infty) \in \operatorname{Im}(\mu\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - T).$$

L'opérateur $\mu\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - T$ est donc un isomorphisme. L'inégalité (13) montre que l'opérateur réciproque de $\mu\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - T$ est continue[9] et que

$$\left\|(\mu\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} - T)^{-1}\right\| \leq (\mu - M)^{-1}.$$

Les m êmes arguments (en utilisant les formes sesquilinéaires $u \mapsto \langle T(u) - \mu u, u\rangle$ pour $\mu = m$ et $\mu < m$ montre que $m \in SpT$ et que $]-\infty, m[\subset \rho(T)$. □

Quelques exemples d'opérateurs auto-adjoints :

i) Sur $\ell^2(\mathbb{N})$, on considère une suite bornée (λ_k) de **nombres réels** alors l'opérateur Λ qui à une suite (a_k) associe la suite $(\lambda_k a_k)$ est auto adjoint.

ii) Sur $L^2(\Omega)$ où Ω est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$. Si $f \in L^\infty(\Omega)$ est à **valeurs réelles**, alors l'opérateur de multiplication par f est autoadjoint.

iii) Sur $L^2(\Omega)$ où Ω est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$. Soit $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Si p.p. $(x,y) \in \Omega \times \Omega, K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, alors l'opérateur T_K est autoadjoint.

Il est intéressant de comparer cette dernière condition à ce qui se passe en dimension finie : à une matrice $n \times n$ $(A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est associée à un endomorphisme $\mathbb{C}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ équipé de sa structure Hilbertienne standart. Alors Cet opérateur est autoadjoint/hermitien si et seulement si

$$\forall i, j\ \ A_{i,j} = \overline{A_{j,i}}.$$

9. On peut éviter cet argument en utilisant le théorème du graphe fermée de S. Banach.

En quelque sorte, le noyau K se comporte comme la matrice de l'opérateur T_K.

LE THÉORÈME SPECTRAL POUR LES OPÉRATEURS COMPACTS AUTO-ADJOINTS.

Le but de cette leçon est de donner un théorème fondamental qui permettra de retrouver certains des résultats précédents sur les opérateurs de Sturm-Liouville et de les généraliser.

5.1. **Opérateurs compacts.**

5.1.1. *Définitions.*

Définition 5.1. *Soit $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert séparables. On désigne par $B_{\mathcal{H}_1}$ la boule unité fermée de $\mathcal{H}_1$. On dit qu'une application linéaire $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est compact si $T(B_{\mathcal{H}_1})$ est une partie relativement compacte de $\mathcal{H}_2$.*

Remarque 5.2. *Une partie relativement compacte étant bornée, une application linéaire $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tel que $T(B_{\mathcal{H}_1})$ est une partie relativement compacte de $\mathcal{H}_2$ est automatiquement continue. On aurait modifié la définition en oubliant de supposer a priori la continuité de T. Dans une terminologie ancienne on disait complètement continue pour compacte. (Riesz et Nagy)*

Proposition 5.3. *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert séparables. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est de rang fini :*

$$\dim \operatorname{Im} T < \infty$$

alors T est un opérateur compact.

Démonstration. Dans ce cas, $T(B_{\mathcal{H}_1})$ est une partie borné dans un espace vectoriel de dimension finie, c'est donc une partie relativement compact. □

5.1.2. *Propriétés.*

Proposition 5.4. *Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ trois espaces de Hilbert séparables.*

i) L'ensemble des opérateurs compacts de $\mathcal{H}_1$ vers $\mathcal{H}_2$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

ii) Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ si S ou T est un opérateur compact alors ST est un opérateur compact.

Démonstration. Montrons d'abord le fait que l'ensemble des opérateurs compacts de $\mathcal{H}_1$ vers $\mathcal{H}_2$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Il est facile de voir que si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est un opérateur compact et $\mu \in \mathbb{C}$ alors μT est un opérateur compact car $(\mu T)(B_{\mathcal{H}_1}) = \mu(T(B_{\mathcal{H}_1}))$ est l'image d'une partie relativement compacte par une application continue. Ce même argument permet de conclure la preuve de $ii)$. Soit maintenant $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ deux opérateurs compacts, on sait que $K_1 = \overline{T_1(B_{\mathcal{H}_1})}$ et $K_2 = \overline{T_2(B_{\mathcal{H}_1})}$ sont des compacts de $\mathcal{H}_2$. Puisque

$$K_1 + K_2 = \{x + y, (x, y) \in K_1 \times K_2\}$$

est l'image du compact $K_1 \times K_2 \subset \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_2$ par l'application continue

$$(x, y) \in \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_2 \mapsto x + y \in \mathcal{H}_2$$

$K_1 + K_2$ est un compact de $\mathcal{H}_2$. Maintenant

$$(T_1 + T_2)(B_{\mathcal{H}_1}) = \{T_1(u) + T_2(u), u \in B_{\mathcal{H}_1}\} \subset K_1 + K_2$$

est donc relativement compacte.
Il reste à démontrer que l'ensemble des opérateurs compacts de $\mathcal{H}_1$ vers $\mathcal{H}_2$ est un fermé de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. C'est à dire qu'une limite d'opérateur compact est compact. Pour cela on se sert du résultat suivant

Théorème 5.5. *Soit (X, d) un espace métrique complet, un partie $A \subset X$ est relativement compact* [10] *si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve une famille finie $a_1, \dots a_N \in A$ telle que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(a_i, \varepsilon).$$

Considérons donc une suite d'opérateur compacts (T_n) $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ qui converge vers $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.
Soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|T - T_{n_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Puisque $T_{n_0}(B_{\mathcal{H}_1})$ est une partie relativement compacte de $\mathcal{H}_2$, il existe une famille finie $x_1, \dots x_N \in B_{\mathcal{H}_1}$, telle que si

$$y_1 = T_{n_0}(x_1), \dots, y_N = T_{n_0}(x_N) \in T_{n_0}(B_{\mathcal{H}_1}),$$

10. i.e.$\bar{A}$ est compact.

alors

$$T_{n_0}(B_{\mathcal{H}_1}) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(y_i, \varepsilon/3).$$

On va montrer que si on pose pour $i = 1, \dots N$, $z_i = T(x_i)$ alors

$$T(B_{\mathcal{H}_1}) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(z_i, \varepsilon).$$

Si $x \in B_{\mathcal{H}_1})$ alors on sait qu'il existe $i \in \{1, \dots, N\}$ telle que

$$T_{n_0}(x) \in B(y_i, \varepsilon/3)$$

C'est à dire

$$\|T_{n_0}(x) - y_i\| = \|T_{n_0}(x) - T_{n_0}(x_i)\| \leq \varepsilon/3$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\|T(x) - z_i\| &= \|T(x) - T(x_i)\| \\
&\leq \|T(x) - T_{n_0}(x)\| + \|T_{n_0}(x) - T_{n_0}(x_i)\| + \|T_{n_0}(x_i) - T(x_i)\| \\
&\leq \|T - T_{n_0}\|\|x\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T - T_{n_0}\|\|x_i\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc $T(x) \in B(z_i, \varepsilon)$. On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$ on pouvait trouver une famille finie $z_1, \dots, z_N$ de $T(B_{\mathcal{H}_1})$ telle que

$$T(B_{\mathcal{H}_1}) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(z_i, \varepsilon).$$

Le critère de (5.5) montre que $T(B_{\mathcal{H}_1})$ est relativement compacte. Donc T est un opérateur compact. □

On a aussi le résultat utile suivant :

Proposition 5.6. *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert séparables, tout opérateur compact de $\mathcal{H}_1$ vers $\mathcal{H}_2$ est limite d'opérateur de rang fini : si $T \in\in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est un opérateur compact, il y a une suite $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ d'opérateur de rang fini telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0.$$

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un opérateur compact et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$ le critère (5.5), montre qu'il y a une famille finie $z_1 = T(x_1), \dots, z_N = T(x_N)$ de $T(B_{\mathcal{H}_1})$ telle que

$$T(B_{\mathcal{H}_1}) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(z_i, 1/n).$$

Considèrons alors l'espace vectoriel de dimension finie $V_n \subset \mathcal{H}_2$ engendré par les vecteurs $z_1, \dots z_N$ et notons π_n la projection orthorgonale sur V_n. Soit $x \in B_{\mathcal{H}_1}$, on trouve $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que

$$\|T(x) - z_i\| \leq \frac{1}{n}$$

Or

$$z_i = \pi_n \circ T(x_i)$$

et par définition $\pi_n\left(T(x)\right)$ est caractérisé par :

$$\|T(x) - \pi_n \circ T(x)\| = \inf_{z \in V_n} \|T(x) - z\|.$$

Ainsi

$$\|T(x) - \pi_n\left(T(x)\right)\| \leq \|T(x) - z_i\| \leq \frac{1}{n}$$

Ceci étant valable pour tout $x \in B_{\mathcal{H}_1})$, on en déduit que

$$\|T - \pi_n \circ T\| \leq \frac{1}{n}.$$

Les opérateurs $\pi_n \circ T$ étant bien sur de rang fini, on a bien démontré le résultat énoncé. □

Ceci permet de donner quelque exemples d'opérateurs compacts :

Proposition 5.7. *i) Sur $\ell^2(\mathbb{N})$, on considère une suite bornée (λ_k) alors l'opérateur Λ qui à une suite (a_k) associe la suite $(\lambda_k a_k)$ est compact si et seulement si $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$.*

ii) Sur $L^2(\Omega)$ où Ω est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$. Si $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ alors l'opérateur T_K est compact.

Démonstration. Concernant l'assertion $i)$: Si $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. Notons Λ_N l'opérateur qui à une suite (a_k) associe la suite (b_k) définie par

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq N \\ \lambda_k a_k & \text{si } k < N \end{cases}$$

L'opérateur Λ_N est continue de rang fini. Il est facile de démontrer que

$$\|\lambda - \Lambda_N\| = \sup_{k \geq N} \|\lambda_k|$$

En conséquence Λ est limite dans $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ d'opérateur de rang fini donc compact, c'est un opérateur compact.
Réciproquement supposons que l'opérateur Λ soit compact. Notons (e_n) la base Hilbertienne standart de $\ell^2(\mathbb{N})$. e_n est la suite $(e_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$e_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

On a par définition $\Lambda(e_n) = \lambda_n e_n$. Montrons que 0 est la seule valeur d'adhérence de la suite (λ_k). Ceci montrera que $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$.
Soit λ une valeur d'adhérence de la suite (λ_k). Il y a donc une suite croissante $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{j\to\infty} \lambda_{k_j} = \lambda$. La suite $(e_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de la boule unité de $\ell^2(\mathbb{N})$, et $(\Lambda(e_{k_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite dans l'image par Λ de la boule unité de $\ell^2(\mathbb{N})$, Λ étant supposé compact, on peut extraire de $(\Lambda(e_{k_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ une sous suite convergente. Par commodité de notation, on suppose que

$$\lim_{j\to\infty} \Lambda(e_{k_j}) = v \in \ell^2(\mathbb{N})$$

On a donc

$$\|v\| = \lim_{j\to\infty} \|\Lambda(e_{k_j})\| = \lim_{j\to\infty} |\lambda_{k_j}| = |\lambda|.$$

Maintenant soit $n \in \mathbb{N}$ on a pour $k_j > n$:

$$\langle \Lambda(e_{k_j}), e_n \rangle = \langle \lambda_{k_j} e_{k_j}, e_n \rangle = 0 \ ,$$

donc

$$\langle v, e_n \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle \Lambda(e_{k_j}), e_n \rangle = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle v, e_n \rangle|^2 = 0$, donc $\lambda = 0$.
On peut donner une autre preuve de cette dernière assertion en raisonnant par contraposition. Supposons que la suite $(\lambda_k)_k$ ne converge pas vers 0. On sait donc qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et une partie infinie $J \subset \mathbb{N}$ tel que

$$j \in J \Rightarrow |\lambda_j| \geq \varepsilon.$$

On remarque alors que pour $j \neq j'$ on a

$$\|\Lambda(e_j) - \Lambda(e_{j'})\|^2 = \|\lambda_j e_j - \lambda_{j'} e_{j'}\|^2 = |\lambda_j|^2 + |\lambda_{j'}|^2$$

Ainsi si $j, j' \in J$ et $j \neq j'$ alors

$$\|\Lambda(e_j) - \Lambda(e_{j'})\| \geq \sqrt{2}\varepsilon.$$

La suite $(e_j)_{j\in J}$ est bornée mais on peut en extraire une sous suite $I \subset J$ telle que la suite $\big(\Lambda(e_i)\big)_{i\in I}$ converge. L'opérateur Λ n'est donc pas compact.
Concernant l'assertion $ii)$. Soit $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on sait qu'il existe $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n \subset \Omega$ des ensembles mesurables tels que pour

$$K_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i \times B_i}$$

alors

$$\|T_K - T_{K_n}\| = \|T_{K-K_n}\| \leq \|K - K_n\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} \leq \frac{1}{n}.$$

Or l'opérateur T_{K_n} est de rang fini en effet :

$$K_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \mathbb{1}_{B_i}(y) \ ,$$

donc

$$T_{K_n}(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\int_{B_i} f(y)dy \right) \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

L'image de T_{K_n} est incluse dans l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_n}$. C'est donc bien un opérateur de rang fini. L'opérateur T_K est limite d'opérateur de rang fini, c'est donc un opérateur compact. □

La proposition (5.6) permet aussi de démontrer

Proposition 5.8. *L'adjoint d'un opérateur compact est compact.*

Démonstration. Soit donc $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un opérateur compact, on sait qu'il existe une suite d'opérateurs (T_n) de rang fini qui converge vers T. Grâce à l'identité

$$\|T - T_n\| = \|T^* - T_n^*\|$$

on voit que la suite (T_n^*) converge vers T^*. Or on a le lemme suivant :

Lemme 5.9. *L'adjoint d'un opérateur de rang fini est de rang fini.*

Ce lemme permet de conclure que T^* est également limite d'opérateurs de rang fini, il est donc compact.
La preuve du lemme est immédiate : soit T_f est un opérateur de rang fini On considère $y_1, \dots, y_n$ une base orthonormée de $\operatorname{Im} T_f$, on a donc pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$T_f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle T_f(x), y_i \rangle y_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, T_f^*(y_i) \rangle y_i$$

et pour tout $x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$:

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, T_f^*(y_i) \rangle \langle y_i, y \rangle$$

Donc

$$T_f^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle y, y_i \rangle T_f^*(y_i).$$

ets bien de rang fini.

□

5.1.3. *Le spectre d'un opérateur compact.*

Proposition 5.10. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur compact alors*

i) Si la dimension de $\mathcal{H}$ est infinie, alors $0 \in \operatorname{Sp} T$

ii) Si $z \in \mathbb{C}$ alors $\ker(T - z \operatorname{Id}_{\mathcal{H}})$ est de dimension finie.

iii) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ alors $z \in \operatorname{Sp} T \Rightarrow \ker(T - z \operatorname{Id}_{\mathcal{H}}) \neq \{0\}$.

iv) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\{z \in \operatorname{Sp} T, |z| \geq \varepsilon\}$ est fini.

La troisième assertion est que au dehors de 0, le spectre d'un opérateur compact est constitué de valeurs propres. La quatrième assertion est pour un opérateur compact $\operatorname{Sp} T \setminus \{0\}$ peut être énumeré en une suite (éventuellement fini ou vide) (λ_i) tel que $|\lambda_{i+1}| \leq |\lambda_i|$.
Un exemple d'opérateur compact dont le spectre est réduit à $\{0\}$. Sur $L^2([0,1])$ on considère l'opérateur T défini par $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$ c'est l'opérateur T_K associé au noyau

$$K(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq x \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

C'est donc un opérateur compact. De plus si $z \neq 0$ est une valeur propre, il y a donc $f \in L^2([0,1])$ tel que $zf(x) = \int_0^x f(t)dt$.
Une itération facile mène à

$$T^\ell f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^\ell}{\ell!} f(t)dt$$

On a donc

$$\left\| T^\ell \right\| \leq \frac{1}{\ell!}$$

Donc

$$|z^\ell| \leq \frac{1}{\ell!}$$

Ceci implique $z = 0$.

Démonstration. Prouvons la première assertion : Un opérateur de rang fini a toujours un noyau non nul en dimension finie. En effet soit T_f est un opérateur de rang fini On considère $y_1, \dots, y_n$ une base orthonormée de $\operatorname{Im} T_f$, On a donc pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$T_f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle T_f(x), y_i \rangle y_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, T_f^*(y_i) \rangle y_i$$

Puisque $\dim \mathcal{H}$ est infinie, on peut toujours trouver $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ telle que

$$\forall i,\ x \perp T_f^*(y_i)$$

On aura alors $T_f(x) = 0$.
Également en dimension infinie, un opérateur de rang fini ne peut être surjectif.
Ainsi si on considère un un opérateur compact $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et que l'on suppose que $0 \notin \operatorname{Sp} T$ alors T est inversible. Si on considère maintenant une suite d'opérateurs de rang fini $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ qui converge vers T alors la proposition (4.12) implique que pour n assez grand T_n est inversible donc que $\mathcal{H}$ est de dimension finie.
Démontrons la deuxième assertion. Supposons que $z \neq 0$ alors la restriction de T à l'espace $\ker(T - z \operatorname{Id}_{\mathcal{H}})$ est également un opérateur compact or en restriction à $\ker(T - z \operatorname{Id}_{\mathcal{H}})$, T est inversible. Donc d'après la première assertion $\ker(T - z \operatorname{Id}_{\mathcal{H}})$ est de dimension finie.
Démontrons désormais les deuxième et troisième assertions : Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on sait que l'on peut trouver un opérateur de rang fini $T_f \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que

$$\|T - T_f\| \leq \frac{|z|}{2}.$$

L'opérateur $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - z^{-1}(T - T_f)$ est alors inversible d'inverse

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}(T - T_f)^n.$$

Or on a

$$z\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - T = z\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - z^{-1}T\right) = z\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - z^{-1}(T - T_f) - z^{-1}T_f\right)$$

Donc

$$z\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - T = z\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - z^{-1}(T - T_f)\right)(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} + B)$$

où

$$B = -z^{-1}GT_f$$

est un opérateur de rang fini. On déduit de cette formule que

$$\ker\left(z\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - T\right) = \ker(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} + B).$$

On a évidemment $\ker(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} + B) \subset \mathrm{Im}\, B$ et B étant de rang fini, on en déduit que la noyau de $z\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - T$ est de dimension finie. Ce qui re-démontre l'assertion $ii)$.

De plus $z \in \mathrm{Sp}\, T$ si et seulement si $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} + B$ est non inversible. Supposons que $z\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - T$ soit injectif et démontrons que $z\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - T$ est inversible. Il suffit pour cela de démontrer que si $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} + B$ est injectif alors $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} + B$ est inversible. Considérons $\mathcal{V} = \mathrm{Im}\, B$ et π la projection orthogonale sur $\mathcal{V}$.

On remarque que puisque $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} + B$ est injectif alors l'application linéaire $A : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$ définie par

$$A(v) = v + Bv = v + \pi(B(v))$$

est injectif [11]. Mais $\mathcal{V}$ est de dimension finie, donc A est inversible. On vérifie alors que l'opérateur

$$S(x) = A^{-1}\pi(x) - A^{-1}\pi(\mathrm{Id} + B)(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - \pi)(x) + (1 - \pi)(x)$$

fournit un inverse à $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} + B$. Une explication plus convaincante que le calcul direct est la suivante : dans la décomposition

$$\mathcal{H} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^{\perp},$$

11. On a même l'équivalence $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} + B$ injectif $\Leftrightarrow$ A injectif.

l'opérateur $\mathrm{Id}_{\mathcal{V}} + B$ a l'écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} A & \pi(\mathrm{Id} + B)(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - \pi) \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{V}^{\perp}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{V}^{\perp}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{V}} & A^{-1}\pi(\mathrm{Id} + B)(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - \pi) \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{V}^{\perp}} \end{pmatrix}$$

Son inverse est donné par

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{V}} & -A^{-1}\pi(\mathrm{Id} + B)(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - \pi) \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{V}^{\perp}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{V}^{\perp}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\pi(\mathrm{Id} + B)(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - \pi) \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{V}^{\perp}} \end{pmatrix}.$$

Concernant la dernière assertion. On doit démontrer que la seule valeur d'adhérence de $\mathrm{Sp}\, T$ est 0. Soit (λ_n) une suite de points distincts de $\mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}$ qui converge vers $\lambda_\infty \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = \lambda_\infty.$$

Il existe alors une suite (v_n) de vecteurs de $\mathcal{H}$ telle que

$$\|v_n\| \neq 0 \text{ et } T(v_n) = \lambda_n\, v_n.$$

On considère l''espace vectoriel V_n engendré par $\{v_0, \ldots, v_n\}$. On décompose

$$v_{n+1} = u_{n+1} + w_{n+1}$$

oİ

$$w_{n+1} \in V_n \text{ et } u_{n+1} \perp V_n;$$

C'est Ĺ dire que w_{n+1} est le projeté orthogonal de v_{n+1} sur V_n. On normalise v_n afin que

$$\|u_n\| = 1.$$

On a donc par construction $T(V_n) \subset V_n$ et $V_n \subset V_{n+1}$ et

$$T(u_n) - \lambda_n u_n = \lambda w_n - T(w_n) \in V_{n-1}.$$

Pour $n > m$ on a

$$\frac{T(u_n)}{\lambda_n} - \frac{T(u_m)}{\lambda_m} = \frac{T(u_n) - \lambda_n u_n}{\lambda_n} - \frac{T(u_m) - \lambda_m u_m}{\lambda_m} + u_n - u_m.$$

Dans le membre de droite, on remarque que les termes

$$\frac{T(u_n) - \lambda_n u_n}{\lambda_n} \text{ et } \frac{T(u_m) - \lambda_m u_m}{\lambda_m}$$

sont dans V_{n-1} ; de plus $u_m = v_m - w_m \in V_m \subset V_{n-1}$. Donc

$$\left\| \frac{T(u_n)}{\lambda_n} - \frac{T(u_m)}{\lambda_m} \right\| \geq 1 = \|u_n\|. \tag{14}$$

Or (u_n) est une suite bornée, par compacité peut extraire de la suite $\big(T(u_n)\big)$ une suite convergente.
Si $\lambda_\infty \neq 0$, l'inégalité ci dessus (14) implique que $\lim_n u_n = 0$ ce qui est absurde. Donc $\lambda_\infty = 0$.

