Déterminant relatif et la fonction Xi

Gilles CARRON

15 mars 2006

Résumé

Nous obtenons un analogue de la formule de Weyl (ou plutôt sa version intégrée) pour les domaines non-bornés d'une variété riemannienne complète. Cet asymptotique concerne la fonction de décalage spectral de M. Krein. On donne aussi des formules reliant cette fonction et la ζ-régularisation du déterminant de quelques opérateurs.

Mots-clés : fonction de décalage spectral, opérateur de Dirichlet-to-Neumann, déterminant relatif, opérateur de Gauss-Bonnet, états résonnants d'énergie nulle.

Abstract

We obtain a analogue of the Weyl's law (more precisely its integrated version) for unbounded domain of a complete Riemannian manifold. This asymptotic is for the spectral shift function of M. Krein. We also give a formula relating this function and the ζ-regularisation of the determinant of some operator.

Keys-words : spectral shift function, Dirichlet-to-Neumann operator, relative déterminant, Gauss-Bonnet operator, zero energy resonnance.

Mathematics Subjet Classification (2000) : 58J50, 58J32, 58J20, 47A40.

Table des matières

1 Introduction.

L'objectif de cet article est d'étudier les opérateurs de type laplacien sur les variétés riemanniennes complètes non-compactes, et particulièrement certaines de leurs propriétés spectrales. Une partie de notre étude est motivée par le très bel article de F. Gesztesy et B. Simon. Dans [G-S 2], les auteurs étudient la fonction Xi, dite de décalage spectral, du couple

$$(H, H_0) = \left(\left(-d^2/dt^2 + V\right), \left(-d^2/dt^2 + V\right)_0\right), \text{ sur } L^2(\mathrm{I\!R}, dt)$$

où $V : \mathrm{I\!R} \longrightarrow \mathrm{I\!R}$ est une fonction bornée inférieurement et H_0 est l'opérateur $-d^2/dt^2 + V$ avec les conditions de Dirichlet en $0 \in \mathrm{I\!R}$. Ainsi H est une perturbation de rang 1 de H_0 et selon la théorie de M. Krein, il y a une unique fonction $\xi \in L^1(\mathrm{I\!R}, d\lambda/(1+\lambda)^2)$ telle que $\xi(\lambda) = 0$ si $\lambda << 0$ et telle que, pour tout réel positif t, on a

$$\mathrm{Tr}\ \left(e^{-tH} - e^{-tH_0}\right) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda, H, H_0) t e^{-t\lambda} d\lambda.$$

De plus grâce au théorème 1.1 de [G-S 2], on a la formule

$$\xi(\lambda) = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \text{ Arg } G(\lambda + i\varepsilon, 0, 0), \ p.p. \ \lambda \geq 0.$$

Où on a noté $G(z, x, y), z \in \mathbb{C}, \ x, y \in \mathbb{R}$ le noyau de Green de l'opérateur $(H - z)^{-1}$.

Notre objectif est de faire de même sur les variétés riemanniennes. Soit donc (M^n, g) une variété riemannienne complète, soit $\Delta = d^*d$ le laplacien associé à la métrique. Dans cette introduction, on se contentera de décrire le cas de cet opérateur, mais notre étude est valable pour tout opérateur de type laplacien raisonnable : les opérateurs de Schrödinger du type $\Delta + V$, où V est une fonction bornée inférieurement, le laplacien de Hodge-deRham agissant sur les formes différentielles, etc. Soit Σ une hypersurface compacte lisse de M qui sépare M

$$M - \Sigma = M_- \sqcup M_+;$$

on peut alors définir l'opérateur autoadjoint non-borné sur $L^2(M)$ qui correspond au laplacien, on note encore cet opérateur Δ, et on peut aussi construire un autre opérateur auto-adjoint qui correspond au laplacien pour les conditions de Dirichlet sur Σ, on le note Δ_0. Notre premier résultat est le suivant :

Théorème. 1.1 *Soit ν un entier tel que $\nu > (n-1)/2$, alors pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$, les opérateurs*

$$(\Delta - z)^{-\nu} - (\Delta_0 - z)^{-\nu}$$

sont à trace.

Ce théorème assure que les opérateurs d'ondes

$$W^{\pm} = s - \lim_{t \to \mp\infty} e^{it\Delta} e^{-it\Delta_0} P_0$$

existent et sont complets ; où on a noté P_0 le projecteur spectral de Δ_0 correspondant au spectre absolument continu. Cependant, ceci est très abstrait ici, puisqu'il se peut bien que les opérateurs Δ et Δ_0 n'aient pas de spectre absolument continu !

De tels résultats, concernant plutôt la différence des opérateurs de la chaleur $e^{-t\Delta} - e^{-t\Delta_0}$, ont été montrés par U. Bunke, [B], ceci avec l'hypothèse supplémentaire que la variété soit à courbure bornée ; notre étude montre que ce n'est pas nécéssaire même pour le laplacien sur les formes différentielles.

Encore ici, le principal outil est la fonction Xi, de décalage spectral de M. Krein. La théorie de M. Krein nous apprend qu'il existe une unique fonction

$$\xi(\lambda, \Delta, \Delta_0) \in L^1\left(\mathbb{R}_+, \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^{\nu+1}}\right)$$

tel que pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$

$$\text{Tr } \left((\Delta - z)^{-\nu} - (\Delta_0 - z)^{-\nu}\right) = -\nu \int_0^\infty \xi(\lambda, \Delta, \Delta_0) \frac{d\lambda}{(\lambda - z)^{\nu+1}}.$$

De plus selon M. Birman et M. Krein, presque partout sur le spectre absolument continue de Δ_0, la fonction $-2\pi\xi$ coincide à un entier près avec la phase de la matrice de scattering. De façon similaire au théorème 1.1 de [G-S 2], nous obtenons une description de la fonction Xi en fonction de l'opérateur de Green $(\Delta - z)^{-1}$. Ceci se fait par l'intermédiaire de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann :

Définition 1.2 *Soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$, alors l'opérateur de Dirichlet to Neumann $\mathcal{N}(z) : C^\infty(\Sigma) \longrightarrow C^\infty(\Sigma)$ est défini de la façon suivante : si $f \in C^\infty(\Sigma)$ alors il y a une unique fonction $\tilde{f} \in L^2(M)$ telle que*

$$\begin{cases} (\Delta - z)\tilde{f} = 0 & \text{sur } M - \Sigma \\ \tilde{f} = f & \text{le long de } \Sigma \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ est alors continue sur M et sa dérivée présente un saut le long de Σ, alors $\mathcal{N}(z)f$ est précisément ce saut :

$$\mathcal{N}(z)f = \left(\frac{\partial}{\partial n^+}\tilde{f}|_{M_+} + \frac{\partial}{\partial n^-}\tilde{f}|_{M_-} \right),$$

où n^+ et n^- sont les normales unitaires extérieures le long de Σ.

De façon similaire au cas des variétés compactes, l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 elliptique inversible. Et son noyau de Schwartz est le noyau de Schwartz de $(\Delta - z)^{-1}$, c'est à dire, que si on note $G(z, x, y)$ ce noyau, alors on a

$$\mathcal{N}(z)^{-1}f(x) = \int_\Sigma G(z, x, y)f(y)dy.$$

Ceci permet de définir le déterminant régularisé de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann. Suivant [R-S], on définit la fonction zeta

$$\zeta(s) = \mathrm{Tr}\, \mathcal{N}(z)^{-s},$$

c'est une fonction holomorphe sur l'ouvert $\{s \in \mathbb{C}, \Re s > n - 1\}$. De plus, cette fonction admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier et elle est holomorphe en 0. On définit alors

$$\det \mathcal{N}(z) = e^{-\frac{d}{ds}|_{s=0}\zeta(s)}.$$

Nous obtiendrons alors le résultat suivant

Théorème. 1.3 *Pour presque tout $\lambda \geq 0$, on a l'égalité*

$$\xi(\lambda, \Delta, \Delta_0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \mathrm{Arg}\, \det \mathcal{N}(\lambda + i\varepsilon).$$

Ce théorème peut être vu comme une généralisation du théorème 1.1 de [G-S 2]. En effet, dans ce cas l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann est simplement l'opérateur de multiplication par $1/G(z, 0, 0)$.

Une autre partie de notre travail est motivée par un article de W. Müller ; dans [Mu 2], l'auteur donne des conditions pour que le déterminant relatif de deux opérateurs autoadjoints soit bien défini ; et il donne de nombreux exemples. Dans un cadre euclidien, ces déterminants relatifs avaient été étudiées par V. Bruneau [Br]. Dans son papier W. Müller remarque que grâce aux résultats de U. Bunke, on peut définir le déterminant relatif des opérateurs $(\Delta - z, \Delta_0 - z)$. Nous obtenons ici le résultat suivant :

Théorème. 1.4 *Il y a un polynôme à coefficients réels P de degré inférieur à $(n-1)/2$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$*

$$\det\ (\Delta - z, \Delta_0 - z) = e^{P(z)} \det \mathcal{N}(z).$$

De plus, lorsque M est de dimension 2, ce polynôme est nul.

Dans le cas des variétés compactes de dimension 1 ou 2, ce résultat est du à S.Levit, U. Smilansky ([L-S]), R. Forman ([F]) et à D. Burghelea, L. Friedlander, T. Kappeler ([B-F-K]) ; récemment, A. Hassel et S Zelditch ont obtenue une telle formule dans le plan euclien. Dans ces travaux, il est montré que ce polynôme est nul. L'addition de ces deux derniers théorèmes montrent que nous avons obtenu le résultat suivant : pour presque tout $\lambda \geq 0$, on a l'égalité

$$\xi(\lambda, \Delta, \Delta_0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \text{ Arg } \det\ (\Delta - \lambda - i\varepsilon, \Delta_0 - \lambda - i\varepsilon).$$

Ce qui est à posteriori un heureux résultat puisque la fonction de décalage spectral est définie à partir d'un déterminant de Fredholm reliant Δ et Δ_0.

Nos résultats permettent aussi d'étudier le cas où on considère l'opérateur laplacien au dehors d'un obstacle avec les conditions de Dirichlet sur le bord. Nos résultats sont alors les suivants :

Théorème. 1.5 *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète et $\mathcal{O}$ un domaine compact de M à bord lisse. Et soit $\Delta_{M-\mathcal{O}}$ l'opérateur auto-adjoint de $L^2(M - \mathcal{O})$ qui correspond au laplacien pour les conditions de Dirichlet sur $\partial\mathcal{O}$. Alors si ν est un entier, $\nu > n/2$, alors pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$, les opérateurs*

$$(\Delta - z)^{-\nu} - (\Delta_{M-\mathcal{O}} - z)^{-\nu}$$

sont à trace. De plus si $\mathcal{N}(z)$ est l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann de $\partial\mathcal{O} \subset M$ et $N_{\mathcal{O}}$ est la fonction de comptage des valeurs propres du laplacien sur $\mathcal{O}$ avec les conditions de Dirichlet sur $\partial\mathcal{O}$. Alors pour presque tout $\lambda \geq 0$, la fonction de décalage spectral du couple $(\Delta, \Delta_{M-\mathcal{O}})$ vérifie

$$\xi(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}_\Omega) \quad = \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \text{ Argdet } \mathcal{N}(\lambda + i\varepsilon) - N_{\mathcal{O}}(\lambda).$$

A notre connaissance, cette dernière égalité n'était pas connue y-compris dans le cadre euclidien. Nous pouvons ici donner une formule asymptotique pour la fonction Xi du couple $(\Delta, \Delta_{M-\mathcal{O}})$:

Théorème. 1.6 *Lorsque Λ tend vers l'infini, on a*

$$\int_0^\Lambda \xi(\lambda, \Delta, \Delta_{M-\mathcal{O}}) d\lambda \sim -\frac{\operatorname{vol}\mathcal{O}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Lambda^{n/2+1}}{\Gamma(n/2+2)}.$$

La fonction de décalage spectral doit être pensée comme une version régularisée de la fonction de comptage des valeurs propres ; c'est donc à l'asymptotique de Weyl qu'il faudrait s'attendre :

$$-\xi(\lambda, \Delta, \Delta_{M-\mathcal{O}}) \simeq \frac{\operatorname{vol}\mathcal{O}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\lambda^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Cet asymptotique de Weyl a été obtenue dans dans de nombreux cadres géométriques : le cadre euclidien ([Bu], [J-K], [M-R], [CdV], [Gu], [P-P], [Me], [R], [C1], [C2],[P3]) ; pour les variétés à bouts cylindriques ([C-Z], [P1]), pour les surfaces hyperboliques de géométrie finie ([Mu 1], [P2], [G-Z]). Cependant, ce type d'asymptotique est sûrement faux en général, notre résultat montre que sa version integrée est toujours vrai.