□

5.2. **Le théorème spectral pour les opérateurs compacts autoadjoints.**

Théorème 5.11. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur compact auto adjoint. Alors $\mathcal{H}$ possède une base Hilbertienne constituée de vecteurs propres de T. De plus chaque valeur propre non nulle est de multiplicité finie.*

La preuve de ce théorème repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 5.12. *Si λ, μ sont deux valeurs propres distincts d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auto adjoint alors*

$$\ker(T - \lambda \operatorname{Id}_{\mathcal{H}}) \perp \ker(T - \mu \operatorname{Id}_{\mathcal{H}}).$$

Dont la preuve est évidente : soit $u \in \ker(T - \lambda \operatorname{Id}_{\mathcal{H}})$ et $v \in \ker(T - \mu \operatorname{Id}_{\mathcal{H}})$, on a

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle = \mu \langle u, v \rangle$$

où on rappelle que puisque T est autoadjoint λ, μ sont des nombres réels. On en déduit que

$$(\lambda - \mu)\langle u, v \rangle = 0$$

soit $\langle u, v \rangle = 0$.
On peut maintenant démontrer le théorème (5.11).

Démonstration. Dans la cadre du théorème (5.11), l'assertion $iv)$ du théorème (5.10) montre que $\operatorname{Sp} T \setminus \{0\}$ est discret. Les valeurs propres non nulles de T peuvent donc être énumérés en une suite (éventuellement finie ou vide) (λ_i) tel que $|\lambda_{i+1}| \leq |\lambda_i|$ et

$$\lim_{i \to \infty} \lambda_i = 0$$

On énumère donc les valeurs propres non nulles de T en une suite (λ_j) et on considère l'espace

$$\tilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_i \ker(T - \lambda_i \operatorname{Id}_{\mathcal{H}})$$

Par continuité de T, T laisse stable $\tilde{\mathcal{H}}$. Et puisque T est autoadjoint, on montre facilement que $v \perp \tilde{\mathcal{H}} \Rightarrow T(v) \perp \tilde{\mathcal{H}}$:
Si $v \perp \tilde{\mathcal{H}}$ et que $u \in \tilde{\mathcal{H}}$ alors $\langle T(v), u \rangle = \langle v, T(u) \rangle = 0$ car $T(u) \in \tilde{\mathcal{H}}$.
Ainsi $\tilde{\mathcal{H}}^\perp$ est stable par T [12] . La restriction de T a $\tilde{\mathcal{H}}^\perp$ est toujours un opérateur autoadjoint compact. Grâce au théorème 4.20, on en déduit que si $T\big|_{\tilde{\mathcal{H}}^\perp}$ n'est pas l'opérateur nulle, alors il possède une valeur propre non nulle. Ceci n'est pas possible par construction puisque les vecteurs propres associées à des vecteurs propres non nulles sont par hypothèse dans $\tilde{\mathcal{H}}$. Donc on a $T\big|_{\tilde{\mathcal{H}}^\perp} = 0$ et

$$\tilde{\mathcal{H}}^\perp = \ker T.$$

D'où

$$\mathcal{H} = \ker T \oplus \bigoplus_i \ker(T - \lambda_i \operatorname{Id}_{\mathcal{H}}).$$

Puisque chaque espace propre $\ker(T - \lambda_i \operatorname{Id}_{\mathcal{H}})$ est de dimension finie on obtient une base hilbertienne constituée de vecteurs propres de T par concaténation des bases de $\ker(T - \lambda_i \operatorname{Id}_{\mathcal{H}}), i \in \mathbb{N}$ et d'une base hilbertienne du noyau de T. □

5.3. **Appendice : les opérateurs de Hilbert-Schmidt.**

Définition 5.13. *Soit T une application linéaire de $\mathcal{H}$ dans lui-même. On dit que T est de classe Hilbert-Schmidt s'il existe une base orthonormée $\{e_j\}_{j \geq 1}$ de $\mathcal{H}$ telle que $\sum_{j \geq 1} \|Te_j\|^2 < +\infty$.*

12. Le résultat sous jacent est la propriété suivante : soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, si $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ est un sous espace vectoriel stable par T alors $\mathcal{F}^\perp$ est stable par T^*.

Ceci équivaut donc Ĺ

$$\sum_{i,j\geq 1} |\langle Te_j, e_i\rangle\|^2 < +\infty.$$

On désigne par $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs de classe Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}$.

Proposition 5.14. *Si* $\sum_{n\geq 1} \|Te_n\|^2 < +\infty$ *et si* $\{\varphi_j\}_{j\geq 1}$ *est une autre base orthonormée alors*

$$\sum_{n\geq 1} \|Te_n\|^2 = \sum_{n\geq 1} \|T\varphi_j\|^2$$

Démonstration. On applique le théorème de Parseval :

$$\|Te_j\|^2 = \sum_{k\geq 1} |\langle Te_j|\varphi_k\rangle|^2 \tag{15}$$

puis dans la double somme en j et k obtenue, on inverse l'ordre des sommations. □

Les principales propriétés de $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ sont énoncées dans la proposition suivante.

Proposition 5.15. *$\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est un espace vectoriel. Il possède en outre les propriétés suivantes :*

i) $T \mapsto \|T\|_{HS} := \left(\sum_{n\geq 1} \|Te_j\|^2\right)^{1/2}$ *est une norme sur $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$. Cette norme est associée au produit scalaire :*

$$(T,S) \mapsto \langle T|S\rangle_{HS} := \sum_{n\geq 1} \langle Te_j|Se_j\rangle.$$

ii) On a l'inégalité

$$\|T\| \leq \|T\|_{HS}, \quad \forall T \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H}) \tag{16}$$

iii) $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|\bullet\|_{HS}$.

iv) Si $T \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ alors $T^* \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ et

$$\|T^*\|_{HS} = \|T\|_{HS}.$$

v) Soit $\mathcal{H}_1$ un espace de Hilbert séparable, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$, $T \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ alors $BTA \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H}_1)$ et on a l'inégalité

$$\|BTA\|_{HS} \leq \|A\|\|B\|\|T\|_{HS} \tag{17}$$

vi) L'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ des opérateurs de rang fini de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$. En particulier tout opérateur de classe Hilbert-Schmidt est compact.

Démonstration. i) Soient $T, S \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$. On a

$$\|(T+S)e_j\|^2 \leq 2(\|Te_j\|^2 + \|Se_j\|^2).$$

Il en résulte que $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est un espace vectoriel.
Il est facile de montrer que $(T,S) \mapsto \langle T|S\rangle_{HS}$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ qui devient donc un espace préhilbertien donc normé.
ii) Soient $u, v \in \mathcal{H}$. Décomposons u sur la base $\{e_j\}$. On a $u = \sum_{j\geq 1} u_j e_j$. D'où

$$\langle Tu|v\rangle = \sum_{j\geq 1} u_j \langle Te_j|v\rangle$$

Appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\langle Tu|v\rangle| \leq \|u\| \left(\sum_{j\geq 1} |\langle Te_j|v\rangle|^2\right)^{1/2} \leq \|u\|\|v\|\|T\|_{HS}$$

D'où résulte (16).
iii) Il s'agit de montrer que $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est complet. La procédé est standard. Nous donnons le point de départ, et laissons le lecteur écrire les détails. Soit $\{T_n\}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$. C'est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, d'après (16). Ce dernier espace étant complet (Chapitre 1), la suite $\{T_n\}$ converge vers T dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (c'est à dire en norme d'opérateurs).
Le lecteur montrera en Exercice que $T \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ et que $\{T_n\}$ converge vers T en norme Hilbert-Schmidt.
iv) Il est facile de vérifier que si $(e_j)_{j\geq 1}$ est une base Hilbertienne de $\mathcal{H}$ alors

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 1} \|T(e_j)\|^2 &= \sum_{i,j\geq 1} |\langle T(e_j), e_i\rangle|^2 \\ &= \sum_{i,j\geq 1} |\langle e_j, T^*(e_i)\rangle|^2 \\ &= \sum_{i\geq 1} \|T^*(e_i)\|^2 .\end{aligned}$$

v)Il est facile de vérifier que si $(e_j)_{j\geq 1}$ est une base Hilbertienne de $\mathcal{H}$ alors

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 1}\|(BTA)(e_j)\|^2 &\leq \|B\|^2\sum_{j\geq 1}\|(TA)(e_j)\|^2\\ &\leq \|B\|^2\sum_{i,j\geq 1}|\langle (TA)(e_j),e_i\rangle|^2\\ &\leq \|B\|^2\sum_{i,j\geq 1}|\langle e_j,((A^*)(T^*))e_i\rangle|^2\\ &\leq \|B\|^2\sum_{i\geq 1}\|(A^*)(T^*))(e_i)\|^2\\ &\leq \|B\|^2\,\|A^*\|^2\sum_{i\geq 1}\|(T^*))(e_i)\|^2\\ &\leq \|B\|^2\,\|A\|^2\,\|T\|_{HS}\,.\end{aligned}$$

vi) Il est commode d'introduire la famille suivante d'opérateurs de rang 1. On pose $E_{j,k}u=\langle u|e_j\rangle e_k$ pour $j,k\geq 1$. On vérifie facilement que $\{E_{j,k}\}_{j,k\geq 1}$ est un système orthonormal de $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$. Montrons qu'il est total (on aura ainsi une base orthonormée). Or on a

$$\langle T|E_{j,k}\rangle_{HS}=\langle Te_j|e_k\rangle.$$

Si $\langle T|E_{j,k}\rangle_{HS}=0$ pour tout $j,k\geq 1$ alors $\langle Te_j|e_k\rangle=0$ pour tout $j,k\geq 1$ et donc $T=0$. □

Exemple fondamental

Proposition 5.16. *Soit $\mathcal{H}=L^2(\Omega)$, l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$*
Alors $T\in\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ si et seulement si il existe $K\in L^2(\Omega\times\Omega)$ tel que $T=T_K$. On a alors

$$\|T\|_{HS}=\left(\int_{\Omega^2}|K(x,y)|^2dxdy\right)^{1/2} \tag{18}$$

Démonstration. $L^2(\Omega)$ est séparable et admet une base orthonormée $\{\varphi_j\}_{j\geq 1}$. Considèrons $K\in L^2(\Omega\times\Omega)$ et démontrons que T_K est de classe Hilbert-Schmidt

On montre facilement que la famille $\varphi_{j,k}(x,y)=\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}\varphi_k(x)$ est une base orthonormée de $L^2(\Omega\times\Omega)$. Or on a, en appliquant le théorème de Fubini,

$$\langle T_K\varphi_j|\varphi_k\rangle=\iint_{\Omega^2}K(x,y)\varphi_j(y)\overline{\varphi_k(x)}d\mu(x)d\mu(y)=\langle K|\varphi_{j,k}\rangle.$$

Il résulte de (15) que l'on a

$$\sum_{j\geq 1}\|T\varphi_j\|^2=\sum_{j,k\geq 1}|\langle K|\varphi_{j,k}\rangle|^2$$

T est donc de classe Hilbert-Schmidt et l'égalité de Parseval nous donne l'égalité (18).
Inversement si T est de classe Hilbert-Schmidt, les calculs précédents montrent que l'on peut définir une fonction $K\in L^2(\Omega\times\Omega)$ en posant

$$K(x,y)=\sum_{j,k\geq 1}\langle T\varphi_j|\varphi_k\rangle\varphi_{j,k}(x,y).$$

On vérifiera en Exercice que K vérifie bien (18). On dit alors que K est *le noyau intégral* de T.
Les noyaux intégraux de carré intégrables donnent donc des exemples non triviaux d'opérateurs de classe Hilbert-Schmidt donc compacts. □

5.4. **Quelques exemples d'applications.**

5.4.1. *Retour sur les opérateurs de Sturm-Liouville.* On considère comme dans la seconde leçon, une fonction continue sur $[0,1]$: $q\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et on note φ_λ la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases}-y''+qy-\lambda y=0\\ y(0)=0,\ y'(0)=1.\end{cases}$$

Et on note χ_λ la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases}-y''+qy-\lambda y=0\\ y(1)=0,\ y'(1)=1.\end{cases}$$

Le Wronskien de ces deux solutions de l'équation différentielle homogène :

$$-y''+qy-\lambda y=0$$

est

$$w(\lambda)=\varphi_\lambda(x)\chi'_\lambda(x)-\varphi'_\lambda(x)\chi_\lambda(x)=\varphi_\lambda(1)=-\chi_\lambda(0).$$

On a vu qu'il était nul si et seulement si λ était une valeur propre de l'opérateur de Sturm-Liouville pour les conditions de Dirichlet. On avait noté $\operatorname{Sp} L_D$ l'ensemble de ces valeurs propres, de plus $\operatorname{Sp} L_D$ peut être enuméré en une suite strictement croissante de nombres réels

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

et on sait de plus que

$$\lambda_j \sim \pi^2 j^2.$$

Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} L_D$, φ_λ et χ_λ forment une base de l'espace des solutions de l'équation différentielle homogène

$$-y'' + qy - \lambda y = 0$$

Et pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ on peut exprimer la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} -y'' + qy - \lambda y = f \\ y(1) = 0,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

à l'aide de la méthode de la variations des constantes :

$$y(x) = -\frac{\varphi_\lambda(x)}{w(\lambda)} \int_x^1 f(t)\chi_\lambda(t)dt - \frac{\chi_\lambda(x)}{w(\lambda)} \int_0^x f(t)\varphi_\lambda(t)dt.$$

Lorsque $w(\lambda) \neq 0$, on peut introduire l'opérateur $T_\lambda : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ défini par

$$T_\lambda(f)(x) = -\frac{\varphi_\lambda(x)}{w(\lambda)} \int_x^1 f(t)\chi_\lambda(t)dt - \frac{\chi_\lambda(x)}{w(\lambda)} \int_0^x f(t)\varphi_\lambda(t)dt.$$

C'est l'opérateur dont le noyau est donnée par le noyau de Green de l'opérateur $L_D - \lambda$:

$$\begin{aligned} G_\lambda(x,t) &= -\frac{1}{w(\lambda)} \varphi\big(\min\{x,t\}\big)\chi_\lambda\big(\max\{x,t\}\big) \\ &= -\frac{1}{w(\lambda)} \begin{cases} \varphi_\lambda(x)\chi_\lambda(t) & \text{si } x \leq t \\ \varphi_\lambda(t)\chi_\lambda(x) & \text{si } x \geq t \end{cases}. \end{aligned}$$

L'opérateur T_λ est donc compact. On sait que

$$\overline{G_\lambda(x,t)} = G_{\overline{\lambda}}(x,t)$$

en conséquence lorsque λ est un nombre réel, T_λ est un opérateur compact autoadjoint.

Posons

$$\mu_0 = -\inf_{x\in[0,1]} q(x) + 1.$$

Puisque on sait que

$$\lambda_0 \geq \min_{x\in[0,1]} q(x),$$

on en déduit que l'opérateur $T_{-\mu_0}$ est bien définie est compact autoadjoint. On va déterminer le spectre de cet opérateur.

De plus notre analyse, nous a permis de trouver (ξ_k) une base Hilbertienne de $L^2([0,1])$ où

$$\xi_k(x) = \frac{\varphi_{\lambda_k}(x)}{\sqrt{\int_0^1 (\varphi_{\lambda_k}(t))^2 dt}}$$

et on a montré que

$$T_\lambda(\xi_k) = \frac{1}{\lambda_k - \lambda}\xi_k$$

On a donc démontré que le spectre de l'opérateur $T_{-\mu_0}$ est [13]

$$\operatorname{Sp} T_{\mu_0} = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\lambda_k + \mu_0}, k \geq 0 \right\}.$$

On pourrait retrouver ce résultat sans utiliser d'outils issus de la théorie des fonctions holomorphes et cela à l'aide du théorème spectral (5.11). En effet, si

13. Le résultat sous jacent est le suivant : si (e_k) est une base Hilbertienne d'un espace de Hilbert H et $T : H \to H$ est un opérateur borné tel que pour une suite (κ_j), on ait pour tout entier j

$$T(e_j) = \kappa_j e_j$$

alors le spectre de T est l'adhérence de l'ensemble

$$\{\kappa_j, j \in \mathbb{N}\}.$$

En effet grâce à l'isométrie $U : \ell^2(\mathbb{N}) \to H$ défini par

$$U\big((a_k)\big) = \sum_k a_k e_k$$

et avec l'opérateur Λ défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par

$$\Lambda\big((a_k)\big) = \big((\kappa_k a_k)\big)$$

alors on sait que

$$U^{-1}TU = \Lambda$$

ainsi T et Λ ont même spectre et grâce à (11) on a

$$\operatorname{Sp}\Lambda = \overline{\{\kappa_j, j \in \mathbb{N}\}}.$$

$f \in L^2([0,1])$, posons $y = T_{-\mu_0}(f)$; la définition de l'espace $H_0^1(]0,1[)$ montre que $y \in H_0^1(]0,1[)$, y est donc une fonction continue, nulle en 0 et en 1. De plus

$$y'(x) = -\frac{\varphi_\lambda'(x)}{w(\lambda)} \int_x^1 f(t)\chi_\lambda(t)dt - \frac{\chi_\lambda'(x)}{w(\lambda)} \int_0^x f(t)\varphi_\lambda(t)dt.$$

Donc $y' \in H^1([0,1])$ et sa dérivée faible est donnée par

$$\begin{aligned}(y')'(x) = &-\frac{\varphi_\lambda''(x)}{w(\lambda)} \int_x^1 f(t)\chi_\lambda(t)dt - \frac{\chi_\lambda''(x)}{w(\lambda)} \int_0^x f(t)\varphi_\lambda(t)dt \\ &+ \frac{\varphi_\lambda'(x)\chi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(x)\chi_\lambda'(x)}{w(\lambda)} f(x)\end{aligned}$$

Soit

$$y''(x) = -f(x) - q(x)y(x) - \lambda y(x)$$

Ceci démontre que T_λ est toujours injectif.
De plus si ν est une valeur propre de $T_{-\mu_0}$ et si $f \in L^2([0,1])$ est une fonction propre associée à ν :

$$\nu f = T_{-\mu_0} f.$$

L'analyse précédente montre que $y = \frac{f}{\nu}$ est $\mathcal{C}^2$ et elle vérifie $y(0) = y(1) = 0$ et

$$-y''(x) + q(x)y(x) + \mu_0 y(x) = \frac{1}{\nu} y(x).$$

Donc que $\frac{1}{\nu} - \mu_0 \in \operatorname{Sp} L_D$.
La réciproque est facile : il suffit de voir que si $\kappa \in \operatorname{Sp} L_D$ alors $(\kappa + \mu_0)^{-1}$ est dans le spectre de $T_{-\mu_0}$. Si $y \in \mathcal{C}_D^2([0,1]), \mathbb{C})$ est une fonction propre non nulle de l'opérateur de Sturm-Liouville pour les conditions de Dirichlet :

$$\begin{cases} -y'' + qy - \kappa y = 0 \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Ainsi y vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{cases} -y'' + qy + \mu_0 y = (\mu_0 + \kappa)y \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

et donc par construction :

$$y = (\kappa + \mu_0) T_{-\mu_0}(y)$$

C'est Ĺ dire que

$$y \in \ker\left(T_{-\mu_0} - (\kappa + \mu_0)^{-1} \operatorname{Id}_{L^2([0,1])}\right).$$

On peut donner une autre construction de l'opérateur $T_{-\mu_0}$ qui n'utilise pas la théorie des équations différentielles et qui permet d'étudier le cas où la fonction q n'est plus continue :
Puisque $\forall x \in [0,1],\ q(x) - \mu_0 \geq 1$, on sait que la forme hermitienne

$$Q(y) = \int_0^1 \left[|y'(t)|^2 + q(t)|y(t)|^2 - \mu_0|y(t)|^2\right]\, dt$$

est continue sur $H_0^1(]0,1[)$ mieux pour tout $y \in H_0^1(]0,1[)$, on a

$$\int_0^1 \left[|y'(t)|^2 + |y(t)|^2\right]\, dt \leq Q(y) \leq \int_0^1 \left[|y'(t)|^2 + M|y(t)|^2\right]\, dt$$

oİ $M = \|q\|_{L^\infty} + |\mu_0|$. On rappelle que la norme de $H_0^1(]0,1[)$ est donnée par

$$\|y\|^2_{H_0^1(]0,1[)} = \int_0^1 \left[|y'(t)|^2 + |y(t)|^2\right]\, dt$$

ainsi on a

$$\forall y \in H_0^1(]0,1[),\ \ \|y\|^2_{H_0^1(]0,1[)} \leq Q(y) \leq (M+1)\|y\|^2_{H_0^1(]0,1[)}.$$

Donc $\sqrt{Q}$ est une norme équivalente Ĺ $\| \bullet \|_{H_0^1(]0,1[)}$ sur $H_0^1(]0,1[)$. De plus $(H_0^1(]0,1[), \sqrt{Q})$ est l'espace de Hilbert associé au produit scalaire hermitien :

$$(y,z) \mapsto \int_0^1 \left[y'(t)\,\overline{z'(t)} + (q(t) - \mu_0)y(t)\,\overline{z(t)}\right]\, dt.$$

On peut maintenant donner une autre construction de l'opérateur $T_{-\mu_0}$: Si $f \in L^2([0,1])$ alors la forme linéaire

$$y \mapsto \int_0^1 y(t)\overline{f(t)}\, dt$$

est continue sur $H_0^1(]0,1[)$, on a mŘme :

$$\begin{aligned}\forall y \in H_0^1(]0,1[),\ \left|\int_0^1 y(t)\overline{f(t)}\, dt\right| &\leq \|f\|_{L^2}\, \|y\|_{L^2} \\ &\leq \|f\|_{L^2}\, \|y\|_{H_0^1(]0,1[)} \\ &\leq \|f\|_{L^2}\, \sqrt{Q(y)}\end{aligned} \tag{19}$$

Le théorème de représentation de M. Riesz montre qu'il existe un unique $z \in H_0^1(]0,1[)$ tel que

$$\forall y \in H_0^1(]0,1[),\ \int_0^1 y(t)\overline{f(t)}\, dt = \int_0^1 \left[y'(t)\,\overline{z'(t)} + (q(t) - \mu_0)y(t)\,\overline{z(t)}\right]\, dt. \tag{20}$$

On définit un opérateur linéaire continue : $T : L^2([0,1]) \to H_0^1(]0,1[)$ où si $f \in L^2([0,1])$ alors $T(f) = z$ est caractérisé par (20).
L'identité (20) montre que $T(f) \in H^1([0,1])$ est que

$$-T(f)'' + (q - \mu_0)T(f) = f$$

Il est alors facile de voir que $T(f) = T_{-\mu_0}(f)$.
L'avantage de cette construction est qu'elle est valide si $q \in L^\infty$, on peut la raffiner pour considérer des fonctions q mesurable bornée inférieurement.
On pourrait remontrer que cette construction implique que l'opérateur ainsi construit est compact auto-adjoint. Une adaptation facile de ce qui suit permet cette démonstration.

5.4.2. *Les conditions périodiques.* On veut maintenant étudier le problème

$$\begin{cases} -y'' + qy - \lambda y = f \\ y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1) \end{cases}$$

où $q \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est donnée. Lorsque q est périodique de période 1 : $q(0) = q(1)$, le problème homogène

$$\begin{cases} -y'' + qy - \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1) \end{cases}$$

a une solution non nulle si et seulement si il existe une solution périodique non triviale de l'équation différentielle :

$$-y'' + qy - \lambda y = 0.$$

On peut introduire les définitions suivantes :

Définition 5.17. *$\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de l'opérateur de Sturm-Liouville pour les conditions périodiques s'il y a une solution non nulle aux équations :*

$$\begin{cases} -y'' + qy - \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1) \end{cases}$$

On notera $\mathrm{Sp}\, L_P$ l'ensemble de ces valeurs propres. Les fonctions vérifiant

$$\begin{cases} -y'' + qy - \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1) \end{cases}$$

seront appelées *fonctions propres* de l'opérateur de Sturm-Liouville pour les conditions périodiques.

On peut étudier ce problème de deux fa■ons la première en utilisant la méthode de variations des constantes et la seconde en utilisant les résultats d'analyse fonctionnelle démontrés dans cette le■on.
Avec la méthode de variations des constantes : Lorsque $\lambda \in \mathbb{C}$, on introduit les fonctions : φ_λ qui est la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} -y'' + qy - \lambda y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

et ψ_λ qui est la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} -y'' + qy - \lambda y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

La famille $(\psi_\lambda, \varphi_\lambda)$ est une base de l'espace des solutions de l'équation différentielle homogène :

$$-y'' + qy - \lambda y = 0\,.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$, la méthode de variations des constantes montre que les solutions de l'équation différentielle

$$-y'' + qy - \lambda y = f$$

sont de la forme

$$y(x) = A\psi_\lambda(x) + B\varphi_\lambda(x) - \psi_\lambda(x)\int_0^x \varphi_\lambda(t)f(t)dt + \varphi_\lambda(x)\int_0^x \psi_\lambda(t)f(t)dt$$

où A et B sont des constantes réelles.
On a

$$y(0) = A, y'(0) = B$$

et

$$y(1) = A\psi_\lambda(1) + B\varphi_\lambda(1) - \psi_\lambda(1)\int_0^1 \varphi_\lambda(t)f(t)dt + \varphi_\lambda(1)\int_0^1 \psi_\lambda(t)f(t)dt$$

$$y(1) = A\psi'_\lambda(1) + B\varphi'_\lambda(1) - \psi'_\lambda(1)\int_0^1 \varphi_\lambda(t)f(t)dt + \varphi'_\lambda(1)\int_0^1 \psi_\lambda(t)f(t)dt$$

Le problème

$$\begin{cases} -y'' + qy - \lambda y = f \\ y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1) \end{cases}$$

a donc une et une seule solution si et seulement si $\lambda \notin \operatorname{Sp} L_P$. De plus on a λ est une valeur propre de l'opérateur de Sturm-Liouville pour les conditions périodiques si et seulement si il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tel que

$$\begin{cases} A = A\psi_\lambda(1) + B\varphi_\lambda(1) \\ B = A\psi'_\lambda(1) + B\varphi'_\lambda(1) \end{cases}$$

C'est Ĺ dire si et seulement si 1 est valeur propre de la matrice :

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} \psi_\lambda(1) & \varphi_\lambda(1) \\ \psi'_\lambda(1) & \varphi'_\lambda(1) \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que

$$\det M(\lambda) = \psi_\lambda(1)\varphi'_\lambda(1) - \psi'_\lambda(1)\varphi_\lambda(1)$$

est la valeur en $x = 1$ du wronskien de $(\psi_\lambda, \varphi_\lambda)$, il est donc égale Ĺ 1. Le polynŹme caractérique de $M(\lambda)$ est

$$X^2 - (\psi_\lambda(1) + \varphi'_\lambda(1))X + 1$$

On a donc

$$\operatorname{Sp} L_P = \left\{\lambda \in \mathbb{C},\ \psi_\lambda(1) + \varphi'_\lambda(1) = 1\right\}$$

On peut alors poursuivre une argumentation similaire, mais plus pénible, Ĺ celle faite dans la deuxième leçon pour démontrer que $\operatorname{Sp} L_P$ peut être énumerer en une suite croissante non borné de nombres réels et qu'il existe une base Hilbertienne de $L^2([0,1])$ constitué de fonctions propres de l'opérateur de Sturm-Liouville pour les conditions périodiques.

Avec de l'analyse fonctionnelle : On introduit l'espace

$$H^1_P([0,1]) = \{u \in H^1_P([0,1]), u(0) = u(1)\}. \tag{21}$$

On pose comme précédement :

$$\mu_0 = -\inf_{x\in[0,1]} q(x) + 1.$$

C'est un sous espace vectoriel fermé de $H^1[0,1])$, c'est donc un espace de Hilbert pour la norme induite :

$$y \mapsto \|y\|_{H^1([0,1])} = \sqrt{\int_0^1 \left[|y'(t)|^2 + |y(t)|^2\right]\, dt}.$$

Comme précécedement, la forme hermitienne :

$$Q(y) = \int_0^1 \left[|y'(t)|^2 + q(t)|y(t)|^2 - \mu_0|y(t)|^2\right]\, dt$$

fournit une norme équivalente Ĺ la norme de $H^1_P([0,1])$.
Si $f \in L^2([0,1])$ alors la forme linéaire

$$y \mapsto \int_0^1 y(t)\overline{f(t)}\, dt$$

est continue sur $H^1_P([0,1])$, on a de mŘme

(22)

$$\forall y \in H^1_P([0,1]),\quad \left|\int_0^1 y(t)\overline{f(t)}\, dt\right| \le \|f\|_{L^2}\, \|y\|_{H^1_P([0,1])} \le \|f\|_{L^2}\sqrt{Q(y)}$$

Le théorème de représentation de M. Riesz montre qu'il existe un unique $z \in H^1_P([0,1])$ tel que

(23)

$$\forall y \in H^1_P([0,1]),\quad \int_0^1 y(t)\overline{f(t)}\, dt = \int_0^1 \left[y'(t)\,\overline{z'(t)} + (q(t) - \mu_0)y(t)\,\overline{z(t)}\right]\, dt.$$

On définit un opérateur linéaire : $T : L^2([0,1]) \to H^1_P([0,1])$ oİ si $f \in L^2([0,1])$ alors $T(f) = z$ est caractérisé par (23).

Proposition 5.18. *L'opérateur $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ est compact auto-adjoint.*

Démonstration. On remarque d'abord que l'opérateur $T : L^2([0,1]) \to H^1_P([0,1])$ est continu car l'estimée (22) et la définition (23) impliquent que si $f \in L^2([0,1])$ alors $z = T(f)$ vérifie

$$\forall y \in H^1_P([0,1]),\quad \int_0^1 \left[y'(t)\,\overline{z'(t)} + (q(t) - \mu_0)y(t)\,\overline{z(t)}\right]\, dt = \int_0^1 y(t)\overline{f(t)}\, dt \le \|f\|_{L^2}\sqrt{Q(y)}\,.$$

En appliquant ceci Ĺ $y = z$, on en déduit que

$$Q(z) \le \|f\|_{L^2}\sqrt{Q(z)}$$

et donc on obtient :

$$\sqrt{Q(z)} \le \|f\|_{L^2}.$$

Puisque on a

$$\|z\|_{L^2} \le \|z\|_{H^1([0,1])} \le \sqrt{Q(z)}$$

On en déduit la continuité de

$$T\,:\,L^2([0,1])\to L^2([0,1]) \text{ et de } T\,:\,L^2([0,1])\to H^1_P([0,1]).$$

On peut ensuite démontrer que $T\,:\,L^2([0,1])\to L^2([0,1])$ est autoadjoint : soient $f,g\in L^2([0,1])$, si on pose $z=T(f)$ et $y=T(g)$ alors on a par construction :

$$\int_0^1\left[y'(t)\,\overline{z'(t)}+(q(t)-\mu_0)y(t)\,\overline{z(t)}\right]\,dt=\int_0^1 y(t)\overline{f(t)}\,dt$$

et

$$\int_0^1\left[|z'(t)\,\overline{y'(t)}+(q(t)-\mu_0)z(t)\,\overline{y(t)}\right]\,dt=\int_0^1 z(t)\overline{g(t)}\,dt$$

Ce qui implique que

$$\langle T(g),f\rangle_{L^2}=\int_0^1 y(t)\overline{f(t)}\,dt=\overline{\int_0^1 z(t)\overline{g(t)}\,dt}=\langle g,T(f)\rangle_{L^2}$$

Il reste Ĺ démontrer que $T,:\,L^2([0,1])\to L^2([0,1])$ est un opérateur compact. Ceci résulte du lemme suivant :

Lemme 5.19. *L'inclusion $H^1_P([0,1])\to L^2([0,1])$ est compacte.*

Car alors $T,:\,L^2([0,1])\to L^2([0,1])$ est la composée de l'opérateur linéaire continu $T\,:\,L^2([0,1])\to H^1_P([0,1])$ est continu et de l'application linéaire compacte $H^1_P([0,1])\to L^2([0,1])$.
Il reste donc Ĺ démontrer le lemme (5.19). On peut donner deux preuves : la preuve utilise le théorème d'Ascoli : on montre qu'en fait l'inclusion $H^1_P([0,1])\to\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ est compacte. i.e on montre que

$$E=\{y\in H^1_P([0,1]),\|y\|_{H^1([0,1]}\le 1\}$$

est un ensemble compact de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$. Avec le théorème d'Ascoli, il suffit de vérifier que E est uniformément équicontinue et bornée.
Si $y\in H^1([0,1])$ on sait que $y(t)-y(s)=\int_s^t y'(\tau)d\tau$, avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz on en déduit que

$$|y(t)-y(s)|=\le\sqrt{|x-y|}\sqrt{\int_s^t|y'(\tau)|^2d\tau}\le\sqrt{|x-y|}\|y\|_{H^1([0,1]}$$

Ceci montre que E est uniformément équicontinue. Ensuite cette dernière inégalité montre que pour $y\in E$ et $s,t\in[0,1]$ alors

$$|y(t)|\le|y(s)|+\sqrt{\int_0^1|y'(\tau)|^2d\tau}$$

en intégrant par rapport $s\in[0,1]$ on obtient

$$\begin{aligned}|y(t)|&\le\int_0^1|y(s)|ds+\sqrt{\int_0^1|y'(\tau)|^2d\tau}\\&\le\sqrt{\int_0^1|y(s)|^2ds}+\sqrt{\int_0^1|y'(\tau)|^2d\tau}\\&\le\|y\|_{H^1([0,1]}\le 1.\end{aligned}$$

Ainsi E est borné dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$. On a démontré que E est borné et uniformément équicontinue donc E est relativement compact.
La seconde preuve utilise les séries de Fourier : Pour $k\in\mathbb{Z}$, on pose $\xi_k(x)=e^{2i\pi kx}$. On sait que la famille (ξ_k) est une base hilbertienne de $L^2([0,1])$. En conséquence, on sait que si $f\in L^2([0,1])$ alors

$$f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(f)\,\xi_k$$

avec $c_k(f)=\int_0^1 f(t)\overline{\xi_k(t)}dt$. Supposons de plus que $f\in H^1_P([0,1])$, alors on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}(2ik\pi)c_k(f)&=-\int_0^1 f(t)\overline{\xi_k'(t)}dt\\&=-\left[f\overline{\xi_k'}\right]_0^1+\int_0^1 f'(t)\overline{\xi_k(t)}dt\\&=f(0)-f(1)+c_k(f')\\&=c_k(f'),\end{aligned}\tag{24}$$

car $f(0)=f(1)$ puisque $f\in H^1_P([0,1])$ (cf. 21). On en déduit que si $f\in H^1_P([0,1])$ alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)|c_k(f)|^2<\infty.\tag{25}$$

Vice versa si $f \in L^2([0,1])$ vérifie (25), alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)| < \infty$$

et donc la série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\,\xi_k$$

converge normalement dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$. En particulier :

$$f(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\,\xi_k(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\,\xi_k(1) = f(1)$$

Maintenant si on pose

$$g = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} (2i\pi k)c_k(f)\xi_k$$

L'hypothèse (25) implique que cette série converge [14] dans $L^2([0,1])$ donc $g \in L^2([0,1])$, si on pose maintenant $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, on a donc

$$G(1) - G(0) = \int_0^1 g(t)dt = c_0(g) = 0$$

Ainsi $G \in H^1_P([0,1])$ et $G' = g$. De plus le calcul (24) montre que pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$ alors

$$(2ik\pi)c_k(G) = c_k(g) = (2i\pi k)c_k(f)$$

Ainsi $f = G + c_0(f)$ donc on a bien $f \in H^1_P([0,1])$.
Ainsi la boule unité de $H^1_P([0,1])$ est

$$\Big\{f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\,\xi_k, \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+4\pi^2k^2)|c_k(f)|^2 \le 1\Big\}$$

La compacité de l'inclusion $H^1_P([0,1]) \to L^2([0,1])$ revient donc Ĺ démontrer que

$$\{(c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}), \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+4\pi^2k^2)|c_k|^2 \le 1\}$$

est relativement compact dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. Ce qui est un exercice classique de compacité (cube de Hilbert). □

14. C'est à dire que si on pose

$$g_N = \sum_{0<|k|\le N} (2i\pi k)c_k(f)\xi_k$$

alors $\lim_{N\to+\infty} \|g - g_N\|_{L^2} = 0$, en effet $\|g - g_N\|^2_{L^2} = \sum_{|k|>N} 4\pi^2k^2\,|c_k(f)|^2$.

Remarque 5.20. *On aurait pu aussi donner le noyau intégral de l'opérateur T Ĺ l'aide de la méthode de variations des constantes* [15] *comme on l'a fait pour les conditions de Dirichlet*

On remarque d'abord que l'opérateur T est injectif en effet si $T(f) = 0$ alors la définition (23) montre que

$$\forall y \in H^1_P([0,1]), \int_0^1 y(t)\overline{f(t)}\,dt = 0$$

ce qui implique que $f = 0$.
De plus on a aussi pour $f \in L^2([0,1])$ et $y = T(f)$:

$$\langle T(f), f\rangle = \int_0^1 y(t)\overline{f(t)}\,dt = \int_0^1 \Big[y'(t)\,\overline{y'(t)} + (q(t)-\mu_0)y(t)\,\overline{y(t)}\Big]\,dt \ge 0.$$

Et on a vu que $\|T\|_{L^2\to L^2} \le 1$. D'après (4.20) le spectre de T est inclus dans l'intervalle $[0,1]$.
Ainsi le théorème spectral (5.11) implique qu'il existe une suite décroissante de réels $(\nu_j)_j$ une base hilbertienne (θ_j)de $L^2([0,1])$ consistuée de fonctions propres de T :

$$T(\theta_j) = \nu_j\theta_j.$$

On va maintenant faire le lien entre le spectre de l'opérateur T et le spectre de l'opérateur de Sturm-Liouville pour les conditions périodiques. Soit $f \in L^2([0,1])$ alors on sait que [16] $T(f) \in H^1_P([0,1])$. De plus d'après la caractérisation de $T(f)$ (23), on a :

(26)
$$\forall y \in H^1_P([0,1]),\ \int_0^1 y(t)\overline{f(t)}\,dt = \int_0^1 \Big[y'(t)\,\overline{T(f)'(t)} + (q(t)-\mu_0)y(t)\,\overline{T(f)(t)}\Big]\,dt.$$

Ceci implique en particulier que si $\varphi \in \mathcal{C}^1_0(]0,1[,\mathbb{C})$ alors

$$\Big|\int_0^1 \varphi'(t)\,\overline{T(f)'(t)}dt\Big| = \Big|\int_0^1 y(t)\overline{f(t)}\,dt - \int_0^1 (q(t)-\mu_0)\varphi(t)\,\overline{T(f)(t)}dt.\Big| \le C\|\varphi\|_{L^2}$$

avec $C = \|f\|_{L^2} + (\|q\|_{L^\infty} + |\mu_0|)\|T(f)\|_{L^2}$. Ceci démontre que $T(f)' \in H^1([0,1])$ et que

(27)
$$-T(f)'' = f - (q-\mu_0)T(f).$$

15. Néanmoins, cette expression est plus compliquée Ĺ écrire.
16. Car on rappelle $T : L^2([0,1]) \to H^1_P([0,1])$.

De plus la formule d'intégration par parties montre que si $y \in H^1_P([0,1])$ alors

$$\int_0^1 y'(t)\,\overline{T(f)'(t)}dt = \left[y\,\overline{T(f)'}\right]_0^1 - \int_0^1 y(t)\,\overline{T(f)''(t)}dt$$

En comparant cette formule avec les identités (26 et 26) on obtient que

$$0 = \left[y\,\overline{T(f)'}\right]_0^1 = y(1),\overline{T(f)'}(1) - y(0)\,\overline{T(f)'}(0) = y(0)\,\left(\overline{T(f)'}(1) - \overline{T(f)'}(0)\right).$$

Ce qui implique que $T(f)'(1) = T(f)'(0)$ et donc $T(f) \in H^1_P([0,1])$.
Réciproquement, il est facile de démontrer que si $y \in H^1_P([0,1])$ vérifie $y' \in H^1_P([0,1])$ et

$$-y'' + (q - \mu_0)y = f$$

alors $y = T(f)$.
Alors si $f \in L^2([0,1]) \setminus \{0\}$ vérifie

$$T(f) = \nu f\ ,$$

alors on sait que $\nu \neq 0$. Et donc $f = T(f)/\nu$ vérifie $f \in H^1_P([0,1])$ et $f' \in H^1_P([0,1])$ et

$$-f'' + (q - \mu_0)f = \frac{1}{\nu}f$$

Donc $\frac{1}{\nu} + \mu_0$ est dans le spectre de l'opérateur de Sturm-Liouville pour les conditions périodiques. La réciproque (c'est Ĺ dire que si κ est dans le spectre de de l'opérateur de Sturm-Liouville pour les conditions périodiques alors $(\kappa - \mu_0)^{-1}$ est dans le spectre de l'opérateur T) est aisé.

C5

CONVEXITÉ ET DUALITÉ

6.1. **Rappel et définition.** Soit $\mathbf{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (il serait plus idoine de travailler dans un espace affine).

6.1.1. *Définitions.* On dira qu'une partie Ω de $\mathbf{E}$ est convexe si

$$\forall x, y \in \Omega,\ \forall t \in [0,1]\ :\ tx + (1-t)y \in \Omega$$

Autrement dit une partie Ω de $\mathbf{E}$ est convexe si et seulement si : tout segment dont les extremités sont dans Ω est inclus dans Ω :

$$\forall x, y \in \Omega\ \ [x, y] \subset \Omega.$$

Lorsque Ω est une partie convexe de $\mathbf{E}$ on dit qu'une fonction $f\ :\ \Omega \to \mathbb{R}$ est convexe si

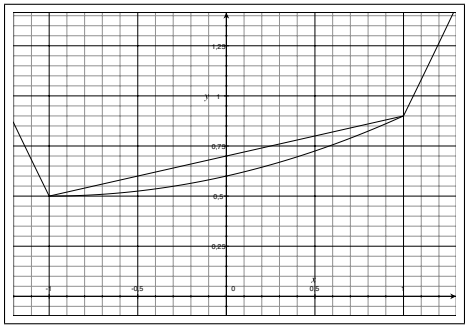
$$\forall x, y \in \Omega,\ \forall t \in [0,1]\ :\ f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

6.1.2. *Remarques.*

i) Une fonction $f\ :\ \Omega \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe défini par

$$\mathcal{E}(f) := \{(x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}, f(x) \leq z\}$$

est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$.



ii) La définition d'une fonction convexe permet l'extension au cas où la fonction est à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; dans ce cas, l'ensemble où la fonction est finie est une partie convexe : si Ω est une partie convexe de $\mathbf{E}$ et si $f\ :\ \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction convexe alors l'ensemble

$$\Omega' = \{x \in \Omega, f(x) < +\infty\}$$

est convexe.