La dernière partie de notre article est consacrée au cas du laplacien de Hodge-deRham sur les formes différentielles. Nos résultats sont des généralisations de ceux de N. Borisov, W. Müller et R. Schrader ([B-M-S]). Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète, on note d l'opérateur de différentiation extérieure et δ son adjoint formel. Suivant Chernoff [Ch], on sait que l'opérateur $(d+\delta)$ est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\Lambda T^*M) \subset L^2(\Lambda T^*M)$; on note $\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d$ son carré, c'est l'opérateur auto-adjoint associé au laplacien de Hodge-deRham. Si $\mathcal{O}$ est un domaine compact à bord lisse, on considère sur $M - \mathcal{O}$, l'opérateur $(d+\delta)$ pour les conditions absolues au bord

$$\mathcal{D}\left((d+\delta)_{Abs}\right) = \{\alpha \in L^2(\Lambda T^*M), (d+\delta)\alpha \in L^2, \text{ et } \operatorname{int}_n \alpha = 0\},$$

où $n : \Sigma \longrightarrow T\Omega$ est le champ normal unitaire extérieur à $M - \mathcal{O}$. On notera Δ_{Abs} le carré de cet opérateur. Les théorèmes de Hodge-deRham et de P. E. Conner assurent que lorsque M est compact, les noyaux de ces laplaciens sont reliés aux groupes de cohomologie réelle de M et $M - \mathcal{O}$, on a les isomorphismes :

$$\operatorname{Ker} \Delta \cap L^2(\Lambda^p T^*M) \simeq H^p(M, \mathbb{R})$$

$$\operatorname{Ker} \Delta_{Abs} \cap L^2(\Lambda^p T^*(M-\mathcal{O})) \simeq H^p(M-\mathcal{O}, \mathbb{R}).$$

Notons τ l'endomorphisme de $\Lambda^p T^*M$ qui est $(-1)^p \mathrm{Id}$. Alors, grâce au théorème de MacKean-Singer, on a

$$\operatorname{Tr} \tau \left(e^{-t\Delta} - e^{-t\Delta_{Abs}}\right) = \chi(M) - \chi(M-\mathcal{O}) = \chi(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}).$$

Un de nos résultat est que cette identité est encore valable sur les variétés non-compactes :

Théorème. 1.7 *Pour tout $t > 0$, l'opérateur $e^{-t\Delta} - e^{-t\Delta_{Abs}}$ est à trace, de plus on a*

$$\operatorname{Tr} \tau \left(e^{-t\Delta} - e^{-t\Delta_{Abs}}\right) = \chi(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}).$$

Ce théorème a été obtenu par N. Borisov, W. Müller et R. Schrader lorsque la variété est asymptotiquement euclidienne ([B-M-S]. De plus dans ce cadre euclidien, il est montré que les espaces

$$\text{Ker } \Delta \cap L^2(\Lambda^p T^* M) \text{ et Ker } \Delta_{Abs} \cap L^2(\Lambda^p T^*(M\mathcal{O}))$$

sont de dimensions finies, et que si $n > 2$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \text{Tr } \tau\left(e^{-t\Delta} - e^{-t\Delta_{Abs}}\right) &= \chi(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}) \\ &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \text{dim Ker } \Delta \cap L^2(\Lambda^p T^* M) \\ &- \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \text{dim Ker } \Delta_{Abs} \cap L^2(\Lambda^p T^*(M - \mathcal{O})) \end{aligned}$$

Dans [C], nous avons donné des conditions qui assurent que cette égalité est vraie. Pour finir, nous étudierons le cas de $\mathbb{R}^2$ où l'obstacle est le disque euclidien $\mathbb{D}$ de rayon 1. Le théorème de N. Borisov, W. Müller et R. Schrader montre que

$$\text{Tr } \tau\left(e^{-t\Delta^{\mathbb{R}^2}} - e^{-t\Delta_{Abs}^{\mathbb{R}^2 - \mathbb{D}}}\right) = 1 = \chi(\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}).$$

Cependant les noyaux L^2 des opérateurs Δ, Δ_{Abs} sont nuls. Ainsi, on s'attend à ce que l'allure de Tr $\tau\left(e^{-t\Delta^{\mathbb{R}^2}} - e^{-t\Delta_{Abs}^{\mathbb{R}^2 - \mathbb{D}}}\right)$, lorsque t tend vers l'infini, soit dictée par les états résonnants d'énergie nulle. Nous préciserons la contribution des quatres états résonnants d'énergie nulle de Δ_{Abs}.

Remerciements : Je tiens à remercier L. Guillopé et L. Hillairet qui ont gentillement et patiemment répondu à mes questions sur la théorie de scattering. Je remercie aussi Y. Colin de Verdière de m'avoir suggéré le théorème 1.4. Une amélioration de ce théorème m'a été suggéré par un rapporteur, je le remercie pour son aide.

2 Scattering sur les variétés non-compactes.

L'objet de cette partie est d'établir des résultats relatifs à la théorie du scattering pour les laplaciens généralisés sur les variétés riemanniennes non-compactes. On va commencer par décrire le cadre dans lequel nos résultats sont valides :

2.1 Les laplaciens généralisés.

Soit (M^n, g) une variété riemanienne complète et soit $V \longrightarrow M$ un fibré hermitien de rang l au dessus de M.

$$L : C_0^\infty(M, V) \longrightarrow C_0^\infty(M, V)$$

est un opérateur différentiel d'ordre 2 symétrique dont le symbole principal est la métrique ; i.e. L est un laplacien généralisé, et en coordonnées cet opérateur s'écrit

$$L = -\sum_{i,j} g^{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} Id_{V_x} + \sum_i A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + B.$$

Selon P. Gilkey, [Gi], il existe une connexion orthogonale sur V,

$$\nabla^L : C_0^\infty(M, V) \longrightarrow C_0^\infty(M, T^*M \otimes V)$$

et $E \in C^\infty(\mathrm{Sym}(V))$, un champ d'endomorphisme symétrique de V, tel que

$$L = (\nabla^L)^* \nabla^L + E. \tag{2.1}$$

2.2 Une hypothèse spectrale.

Nous faisons l'hypothèse que $L : C_0^\infty(M, V) \longrightarrow C_0^\infty(M, V)$ est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(M, V)$. D'après Chernoff ([Ch]), c'est aussi le cas lorsque L vérifie la propriété de propagation à vitesse finie : les solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u + Lu = 0$$

vérifient

$$\mathrm{support}\{u(t, .)\} \subset \{x \in M, \mathrm{dist}(x, \mathrm{support}\{u(0, .)\}) \leq |t|\} \tag{2.2}$$

Alors un tel opérateur a une unique extension auto-adjointe à $L^2(M, V)$. On note cet opérateur auto-adjoint $\mathcal{L}$. Le domaine de $\mathcal{L}$ est

$$D(\mathcal{L}) = \{u \in L^2(M, V),\ \mathcal{L}u \in L^2(M, V)\}.$$

Nous faisons aussi l'hypothèse que L est borné inférieurement : il y a une constante Λ telle que

$$\Lambda \int_M |\varphi|^2 \leq \int_M < L\varphi, \varphi >= \int_M |\nabla^L \varphi|^2 + < E\varphi, \varphi > ,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(M, V).$$

Pratiquement, nous ferons l'hypothèse que cet opérateur est positif i.e.

$$0 \leq \int_M < L\varphi, \varphi > ,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(M, V).$$

Quitte à ajouter à l'opérateur L l'opérateur $-\Lambda Id$, nous pouvons toujours nous ramener à ce cas là.

Ceci est par exemple assurer si le potentiel E de la formule 2.1 est borné inférieurement.

De par nos hypothèses, le spectre de $\mathcal{L}$ est inclus dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi pour $z \in \mathbb{C} - [0, \infty[$, $(\mathcal{L} - z)^{-1}$ est un opérateur borné de $L^2(M, V)$.