6.1.3. *Exemples.*

i) Une fonction affine est convexe : si $\ell\ :\ E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire et si $b \in \mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto \ell(x) + b$ est une fonction convexe sur E.

ii) Si Ω est une partie convexe de $\mathbf{E}$ et si f est une fonction convexe sur Ω alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les ensembles

$$\{x \in \Omega, f(x) \leq \lambda\} \ \text{ et } \ \{x \in \Omega, f(x) < \lambda\}$$

sont des parties convexes de $\mathbf{E}$.

iii)

Proposition 6.1. *Une intersection de parties convexes de* $\mathbf{E}$ *est une partie convexe de* $\mathbf{E}$ *: si* $(\Omega_i)_{i \in I}$ *est une famille de partie convexe de* $\mathbf{E}$ *alors*

$$\bigcap_{i \in I} \Omega_i$$

est convexe.

iv)

Proposition 6.2. *Un supremum de fonctions convexes est convexe : Si* Ω *est une partie convexe de* $\mathbf{E}$ *et si* $(f_i)_{i \in I}$ *est une famille de fonctions convexes définies sur* Ω *alors la fonction*

$$x \mapsto \overline{f}(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$$

est une fonction convexe.

Remarquons que dans ce cas l'épigraphe de f est l'intersection des épigraphes des fonctions f_i :

$$\mathcal{E}(\overline{f}) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}(f_i).$$

v) Exemple : Soit Σ_n l'espace vectoriel réel des matrices symétriques de taille $n \times n$, lorsque A est une matrice symétrique, on sait qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée, notons $\lambda_n(A)$ la plus grande valeur propre de A : la fonction

$$A \in \Sigma_n \mapsto \lambda_n(A)$$

est convexe.

En effet on a

$$\lambda_n(A) = \sup_{v\in\mathbb{R}^n, \|v\|=1} \langle Av, v\rangle$$

(où ici la norme $\|\,.\,\|$ est la norme associé au produit scalaire $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ usuel sur $\mathbb{R}^n$). Soit $v \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 alors la fonction $A \mapsto \varphi_v(A) = \langle Av, v\rangle$ est une fonction affine sur Σ_n. Donc la fonction

$$\lambda_n(A) = \sup_{v\in\mathbb{R}^n, \|v\|=1} \varphi_v(A)$$

est bien convexe.

vi) Soient C_1 et C_2 deux parties convexes de $\mathbf{E}$ alors la partie $C_1 + C_2 = \{x + y, x \in C_1, y \in C_2\}$ est une partie convexe de $\mathbf{E}$.

6.2. **Hyperplans dans les espaces vectoriels normés.** Lorsque $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ est un espace vectoriel normé, on notera $\mathbf{E}' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $\mathbf{E}$. On rappelle qu'une forme linéaire $\ell : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si il existe une constante C telle que

$$\forall x \in \mathbf{E},\ |\ell(x)| \leq C\|x\|.$$

Alors $\mathbf{E}'$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|\ell\| = \sup_{x\in\mathbf{E}, \|x\|\leq 1} |\ell(x)|.$$

On commence par une proposition qui nous sera utile :

Proposition 6.3. *Soit $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, une forme linéaire $\lambda : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si son noyau est un sous espace vectoriel fermé de $\mathbf{E}$*

Démonstration. L'implication directe de cette proposition est évidente car si $\lambda : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue son noyau $\ker\lambda = \lambda^{-1}\{0\}$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, il est donc fermé.
Prouvons maintenant le sens réciproque : supposons donc que $\lambda : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire non continue, λ n'est donc pas nul, il y a donc $x \in \mathbf{E}$ tel que $\lambda(x) = 1$. On peut donc décomposer l'espace $\mathbf{E}$ en somme directe :

$$\mathbf{E} = \mathbb{R}x \oplus \ker\lambda$$

de plus le projecteur sur le noyau de λ parallèlement à la droite $\mathbb{R}x$ est donné par $\pi(y) = y - \lambda(y)x$ Pour tout $y \in \mathbf{E}$, on a

$$y = \lambda(y)x + \pi(y)$$

Puisque λ n'est pas continue, on trouve (y_n) une suite de $\mathbf{E}$ telle que [17]

$$\|y_n\| \leq \frac{1}{n} \text{ et } \lambda(y_n) = 1\ .$$

Lorsque l'on pose $z_n = \pi(y_n)$ on a $z_n \in \ker\lambda$ et $z_n + x = y_n$ donc

$$\lim_{n\to\infty} z_n = -x$$

Donc $-x$ est dans l'adhérence du noyau de λ mais il n'est pas dans le noyau de λ (car $\lambda(-x) = -1$). On a donc démontré que le noyau de λ n'est pas fermé. □

Remarquons que l'on a démontré en fait que le noyau d'une forme linéaire sur un espace vectoriel vectoriel normé est soit fermé soit dense.
On appelle demi-espace fermé (resp. ouvert) de $\mathbf{E}$ une partie de la forme

$$\{x \in \mathbf{E}, \lambda(x) \leq \alpha\}(\text{resp. } \{x \in \mathbf{E}, \lambda(x) < \alpha\}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et λ est une forme linéaire continue non nulle sur $\mathbf{E}$.

6.3. **La forme géométrique du théorème de Hahn-Banach.**

6.3.1. *le théorème.* Nous allons démontré le théorème suivant :

Théorème 6.4. *Soit $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé et $C \subset \mathbf{E}$ une partie convexe fermé de $\mathbf{E}$ alors C est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent : Introduisons $\mathcal{H}$ l'ensemble des demi-espaces fermés H_+ telle que $C \subset H_+$ alors*

$$C = \cap_{H_+\in\mathcal{H}} H_+.$$

17. On sait en effet que λ n'est pas continue si et seulement si λ n'est pas borné sur la sphère unité $\{x \in \mathbf{E}\,,\ \|x\| = 1\}$. Ainsi si λ n'est pas continue on trouve, pour chaque entier n, un vecteur unitaire x_n tel que $|\lambda(x_n)| \geq n$, on pose alors $y_n = x_n/\lambda(x_n)$ et la suite (y_n) convient.

6.3.2. *Dans les espaces de Hilbert.* Essayons de démontrer ce résultat, dans les notations du théorème, on pose $\widehat{C} = \cap_{H_+ \in \mathcal{H}} H_+$. Il est clair que $\widehat{C}$ est un convexe fermé contenant C. Pour démontrer le théorème il suffit de démontrer que si $x \notin C$ alors $x \notin \widehat{C}$. C'est à dire, on veut démontrer que si $x \notin C$ alors on peut trouver une forme linéaire continue sur $\mathbf{E}$ telle que

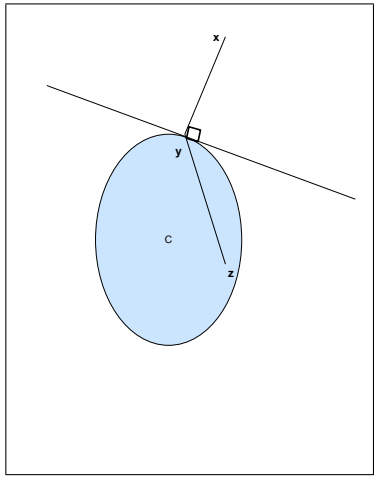
$$\forall y \in C,\ \lambda(y) \geq 1 \ \text{ et } \ \lambda(x) > 1.$$

Ceci nous assure que le demi espace fermé $\lambda^{-1}\{]-\infty, 1]\}$ contient C mais ne contient pas x.
Lorsque $\mathbf{E}$ est un espace de Hilbert, on dispose du théorème de projection sur un convexe fermé : ceci permet donc de trouver $y \in C$ tel que

$$\|y - x\| = \inf_{z \in C} \|z - x\|.$$

De plus y la projection de x sur C est caractérisée par l'inégalité :

$$\forall z \in C,\ \ \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$$



Le demi espace fermé H_+ définie par $H_+ = \{z \in \mathbf{E}, \langle x - y, z - y \rangle \leq 0\}$ contient donc C et puisque x n'est pas dans C on a

$$\langle x - y, x - y \rangle = \|x - y\|^2 > 0$$

donc x n'est pas dans le demi espace fermé H_+.
Le démonstration dans le cas général est plus longue mais elle permet d'introduire des outils et des résultats remarquables.

6.3.3. *Jauge d'un convexe.* Lorsque $C \subset \mathbf{E}$ est un ensemble convexe ouvert contenant 0, on définit la jauge de C :

$$j_C \ : \ \mathbf{E} \to \mathbb{R}_+$$

par

$$j_C(x) = \inf\{\lambda > 0, x \in \lambda C\}.$$

On a

Proposition 6.5. *i)* $j_C(0) = 0$

ii) Si $\mu \geq 0$ *et* $x \in \mathbf{E}$ *alors* $j_C(\mu x) = \mu j_C(x)$.

iii) Si $x, y \in \mathbf{E}$ *alors* $j_C(x + y) \leq j_C(x) + j_C(y)$.

iv) $C = \{x \in \mathbf{E}, j_C(x) < 1\}$.

Démonstration. En effet, il y a par hypothèse un $\epsilon > 0$ tel que $B(0, \epsilon) \subset C$. Alors pour $\lambda > \|x\|/\epsilon$ on a

$$x \in B(0, \epsilon\lambda) \subset \lambda C$$

donc $j_C(x) \leq \|x\|/\epsilon$, donc $j_C(x)$ est fini. Il est évident que $j_C(0) = 0$.
La propriété ii) est élémentaire à démontrer.
Démontrons maintenant la troisième assertion. On commence par remarquer que si $x \in \mathbf{E}$ alors l'ensemble des λ tel que $x \in \lambda C$ est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}_+$. En effet si $x \in \lambda C$ alors il y a $y \in C$ tel que $x = \lambda y$ et lorsque $\mu > \lambda$ alors les points 0 et y sont dans C et et par convexité de C, le segment joignant 0 et y est inclus dans C. En particulier $\frac{\lambda}{\mu} y = \frac{\lambda}{\mu} y + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) 0 \in C$ donc $x = \mu \frac{\lambda}{\mu} y \in \mu C$.
Ainsi lorsque l'on définit

$$I_x = \{\lambda \geq 0, x \in \lambda C\}$$

on a $I_x = [j_C(x), +\infty[$ ou $I_x =]j_C(x), +\infty[$. Soient maintenant $x, y \in \mathbf{E}$ et $\lambda > j_C(x)$ et $\mu > j_C(y)$ on a alors $\lambda^{-1} x \in C$ et $\mu^{-1} y \in C$, puisque C est convexe on en déduit :

$$\frac{1}{\lambda + \mu}(x + y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \lambda^{-1} x + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \mu^{-1} y \in C$$

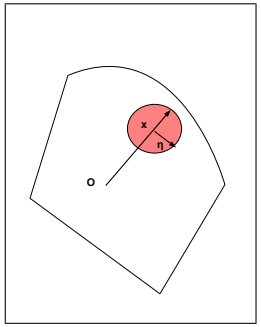
ainsi par définition

$$x + y \in (\lambda + \mu) C$$

et on obtient donc l'inégalité :

$$j_C(x+y) \leq \lambda + \mu \ ,$$

celle ci étant valide dès que $\lambda > j_C(x)$ et $\mu > j_C(y)$, on en déduit que : $j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y)$.
Il reste alors le dernier point à démontrer : il est clair que si $j_C(x) < 1$ alors $1 \in I_x$ et $x \in C = 1.C$. Vice versa supposons que $x \in C$, il y a alors une boule ouverte centrée en x qui se trouve dans C (C est un convexe *ouvert* de $\mathbf{E}$) C'est à dire qu'il y a $\eta > 0$ tel que $B(x,\eta) \subset C$.



Il est alors lair que

$$\frac{2+\|x\|+\eta}{2+\|x\|}x = x + \frac{\eta}{2+\|x\|}x \in B(x,\eta) \subset C$$

Donc $j_C(x) \leq \frac{2+\|x\|}{2+\|x\|+\eta} < 1$. □

6.3.4. *Le théorème de Hahn-Banach.*

Théorème 6.6. *Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel réel et $p : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ une fonctionelle homogène sous additive* [18].
Soit M un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ et $\ell : M \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que

$$\forall x \in M,\ \ell(x) \leq p(x)$$

alors il existe une forme linéaire $\lambda : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ telle que

— $\forall x \in M,\ \lambda(x) = \ell(x)$
— $\forall x \in \mathbf{E},\ \lambda(x) \leq p(x)$.

18. C'est à dire que pour tout $x \in \mathbf{E}$ et $\lambda \geq 0$ on a $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ et que pour tout $x, y \in \mathbf{E}$ on a $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Pour démontrer le Théorème de Hahn-Banach nous allons utiliser le Lemme de Zorn qui est une forme sophistiquée du raisonnement par récurrence (dite transfinie).

Définition 6.7. *Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre notée "$\leq$"* [19]. *On dit que cet ensemble ordonné $(E, \leq)$ est inductif si toute partie totalement ordonnée* [20] *de E admet un majorant* [21] .

Le réultat suivant est équivalent Ĺ l'axiome du choix (On pourra par exemple consulter l'appendice du livre de Rudin).

Lemme 6.8. *Lemme de Zorn :Tout ensemble ordonné $(\mathcal{E}, \leq)$, inductif, possède un élément maximal* [22].

On peut maintenant démontrer le théorème de Hahn-Banach : dans un premier temps on va établir la propriété lorsque M est de codimension 1. Soit $v \in \mathbf{E}$ tel que $v \notin M$. Posons $M_1 = M \oplus \mathbb{R}v$. On cherche à prolonger ℓ à M_1 en préservant l'inégalité $\ell \leq p$. Pour cela on cherche un réel a tel que

$$\forall u \in M, \forall t \in \mathbb{R},\ \ \ell_1(u+tv) = \ell(u) + ta$$

soit un prolongement de ℓ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in M,\ \ell_1(u+tv) \leq p(u+tv).$$

Remarquons que si $t \neq 0$ alors

$$\ell_1(u+tv) = t\ell_1(u/t+v)).$$

19. Une relation $\leq$ sur un ensemble E est associé à une partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$. on note $x \leq y$ lorsque $(x,y) \in \mathcal{R}$. Une relation est appelée relation d'ordre lorsque les critères suivants sont vérifiés :
— $\forall x \in E,\ \ x \leq x$
— $\forall x, y \in E,\ \ (x \leq y)$ et $(y \leq x) \Rightarrow x = y$
— $\forall x, y, z \in E,\ \ (x \leq y)$ et $(y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

20. Une partie $F \subset E$ est dite totalement ordonnée si pour tout $x, y \in F$ on a forcément $x \leq y$ on $y \leq x$.

21. C'est à dire qu'il y a un élément $m \in E$ tel que $\forall x \in F, x \leq m$

22. C'est à dire qu'il existe un élément $M \in \mathcal{R}$ tel que $\forall x \in \mathcal{E},\ x \leq M$

Grâce au fait que p est homogène, il suffit donc de trouver a (la valeur de ℓ_1 en v pour que

$$\forall u \in M\ , \ell(u) + a \leq p(u+v) \quad \text{et} \quad \ell(u) - a \leq p(u-v).$$

ou, de manière équivalente :

$$\forall u \in M\ , \ell(u) - p(u-v) \leq a \leq p(u+v) - \ell(u).$$

Or, pour tout $y, z \in M$ on a par hypothèse

$$\ell(y) + \ell(z) \leq p(y+z) \leq p(y+v) + p(z-v),$$

soit :

$$\ell(z) - p(z-v) \leq p(y+v) - \ell(y).$$

Il en résulte que si on choisi a dans l'intervalle non vide

$$\big[\sup_{u\in M}\{\ell(u) - p(u-v)\},\ \inf_{u\in M}\{\ell(u) + p(u+v)\}\big]$$

alors la forme linéaire ℓ_1 définie sur M_1 par

$$\ell_1(u+tv) = \ell(u) + ta$$

est majoré par p et sa restriction à M est bien la forme ℓ.

Si le sous-espace F était de codimension finie on pourrait terminer la preuve par récurrence. Pour conclure dans le cas général, on va utiliser un argument de récurrence transfinie à l'aide du Lemme de Zorn.

On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ constitué des couples (K, μ) où K est un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ contenant M et μ est une forme linéaire sur K vérifiant

— $\forall u \in M, \mu(u) = \ell(u)$.

— $\forall u \in K, \mu(u) \leq p(u)$.

On ordonne $\mathcal{M}$ par la relation d'ordre suivante : $(K, \mu) \leq (K', \mu')$ signifie

$$K \subset K' \ \text{ et } \ \mu'\big|_K = \mu$$

Vérifions que $\mathcal{M}$ est inductif. Si $(K_j, \mu_j)_{j\in J}$ est une famille totalement ordonnée de $\mathcal{M}$, on obtient un majorant $(\overline{K}, \overline{\mu})$ pour cette famille en définissant

$$\overline{K} = \bigcup_{j\in J} K_j$$

et

$$\overline{\mu}(u) = \mu_j(u), \text{ si } u \in K_j$$

Le fait que la famille soit totalement ordonnée implique que la forme linéaire $\overline{\mu}$ est bien définie.

Appliquons le Lemme de Zorn : $\mathcal{M}$ contient donc un élément maximal que l'on note $(\overline{M}, \lambda)$. Montrons alors que $\overline{M} = \mathbf{E}$. Supposons le contraire : il existerait alors $v \in \mathbf{E} \setminus \overline{M}$ et on pourrait appliquer le raisonnement fait au début. On obtiendrait un prolongement λ_1 de λ défini sur $\overline{M}_1 = Rv \oplus \overline{M}$ qui serait majorée par p. Ainsi on aurait $(\overline{M}, \lambda) \leq (\overline{M}_1, \lambda_1)$ et $(\overline{M}, \lambda) \neq (\overline{M}_1, \lambda_1)$. Ce qui nierait le caractère maximal de $(\overline{M}, \lambda)$. Donc $\overline{M} = \mathbf{E}$ et λ est une extension de la forme linéaire ℓ à $\mathbf{E}$ et qui reste majorée par p.

6.3.5. *Utilisation géométrique.*

Proposition 6.9. *Soit C un convexe ouvert non vide d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\ .\ \|)$ et $M \subset \mathbf{E}$ un sous espace affine fermé de rencontrant pas C, il existe alors un hyperplan affine fermé H contenant M mais ne rencontrant pas C :*

$$M \subset H \quad \text{et} \quad H \cap C = \emptyset.$$

Démonstration. On peut supposer $0 \in C$. Soit $x \in M$, on considère M_1 l'espace vectoriel engendré par M (remarquons que $0 \notin M$ car $0 \in C$ et $C \cap M = \emptyset$).

$$M_1 = \mathbb{R}x \oplus \overrightarrow{M}$$

où on a noté $\overrightarrow{M}$ l'espace vectoriel qui dirige M. On considère sur M_1 la forme linéaire définie par

$$\lambda \in \mathbb{R}, m \in \overrightarrow{M},\ \ \ell(\lambda x + m) = \lambda.$$

Ainsi on a

$$M = \{y \in M_1,\ \ell(y) = 1\}.$$

Le convexe $C \cap M_1$ est donc inclus dans un des demi espace de M_1 délimité par M, puisque $0 \in C \cap M_1$ on a

$$\forall z \in C \cap M_1, \ell(z) < 1.$$

On introduit alors j_C la jauge du convexe C. Si $z \in M_1$ et que $t > j_C(z)$ alors $z/t \in C$ et $z/t \in M_1$, donc $\ell(z/t) < 1$. On en déduit que sur M_1 on a

$$\ell(z) \leq j_C(z).$$

Le théorème de Hahn-Banach nous fournit donc une forme linéaire λ définie sur $\mathbf{E}$ telle que

— $\forall z \in M_1, \lambda(z) = \ell(z)$
— $\forall z \in \mathbf{E}, \lambda(z) \leq j_C(z)$.

On a vu dans la preuve de la proposition 6.5, qu'il existait une constante C telle que

$$\forall z \in \mathbf{E}, j_C(z) \leq C\|z\| \ .$$

donc la forme linéaire λ est continue. De plus l'hyperplan $H = \lambda^{-1}\{1\}$ contient M, et pour $z \in C$ on a

$$\lambda(z) \leq j_C(z) < 1$$

donc $H \cap C = \emptyset$. □

On peut maintenant démontré le théorème 6.4 : soit C un convexe fermé d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\ .\ \|)$ et $x \notin C$. On veut trouver un demi espace fermé contenant C mais ne contenant pas x. On suppose encore $0 \in C$ et on considère le réel strictement positif défini par

$$\delta = d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\| \ .$$

On rappelle ici que C est fermé, et donc on a bien $\delta > 0$. On pose $\epsilon = \delta/2$ alors

$$x \notin C^\epsilon = \bigcup_{y \in C} B(y, \epsilon) = C + B(0, \epsilon)$$

La somme de deux parties convexes est une partie convexe donc C^ϵ est une partie convexe, contenant 0, qui est de plus ouverte car c'est une réunion de boules ouvertes. La proposition précédente appliquée au sous espace affine $M = \{x\}$ et au convexe ouvert non vide C^ϵ permet de trouver une forme linéaire continue $\lambda \in \mathbf{E}'$ tel que

$$\lambda(z) < 1, \forall z \in C^\epsilon \quad \text{et} \quad \lambda(x) = 1$$

On a donc

$$\forall z \in C, \forall y \in B(0, \epsilon), \ \ \lambda(z + y) \leq 1$$

soit

$$\forall z \in C, \forall y \in B(0, \epsilon), \ \ \lambda(z) \leq 1 - \lambda(y).$$

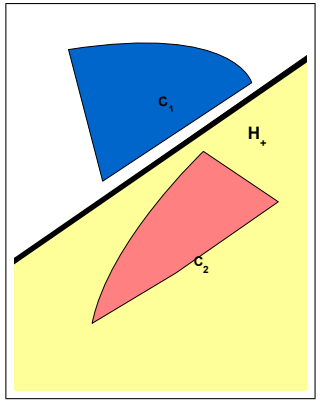
En considérant $y = \frac{\epsilon}{2\|x\|} x$, on obtient

$$\forall z \in C, \ \ \lambda(z) \leq 1 - \frac{\epsilon}{2\|x\|} < 1$$

Donc le demi espace fermé $\{z \in \mathbf{E}, \lambda(z) \leq 1 - \frac{\epsilon}{2\|x\|}\}$ contient C mais ne contient pas x. □

Les mêmes idées mènent à la preuve du résultat suivant :

Théorème 6.10. *Soient C_1 et C_2 deux convexes disjoints d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\ .\ \|)$, on suppose que C_1 est ouvert alors il existe un demi espace fermé H_+ contenant C_2 telle que $C_1 \subset \overline{\mathbf{E} \setminus H_+}$.*



Démonstration. Pour cela on considère le convexe

$$C = C_1 - C_2 = \{x - y, x \in C_1, y \in C_2\} = \bigcup_{y \in C_2} C_1 - \{y\}$$

C'est un ouvert ouvert [23] ne contenant pas 0. Grâce à la proposition 6.9, on trouve donc une forme linéaire continue $\ell \in \mathbf{E}'$ telle que

$$\forall z \in C, \ell(z) < 0$$

Ainsi pour $x \in C_1$ et $y \in C_2$, on a $\ell(x) < \ell(y)$. Considérons

$$\alpha = \frac{\sup_{x \in C_1} \ell(x) \ + \ \inf_{y \in C_1} \ell(y)}{2}$$

et le demi espace fermé :

$$H_+ = \{z \in \mathbf{E}, \ell(z) \geq \alpha\}$$

on a alors par construction

$$C_2 \subset H_+ \quad \text{et} \quad C_1 \subset \overline{\mathbf{E} \setminus H_+}$$

23. Car c'est la réunion des ouverts $C_1 - \{y\}$, $y \in C_2$

. □

6.3.6. *Appendice : sur les fonctions convexes.* Une application du théorème de Hahn-Banach dans sa forme géométrique est le résultat utile suivant :

Théorème 6.11. *Soit* $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ *un espace vectoriel normé et* $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe continue alors* f *est l'envellope supérieure des fonctions affines continues qu'elle majore.*

Autrement dit si on introduit l'ensemble $\mathcal{A}_f$ des fonctions affines continues a telle que $a \leq f$, alors pour tout $x \in \mathbf{E}$, on a

$$f(x) = \sup_{a \in \mathcal{A}_f} a(x).$$

On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme 6.12. *Une fonction convexe majorée par une fonction affine est affine.*

Démonstration. Si $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ une fonction affine, si on suppose que $f \leq a$ alors la fonction $g = f - a$ est convexe négative. On va démontrer que la fonction g est constante. Pour $u \in \mathbf{E}$, la fonction $t \mapsto g(tu)$ est convexe négative. Par convexité de cette fonction on a :

$$t \geq 1 \Rightarrow g(u) - g(0) \leq \frac{g(tu) - g(0)}{t} \quad .$$

D'où puisque g est négative :

$$t \geq 1 \Rightarrow g(u) - g(0) \leq \frac{-g(0)}{t} \quad .$$

En faisant tendre t vers $+\infty$ on obtient :

$$g(u) - g(0) \leq 0 \quad .$$

Ceci est aussi valide en $-u$: $g(-u) - g(0) \leq 0$. On a donc

$$g(0) \leq \frac{g(u) + g(-u)}{2} \leq g(0) \quad .$$

Il y a donc égalité partout et $g(u) = g(0)$ □

On peut maintenant démontré le théorème 6.11

Démonstration. Si f est affine le résultat est évident. Supposons donc que f n'est pas une fonction affine. Notons donc $\bar{f}$ la fonction définie par

$$\bar{f}(x) = \sup_{a \in \mathcal{A}_f} a(x),$$

$\bar{f}$ est une fonction convexe inférieure à f. Il suffit maintenant de démontrer que pour tout $\overline{x} \in \mathbf{E}$,

$$f(\bar{x}) \leq \bar{f}(\overline{x}).$$

On sait aussi que l'épigraphe de f est une partie convexe et fermé de l'espace vectoriel normé $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$, il est donc l'intersection des demi espaces fermés qui le contiennent. Un demi espace fermé de $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$ est de la forme

$$\{(x, y) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R}, \ell(x) - \alpha y - \beta \leq 0\}$$

où $\ell \in \mathbf{E}'$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de plus la forme linéaire définie sur $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$ par $(\xi, \tau) \mapsto \ell(\xi) - \alpha\tau$ n'est pas nulle . Si un tel demi espace contient l'épigraphe de f,alors pour tout (x, y) tel que $f(x) \leq y$, on a $\ell(x) - \alpha y - \beta \leq 0$. Ceci signifie donc en particulier que pour tout $x \in \mathbf{E}$ on a :

$$\ell(x) - \alpha f(x) - \beta \leq 0.$$

Le lemme précédent montre que l 'on a forcément $\alpha > 0$, en effet si $\alpha \leq 0$ alors la fonction $x \mapsto \ell(x) - \alpha f(x) - \beta$ serait convexe négative donc constante. Ceci a été exclus par hypothèse [24].
Ainsi si le demi espace

$$\{(x, y) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R}, \ell(x) - \alpha y - \beta \leq 0\}$$

contient l'épigraphe de f, la fonction affine

$$x \mapsto \frac{1}{\alpha}(\ell(x) - \beta)$$

est un élément de l'ensemble $\mathcal{A}_f$.
Soit $\overline{x} \in \mathbf{E}$. Et soit H_+ un demi espace contenant l'épigraphe de f, on a vu qu'il était donné par

$$H_+ = \{(x, y) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R}, \ell(x) - \alpha y - \beta \leq 0\}$$

24. Notez bien que l'on ne peut avoir $\alpha = 0$ et$\ell = 0$.

où $\ell \in \mathbf{E}' \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. De plus la fonction affine :

$$x \mapsto \frac{1}{\alpha}(\ell(x) - \beta)$$

est un élément de l'ensemble $\mathcal{A}_f$. En particulier on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{\alpha}(\ell(x) - \beta) \leq \bar{f}(x).$$

En particulier on a

$$\frac{1}{\alpha}(\ell(\overline{x}) - \beta) \leq \bar{f}(\overline{x})$$

Donc le couple $(\bar{x}, \bar{f}(\overline{x}))$ est dans H_+.
Ainsi le couple $(\bar{x}, \bar{f}(\overline{x}))$ est dans l'intersection de tout les demi-espaces fermés qui contiennent l'épigraphe de f, il est donc dans l'épigraphe de f ce qui signifie

$$f(\bar{x}) \leq \bar{f}(\overline{x}).$$

Ce qui montre le théorème. □

6.4. **Dualité dans les espaces vectoriels normés.**

6.5. Soit $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé et $\ell \in \mathbf{E}' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ alors la norme de ℓ est définie par

$$\|\ell\| = \sup_{x \in \mathbf{E}, \|x\| \leq 1} |\ell(x)| = \sup_{x \in \mathbf{E}, \|x\| = 1} |\ell(x)| \sup_{x \in \mathbf{E} \setminus \{0\}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|}.$$

Définition 6.13. *L'espace $\mathbf{E}' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires continues sur $\mathbf{E}$ est appelée le dual ou dual topologique de $\mathbf{E}$.*

On sait que $\mathbf{E}'$ est un espace de Banach.
Une conséquence analytique du théorème de Hahn-Banach est le suivant :

Proposition 6.14. *Soit $M \subset \mathbf{E}$ un sous espace vectoriel et soit $\ell : M \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue alors il y a $\tilde{\ell} \in \mathbf{E}'$ telle que*

$$\forall x \in M, \tilde{\ell}(x) = \ell(x) \quad \text{et} \quad \|\ell\|_{\mathcal{L}(M,\mathbb{R})} = \|\tilde{\ell}\|_{\mathbf{E}'}$$

Démonstration. En effet, pour $C = \|\ell\|_{\mathcal{L}(M,\mathbb{R})}$ on a

$$\forall x \in M, \ell(x) \leq C\|x\|$$

La fonction $p(x) = C\|x\|$ est continue, sous additive, on en déduit avec le théorème de Hahn-Banach qu'il existe une forme linéaire $\tilde{\ell}$ sur $\mathbf{E}$ telle que

$$\forall x \in M, \tilde{\ell}(x) = \ell(x)$$

$$\text{et} \quad \forall x \in \mathbf{E}, \ \tilde{\ell}(x) \leq C\|x\| \ .$$

On a donc aussi pour $x \in \mathbf{E}$,

$$-\tilde{\ell}(x) = \tilde{\ell}(-x) \leq C\|x\| \ .$$

Ainsi

$$x \in \mathbf{E} \Rightarrow |\tilde{\ell}(x)| \leq C\|x\| \ .$$

Donc $\tilde{\ell}$ est une forme linéaire continue sur $\mathbf{E}$ de norme inférieure à $C = \|\ell\|_{\mathcal{L}(M,\mathbb{R})}$, mais puisque $\forall x \in M, \tilde{\ell}(x) = \ell(x)$, on a bien l'égalité $\|\ell\|_{\mathcal{L}(M,\mathbb{R})} = \|\tilde{\ell}\|_{\mathbf{E}'}$. □

Une conséquence de cette proposition est le théorème suivant :

Théorème 6.15. *Soit $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé et $x \in \mathbf{E}$ alors*

$$\|x\| = \sup_{\ell \in \mathbf{E}', \|\ell\| \leq 1} |\ell(x)|.$$

Démonstration. On sait déjà que pour tout $x \in \mathbf{E}$ et $\ell \in \mathbf{E}'$ on a

$$|\ell(x)| \leq \|\ell\|\|x\|$$

et donc

$$\|x\| \geq \sup_{\ell \in \mathbf{E}', \|\ell\| \leq 1} |\ell(x)| \ .$$

Démontrons maintenant l'inégalité inverse. Le résultat est évident si $x = 0$, on suppose donc que $x \neq 0$. On sait qu'il suffit de démontrer que

$$\|x\| \leq \sup_{\ell \in \mathbf{E}', \|\ell\| \leq 1} |\ell(x)|.$$

On va en fait démontrer qu'il existe une forme linéaire continue $\lambda \in \mathbf{E}'$ telle que $\|\lambda\| = 1$ et $\lambda(x) = \|x\|$.
On considère la forme linéaire ℓ définie sur la droite $D = \mathbb{R}x$ par

$$\ell(tx) = t\|x\| \ ,$$

on a pour tout $z \in D, \ell(z) = \|z\|$. Donc

$$\|\ell\|_{\mathcal{L}(D,\mathbb{R})} = 1.$$

La proposition (6.14) nous garantit l'existence d'une forme linéaire continue λ sur $\mathbf{E}$ telle que $\forall z \in \mathbf{E}, \ \lambda(z) \leq \|z\|$ et telle que $\lambda(x) = \|x\ell$ et $\|\lambda\| = \|\ell\|_{\mathcal{L}(D,\mathbb{R})} = 1$. □

6.5.1. *Conséquences.*

Proposition 6.16. *On définit une application linéaire δ*

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\to \mathcal{L}(\mathbf{E}', \mathbb{R}) \\ x &\mapsto \delta_x \end{aligned}$$

où δ_x est la forme linéaire sur $\mathbf{E}'$ définie par

$$\delta_x(\ell) = \ell(x).$$

Cette application linéaire δ est une isométrie.

En effet si $x \in \mathbf{E}$ alors

$$\|\delta_x\| = \sup_{\|\ell\| \leq 1} |\delta_x(\ell)| = \sup_{\|\ell\| \leq 1} |\ell(x)| = \|x\|.$$

Définition 6.17. *On dit qu'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ est reflexif s'il cette application linéaire δ est un isomorphisme , i.e. si δ est surjectif.*

Par exemple :

— Un espace de Hilbert est reflexif. En effet soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert (réel), grâce au théorème de représentation de Riesz on sait que l'application Φ définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\to \mathbf{H}' \\ x &\mapsto \Phi(x) = \langle x, \bullet \rangle \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Ainsi pour $x \in \mathbf{H}$, $\delta_x \circ \Phi$ est la forme linéaire sur H définie par

$$y \mapsto \delta_x \circ \Phi(y) = \Phi(y)(x) = \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle = \Phi(x)(y).$$

Donc $\delta_x \circ \Phi = \Phi(x)$. Ainsi il est taulogique que si ℓ est une forme linéaire continue sur $\mathbf{H}'$ alors $\ell \circ \Phi$ est une forme linéaire continue sur $\mathbf{H}$, il y a donc $x \in \mathbf{H}$ tel que $\ell \circ \Phi = \Phi(x) = \delta_x \circ \Phi$ c'est à dire

$$\ell = \delta_x\,.$$

— Lorsque $p \in [1, +\infty[$, on sait que le dual de $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est isomorphe à $\ell^q(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ où $q \in]1, +\infty]$ est défini par $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. À une suite $(u_n) \in \ell^q(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, cet isomorphisme associe la forme linéaire définie par :

$$(v_n) \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mapsto \sum_n v_n u_n.$$

Ceci permet de démontrer avec les mêmes arguments que pour $p \in]1, +\infty[$, l'espace $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est reflexif.

— L'espace $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ n'est pas reflexif. Dans ce cas Ĺ, l'application

$$\delta \,:\, \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})'$$

est définie ainsi : Pour une suite $u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ alors δ_u est la forme linéaire définie par :

$$(v_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mapsto \sum_n v_n u_n.$$

On va démontrer que δ n'est pas surjectif. Considèrons le sous espace fermé $\mathcal{C}$ de $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ formé par les suites convergentes. On considère la forme linéaire

$$\begin{aligned} \lim \,:\, \mathcal{C} &\to \mathbb{R} \\ (v_n) &\mapsto \lim_{n \to \infty} v_n \end{aligned}$$

Lorsque $v = (v_n)$ est une suite convergente, on a :

$$|\lim_n v_n| \leq \|v\|_\infty = \sup_n |v_n|.$$

Ainsi la forme linéaire $\lim \,:\, \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est continue. Le théorème (6.14) nous fournit une forme linéaire LIM définie sur $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall v \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}),\ \mathrm{LIM}(v) \leq \|v\|_\infty$$

$$\text{et} \quad \forall (v_n) \in \mathcal{C}, \mathrm{LIM}((v_n)) = \lim_n v_n.$$

Il est facile de démontrer qu'il n'existe pas de suite sommable $(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall (v_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \mathrm{LIM}((v_n)) = \sum_n v_n u_n \tag{28}$$

En effet soit $k \in \mathbb{N}$, si on évalue la fonctionnelle LIM sur la suite $e(k)$ définie par

$$n \mapsto e(k)_n \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ 1 & \text{si } n = k \end{cases}$$

alors on a $\mathrm{LIM}(e(k) = 0$ [25]. Puisqu'on a l'égalité

$$\sum_n e(k)_n u_n = u_k.$$

Ainsi on en déduit que si $(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ vérifie (28) alors pour tout entier k :

$$\mathrm{LIM}(e(k) = 0 = u_k \ ,$$

ce qui signifie que la suite (u_n) est nulle, or LIM est une forme linéaire non nulle. Il ne peut donc exister de suite sommable $(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ vérifiant (28). Ainsi LIM n'est pas dans l'image de l'application linéaire $\delta : \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})'$ et $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ n'est pas reflexif.

6.5.2. *Densité et dualité.* Le résultat suivant est une généralisation d'un résultat bien connu pour les espaces de Hilbert :

Théorème 6.18. *Soit $(\mathbf{E}, \| \, . \, \|)$ un espace vectoriel normé et G un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ alors l'adhérence de G est*

$$\overline{G} = \cap_{\ell \in \mathbf{E}', G \subset \ker \ell} \ker \ell.$$

Autrement dit si on note pour A une partie de $\mathbf{E}$:

$$A^\perp = \{\ell \in \mathbf{E}', A \subset \ker \ell\} = \{\ell \in \mathbf{E}', \forall x \in A, \ell(x) = 0\},$$

alors pour un sous espace vectoriel G de $\mathbf{E}$:

$$\overline{G} = \cap_{\ell \in G^\perp} \ker \ell = \{x \in \mathbf{E}, \forall \ell \in G^\perp, \ell(x) = 0\}.$$

Lorsque $\mathbf{E}$ est un espace de Hilbert, le théorème de représentation des formes linéaires continues de Riesz permet d'identifier $\mathbf{E}$ et son dual topologique et au travers de cet isomorphisme $A^\perp$ devient l'orthogonal de A et on sait que dans un espace de Hilbert, l'orthogonal de l'orthogonal d'un espace vectoriel est son adhérence.

Démonstration. La preuve de ce théorème (6.18) est la suivante : on introduit

$$\widetilde{G} = \cap_{\ell \in \mathbf{E}', G \subset \ker \ell} \ker \ell.$$

On a par définition $G \subset \widetilde{G}$ et puisque $\widetilde{G}$ est fermé on a $\overline{G} \subset \widetilde{G}$. Pour montrer la réciproque on va se servir du résultat suivant que l'on démontrera plus loin :

25. La suite $e(k)$ est une suite convergente vers 0.

Proposition 6.19. *Soit G_1, G_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{E}$, on suppose que G_1 est fermé et que G_2 est de dimension finie alors l'espace vectoriel $G_1 + G_2$ est fermé.*

Finissons maintenant la preuve du théorème (6.18) ci dessus. Soit $x \notin \overline{G}$. D'après la proposition (6.19) ci dessus le sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}x \oplus \overline{G}$ est fermé. La forme linéaire ℓ définie sur F par

$$t \in \mathbb{R}, v \in \overline{G}, \ell(tx + v) = t$$

est continue car son noyau est $\overline{G}$ qui est fermé dans F [26]. Avec la proposition (6.14), on peut donc prolonger cette forme linéaire en une forme linéaire $\tilde{\ell}$ continue sur $\mathbf{E}$. Pour cette forme linéaire on a $G \subset \overline{G} \subset \ker \tilde{\ell}$ donc $\ell \in G^\perp$ mais $\ell(x) = 1$ donc $x \notin \tilde{G}$. On a donc démontré l'inclusion réciproque :

$$\tilde{G} \subset \overline{G}.$$

□

Démontrons maintenant la proposition (6.19) ci dessus : Soit G_3 un supplémentaire de $G_1 \cap G_2$ dans G_2 [27]. On a $G_1 + G_2 = G_1 \oplus G_3$. Démontrons qu'il y a $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in G_1, \forall y \in G_3, \quad \|x + y\| \geq \varepsilon \|y\|.$$

En effet si cela n'était pas vrai pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on trouverait un couple $(x_n, y_n) \in G_1 \times G_3$ tel que

$$\|x + y\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|y_n\| = 1.$$

La suite (y_n) est une suite bornée de l'espace vectoriel normé G_3 qui est de dimension finie, on peut donc en extraire une sous suite convergente $(y_{n_k})_k$: on trouve y_∞ tel que

$$\lim_k y_{n_k} = y_\infty.$$

Or nos hypothèses implique qu'alors :

$$\lim_k x_{n_k} = -y_\infty.$$

26. Si (X, d) est un espace métrique et que $F \subset X$ est fermé alors $A \subset F$ est fermé dans F si et seulement si A est fermé dans X.

27. C'est possible car G_2 est de dimension finie.

L'espace vectoriel G_1 est supposé fermé donc

$$y_\infty = \lim_k -x_{n_k} \in G_1 \ ,$$

ce qui n'est pas possible car par construction $G_1 \cap G_3 = \{0\}$ et

$$1 = \lim_k \|y_{n_k}\| = \|y_\infty\| \ .$$

On peut ensuite démontrer que $G_1 + G_2 = G_1 \oplus G_3$ est fermé car si $\big((x_n, y_n)\big)$ est une suite de $G_1 \times G_3$ telle que la suite $(x_n + y_n)$ converge alors l'inégalité précédente nous dit que la suite (y_n) est de Cauchy dans G_3 donc elle converge dans G_3 (car G_3 est fermé) et alors la suite (x_n) converge dans G_1 car G_1 est fermé. Ainsi

$$\lim_n x_n + y_n = \lim_n x_n + \lim_n y_n \in G_1 \oplus G_3$$

□

On aurait pu aussi faire la preuve suivante : on peut trouver $(g_1, \ldots, g_k)$ une base de G_2 et considérer la base duale $(\tilde\theta_1, \ldots, \tilde\theta_k)$ puisque G_2 est de dimension finie, les formes linéaires $\tilde\theta_j$ sont continues sur G_2, on peut donc grâce à la proposition (6.14), trouver des formes linéaires continues $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ qui étendent $(\tilde\theta_1, \ldots, \tilde\theta_k)$ on considère alors

$$G_4 = \cap_j \ker \theta_j$$

c'est un supplémentaire fermé de G_2. Et on dispose d'un isomorphisme $G_4 \times \mathbb{R}^k \to \mathbf{E}$ donné par

$$(x, (t_1, \ldots, t_k)) \mapsto x + t_1 g_1 + \ldots + t_k g_k$$

de plus l'isomorphisme réciproque associe à $y \in \mathbf{E}$ le couple $(x, (t_1, \ldots, t_k))$ où $t_j = \theta(y)$ et $x = y - \sum_j \theta_j(y) g_j$. Il est donc continue. De plus cet isomorphisme envoie $G_1 \cap G_4 \times \mathbb{R}^k$ sur $G_1 + G_2$. Puisque $G_1 \cap G_4$ est fermé on en déduit que $G_1 + G_2$ est fermé.

Le théorème précédent (6.18) a la conséquence utile suivante :

Corollaire 6.20. *Un sous -espace vectoriel G d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ est dense dans $\mathbf{E}$ si et seulement si on a l'implication*

$$\big(\ell \in \mathbf{E}' \ \text{ et } \ \ell\big|_G = 0\big) \Rightarrow \ell = 0,$$

autrement dit G est dense si et seulement si $G^\perp = \{0\}$.