2.3 Des exemples.

De tels opérateurs sont très fréquent :

- Le laplacien sur les fonctions $\Delta : C_0^\infty(M) \longrightarrow C_0^\infty(M)$.
- Si V est un fonction réelle bornée inférieurement alors l'opérateur de Schrödinger $L = \Delta + V$ est de ce type.
- Si $V = M \times \mathbb{C}$ est le fibré trivial, on peut changer la métrique de ce fibré par un poid, e^ρ, où ρ est une fonction lisse sur M, la connexion est l'opérateur $d_\rho = e^{-\rho/2} d e^{\rho/2}$; et son adjoint est $d_\rho^* = e^{-\rho/2} d^* e^{\rho/2}$ et donc l'opérateur est $Lf = \Delta f - < d\rho . df > + e^{-\rho/2} \Delta e^{\rho/2}$ est de ce type.
- Si L est le carré d'un opérateur différentiel symétrique d'ordre 1, $L = D^2$, alors L est de ce type. De plus, on sait que D lui-même est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(M, V) \subset L^2(M, V)$ ([Ch]). Par exemple, c'est le cas du laplacien de Hodge-deRham agissant sur les formes différentielles.

2.4 Liens avec le déterminant de l'opérateur "Dirichlet-to-Neumann".

Un des objectif de ce papier est d'obtenir une formule analogue à celle de D. Burghelea, L. Friedlander et T. Kappeler. Dans [B-F-K], les auteurs obtiennent notamment la formule suivante : si S est une surface riemannienne compacte et si Σ est une courbe plongée lisse dans S alors on a

$$\det\,(\Delta + \lambda) = \det\,(\Delta_\Sigma + \lambda) \det\, R(\lambda), \forall \lambda \in \mathbb{C} -]-\infty, 0[.$$

où Δ est le laplacien associé à la métrique sur S, Δ_Σ est l'opérateur laplacien sur $S - \Sigma$ pour les conditions de Dirichlet sur Σ, et $R(\lambda)$ est l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann, c'est un opérateur pseudo-différentiel sur Σ et il est défini de la façon suivante : si $f \in C^\infty(\Sigma)$, alors le problème de Dirichlet suivant admet une unique solution

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda)\tilde{f} = 0 & \text{sur } S - \Sigma \\ \tilde{f} = f & \text{le long de } \Sigma \end{cases}$$

et on a

$$R(\lambda) f = -\left(\frac{\partial}{\partial n^+} \tilde{f} + \frac{\partial}{\partial n^-} \tilde{f} \right),$$

où $n^\pm$ sont les normales intérieures à $M_\pm$ le long de Σ. Les déterminants sont des déterminants régularisés. En fait, les auteurs obtiennent un résultat plus général qui améliorait un théorème de R. Forman [F].

Dans cette partie, (M, g) est une variété riemannienne complète de dimension n et $L : C_0^\infty(M, V) \longrightarrow C_0^\infty(M, V)$ est un opérateur de type laplacien comme précédemment. On note $\nabla^L : C_0^\infty(M, V) \longrightarrow C_0^\infty(M, T^*M \otimes V)$ la connexion associée à L, c'est à dire que $L - (\nabla^L)^* \nabla^L$ est un opérateur d'ordre 0. Et on considère $\Sigma \subset M$ une hypersurface compacte lisse, par commodité on suppose que Σ sépare M i.e. $M - \Sigma = M_+ \sqcup M_-$. Si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$, on peut définir l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann $\mathcal{N}(z) : C^\infty(\Sigma, V) \longrightarrow C^\infty(\Sigma, V)$ de la façon suivante :

si $f \in C^\infty(\Sigma, V)$, alors le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} (L-z)\tilde{f} = 0 & \text{sur } M - \Sigma \\ \tilde{f} = f & \text{le long de } \Sigma \end{cases}$$

a une unique solution $\tilde{f} \in C^\infty(M-\Sigma, V) \cap L^2(M, V)$. Cette solution s'obtient de la façon suivante : si $\hat{f} \in C_0^\infty(M, V)$ est une extension quelconque de f alors on a

$$\tilde{f} = \hat{f} - (\mathcal{L}_0 - z)^{-1}(L-z)\hat{f}.$$

Où $\mathcal{L}_0$ est l'opérateur associé à L avec les conditions de Dirichlet sur Σ. C'est l'extension de Friedrichs de la forme quadratique

$$\sigma \mapsto \int_M < L\sigma, \sigma >= \int_M |\nabla^L \sigma|^2 + < E\sigma, \sigma > \ ,$$

définie sur le complété de $C_0^\infty(M-\Sigma, V)$ pour la norme

$$\sigma \mapsto \sqrt{\| \sigma \|_{L^2}^2 + < L\sigma, \sigma >_{L^2}} \ .$$

De plus cette solution est continue sur M et lisse sur $\overline{M}_+$ et $\overline{M}_-$; sa dérivée normale présente un saut le long de Σ et $\mathcal{N}(z)f$ est précisément ce saut ; si $n^\pm : \Sigma \longrightarrow TM$ est le champ normal unitaire à Σ entrant dans $M_\pm$, alors

$$\mathcal{N}(z)f = -\left(\nabla^L_{n^+}(\tilde{f}|_{M_+}) + \nabla^L_{n^-}(\tilde{f}|_{M_-})\right) \ .$$

On a alors le

Théorème. 2.1 *Si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$, alors l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann $\mathcal{N}(z)$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 elliptique inversible. Son symbole principal est scalaire :*

$$\sigma(\mathcal{N}(z))(x,\xi) = 2\sqrt{g_x(\xi,\xi)}\ \mathrm{Id}_{V_x},\ \ (x,\xi) \in T^*M.$$

De plus, $z \mapsto \mathcal{N}(z)$ est une fonction holomorphe de z à valeurs dans les opérateurs pseudodifférentiels, et $\frac{d^\nu}{dz^\nu}\mathcal{N}(z)$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $1-2\nu$.

Preuve .– Ce théorème est bien connu dans le cas compact, il repose sur le fait que si $(G(z,x,y),\ x,y \in M)$ est le noyau de Schwartz de l'opérateur $(\mathcal{L} - z)^{-1}$ alors $\mathcal{N}(z)^{-1}$ a pour noyau de Schwartz $(G(z,x,y), x, y \in \Sigma)$. C'est à dire $G(z,x,y) \in \mathrm{Hom}(V_y, V_x) = V_x \otimes V_y^*$ et on a les identités suivantes

$$(\mathcal{L}-z)^{-1}f(x) = \int_M G(z,x,y)f(y)dy,\ x \in M,\ f \in L^2(M,V)$$

$$\mathcal{N}(z)^{-1}f(x) = \int_\Sigma G(z,x,y)f(y)dy,\ x \in \Sigma,\ f \in C^\infty(\Sigma, V).$$

Ceci est encore vrai dans notre cadre et ceci repose sur la formule de Green.

Soit $f \in C^\infty(\Sigma, V)$, on note $\delta_\Sigma \otimes f$ la distribution :

$$\varphi \in C_0^\infty(M,V) \mapsto \int_\Sigma < \varphi, f >,$$

alors la distribution

$$(\mathcal{L} - z)^{-1} (\delta_\Sigma \otimes f)$$

est donnée par

$$\varphi \in C_0^\infty(M,V) \mapsto \int_{y\in\Sigma} \int_{x \in M} < \varphi(x), G(z,x,y) f(y) > dxdy =< \varphi, u >_{L^2} .$$

Où $u \in L^2(M,V)$ est défini par $u(x) = \int_\Sigma G(z,x,y)f(y)dy$, ainsi on a $(\mathcal{L}-z)u = \delta_\Sigma \otimes f$ au sens des distributions, en particulier $(L-z)u = 0$ sur $M - \Sigma$. Or la formule de Green montre que pour $\varphi \in C_0^\infty(M,V)$ on a

$$\begin{aligned}
< (L - \bar z)\varphi, u >_{L^2} &= (L-z)u(\varphi) \\
&= \int_{M_+} < L\varphi, u > - < \varphi, Lu > + \int_{M_-} < L\varphi, u > - < \varphi, Lu > \\
&= \int_\Sigma < \nabla^L_{n^+}\varphi, u > - < \varphi, \nabla^L_{n^+} u > + < \nabla^L_{n^-}\varphi, u > - < \varphi, \nabla^L_{n^-} u > .
\end{aligned}$$

Mais φ est lisse, on a donc $\nabla^L_{n^+}\varphi + \nabla^L_{n^-}\varphi = 0$ le long de Σ et

$$(L-z)u = \delta_\Sigma \otimes (\mathcal{N}(z) u|_\Sigma),$$

et finalement

$$\mathcal{N}(z)(u|_\Sigma) = f.$$

Ce qui montre l'assertion relative au noyau de Schwartz de l'opérateur $\mathcal{N}(z)^{-1}$. Comme l'opérateur $(\mathcal{L}-z)^{-1}$ vérifie les conditions de transmission, l'opérateur $\mathcal{N}(z)^{-1}$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre -1 et donc $\mathcal{N}(z)$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1. L'holomorphie de l'opérateur $\mathcal{N}(z)$ par rapport au paramètre z en découle aussitôt. Comme l'opérateur $\frac{d^\nu}{dz^\nu}\mathcal{N}(z)^{-1}$ est un opérateur dont le noyau de Schwartz est $(\nu-1)! G^\nu(z,x,y)$; où $G^\nu(z,x,y)$ est le noyau de Schwartz de l'opérateur $(\mathcal{L}-z)^{-\nu}$, on en déduit que $\frac{d^\nu}{dz^\nu}\mathcal{N}(z)^{-1}$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $1-2\nu$, l'assertion sur $\frac{d^\nu}{dz^\nu}\mathcal{N}(z)$ en découle immédiatement. **Q.E.D.**

On va maintenant relier le déterminant de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann à la trace de l'opérateur $(\mathcal{L}-z)^{-\nu} - (\mathcal{L}_0 - z)^{-\nu}$. Rappelons comment est défini le déterminant de l'opérateur $\mathcal{N}(z)$. Puisque $\mathcal{N}(z)$ est un opérateur pseudodifférentiel elliptique d'ordre 1 inversible, pour $s \in \mathbb{C}$, $\Re s > n-1$, l'opérateur $\mathcal{N}(z)^{-s}$ est un opérateur à trace sur $L^2(\Sigma, V)$. La fonction $\zeta(s) = \mathrm{Tr}\ \mathcal{N}(z)^{-s}$ est bien définie et c'est une fonction holomorphe sur l'ouvert $\{s \in \mathbb{C}, \Re s > n-1\}$. De plus, Cette fonction admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ et elle est holomorphe en 0. On définit alors

$$\det\ \mathcal{N}(z) = e^{-\frac{d}{ds}|_{s=0}\,\zeta(s)}.$$

Ici, pour $\nu > \frac{n-1}{2}$, on a

$$\frac{d^\nu}{dz^\nu} \log\det \mathcal{N}(z) = \mathrm{Tr}\ \left(\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}} \left[\left(\frac{d}{dz}\mathcal{N}(z) \right) \mathcal{N}(z)^{-1} \right] \right). \tag{2.3}$$

En effet si $\nu > \frac{n-1}{2}$, alors $\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}} \left[\left(\frac{d}{dz}\mathcal{N}(z) \right) \mathcal{N}(z)^{-1} \right]$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre -2ν, il est donc à trace sur $L^2(\Sigma, V)$. De plus suivant [B-F-K], on a

$$\frac{d}{dz} \log\det \mathcal{N}(z) = \mathrm{Fp}_{s=0} \left(s \mapsto \mathrm{Tr}\ \left(\frac{d}{dz}\mathcal{N}(z) \right) \mathcal{N}(z)^{-s-1} \right),$$

où pour h une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, on a noté $\mathrm{Fp}_{s=0}h$ le terme constant dans le développement de Laurent de h en 0. En dérivant $(\nu - 1)$ fois cette expression, on obtient le résultat 2.3. Notre résultat est ici le suivant :

Théorème. 2.2 *Soit ν un entier tel que $\nu > \frac{n-1}{2}$ et $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$, alors l'opérateur $(\mathcal{L} - z)^{-\nu} - (\mathcal{L}_0 - z)^{-\nu}$ est à trace, de plus*

$$-\frac{d^\nu}{dz^\nu} \log\det \mathcal{N}(z) = (\nu - 1)!\ \ \mathrm{Tr}\ \left((\mathcal{L} - z)^{-\nu} - (\mathcal{L}_0 - z)^{-\nu} \right).$$

Preuve .– Soit $G_0(z, x, y)$ le noyau de Schwartz de l'opérateur $(\mathcal{L}_0 - z)^{-1}$. Si $x \in \Sigma$ et $y \in M$, on note $\delta G_0(z, x, y) = \nabla^L_{n^+} G_0(z, x, y) + \nabla^L_{n^-} G_0(z, x, y)$, où la dérivation porte sur $x \in M_+$ dans le premier terme et sur $x \in M_-$ dans le second. Si f est une section de V définie sur un voisinage de Σ, C^1 sur $\overline{M_+}$ et C^1 sur $\overline{M_-}$ alors on définit $\delta f(x) = \nabla^L_{n^+} \left(f \big|_{M_+} \right) + \nabla^L_{n^-} \left(f \big|_{M_-} \right)$