6.5.3. *Adjoint d'un opérateur.* Soient $(\mathbf{E}_1, \|\,.\,\|_1)$ et $(\mathbf{E}_2, \|\,.\,\|_2)$ deux espaces vectoriels normés et $T \in \mathcal{L}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$ une application linéaire continue, l'adjoint de T noté T^* est l'application linéaire $T^* \ : \ \mathbf{E}'_2 \to \mathbf{E}'_1$ définie par

$$\forall \ell \in \mathbf{E}'_2, \ T^*(\ell) = \ell \circ T.$$

Proposition 6.21. *L'application linéaire T^* est continue et*

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}'_2, \mathbf{E}'_1)} = \|T\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)}.$$

Démonstration. Si $x \in \mathbf{E}_1$ et $\ell \in \mathbf{E}'_2$ alors

$$|T^*(\ell)(x)| = |\ell(T(x))| \leq \|\ell\|_{\mathbf{E}'_2} \|T\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)} \|x\|_1.$$

Ainsi $\|T^*(\ell)\|_{\mathbf{E}'_1} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)} \|\ell\|_{\mathbf{E}'_2}$. Ceci étant valide pour tout $\ell \in \mathbf{E}'_2$, on en déduit que T^* est continue et que

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}'_2, \mathbf{E}'_1)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)}.$$

Démontrons maintenant l'inégalité réciproque. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbf{E}_1$ tel que

$$\|x\|_1 = 1 \quad \text{et} \quad \|T(x)\|_2 \geq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)} - \varepsilon.$$

Ensuite on trouve $\ell \in \mathbf{E}'_2$ de norme 1 tel que $\ell(T(x)) = \|T(x)\|_2$ donc

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}'_2, \mathbf{E}'_1)} \geq \|T^*(\ell)\|_{\mathbf{E}'_1} \geq \ell(T(x)) \geq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)} - \varepsilon.$$

Ceci étant valide pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit l'inégalité :

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}'_2, \mathbf{E}'_1)} \geq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)}.$$

□

8.

Convergence faible.

8.0.1. *Avant propos.* On sait que dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée admet une sous suite convergente. Autrement dit les parties bornées d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont relativement compactes. Ce résultat est utile dans des problèmes d'optimisation, par exemple

Proposition 8.1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, une fonction continue positive propre i.e. pour tout compact K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ l'image réciproque de K par f est compact*[28] *alors f atteint son minimum, i.e. il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$f(x) = \inf_{z \in \mathbb{R}^n} f(z).$$

En dimension infinie, la preuve de ce résultat est inopérante car nous avons le

Théorème 8.2. de Riesz *Soit $(\mathbf{E}, \| \, . \, \|)$ un espace vectoriel normé dont la boule unité est compacte alors $\mathbf{E}$ est de dimension finie.*

Démonstration. On suppose que la boule unité fermée $\mathbb{B}_{\mathbf{E}}$ de $\mathbf{E}$ est compacte. La famille des boules ouvertes $\{ B(a, 1/2) \}_{a \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}}$ recouvre $\mathbb{B}_{\mathbf{E}}$, par compacité on peut trouver $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}}$ tel que

$$\mathbb{B}_{\mathbf{E}} \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(a_j, 1/2).$$

Soit F le sous espace vectoriel engendré par $a_1, \dots, a_N$. Lorsque $b \in \mathbf{E} \setminus F$, on a

$$b \notin F$$

et puisque F est fermé, la distance de b à F est strictement positive :

$$\delta := d(b, F) > 0.$$

On trouve donc $c \in F$ tel que

$$\|b - c\| \leq \frac{3}{2}\delta.$$

28. Démontrer que cela équivaut à $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On considère le vecteur

$$u = \frac{b - c}{\|b - c\|} \in \mathbb{B}_{\mathbf{E}} \ ,$$

il y a donc $j \in \{1, \dots, N\}$ tel que $u \in B(a_j, 1/2)$. Or

$$b = c + \|b - c\| u = c + \|b - c\| a_j + \|b - c\|(u - a_j) \ ,$$

puisque $c + \|b - c\| a_j \in F$, on a

$$\delta = d(b, F) \leq \| \, \|b - c\|(u - a_j) \, \| = \|b - c\| \, \|u - a_j\| \leq \frac{3}{4}\delta$$

Ceci n'est pas possible car $\delta > 0$ donc $F = \mathbf{E}$ et $\mathbf{E}$ est bien de dimension finie. □

La non compacité de la boule unité en dimension infinie fait que de nombreux raisonnements basés sur ce fait ne peuvent être appliqués en dimension infinie notamment dans les problèmes d'optimisation (recherche de minimum de fonctionnelle). La convergence faible est l'outil qui permet de contourner cette difficulté.

8.0.2. *Convergences faibles.* Soit $(\mathbf{E}, \| \, . \, \|)$ un espace de Banach.

Définition 8.3. *On dira qu'une suite (x_n) d'éléments de $\mathbf{E}$ converge faiblement vers x_∞ et on notera*

$$x_n \rightharpoonup x_\infty$$

si

$$\forall \ell \in \mathbf{E}', \lim_n \ell(x_n) = \ell(x_\infty).$$

Définition 8.4. *On dira qu'une suite de formes linéaires continues (ℓ_n) converge faiblement $\star$ vers une forme linéaire continue ℓ_∞ et on notera*

$$\ell_n \overset{\star}{\rightharpoonup} \ell_\infty$$

si

$$\forall x \in \mathbf{E}, \lim_n \ell_n(x) = \ell_\infty(x).$$

Une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus est le suivant

Proposition 8.5. *Une suite faiblement (resp. faiblement $\star$) convergente est bornée.*

Démonstration. Rappelons en effet le théorème de Banach-Steinhaus tel qu'il a été énoncé au premier semestre :

Théorème 8.6. *Soient* $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|_{\mathbf{E}})$ *un espace de Banach et* $(\mathbf{F}, \|\,.\,\|_{\mathbf{F}})$ *un espace vectoriel normé, et* $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *une famille d'applications linéaires continues de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{F}$ *. Alors ou bien*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < +\infty$$

ou bien il existe un résiduel (intersection dénombrable d'ouverts denses) $G \subset \mathbf{E}$ *tel qu'en tout élément* x *de* G *on ait*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T(x)\|_{\mathbf{F}} = +\infty.$$

Et considérons une suite (ℓ_n) d'applications linéaires continues sur un espace de Banach $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ qui converge faiblement $\star$ vers $\ell_\infty \in \mathbf{E}'$. Alors le théorème de Banach-Steinhaus implique que

— soit $\sup_n \|\ell_n\| < +\infty$; c'est à dire la suite (ℓ_n) est bornée.

— soit il y a un résiduel $G \subset \mathbf{E}$ tel que pour tout $x \in G$ la suite $(\ell_n(x))$ n'est pas bornée.

Par hypothèse le second cas ne peut se produire donc la suite (ℓ_n) est bornée. □

Remarques 8.7. *a) Il doit être clair que la convergence usuelle (en norme*[29]*) implique la convergence faible :*

$$\lim_n \|x_n - x_\infty\|_{\mathbf{E}} = 0 \Rightarrow x_n \rightharpoonup x_\infty$$

$$\text{et} \qquad \lim_n \|\ell_n - \ell_\infty\|_{\mathbf{E}'} = 0 \Rightarrow \ell_n \overset{\star}{\rightharpoonup} \ell_\infty$$

b) Une suite de formes linéaires (ℓ_n) *converge faiblement* $\star$ *si et seulement si elle converge simplement au sens de la convergence simple des applications de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbb{R}$.

c) Si elle existe, il y a unicité de la limite faible . En effet deux limites faibles $x_{\infty,1}$ *et* $x_{\infty,2}$ *d'une même suite vérifient*

$$\forall \ell \in \mathbf{E}',\ \ell(x_{\infty,1}) = \ell(x_{\infty,2})$$

Donc le vecteur $x_{\infty,1} - x_{\infty,2}$ *est dans le noyau de toute les formes linéaires le théorème implique que ce vecteur est nul.*

d) Il est évident que l'on a aussi unicité de la limite faible $\star$ *d'une suite de formes linéaires continues.*

29. On parle aussi de convergence forte pour la distinguer de la convergence faible.

e) Avec l'isométrie $\delta : \mathbf{E} \to \mathbf{E}''$*, on a*

$$x_n \rightharpoonup x_\infty \iff \delta_{x_n} \overset{\star}{\rightharpoonup} \delta x_\infty$$

f) Lorsque $\mathbf{E}$ *est un espace de Banach reflexif, alors la convergence faible de* $\mathbf{E}'$ *est exactement la convergence faible* $\star$.

8.0.3. *Exemples.*

i) **En dimension finie :** la convergence faible coincide avec la convergence en norme : en effet, si $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, on considère une base $(e_1, \ldots, e_N)$ de $\mathbf{E}$ et $(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ la base duale ainsi pour tout tout $x \in \mathbf{E}$ on a

$$x = \sum_{j=1}^{N} \theta_i(x)\, e_i,$$

Ainsi si (x_n) est une suite de $\mathbf{E}$ qui converge faiblement vers x_∞ alors on a pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$

$$\lim_n \theta_i(x_n) = \theta_i(x_\infty)$$

et donc

$$lim_n \|x_n - x_\infty\| = 0.$$

ii) **Sur un espace de Hilbert séparable :** soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert séparable (réel) et $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathbf{H}$ alors une suite (x_n) converge faiblement vers x_∞ si et seulement si c'est une suite bornée et si pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\lim_n \langle x_n, e_j\rangle = \langle x_\infty, e_j\rangle.$$

En effet supposons que cette dernière condition soit vérifiée, alors pour toute combinaison linéaire finie $v = \sum_{j=0}^{N} v_j e_j$ on a

$$\lim_n \langle x_n, v\rangle = \langle x_\infty, v\rangle.$$

Soit M tel que

$$\forall n, \|x_n\| \le M.$$

Maintenant soit $u \in \mathbf{E}$ et $\varepsilon > 0$, on sait qu'il y a $N \in \mathbb{N}$ tel que si $v = \sum_{j=0}^{N} \langle u, e_j\rangle e_j$ alors

$$\|v - u\| \le \varepsilon/(2M + 2\|x_\infty\| + 2)\ .$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}|\langle x_n, u\rangle - \langle x_\infty, u\rangle| &= \langle x_n - x_\infty, u - v\rangle + \langle x_n - x_\infty, v\rangle \\ &\leq (\|x_n\| + \|x_\infty\|)\|u - v\| + |\langle x_n - x_\infty, v\rangle| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |\langle x_n - x_\infty, v\rangle|\end{aligned}$$

Or on sait que $\lim_n \langle x_n - x_\infty, v\rangle = 0$, il y a donc un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\langle x_n - x_\infty, v\rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi pour $n \geq n_0$ on a

$$|\langle x_n, u\rangle - \langle x_\infty, u\rangle| < \varepsilon.$$

iii) Les mêmes arguments que ceux donnés dans l'exemple précédent montre que si $\mathbf{p} \in]1, +\infty[$ alors une suite $(x(n))$ de $\ell^{\mathbf{p}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ converge faiblement vers $x(\infty)$ si et seulement si elle est bornée et si pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_n x_k(n) = x_k(\infty).$$

iv) **Dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{K}, \mathbb{R})$** : Considérons K un espace métrique compact et l'espace de Banach des fonctions continues sur K équipé de la norme uniforme. Soient (f_n) une suite de fonctions continues sur K et $f_\infty \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$. On a

$$f_n \rightharpoonup f_\infty$$

si et seulement si

— (f_n) est une suite bornée de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$

— et (f_n) converge simplement vers f_∞.

Il est facile de voir que ces deux conditions sont nécessaire pour la convergence faible. La première, on l'a déjà dit, est une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus. La seconde vient du fait que si $k \in K$ alors la masse de Dirac en k :

$$f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}) \mapsto \delta_k(f) = f(k)$$

est une forme linéaire continue sur K et donc la convergence faible de (f_n) vers f_∞, implique que

$$\lim_n f_n(k) = \lim_n \delta_k(f_n) = \delta_k(f_\infty) = f_\infty(k).$$

Donc (f_n) converge simplement vers f_∞. Le fait que ces deux conditions soient suffisantes provient du théorème de Riesz qui affirme qu'une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ est donnée par la différence de deux mesures positives μ_+ et μ_- ; c'est à dire que si $\lambda \in \left(\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})\right)' = \mathcal{L}\left(\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}), \mathbb{R}\right)$ alors il existe deux mesures positives μ_+ et μ_- telles que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}), \;\; \lambda(f) = \int_K f d\mu_+ - \int_K f d\mu_-.$$

Le fait que ces conditions soient suffisantes est alors une conséquence du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

v) **Dans $\ell^{\mathbf{1}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$** qui n'est pas reflexif et dont le dual est $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, la convergence faible implique la convergence en norme. Il s'agit d'un résultat délicat à démontrer. Ceci s'insère dans le cadre plus général du théorème de Dunford-Prettis qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de $L^1(X, \mu)$ soit faiblement convergente.

vi) On trouvera dans le livre de S. Banach, une caractérisation des suites faiblement convergentes dans $L^p([0, 1])$.

8.0.4. *Un Critère utile :*

Proposition 8.8. *Soit $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ un espace de Banach et $\mathcal{D} \subset \mathbf{E}'$ une partie qui engendre un sous espace vectoriel dense de $\mathbf{E}'$ alors une suite (x_n) de $\mathbf{E}$ converge faiblement vers x_∞ si et seulement si*

— *(x_n) est une suite bornée de $\mathbf{E}$*

— *et $\forall \ell \in \mathcal{D}, \;\; \lim_n \ell(x_n) = \ell(x_\infty)$.*

Nous avons un résultat analogue pour la convergence faible $\star$:

Proposition 8.9. *Soit $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ un espace de Banach et $\mathcal{D} \subset \mathbf{E}$ une partie qui engendre un sous espace vectoriel dense de $\mathbf{E}$ alors une suite (ℓ_n) de $\mathbf{E}'$ converge faiblement $\star$ vers ℓ_∞ si et seulement si*

— *(ℓ_n) est une suite bornée de $\mathbf{E}'$*

— *et $\forall x \in \mathcal{D}, \;\; \lim_n \ell_n(x) = \ell_\infty(x)$.*

Démonstration. Les arguments reprennent essentiellement ceux que l'on a dévellopé pour expliquer la convergence faible dans les espaces de Hilbert séparable. On démontre la seconde proposition car grL'ce à la remarque 8.7 v), elle implique la première. Soit donc $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbf{E}$ engendrant un sous espace

vectoriel dense de $\mathbf{E}$. Et considérons (ℓ_n) une suite bornée de $\mathbf{E}'$ telle que pour une forme linéaire continue $\ell_\infty \in \mathbf{E}'$ on ait

$$\forall x \in \mathcal{D},\ \lim_n \ell_n(x) = \ell_\infty(x).$$

Il est évident que si x appartient à l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{D}$ alors on a également $\lim_n \ell_n(x) = \ell_\infty(x)$.
Notons $M = \sup_n \|\ell_n\|$ Maintenant si $x \in \mathbf{E}$ et $\varepsilon > 0$ alors on trouve v dans l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{D}$ tel que

$$\|x - v\| \leq \frac{\varepsilon}{2M + 2\|\ell_\infty\| + 1}.$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}|\ell_n(x) - \ell_\infty(x)| &= |\ell_n(x) - \ell_n(v) - \ell_\infty(x) + \ell_\infty(v) + \ell_n(v) - \ell_\infty(v)| \\ &\leq |\ell_n(x) - \ell_n(v)| + |\ell_\infty(x) - \ell_\infty(v)| + |\ell_n(v) - \ell_\infty(v)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |\ell_n(v) - \ell_\infty(v)|\end{aligned}$$

Maintenant puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \ell_n(v) - \ell_\infty(v) = 0\,,$$

il y a un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\ell_n(v) - \ell_\infty(v)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

et donc pour $n \geq n_0$ on a

$$|\ell_n(x) - \ell_\infty(x)| < \varepsilon.$$

□

Le résultat suivant est aussi très utile :

Proposition 8.10. *Soit $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ un espace de Banach, si une suite (x_n) de $\mathbf{E}$ converge faiblement vers x_∞ alors*

$$\|x_\infty\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Si une suite (ℓ_n) de $\mathbf{E}'$ converge faiblement $\star$ vers ℓ_∞ alors

$$\|\ell_\infty\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\ell_n\|.$$

Démonstration. On ne démontre que la seconde inégalité : soit $x \in \mathbf{E}$ on a donc par hypothèse :

$$\lim_n \ell_n(x) = \ell_\infty(x)\ .$$

Ainsi si $\|x\| \leq 1$ alors

$$\lim_n |\ell_n(x)| = |\ell_\infty(x)|\ ,$$

et puisque

$$|\ell_n(x)| \leq \|\ell_n\|\ ,$$

on a

$$|\ell_\infty(x)| \leq \liminf_n \|\ell_n\|\ .$$

Cette inégalité étant valide pour tout vecteur $x \in \mathbf{E}$ de norme inférieure à 1, on en déduit facilement le résultat. □

8.0.5. *Les topologies faible et faible $\star$.* On se limite dans ce cours à la convergence faible ou faible $\star$. Il est néanmoins instructif de savoir que cette convergence est associée à la topologie faible (ou faible $\star$).
Au premier semestre et en L3, vous avez étudié la topologie des espaces métriques, il y a en fait une notion plus générale d'espace topologique :

Définition 8.11. *On appelle espace topologique un couple (X, τ) où X est un ensemble et τ une topologie c'est à dire une sous partie de l'ensemble des parties de X : $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ vérifiant :*

i) $\emptyset \in \tau, X \in \tau$

ii) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$

iii) Si $I \subset \tau$, alors $\bigcup_{U\in I} U \in \tau$.

Autrement dit une topologie est un ensemble de partie de X, stable par intersection finie, par réunion et contenant l'ensemble vide et X. Les éléments d'une topologie sont appelés les ouverts de la topologie. Un fermé d'un espace topologique est le complémentaire d'un ouvert. Les notions usuelles de voisinage, de limite, de continuité, compacité, connexité...s'étendent naturellement dans le cadre des espaces topologiques. Par exemple : Si (X, τ) est un espace topologique et (x_n) une suite de X et $\ell \in X$, on dira que la suite (x_n) converge vers ℓ et on écrira

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$$

si pour tout ouvert $U \in \tau$ contenant ℓ, il existe un entier n_0 à partir duquel la suite se trouve dans U Autrement dit avec les quantificateurs :

$$\forall U \in \tau, \ell \in U \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ x_n \in U).$$

Par exemple, pour la topologie grossière où $\tau = \{\emptyset, X\}$, pour toute suite (x_n) et tout élément de ℓ de X on a $\lim_n x_n = \ell$. Il n'y a pas unicité de la limite pour la topologie grossière.
Alors que pour la topologie discrète où $\tau = \mathcal{P}(X)$ alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n = \ell.$$

Sur un espace de Banach $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ on introduit la topologie faible $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$ dont les ouverts sont les ensembles $U \subset \mathbf{E}$ tel que pour tout point $x \in U$, on puisse trouver $\varepsilon > 0$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{E}'$ tel que

$$\{y \in \mathbf{E},\ \ |\lambda_1(x-y)| < \varepsilon,\ |\lambda_2(x-y)| < \varepsilon, \ldots,\ |\lambda_k(x-y)| < \varepsilon\ \} \subset U.$$

Par construction la convegence d'une suite pour la toplogie faible est ce que l'on a appelé la convergence faible. De la même façon on introduit la topologie faible $\star$ sur le dual topologique de $\mathbf{E}$ $\sigma(\mathbf{E}', \mathbf{E})$ dont les ouverts sont les ensembles U tel que pour tout $\ell \in U$, on puisse trouver $\varepsilon > 0$ et $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{E}$ tel que

$$\{\lambda \in \mathbf{E}',\ |(\lambda - \ell)(x_1)| < \varepsilon\ , |(\lambda - \ell)(x_2)| < \varepsilon, \ldots, |(\lambda - \ell)(x_k)| < \varepsilon\} \subset U.$$

La remarque suivante est importante car elle donne un critère pour la topologie faible $\star$ soit métrisable c'est à dire elle donne un critère d'existence d'une distance dont la topologie associée soit la topologie faible :

Théorème 8.12. *Soit $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ un espace de Banach séparable alors il y a une distance d sur la boule unité de $\mathbf{E}'$ tel que*

$$\lambda_n \xrightarrow{\star} \ell \iff \lim_n d(\lambda_n, \ell) = 0.$$

Démonstration. En effet puisque $\mathbf{E}$ est séparable, il y a (x_k) une suite dense de $\mathbb{B}_{\mathbf{E}}$, on pose alors

$$d(\psi, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\psi(x_k) - \phi(x_k)|}{2^k}.$$

Supposons maintenant que $(\varphi_n)_n$ soit une suite de formes linéaires continues de norme inférieure à 1 et que pour une forme $\varphi_\infty \in \mathbf{E}'$ on ait

$$\lim_{n\to\infty} d(\varphi_n, \varphi_\infty) = 0.$$

Alors il est évident que pour $n, k \in \mathbb{N}$ on a

$$|\varphi_n(x_k) - \varphi_\infty(x_k)| \leq 2^n d(\varphi_n, \varphi_\infty).$$

Donc pour chaque entier n on a

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_k) = \varphi_\infty(x_k)$$

on utilise ensuite le critère ci dessus 8.9 pour en conclure que

$$\varphi_n \xrightarrow{\star} \varphi_\infty.$$

Réciproquement supposons que $(\varphi_n)_n$ soit une suite de formes linéaires continues de norme inférieure à 1 et que pour une forme $\varphi_\infty \in \mathbf{E}'$ on ait :

$$\varphi_n \xrightarrow{\star} \varphi_\infty.$$

Alors pour chaque k on a par définition :

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_k) = \varphi_\infty(x_k).$$

Mais pour chaque entier K on a :

$$d(\varphi_n, \varphi_\infty) \leq \sum_{k=0}^{K} \frac{\varphi_n(x_k) - \varphi_\infty(x_k)}{2^k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{2}{2^k}.$$

Car on a toujours :

$$\frac{|\varphi_n(x_k) - \varphi_\infty(x_k)|}{2^k} \leq \frac{\|\varphi_n\|\,\|x_k\| + \|\varphi_\infty\|\,\|x_k\|}{2^k} \leq \frac{2}{2^k}.$$

Ainsi on a :

$$d(\varphi_n, \varphi_\infty) \leq \sum_{k=0}^{K} \frac{|\varphi_n(x_k) - \varphi_\infty(x_k)|}{2^k} + \frac{1}{2^{K-1}}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit alors K tel que $2^{-K+2} < \varepsilon$, alors on sait choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous les entiers $k \leq N$ et pour tous les entiers $n \geq n_0$ on ait : $|\varphi_n(x_k) - \varphi_\infty(x_k)| \leq \varepsilon/4$, on aura alors pour $n \geq n_0$:

$$d(\varphi_n, \varphi_\infty) \leq \sum_{k=0}^{K} \frac{|\varphi_n(x_k) - \varphi_\infty(x_k)|}{2^k} + \frac{1}{2^{K-1}} \leq \varepsilon.$$

□

Remarque 8.13. *On aura le même résultat pour la boule unité d'un espace de Banach dont le dual est séparable et pour la topologie faible.*

Le résultat suivant est alors utile pour formuler le résultat qui suivra :

Proposition 8.14. *Soit* $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ *un espace de Banach dont le dual est séparable alors* $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ *est lui même séparable.*

Démonstration. Soit (φ_n) une suite dense de $\mathbf{E}'$, pour chaque entier n on choisit un vecteur $x_n \in \mathbf{E}$ de norme 1 tel que

$$\frac{1}{2}\|\varphi_n\| \leq \varphi_n(x_n) \leq \|\varphi_n\|.$$

On va démontrer que l'espace vectoriel engendré par la suite (x_n) est dense. On peut démontrer qu'un espace vectoriel normé est séparable si et seulement si il possède une suite qui engendre un sous espace vectoriel dense [30]
Grâce au critère 6.18, il suffit de démontrer que si une forme linéaire continue $\lambda \in \mathbf{E}'$ s'annule sur la suite (x_n) alors $\lambda = 0$. Considérons une telle forme linéaire $\lambda \in \mathbf{E}'$ on a alors

$$\begin{aligned}\|\lambda\| &\leq \|\lambda - \varphi_n\| + \|\varphi_n\| \\ &\leq \|\lambda - \varphi_n\| + 2\varphi_n(x_n) \\ &\leq \|\lambda - \varphi_n\| + 2(\varphi_n - \lambda)(x_n) \\ &\leq 3\|\lambda - \varphi_n\|.\end{aligned}$$

Puisque (φ_n) une suite dense de $\mathbf{E}'$, lorsque $\lambda \neq 0$ on peut trouver un entier n_0 tel que

$$\|\lambda - \varphi_{n_0}\| \leq \frac{1}{4}\|\lambda\|$$

ce qui mène à la conclusion

$$\|\lambda\| \leq \frac{3}{4}\|\lambda\|,$$

ce qui implique que $\lambda = 0$, contrairement à ce que l'on avait supposé.
Une autre preuve est la suivante : Puisque (φ_n) une suite dense de $\mathbf{E}'$, on sait trouver une sous-suite (φ_{n_k}) qui converge vers λ on aura alors

$$\|\lambda\| \leq \lim_{k\to+\infty} 3\|\lambda - \varphi_{n_k}\|.$$

□

8.0.6. *Le théorème de Banach-Alaoglu.* Le théorème suivant a fait la réputation de la topologie faible et faible $\star$.

Théorème 8.15. ***de Banach-Alaoglu*** *Soit* $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ *un espace de Banach séparable, alors de toute suite bornée de* $\mathbf{E}'$ *on peut extraire une sous-suite convergent faiblement* $\star$.

Ce résultat a la conséquence suivante qui est aussi très utilisée

Corollaire 8.16. *Soit* $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ *un espace de Banach séparable reflexif, alors de toute suite bornée de* $\mathbf{E}$ *on peut extraire une suite faiblement convergente.*

Ce corollaire est une conséquence du théorème de Banach-Alaoglu, en effet puisque $\mathbf{E}$ est séparable et que $\mathbf{E}$ est reflexif alors $\mathbf{E}''$ est aussi séparable, donc $\mathbf{E}'$ est séparable d'après le théorème (8.14). Le théorème de Banach-Alaoglu dit alors que de toute suite bornée de $\mathbf{E}''$ on peut extraire une suite convergente pour la topologie faible $\star$ de $\mathbf{E}''$. On conclut alors avec la remarque (8.7 v) selon laquelle la convergence faible d'une suite (x_n) de $\mathbf{E}$ équivaut à la convergence faible $\star$ de la suite (δ_{x_n}) dans $\mathbf{E}''$.

Démonstration. de théorème de Banach-Alaoglu Soit (x_k) une suite dense de $\mathbf{E}$. Et soit (φ_n) une suite bornée de formes linéaires continues sur $\mathbf{E}$.

— La suite $(\varphi_n(x_0))$ est une suite bornée, on peut donc en extraire une sous suite convergente : Il y a une application strictement croissante ν_0 : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que la suite $(\varphi_{\nu_0(n)}(x_0))_n$ converge.

— La suite $(\varphi_{\nu_0(n)}(x_1))$ est une suite bornée, on peut donc en extraire une sous suite convergente : Il y a une application strictement croissante ν_1 : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que la suite $(\varphi_{\nu_0\circ\nu_1(n)}(x_1))_n$ converge.

⋮

—

30. Une implication est relativement évidente, l'autre, à savoir :
"*Un espace vectoriel normé* $\mathbf{E}$ *qui possède une suite engendrant un sous espace vectoriel dense est séparable*"
se démontre de la façon suivante : on considère donc une telle suite (x_n). Et on considère V_n le $\mathbb{Q}$ espace vectoriel engendré par $\{x_0, \ldots, x_n\}$ et F_n le $\mathbb{R}$ espace vectoriel engendré par $\{x_0, \ldots, x_n\}$. L'ensemble V_n est dénombrable et il est dense dans F_n. La réunion dénombrable $S = \bigcup_n V_n$ est donc aussi dénombrable (chaque V_n est énuméré par $\mathbb{N}$ ainsi $\bigcup_n V_n$ peut être énuméré par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$). Si $x \in \mathbf{E}$ on trouve un entier n et un vecteur f de F_n qui est situé à distance au plus $\varepsilon/2$ de x ; alors on trouve un élement de v de $V_n \subset S$ situé à distance au plus $\varepsilon/2$ de f ; en particulier on a trouvé un élément de S situé à distance au plus ε de x. Ainsi S est dense dans $\mathbf{E}$.

— La suite $(\varphi_{\nu_0\circ\nu_1\circ\ldots\nu_{k-1}(n)}(x_k))_n$ est une suite bornée, on peut donc en extraire une sous suite convergente : Il y a une application strictement croissante $\nu_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que la suite

$$(\varphi_{\nu_0\circ\nu_1\circ\ldots\nu_{k-1}\circ\nu_k(n)}(x_k))_n$$

converge.

⋮

—

On considère alors l'application strictement croissante :

$$\mu(k) = \nu_0 \circ \nu_1 \circ \ldots \nu_{k-1} \circ \nu_k(k) \ .$$

Alors pour chaque k, la suite $(\varphi_{\mu(n)}(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite

$$(\varphi_{\nu_0\circ\nu_1\circ\ldots\nu_{k-1}\circ\nu_k(n)}(x_k))_{n\in\mathbb{N}} \ ,$$

elle est donc convergente. On a donc trouvé une l'application strictement croissante $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour chaque entier k, la suite $(\varphi_{\mu(n)}(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On définit alors une application λ sur l'image de la suite (x_k) par

$$\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{\mu(n)}(x)$$

Puisque la suite des formes linéaires $(\varphi_{\mu(n)})_n$ est bornée, on en déduit que l'application λ est uniformément continue sur une partie dense. On en déduit que

— λ admet un prolongement continue à **E**.

— pour tout $x \in E$, la suite $(\varphi_{\mu(n)}(x))_n$ converge vers $\lambda(x)$.

Ceci implique que λ est une forme linéaire continue et que la suite $((\varphi_{\mu(n)})_n$ converge faiblement $\star$ vers λ.

□

Ce beau théorème a l'application suivante qui découle du théorème de Riesz, du fait l'espace des fonctions continues sur un espace métrique compact est séparable [31], et du théorème de Banach-Alaoglu :

31. La preuve de cette affirmation est faite ainsi :
Soit $N \in \mathbb{N}$, les boules $B\left(x, 2^{-N}\right)$, $x \in X$ recouvrent X, X étant compacte on trouve une famille finie $x_{1,N}, \ldots, x_{m_N,N}$ telle que

$$X = \cup_{j=1}^{m_N} B\left(x_{j,N}, 2^{-N}\right)$$

Corollaire 8.17. *Soit X un espace métrique compact et (μ_n) une suite de mesure de probabilité, alors il y a une sous-suite $(\mu_{n_k})_k$ qui converge vaguement*

On définit alors la fonction $f_{j,N}$ par

$$f_{j,N}(x) = \begin{cases} 2^{-N+1} - d(x, x_{j,N}) & \text{si } x \in B\left(x_{j,N}, 2^{-N+1}\right) \\ 0 & \text{si } x \notin B\left(x_{j,N}, 2^{-N+1}\right) \end{cases}$$

$$P_N = \sum_{j=1}^{m_N} f_{j,N} \text{ et } \chi_{j,N} = \frac{f_{j,N}}{P_N}.$$

On a donc

$$\sum_{j=1}^{m_N} \chi_{j,N} = 1$$

On va démontrer que l'espace vectoriel engendré par les $\chi_{j,N}, N \in \mathbb{N}, j \in \{1, \ldots, m_N\}$ est dense dans $\mathcal{C}^0(X)$. Soit donc $f \in \mathcal{C}^0(X)$ et $\varepsilon > 0$. Le théorème de Heine nous apprend que puisque f est une fonction continue sur X f est uniformément continue : On peut donc trouver un $\eta > 0$ telle que

$$d(x, y) \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Choississons alors N telle que

$$\eta > 2^{-N+1}$$

et introduisons la fonction

$$f_\varepsilon = \sum_{j=1}^{m_N} f(x_{j,N})\chi_{j,N},$$

grâce à la relation $\sum_{j=1}^{m_N} \chi_{j,N} = 1$ on obtient que si $x \in X$ alors

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \sum_{j=1}^{m_N} \left(f(x_{j,N}) - f(x)\right) \chi_{j,N}(x)$$

On a alors

$$\chi_{j,N}(x) \neq 0 \Rightarrow x \in B\left(x_{j,N}, 2^{-N+1}\right).$$

En particulier dans la somme ci dessus il ne reste que

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \sum_{j \text{ tel que } d\left(x_{j,N},x\right) \leq 2^{-N+1}} |f(x_{j,N}) - f(x)| \chi_{j,N}(x).$$

Par construction, que chaque terme qui reste $|f(x_{j,N}) - f(x)|$ est inférieur à ε et on a

$$\sup_{x\in X} |f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon.$$

On a démontré que si $f \in \mathcal{C}^0(X)$ alors on trouve un vecteur f_ε dans l'espace vectoriel engendré par $\chi_{j,N}, N \in \mathbb{N}, j \in \{1, \ldots, m_N\}$ tel que

$$\sup_{x\in X} |f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$$

L'espace vectoriel engendré par $\chi_{j,N}, N \in \mathbb{N}, j \in \{1, \ldots, m_N\}$ est donc dense dans $\mathcal{C}^0(X)$.

vers une mesure de probabilité μ_∞ :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(X),\ \lim_k \int_X f d\mu_{n_k} = \int_X f d\mu_\infty.$$

On en déduit alors le résultat suivant :

Proposition 8.18. *Soit X un espace métrique compact et $T : X \to X$ une application continue, alors il y a une mesure de probabilité μ_∞ invariante par T :*

$$T_*\mu_\infty = \mu_\infty.$$

Démonstration. On va donc utiliser le théorème de Banach-Alaoglu sur l'espace dual de $\mathcal{C}^0(X)$ c'est à dire sur l'espace des mesures (signés) sur X.
Soit $x_0 \in X$ alors on considère les mesures de probabilités

$$\mu_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} \delta_{T^j(x_0)}.$$

C'est à dire :

$$f \in \mathcal{C}^0(X),\ \mu_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(T^j(x_0)).$$

Puisque

$$T_*\mu_n - \mu_n = \frac{1}{n+1}\left(f(T^{n+1}(x_0)) - f(x_0)\right),$$

lorsque une sous suite $(\mu_{n_k})_k$ converge vaguement vers une mesure de probabilité μ_∞ celle ci est invariante par l'application T :

$$T_*\mu_\infty = \mu_\infty.$$

□

8.0.7. *Comparaison entre la convergence faible et forte.*

Proposition 8.19. *Soit F un sous espace vectoriel fermé d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ alors F est fermé si et seulement si il est faiblement séquenciellement fermé. C'est à dire F est fermé si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de F qui converge faiblement vers $x_\infty \in \mathbf{E}$ alors $x_\infty \in F$.*

Démonstration. Seul le sens direct mérite d'être prouvé (le sens réciproque est évident dès que l'on sait que la convergence forte implique la convergence faible).
Suppsons donc que F soit un sous espace vectoriel fermé de $\mathbf{E}$. On sait que

$$F = \overline{F} = \cap_{\ell \in F^\perp} \ker \ell$$

où on a noté $F^\perp = \{\ell \in \mathbf{E}',\ \ell\big|_F = 0\}$. Soit donc une suite (x_n) d'éléments de F qui converge faiblement vers $x_\infty \in \mathbf{E}$. On sait donc que pour tout $\ell \in F^\perp$ et tout entier n :

$$\ell(x_n) = 0\ ,$$

on a donc (par définition de la convergence faible)

$$\ell(x_\infty) = 0\ ;$$

ce qui signifie que

$$x_\infty \in \cap_{\ell \in F^\perp} \ker \ell = \overline{F} = F.$$

□

En raisonnant de la même façon et en se basant sur le fait qu'un convexe fermé est l'intersection des demi espaces fermés qui le contiennent, on obtient :

Proposition 8.20. *Soit C un ensemble convexe d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ alors C est fermé si et seulement si il est séquenciellement faiblement fermé.*

8.0.8. *Un résultat sur l'existence de minimum d'une fonction convexe.* Cette dernière proposition et le théorème de Banach-Alaoglu permettent de démontrer le résultat suivant :

Théorème 8.21. *Soit $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ un espace de Banach séparable et reflexif et $f : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe tel que*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

alors f atteint son infimum : il y a un vecteur $x_0 \in \mathbf{E}$ tel que

$$f(x_0) = \inf_{x \in \mathbf{E}} f(x).$$

Démonstration. Soit $R > 0$ tel que

$$\|y\| \geq R \Rightarrow f(y) \geq f(0) + 10,$$

on a alors

$$\inf_{x \in \mathbf{E}} f(x) = \inf_{\|x\| \leq R} f(x).$$

On considère alors (x_n) une suite de $B(0, R)$ telle que :

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \inf_{\|x\| \leq R} f(x).$$

On peut extraire de cette suite une sous-suite $(x_{n_k})_k$ faiblement convergente vers un vecteur $x_\infty \in B(0, R)$. Alors la suite $\left(x_{n_k}, f(x_{n_k})\right)_k$ converge faiblement vers $(x_\infty, \inf_{\|x\| \leq R} f(x))$ dans $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$. Or cette suite est une suite de l'épigraphe de f qui est une partie convexe fermée de $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$, l'épigraphe de f est donc séquenciellement faiblement fermé , ainsi $(x_\infty, \inf_{\|x\| \leq R} f(x))$ appartient à l'épigraphe de f :

$$f(x_\infty) \leq \inf_{\|x\| \leq R} f(x) = \inf_{x \in \mathbf{E}} f(x),$$

On a donc égalité et f atteint son infimum en x_∞. □

Exercices :

(1) Soit $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ un espace de Banach séparable et reflexif, C une partie convexe bornée fermée de $\mathbf{E}$. Si $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe alors f atteint son infimum .

(2) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\lambda > 0$. démontrer l'existence de $u \in H_0^1([0,1])$ tel que

$$-u'' + \lambda u^3 = f$$

Pour cela utiliser la fonctionelle définie sur $H_0^1([0,1])$:

$$u \mapsto \int_0^1 \left[|u'|^2 + \frac{\lambda}{4} u^4\right] - \int_0^1 fu.$$

8.1. **les grands théorèmes de Banach.**

8.1.1. *Le théorème de l'application ouverte.*

Théorème 8.22. *Soient $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|_{\mathbf{E}})$ et $(\mathbf{F}, \|\,.\,\|_{\mathbf{F}})$ deux espaces de Banach et $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ une application linéaire surjective alors T est une application ouverte, c'est à dire que pour tout ouvert U de $\mathbf{E}$ alors son image par T, $T(U)$ est un ouvert de $\mathbf{F}$.*

Exercice : démontrer ce théorème si $\mathbf{F}$ est de dimension finie.
Avant de démontrer ce théorème nous allons en donner deux conséquences importantes et très utilisées :

8.1.2. *Conséquences.* Le premier est le théorème de l'isomorphisme de Banach

Théorème 8.23. *Si T est une application linéaire bijective continue entre deux espaces de Banach, alors son inverse est continue.*

La preuve de ce fait est une conséquence du théorème de l'application ouverte, car celui ci nous informe qu'une telle application linéaire T est ouverte et donc l'image réciproque d'un ouvert par T^{-1} est un ouvert, c'est à dire que l'application T^{-1} est continue.
Ce théorème a la conséquence suivante :

Corollaire 8.24. *Soit $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel $\mathbf{E}$ qui font chacune de $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|_j)$ ($j = 1, 2$) un espace de Banach on suppose qu'il existe une constante C tel que*

$$\|\,.\,\|_1 \leq C \|\,.\,\|_2$$

alors les deux normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$ sont équivalentes : il y a $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon \|\,.\,\|_2 \leq \|\,.\,\|_1 .$$

En effet l'hypothèse est que l'application identité est continue de $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|_2)$ dans $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|_1)$, le théorème de l'isomorphisme de Banach nous apprend donc que sa réciproque c'est à dire l'identité de $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|_1)$ dans $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|_2)$ est continue, on en déduit l'estimée voulue.
Exercice : Utiliser ce résultat et le théorème d'Ascoli pour démontrer le résultat suivant : soit X un sous espace vectoriel fermé de l'espace $\mathcal{C}^1([0,1])$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,1]$. On suppose qu'il existe une constante C tel que

$$\forall f \in X, \;\; \|f'\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

a) Démontrer que sur X, les normes $\| \bullet \|_{\mathcal{C}^0}$ et $\| \bullet \|_{\mathcal{C}^1}$ sont équivalentes.

b) En déduire que la boule unité de X est compacte.

c) En déduire que X est de dimension finie.

La seconde application importante est le théorème du graphe fermé :

Théorème 8.25. *Soient* $(\mathbf{E}, \| \, . \, \|_{\mathbf{E}})$ *et* $(\mathbf{F}, \| \, . \, \|_{\mathbf{F}})$ *deux espaces de Banach et* $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *une application linéaire alors* T *est continue si et seulement si son graphe*

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, T(x)) \in \mathbf{E} \times \mathbf{F}, x \in \mathbf{E}\}$$

est un sous espace vectoriel fermé de $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$.