Grâce à la formule de Green, nous avons l'identité suivante

$$G(z, x, y) - G_0(z, x, y) = \int_\Sigma G(z, x, t) \delta_t G_0(z, t, y) dt.$$

En dérivant ceci $(\nu - 1)$ fois et grâce à la formule de Leibniz, on en déduit que le noyau de Schwartz de l'opérateur $(\mathcal{L} - z)^{-\nu} - (\mathcal{L}_0 - z)^{-\nu}$ est

$$\sum_{p+q=\nu-1} \int_\Sigma G^{p+1}(z, x, t) \delta_t G_0^{q+1}(z, t, y) dt,$$

où on a noté $G_0^{q+1}(z, t, y)$ le noyau de Schwartz de l'opérateur $(\mathcal{L}_0 - z)^{-1-q}$. On introduit alors pour $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ les opérateurs

$$\begin{aligned} A_p\ :&\quad C^\infty(\Sigma, V) \longrightarrow L^2(M, V) \text{ et} \\ B_p\ :&\quad C_0^\infty(M, V) \longrightarrow L^2(\Sigma, V), \end{aligned}$$

dont les noyaux de Schwartz sont respectivement G^p et δG_0^p ; c'est à dire que

$$\begin{aligned} A_p f(x) &= \int_\Sigma G^p(z, x, y) f(y) dy,\ x \in M \\ B_p g(x) &= \int_M \delta_x G_0^p(z, x, y) g(y) dy,\ x \in \Sigma. \end{aligned}$$

On a donc l'identité

$$(\mathcal{L}-z)^{-\nu}-(\mathcal{L}_0-z)^{-\nu}=\sum_{p+q=\nu-1}A_{p+1}\circ B_{q+1}. \tag{2.4}$$

Nous allons montré que chacun des opérateurs $A_p\circ B_q$ est à trace dès que $p+q>(n-1)/2+1$.

A cet fin, nous introduisons les espaces de Banach suivant : si H_1 et H_2 sont des espaces de Hilbert alors $\mathcal{S}_p(H_1,H_2)$ est l'espace des applications linéaires $A : H_1 \longrightarrow H_2$ tel que $\sqrt{A^*A}^p$ est un opérateur à trace ; ce qui équivaut à ce que $\sqrt{AA^*}^p$ soit un opérateur à trace. De plus si $A\in\mathcal{S}_\alpha(H_1,H_2)$ et $B\in\mathcal{S}_\beta(H_2,H_1)$ avec $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq 1$ alors AB et BA sont des opérateurs à trace et $\mathrm{Tr}\ AB=\mathrm{Tr}\ BA$.

Soit $p\in\mathbb{N}-\{0\}$, l'opérateur $A_p^*A_p$ a pour noyau de Schwartz

$$\int_M G^p(\bar z,x,t)G^p(z,t,y)dt,$$

c'est donc un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $1-4p$ sur Σ. Il est donc dans $\mathcal{S}_\alpha(L^2(\Sigma,V),L^2(\Sigma,V))$ pour $\alpha>\frac{n-1}{4p-1}$; ainsi on a

$$A_p\in\mathcal{S}_\alpha(L^2(\Sigma,V),L^2(M,V)),\ \text{pour}\ \alpha>2\frac{n-1}{4p-1}.$$

Et si $q\in\mathbb{N}-\{0\}$, l'opérateur $B_qB_q^*$ a pour noyau de Schwartz

$$\delta_x\delta_y\int_M G_0^q(z,x,t)G_0^q(\bar z,t,y)dt,$$

c'est donc un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $3-4q$ sur Σ. Il est donc dans $\mathcal{S}_\beta(L^2(\Sigma,V),L^2(\Sigma,V))$ pour $\beta>\frac{n-1}{4p-3}$; ainsi on a

$$B_q\in\mathcal{S}_\beta(L^2(M,V),L^2(\Sigma,V)),\ \text{pour}\ \beta>2\frac{n-1}{4q-3}.$$

Et donc l'opérateur A_pB_q est à trace sur $L^2(M,V)$ si $\frac{4p-1}{n-1}+\frac{4q-3}{n-1}>2$ c'est à dire si $p+q>(n-1)/2+1$.

On déduit donc de l'identité 2.4 que l'opérateur $(\mathcal{L}-z)^{-\nu}-(\mathcal{L}_0-z)^{-\nu}$ est à trace si ν est un entier tel que $\nu>\frac{n-1}{2}$.

De plus par cyclicité de la trace, on en déduit que

$$\mathrm{Tr}\ \left((\mathcal{L}-z)^{-\nu}-(\mathcal{L}_0-z)^{-\nu}\right)=\sum_{p+q=\nu-1}\mathrm{Tr}\ B_{q+1}\circ A_{p+1}.$$

Le second membre est la trace d'un opérateur sur $L^2(\Sigma,V)$ dont le noyau de Schwartz est

$$\sum_{p+q=\nu-1}\int_M \delta_x G_0^{q+1}(z,x,t)G^{p+1}(z,t,y)dt.$$

C'est donc le noyau de l'opérateur

$$\frac{1}{(\nu-1)!}\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}\left[\int_M \delta_x G_0(z,x,t)G(z,t,y)dt\right]. \tag{2.5}$$

Or l'opérateur $\left(\frac{d}{dz}\mathcal{N}(z)\right)\mathcal{N}(z)^{-1}$ a précisément pour noyau de Schwartz

$$-\int_M \delta_x G_0(z,x,t)G(z,t,y)dt \tag{2.6}$$

Ceci se montre comme dans le cas des variétés compactes : si on fixe $u \in C^\infty(\Sigma, V)$, on note $\tilde{u}$ la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} (L-z)\tilde{u} = 0 & \text{sur } M-\Sigma \\ \tilde{u} = u & \text{le long de } \Sigma \end{cases}$$

On a alors $d\tilde{u}/dz = (\mathcal{L}_0 - z)^{-1}\tilde{u}$ et la solution du problème de Dirichlet précédent avec pour valeur au bord $\mathcal{N}(z)f$ est $\tilde{u}(x) = \int_\Sigma G(z,x,y)f(y)dt$. Le théorème est maintenant une conséquence des formules (2.3), (2.5) et (2.6). **Q.E.D.**

2.5 Existence des opérateurs d'ondes.

De ce théorème, nous pouvons en déduire le résultat suivant :

Corollaire 2.3 *Les opérateurs d'ondes*

$$W^{\pm} = s - \lim_{t\to\mp\infty} e^{it\mathcal{L}}e^{-it\mathcal{L}_0}P_0$$

existent et sont complets. Où on a noté P_0 le projecteur spectral de $\mathcal{L}_0$ sur l'espace correspondant à son spectre absolument continu.

Ce qui montre que l'on peut faire de la théorie de la diffusion sur toutes les variétés riemanniennes complètes. Bien-sûr, il est impossible d'obtenir en toutes généralités des renseignements précis concernant la nature de spectre : est-il absolument continu ? Y-a-t-il des valeurs propres dans le spectre continu ? Néanmoins, nous espérons donner ici quelques résultats intéressants.

3 Déterminant et la fonction Xi.

Dans cette partie, nous allons donné un lien entre le déterminant de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann et la fonction de décalage spectral introduite par M. Krein. Nous commençons par rappeler les résultats de la théorie de M. Krein, que nous exposons de façon à ce qu'ils s'appliquent à notre cadre. Nous renvoyons le lecteur au survey très complet de M. Birman, D. Yafaev [B-Y] et aux articles originaux [K1], [K2], [BK].

3.1 La fonction de décalage spectral.

Soit A, A_0 deux opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert H. On les supposent positifs. On suppose de plus qu'il y a un $\nu \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que l'opérateur $V = (A+1)^{-\nu} - (A_0+1)^{-\nu}$ est un opérateur à trace. On peut alors introduire la fonction

$$\Delta(z) = \det \left(\mathrm{Id}_H + V((A_0+1)^{-\nu} - z)^{-1}\right), \ z \in \mathbb{C} - [0,1].$$

Où le déterminant est le déterminant de Fredholm d'un opérateur de la forme "*identité plus opérateur à trace*". Alors la fonction Δ est holomorphe et on a

$$\lim_{\Im z \to +\infty} \Delta(z) = 1,$$

pour $z \in \mathbb{C}, z \notin \mathbb{R}_+$, ceci permet de définir les fonctions $\mathrm{Arg}\Delta(z)$ et $\log \Delta(z)$. On a alors

Proposition 3.1 *La limite*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \ \mathrm{Arg}\Delta(\lambda + i\varepsilon) = \tilde{\xi}(\lambda)$$

existe pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarquons que comme V et A_0 sont auto-adjoint, on a $\overline{\Delta(z)} = \Delta(\bar{z})$, ainsi on a aussi

$$\tilde{\xi}(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi} \frac{\log \Delta(\lambda + i\varepsilon)}{\log \Delta(\lambda - i\varepsilon)}.$$

Définition 3.2 *La fonction de décalage spectral du couple* (A, A_0) *est la fonction*

$$\xi(\lambda, A, A_0) = -\tilde{\xi}\left((1+\lambda)^{-\nu}\right).$$

M. Krein a montré le théorème suivant

Théorème. 3.3 *La fonction de décalage spectral vérifie*

$$\int_0^\infty |\xi(\lambda)| \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^{\nu+1}} < \infty$$

et de plus

$$\mathrm{Tr}\ \left((A+1)^{-\nu} - (A_0+1)^{-\nu}\right) = -\int_0^\infty \xi(\lambda, A, A_0) \frac{\nu d\lambda}{(1+\lambda)^{\nu+1}}.$$

Et si on introduit

$$\mathcal{G} = \{g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \ g \in L^1, \ \int_{\mathbb{R}} (1+|p|)|\hat{g}(p)|dp < \infty\}$$

alors si $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ *est telle que la fonction* $(y \mapsto f(y^{-\frac{1}{\nu}} - 1)) \in \mathcal{G}$ *alors l'opérateur* $f(A) - f(A_0)$ *est à trace et on a*

$$\mathrm{Tr}\ (f(A) - f(A_0)) = \int_0^\infty \xi(\lambda, A, A_0) f'(\lambda) d\lambda.$$

De plus, selon le travail de M. Birman, M. Krein, la fonction de décalage spectral est relié à l'opérateur de scattering. De par les hypothèses faites et le principe d'invariance de T. Kato, on sait que les opérateurs d'ondes

$$W^{\pm}(A, A_0) = s - \lim_{t \to \mp\infty} e^{itA} e^{-itA_0} P_0,$$

existent et sont complets. Où on a noté P_0 le projecteur spectral de A_0 sur l'espace correspondant à son spectre absolument continu. Alors l'opérateur de scattering

$$S(A, A_0) = (W^-)^* W^+$$

est un opérateur unitaire de Im P_0, et il commute avec A_0 ; ainsi dans la décomposition spectrale de $A_0 \,|_{\mathrm{Im}\ P_0}$

$$\mathrm{Im}\ P_0 = \int^{\oplus} \mathcal{H}(\lambda) d\mu(\lambda)$$

$$A_0 = \int_{\mathrm{Sp}_{ac}(A_0)} \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}(\lambda)} dE_\lambda \ ,$$

on peut écrire

$$S(A, A_0) = \int_{\mathrm{Sp}_{ac}(A_0)} S(\lambda, A, A_0) dE_\lambda,$$

où $S(\lambda, A, A_0)$ est un opérateur unitaire de $\mathcal{H}(\lambda)$. Cet opérateur est en fait de la forme *identité plus opérateur à trace*. On peut donc définir son déterminant de Fredholm, le résultat de M. Birman et M. Krein est le suivant :

Théorème. 3.4 *Pour presque tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{ac}(A_0)$, on a l'égalité*

$$\det_{Fr}\ S(\lambda, A, A_0) = e^{-2i\pi\xi(\lambda, A, A_0)}.$$

3.2 Lien avec le déterminant de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann.

Notre but est de montrer le résultat suivant :

Théorème. 3.5 *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète et*

$$L\ :\ C_0^\infty(M, V) \longrightarrow C_0^\infty(M, V)$$

un laplacien généralisé comme précédemment ; on note encore $\mathcal{L}$ l'opérateur auto-adjoint non-borné qui lui correspond sur $L^2(M, V)$. Soit $\Sigma \subset M$ une hypersurface compacte lisse de M, on note $\mathcal{L}_0$ l'opérateur non-borné sur $L^2(M, V)$ correspondant à l'opérateur L avec les conditions de Dirichlet sur Σ, alors pour presque tout $\lambda \geq 0$, on a l'égalité

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi}\ \ \mathrm{Arg}\ \det\ \ \mathcal{N}(\lambda + i\varepsilon) = \xi(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}_0).$$

Preuve .– Fixons ν un entier strictement supérieur à $(n-1)/2$, on introduit alors la fonction

$$\Phi(z) = \Delta((1+z)^{-\nu}) = \det\ \left[(\mathrm{Id}_{L^2(M,V)} + V\left((\mathcal{L}_0+1)^{-\nu} - (1+z)^{-\nu}\right)^{-1} \right]\ ,$$

où

$$V = (\mathcal{L}+1)^{-\nu} - (\mathcal{L}_0+1)^{-\nu}.$$

Cette fonction est définie pour z dans l'ouvert de $\mathbb{C}$ suivant

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C},\ (1+z)^\nu \notin [1,\infty[\} = \mathbb{C} - \cup_{j=0}^{\nu-1} \left(-1+\omega^j[1,\infty[\right),$$

où $\omega = \exp(2i\pi/\nu)$. Remarquons que Ω est un ouvert simplement connexe et que d'après la théorie de M. Krein, on a pour presque tout $\lambda \geq 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi}\ \mathrm{Arg}\ \Phi(\lambda + i\varepsilon) = \xi(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}_0).$$

Nous allons exprimer la fonction Φ en fonction du déterminant de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann. Pour cela, nous commençons par dériver la fonction Φ