Démonstration. Il est facile de démontrer l'implication directe car lorsque T est continue, le graphe de T est le noyau de l 'application linéaire continue

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{F} &\to \mathbf{F} \\ (x, y) &\mapsto T(x) - y \end{aligned}$$

Le sens réciproque est une conséquence du théorème de l'isomorphisme de Banach : on suppose donc que le graphe de T est un sous espace vectoriel fermé de $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$, $\mathcal{G}$ est équipé de la norme

$$N(x, T(x)) = \|x\|_{\mathbf{E}} + \|T(x)\|_{\mathbf{F}} \ .$$

C'est donc un espace de Banach. L'application linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \quad &\to \mathbf{E} \\ (x, T(x)) &\mapsto x \end{aligned}$$

est clairement bijective continue, son inverse est donc continue. Il y a donc une constante C tel que

$$\forall x \in \mathbf{E}, \ \|x\|_{\mathbf{E}} + \|T(x)\|_{\mathbf{F}} \leq C\|x\|_{\mathbf{E}}$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbf{E}, \ \|T(x)\|_{\mathbf{F}} \leq C\|x\|_{\mathbf{E}}$$

T est bien continue. □

Le théorème du graphe fermé a la conséquence suivante :

Proposition 8.26. *Soient* $(\mathbf{E}, \| \, . \, \|_{\mathbf{E}})$ *et* $(\mathbf{F}, \| \, . \, \|_{\mathbf{F}})$ *deux espaces de Banach et* $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *une application linéaire alors* T *est continue si et seulement si l'image par* T *de toutes suites faiblement convergentes est une suite faiblement convergente.*

Démonstration. Remarquons que le dual de l'espace produit $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ est isomorphe à $\mathbf{E}' \times \mathbf{F}'$. Ainsi une suite $((x_n, y_n))$ de $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ converge faiblement vers (x_∞, y_∞) si et seulement si

$$x_n \rightharpoonup x_\infty \ \text{ et } \quad y_n \rightharpoonup y_\infty$$

L'hypothèse "l'image par T de toutes suites faiblement convergentes est une suite faiblement convergente" équivaut donc au fait que le graphe de T soit faiblement séquentiellement fermé dans $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ or ceci équivaut à ce que le graphe de T soit fermé et donc d'après le théorème du graphe fermé ceci équivaut à ce que T soit continue. □

8.1.3. *Preuve du théorème de l'application ouverte.* On considère donc $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ une application continue surjective et on va démontrer que 0 est intérieur à $T(B(0,1))$. Avec l'égalité :

$$T(B(a,r)) = T(a) + rT(B(0,1)) \quad ,$$

ceci impliquera que l'image par T de toutes boules ouvertes est un ouvert de $\mathbf{F}$, et ceci implique facilement que T est une application ouverte.
On a

$$\mathbf{F} = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{T(B(0,n))}$$

donc le théorème de Baire implique qu'il y a un entier non nul n tel que $\overline{T(B(0,n))}$ soit d'intérieur non vide. Démontrons qu'il y a alors un $x_0 \in B(0,n)$ et un $\delta > 0$ tel que

$$B(T(x_0), \delta) \subset \overline{T(B(0,n))}$$

Par hypothèse il y a un $y \in \overline{T(B(0,n))}$ et un $\varepsilon > 0$ tel que

$$B(y, \varepsilon) \subset \overline{T(B(0,n))}$$

Puisque $y \in \overline{T(B(0,n))}$ il y a un $y_0 = T(x_0) \in T(B(0,n))$ tel que

$$\|y_0 - y\|_{\mathbf{F}} \leq \varepsilon/2$$

Posons $\delta = \varepsilon/2$, alors grL'ce à l'inégalité triangulaire , on a :

$$B(T(x_0), \delta) \subset B(y, \varepsilon) \subset \overline{T(B(0,n))}.$$

On a donc également

$$-B(T(x_0), \delta) = B(-T(x_0), \delta) \subset \overline{T(B(0,n))}.$$

On en déduit que

$$B(0, \delta)) \subset \overline{T(B(0,n))},$$

en effet pour $v \in B(0, \delta))$, on écrit

$$v = \frac{1}{2}(v - T(x_0)) + \frac{1}{2}(v + T(x_0)),$$

$\overline{T(B(0,n))}$ est l'adhérence d'une partie convexe, il est donc convexe ; on a donc bien $v \in \overline{T(B(0,n))}$.
Posons $r = \delta/n$, on a obtenu :

$$B(0, r) \subset \overline{T(B(0,1))} \ ,$$

Ce qui signifie :

$$\forall y \in \mathbf{F}, \|y\|_{\mathbf{F}} < r, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in B(0,1), \|T(x) - y\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon,$$

ou encore

$$\forall \eta > 0, \forall y \in \mathbf{F}, \|y\|_{\mathbf{F}} < r\eta, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in B(0,\eta), \|T(x) - y\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon\eta.$$

On va maintenant démontrer que $B(0, r/2) \subset T(B(0,1))$. On considère $y \in \mathbf{F}$ tel que $\|y\| < r/2$, on sait qu'il existe $x_1 \in \mathbf{E}, \|x_1\|_{\mathbf{E}} < \frac{1}{4}$ tel que

$$\|T(x_1) - y\|_{\mathbf{F}} < r/4.$$

On construit ainsi par récurrence immédiate une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ tel que pour tout entier $k \geq 1$ on ait

$$\|x_k\|_{\mathbf{E}} < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

et tel que si $z_k = y - \sum_{\ell=1}^{k} T(x_\ell)$ alors

$$\|z_k\|_{\mathbf{F}} < \frac{r}{2^{k+1}}.$$

Alors puisque $\mathbf{E}$ est complet la série de terme général x_k converge et en posant

$$x = \sum_{k\geq 1} x_k$$

on obtient $\|x\| < r$ et $T(x) = y$. □

8.2. **Alternative de Fredholm.**

8.2.1. *Les opérateurs compacts.*

Définition 8.27. *Soient $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|_{\mathbf{E}})$ et $(\mathbf{F}, \|\,.\,\|_{\mathbf{F}})$ deux espaces de Banach, on dit qu'une application linéaire $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ est compacte si l'image de la boule unité de $\mathbf{E}$ par T est relativement compact dans $\mathbf{F}$.*

Remarque 8.28. *Une partie relativement compacte étant bornée, on en déduit d'une application linéaire compact est continue. Une formulation équivalente serait de définir une application linéaire compacte comme étant les applications linéaires qui envoie les parties bornées de $\mathbf{E}$ sur des parties relativement compactes de $\mathbf{F}$.*

8.2.2. *Lien avec la topologie faible :*

Proposition 8.29. *Soient $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|_{\mathbf{E}})$ et $(\mathbf{F}, \|\,.\,\|_{\mathbf{F}})$ deux espaces de Banach et $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ une application linéaire. On suppose que $\mathbf{E}$ est reflexif et séparable. Alors T est un opérateur compact si et seulement si l'image de toute suite faiblement convergente de $\mathbf{E}$ par T est une suite fortement convergente. Autrement dit T est compact si et seulement si*

$$x_n \rightharpoonup x_\infty \Rightarrow \ T(x_n) \to T(x_\infty).$$

Démonstration. Ceci est en effet une conséquence du théorème de Banach-Alaoglu. Par définition, T est un opérateur compact si et seulement si de toute suite bornée de $\mathbf{E}$ on peut extraire une sous suite dont l'image par T converge. Or lorsque $\mathbf{E}$ est reflexif et séparable on sait que de toute suite bornée, on peut extraire une sous suite faiblement convergente. Ainsi la condition énoncée ci dessus implique la compacité de l'opérateur T.
Réciproquement lorsque T est un opérateur compact, alors T est continue . Et si (x_n) est une suite faiblement convergente :

$$x_n \rightharpoonup x_\infty \ ,$$

alors $(T(x_n))$ est une suite faiblement convergente :

$$T(x_n) \rightharpoonup T(x_\infty) \ .$$

La suite (x_n) est bornée, la compacité de l'opérateur T implique la suite $(T(x_n))$ reste dans un compact de $\mathbf{F}$. En particulier elle admet des sous suites convergentes fortement. Or une suite qui converge fortement, converge faiblement ; on en déduit que la seule valeur d'adhérence de la suite $(T(x_n))$ est $T(x_\infty)$. La suite $(T(x_n))$ reste dans un compact de $\mathbf{F}$ et n'a qu'une seule valeur d'adhérence : elle converge donc vers cette valeur d'adhérence. $\square$

Des exemples :

— Les opérateurs de rang fini sont compacts.

— Une limite en norme d'opérateurs d'une suite d'opérateurs compacts est compact. Si $T_n : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ est une suite d'opérateurs compacts qui converge vers un opérateur $T_\infty : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|T_n - T_\infty\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})} = 0$$

alors T_∞ est un opérateur compact. La preuve de ce dernier résultat est identique à celle que l'on a fait dans le cadre des espaces de Hilbert. On invite le lecteur à refaire cette preuve dans ce cadre là et réaliser que celle ci est identique.

— En particulier, une limite d'opérateurs de rang fini est compact. Cependant il n'est pas vrai qu'en général tout opérateur compact est limite d'opérateur de rang fini. La problématique de trouver des critères pour que dans un espace de Banach, tous les opérateurs compacts soient limite d'opérateurs de rang fini est une question intéressante (voir par exeemple le livre de Gohberg et Krein et l'article de Enflo dans la revue Acta mathematica en 1973 vol 130, pages 309 et suivantes.)

— Démontrer que si $1 < p < +\infty$ et que si $T : \ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$ est un opérateur compact alors il existe une suite (T_n) d'opérateurs de rang fini qui converge vers T [32].

— Lorsque X est un espace métrique compact et k une fonction continue sur le produit $X \times X$ et μ une mesure finie sur X alors l'application $T_{k,\mu} : \mathcal{C}^0(X,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ définie par

$$T_{k,\mu}(f)(x) = \int_X k(x,y)f(y)d\mu(y)$$

est une application compacte [33].

8.2.3. *Dualité et opérateur compact :* Une propriété utile des opérateurs compacts est le théorème de Schauder :

Théorème 8.30. *Soient* $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|_{\mathbf{E}})$ *et* $(\mathbf{F}, \|\,.\,\|_{\mathbf{F}})$ *deux espaces de Banach, si* $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *est une application linéaire compacte alors son adjoint est* $T' : \mathbf{F}' \to \mathbf{E}'$.

Démonstration. On sait donc que $K = \overline{T(\mathbb{B}_{\mathbf{E}})}$ est un compact de $\mathbf{F}$. On considère le sous ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions continues sur K formées par les restrictions à K des formes linéaires continues de norme inférieure à 1 :

$$\mathcal{E} = \{\ell : K \to \mathbb{R},\ \ell \in \mathbf{F}', \|\ell\|_{\mathbf{F}'} \leq 1\} \subset \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}).$$

On vérifie facilement que $\mathcal{E}$ est une famille équicontinue

$$\ell \in \mathcal{E}, x, y \in K \Rightarrow |\ell(x) - \ell(y)| \leq \|x - y\|$$

et bornée :

$$\ell \in \mathcal{E}, x \in K \Rightarrow \|\ell(x)| \leq \|T\|.$$

D'après le théorème d'Ascoli, $\mathcal{E}$ est une partie relativement compacte de $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$. Ceci implique que l'image par l'adjoint de T de la boule unité de $\mathbf{F}'$ est relativement compacte dans $\mathbf{E}'$. En effet si (ℓ_k) est une suite des formes linéaires continues de norme inférieure à 1. Le résultat sur l'on vient de prouver montre qu'il existe une sous suite (ℓ_{n_k}) qui converge uniformément sur K.

$$\forall\varepsilon > 0, \exists k_0, \forall p, q \geq k_0,\ \sup_{y\in K} |\ell_{n_p}(y) - \ell_{n_q}(y)| < \varepsilon.$$

Ceci implique que la suite $(T'(\ell_{n_k})) = (\ell_{n_k} \circ T)$ est de Cauchy dans $\mathbf{E}'$. En effet

$$\forall\varepsilon > 0, \exists k_0, \forall p, q \geq k_0,$$
$$\sup_{x\in\mathbb{B}_{\mathbf{E}}} |\ell_{n_p}(T(x)) - \ell_{n_q}(T(x))| \leq \sup_{y\in K} |\ell_{n_p}(y) - \ell_{n_q}(y)| < \varepsilon.$$

32. Il faudra pour cela reprendre la preuve qui a été faite dans le cas des espaces de Hilbert séparable. Et démontrer qu'en fait pour chaque $\varepsilon >$, il existe $y(1), \ldots, y(k) \in \ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$ et $N > 0$ tel que l'image par T de boule unité de $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$ soit incluse dans la réunion des boules de centres y_i et de rayon $\varepsilon/3$ et que de plus les suites $y(1), \ldots, y(k)$ soient nulles à partir du rang $N + 1$. Il faudra alors considérer la projection π_N qui a une suite $(u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots)$ associe la suite $(u_0, u_1, \ldots, u_N, 0, 0, 0, \ldots\ldots)$.

33. Faite la preuve en exercice, il faudra utiliser le théorème de Heine et le théorème d'Ascoli.

Elle converge donc. On a bien démontré que l'adjoint de T est un opérateur compact. $\square$

8.3. **Alternative de Fredholm.** Le lemme suivant nous sera très utile dans la suite de ce chapitre :

Lemme 8.31. ***de Riesz.*** *Soit* $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ *un espace vectoriel normé et* $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ *un sous espace vectoriel fermé de* $\mathbf{E}$*. Si* $\mathbf{F} \neq \mathbf{E}$ *alors pour tout* $\varepsilon \in]0,1[$*, il existe un* $x \in \mathbf{E}$ *tel que*

$$\|x\| = 1 \quad \text{et} \quad d(x, \mathbf{F}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Démonstration. Soit donc $b \notin F$, il y a $c \in F$ tel que

$$(1-\varepsilon)\|b-c\| \leq d(b,F) \ .$$

On pose alors

$$x = \frac{b-c}{\|b-c\|} \ .$$

Pour $z \in F$, on a alors :

$$\|x - z\| = \frac{1}{\|b-c\|} \, \| \, b - c - \|b-c\| z \, \|$$

et puisque $c - \|b-c\|z \in F$ on a :

$$\|b - c - \|b-c\|z\| \geq d(b,F) \geq (1-\varepsilon)\|b-c\|.$$

D'oİ le résultat énoncé. $\square$

Le but de ce chapître est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 8.32. *Soit* $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ *un espace de Banach et* $T : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ *un opérateur compact. Alors l'opérateur* $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T$ *est injectif si et seulement si il est surjectif et donc si et seulement si il est un isomorphisme. De plus il existe un entier* ν *tel que si* k *est un entier supérieur ou égal à* ν *alors*

$$\ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{\nu} = \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{k} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{\nu} = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{k}$$

de plus on a la décomposition :

$$\mathbf{E} = \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{\nu} \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{\nu},$$

et les projecteurs sur chacuns des facteurs de cette décomposition sont continus et ils commutent avec T*.*

On commence pour cela par démontrer le résultat préliminaire suivant :

Proposition 8.33. *Soit* $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|)$ *un espace de Banach et* $T : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ *un opérateur compact alors* $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)$ *est de dimension finie et* $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)$ *est un sous espace vectoriel fermé de codimension finie.*

Démonstration. La première assertion est une conséquence du théorème de Riesz puisque T est compact, c'est un opérateur continu et ainsi $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathbf{E}$. De plus pour tout $x \in \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)$ on a $T(x) = x$. Ainsi la boule unité de $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)$ est relativement compacte car incluse dans $T(\mathbb{B}_{\mathbf{E}})$, le théorème de Riesz implique donc que $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)$ est de dimension finie.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)$, considérons maintenant la base duale $(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_n)$ i.e. pour chaque $x \in \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)$

$$x = \sum_i \tilde{\theta}_i(x) e_i.$$

L'espace $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)$ étant de dimension finie, les formes linéaires $\tilde{\theta}_i$ sont continues et le théorème de Hahn-Banach nous permet de trouver une forme linéaire continue θ_i sur $\mathbf{E}$ qui étende $\tilde{\theta}_i$. Il est alors facile de démontrer que le sous espace vectoriel $E_1 = \cap_i \ker \theta_i$ est un supplémentaire de $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)$ [34].
On montre alors qu'il y a une constante $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in E_1, \ \|x - T(x)\| \geq \varepsilon \|x\|, \tag{29}$$

en effet si cela n'était pas le cas on trouverait une suite (x_n) de E_1 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \|x_n\| = 1 \ \text{ et } \ \|x_n - T(x_n)\| \leq \frac{1}{n}.$$

Par compacité de l'opérateur T on pourrait alors extraire une sous suite (x_{n_k}) telle que la suite $(T(x_{n_k}))_k$ converge vers un $y \in \mathbf{E}$. Puisque l'on aurait :

$$\|x_{n_k} - T(x_{n_k})\| \leq \frac{1}{n_k},$$

on en déduirait :

$$\lim_k x_{n_k} = y$$

34. L'argumentation faite ici permet de démontrer le lemme suivant

Lemme 8.34. *Un sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace de Banach admet toujours un supplémentaire fermé.*

et donc $\|y\| = 1$; de plus puisque E_1 est un sous espace vectoriel fermé de $\mathbf{E}$ on aurait $y \in E_1$ et aussi $y = T(y)$ par continuité de T, ce qui est impossible car $E_1 \cap \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T) = \{0\}$.
À l'aide de l'inégalité (29), il est facile alors de conclure que l'image de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T$ est fermé. En effet puisque E_1 est un supplémentaire de $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)$ on a

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T) = (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)(E_1).$$

Et l'inégalité (29) implique que qu'une suite d'éléments de $(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)(E_1)$ qui converge dans $\mathbf{E}$ converge vers un élément de $(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)(E_1)$.
La dernière assertion est alors un corollaire du fait suivant :

Proposition 8.35. *Soient* $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|_{\mathbf{E}})$ *et* $(\mathbf{F}, \|\,.\,\|_{\mathbf{F}})$ *deux espaces de Banach et* $A : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *est une application linéaire continue alors*

$$\overline{\mathrm{Im}\, A} = \cap_{\ell \in \ker A'} \ker A'.$$

Ceci est en effet une conséquence de la proposition (6.18) et du fait que

$$\ell \in \ker A' \iff \ell \circ A = 0 \iff \ell\big|_{\mathrm{Im}\, A} = 0.$$

Dans notre cas, grâce au théorème de Schauder, on sait que l'opérateur T' est aussi compact et donc que le noyau de l'opérateur $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}'} - T'$ est de dimension finie. Si on considère une base $(\ell_1, \ldots, \ell_k)$ de $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}'} - T')$, on obtient :

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T) = \{x \in \mathbf{E}, \forall j, \ell_j(x) = 0\}$$

ce qui montre que l'image de l'opérateur $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T$ est de codimension finie. □

Exercice : En vous aidant des arguments donnés ci dessus démontrer le résultat suivant :

Proposition 8.36. *Soient* $(\mathbf{E}, \|\,.\,\|_{\mathbf{E}})$ *et* $(\mathbf{F}, \|\,.\,\|_{\mathbf{F}})$ *deux espaces de Banach, on suppose que* $\mathbf{E}$ *est un espace de Banach séparable réflexif et on considère* $A : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *une application linéaire continue. Le noyau de* A *est de dimension finie et l'image de* A *est fermée si et seulement si l'implication suivante est vraie : "pour toute suite* (x_n) *de* $\mathbf{E}$ *telle que*

- (x_n) *converge faiblement*
- $(A(x_n))$ *converge fortement*

alors (x_n) *converge fortement."*

On commence alors la démonstration de l'alternative de Fredholm : pour $l \in \mathbb{N}$ on pose

$$N_l = \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^l.$$

On sait que (N_l) forme une suite croissante de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{E}$ chacun de dimension finie.
Supposons que pour tout entier l

$$N_l \subsetneq N_{l+1}.$$

Alors grâce au lemme de Riesz, on peut, pour tout entier l, trouver un vecteur $x_l \in N_{l+1}$ tel que

$$\|x_l\| = 1 \quad \text{et} \quad d(x_l, N_l) \geq \frac{1}{2}.$$

Alors pour $x \in N_l$, on a

$$T(x_l) - T(x) = x_l - [x + (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)(x_l) - (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)(x)]\,.$$

Or $(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)(x_l) \in N_l$, $x \in N_l$ et $(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)(x) \in N_l$, donc on a pour tout $x \in N_l$:

$$\|T(x_l) - T(x)\| \geq d(x_l, N_l) \geq \frac{1}{2}$$

On applique ceci à x_j pour les entiers $j < l$, et on obtient pour tous les entiers $j < l$:

$$\|T(x_l) - T(x_j)\| \geq \frac{1}{2}$$

Ce qui implique que la suite $(T(x_n))$ n'a pas de valeurs d'adhérences et ceci est contradictoire avec l'hypothèse que l'opérateur T est un opérateur compact.
Il existe donc un entier l tel que $N_l = N_{l+1}$, ceci implique qu'alors pour tout entier $k \geq l$: $N_l = N_k$.
De la même façon la suite $(R_l = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^l)$ est une suite décroissante de sous espace vectoriel fermé de $\mathbf{E}$ de codimension finie. On sait qu'il existe un entier k tel que pour tout entier $j > k$:

$$\ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}'} - T')^j = \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}'} - T')^k$$

et avec la proposition (8.35), on en déduit que pour tout $j > k$ on a $R_j = R_k$.
Notons ν le premier entier l tel que $N_l = N_{l+1}$, et μ le premier entier l tel que $R_l = R_{l+1}$. L'opérateur $(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T) : R_\mu \to R_\mu$ est surjectif [35]. Démontrons que cet opérateur est injectif :

35. notez que $(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)(R_\mu) = R_{\mu+1} = R_\mu$.

Soit $x \in R_\mu$ vérifiant $(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)(x) = 0$. Puisque pour tout entier $l \geq 0$ on a $(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^l(R_\mu) = R_\mu$, on trouve $y \in R_\mu$ tel que

$$x = (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu(y).$$

On a alors $y \in N_{\nu+1} = N_\nu$ et donc $x = (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu(y) = 0$ et on a bien démontré que l'opérateur $(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T) : R_\mu \to R_\mu$ est injectif. Ainsi l'opérateur $(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T) : R_\mu \to R_\mu$ est un isomorphisme.
Ceci démontre que si $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T$ est surjectif[36] alors il est un isomorphisme.
On en déduit que lorsque $x \in \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{\mu+1}$ alors $y = (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\mu(x) \in R_\mu$ et $(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)y = 0$ donc $y = 0$; c'est à dire $x \in \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\mu$. Ceci démontre que $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{\mu+1} = \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\mu$ et donc que

$$\nu \leq \mu.$$

Provons maintenant l'inégalité $\nu \geq \mu$. Soit $y \in R_{\mu-1} \setminus R_\mu$, on peut trouver $x \in \mathbf{E}$ tel que $y = (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{\mu-1}(x)$; on a $(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)(y) \in R_\mu$. Puisque $(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T) : R_\mu \to R_\mu$ est un isomorphisme, on peut trouver un unique $z \in R_\mu$ tel que

$$(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\mu(z) = (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)(y) \ .$$

On a donc

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\mu(z - x) &= (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\mu(z) - (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{\mu-1}(x) \\ &= (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\mu(z) - (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)(y) \\ &= 0\end{aligned}$$

donc $z - x \in \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\mu$ mais remarquons alors que $z \in R_\mu$, donc

$$(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{\mu-1}(z) \in R_\mu$$

et alors

$$(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{\mu-1}(z - x) = (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{\mu-1}(z) - y \neq 0.$$

Ainsi on a trouvé un élement

$$z - x \in \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\mu \setminus \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{\mu-1}.$$

Ce qui implique que

$$\nu \geq \mu.$$

36. C'est à dire si $\mu = 0$: $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^0 = \mathbf{E}$.

On a donc démontré que $\nu = \mu$. On peut alors conclure que

$$\mathbf{E} = \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu$$

En effet il est alors clair que si $x \in \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu \cap \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu$ alors $x = (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu(z)$ avec $z \in \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^{2\nu} = \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu$ donc

$$x = (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu(z) = 0 \ .$$

Ensuite si $x \in \mathbf{E}$, on a $(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu(x) \in R_\mu = ((\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu)(R_\nu)$. On trouve donc $y \in R_\nu$ tel que

$$(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu(x) = (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu(y).$$

On a ainsi

$$x = x - y + y \text{ avec } (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu(x - y) = 0 \text{ et } \quad y \in R_\nu.$$

Ce qui montre que

$$\mathbf{E} = \ker(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu,$$

La construction ci-dessus montre que les projecteurs sur chacuns des facteurs de cette décomposition commutent avec T. La continuité de ces projections vient du fait que grâce au théorème d'isomorphisme de Banach, l'application réciproque de

$$(\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu : R_\nu \to R_\nu$$

est continue, si on note G cette application réciproque alors le raisonnement ci dessus montre que la projection sur le facteur R_ν de cette décomposition est $G \circ (\mathrm{Id}_{\mathbf{E}} - T)^\nu$, il est donc continue. $\square$