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = -\nu(1+z)^{-\nu-1}\ \frac{\Delta'}{\Delta}\left(\frac{1}{(1+z)^\nu}\right).$$

Or, on sait que

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta'}{\Delta}(\zeta) &= \mathrm{Tr}\ \left(((\mathcal{L}_0+1)^{-\nu} - \zeta)^{-1} - ((\mathcal{L}+1)^{-\nu} - \zeta)^{-1}\right) \\
&= \mathrm{Tr}\ \left((\mathcal{L}_0+1)^{\nu}(1-\zeta(\mathcal{L}_0+1)^\nu)^{-1} - (\mathcal{L}+1)^\nu(1-\zeta(\mathcal{L}+1)^\nu)^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{\zeta^2}\mathrm{Tr}\ \left(\frac{1}{(\mathcal{L}+1)^\nu - \zeta^{-1}} - \frac{1}{(\mathcal{L}_0+1)^\nu - \zeta^{-1}}\right)
\end{aligned}$$

D'où on obtient la formule :

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = -\nu(1+z)^{\nu-1}\mathrm{Tr}\ \left(\frac{1}{(\mathcal{L}+1)^\nu - (1+z)^\nu} - \frac{1}{(\mathcal{L}_0+1)^\nu - (1+z)^\nu}\right). \tag{3.7}$$

On utilise maintenant la décomposition en éléments simples de la fraction

$$\frac{1}{X^\nu - a^\nu} = \frac{1}{\nu a^{\nu-1}} \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{\omega^{j(1-\nu)}}{X - \omega^j a}\ . \tag{3.8}$$

Et on arrive à la formule

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = -\mathrm{Tr}\ \left(\sum_{j=0}^{\nu-1} \omega^{j(1-\nu)} \left[\frac{1}{(\mathcal{L}+1) - (1+z)\omega^j} - \frac{1}{(\mathcal{L}_0+1) - (1+z)\omega^j}\right]\right).$$

On voudrait maintenant différencier cette expression $(\nu-1)$ fois. Nous n'avons pas le droit de dériver sous la trace dans cette dernière formule ; cependant on a le droit de dériver l'expression (3.7) et alors la différentiation de la décomposition en éléments simples (3.8) permet d'obtenir l'identité

$$\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = -(\nu-1)!\,\mathrm{Tr}\left(\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{1}{((\mathcal{L}+1)-(1+z)\omega^j)^\nu}-\frac{1}{((\mathcal{L}_0+1)-(1+z)\omega^j)^\nu}\right).$$

Or d'après notre théorème 2.2 , ceci vaut exactement

$$\frac{d^\nu}{dz^\nu}\sum_{j=0}^{\nu-1}\log\det\mathcal{N}\big((1+z)\omega^j-1\big).$$

C'est à dire, on a l'identité

$$\frac{d^\nu}{dz^\nu}\log\Phi(z) = \frac{d^\nu}{dz^\nu}\sum_{j=0}^{\nu-1}\log\det\mathcal{N}((1+z)\omega^j-1).$$

Par connexité de Ω, on en déduit qu'il existe un polynôme P de degré inférieur à $\nu-1$, tel que :

$$\log\Phi(z) = \log\left[\prod_{j=0}^{\nu-1}\det\mathcal{N}((1+z)\omega^j-1)\right]+P(z+1).$$

Maintenant P doit vérifier l'identité $P(z\omega)=P(z)$ puisque les autres termes de cette identité sont des fonctions de $(1+z)^\nu$. Ainsi P est un polynôme en z^ν de degré inférieur à $\nu-1$, c'est donc un polynôme constant. De plus, les identités

$$\Phi(\bar z)=\bar\Phi(z),\ \text{ et }\ \overline{\det\ \mathcal{N}((1+\bar z)\omega^j-1)} = \det\mathcal{N}((1+z)\omega^{-j}-1)$$

assurent que P est une constante réelle. Et donc pour une certaine constante réelle c, on a la formule

$$\log\Phi(z) = \log\left[\prod_{j=0}^{\nu-1}\det\mathcal{N}((1+z)\omega^j-1)\right]+c.$$

Comme pour presque tout $\lambda\geq 0$, la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{\Phi(\lambda+i\varepsilon)}{\Phi(\lambda-i\varepsilon)}\right)$$

existe et vaut $\xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_0)$, on a de même pour la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\log\left(\prod_{j=0}^{\nu-1}\frac{\det\ \mathcal{N}((1+\lambda+i\varepsilon)\omega^j-1)}{\det\ \mathcal{N}((1+\lambda-i\varepsilon)\omega^j-1)}\right).$$

Or si $j \neq 0$, le nombre complexe $-1+(1+\lambda)\omega^j$ n'est pas dans le spectre de $\mathcal{L}_0$, ainsi on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \det \mathcal{N}((1+\lambda+i\varepsilon)\omega^j - 1) = \det\ \mathcal{N}((1+\lambda)\omega^j - 1).$$

Ainsi il reste à la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{\det \mathcal{N}(\lambda+i\varepsilon)}{\det \mathcal{N}(\lambda-i\varepsilon)}\right) = \xi(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}_0).$$

Q.E.D.

4 Déterminant relatif et formule à la Burghelea-Friedlander-Kappeler.

Notre but est ici de relier le déterminant reelatif des opérateurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_0$ en fonction du déterminant de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann. Comme l'on fait dans le cas des variétés compactes R. Forman et D. Burghelea, L. Friedlander et T. Kappeler. Une telle formule a récemment été obtenue pour le laplacien sur $\mathbb{R}^2$ par A. Hassell et S. Zelditch [H-Z]. Nous commençons par rappeler les hypothèses qui permettent, selon W. Müller, [Mu 2], de définir un déterminant relatif.

4.1 Déterminant relatif.

Soit H un espace de Hilbert séparable et A, A_0 deux opérateurs autoadjoints positifs sur H. On suppose :

- Si e^{-tA} et e^{-tA_0} sont les semi-groupes de la chaleur associés à A et A_0, alors pour tout $t>0$, l'opérateur $e^{-tA}-e^{-tA_0}$ est à trace.
- Lorsque $t\to 0^+$, il y a un développement asymptotique de la forme

  $$\mathrm{Tr}\ \left(e^{-tA}-e^{-tA_0}\right) \sim \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{k(j)} a_{j,k} t^{\alpha_j} (\log t)^k,$$

  où $\{\alpha_j\}_j$ est une suite croissante tendant vers l'infini. De plus, on suppose que $a_{j,k}=0$ si $\alpha_j=0$ et $k\geq 1$.

Alors pour tout nombre complexe z de partie réelle strictement négative, on peut définir un déterminant relatif

$$\det\ (A-z, A_0-z).$$

Ce déterminant est obtenu à partir de la fonction zeta :

$$\zeta(s,z) = \int_0^\infty \mathrm{Tr}\ \left(e^{-tA}-e^{-tA_0}\right) e^{tz} t^{s-1} \frac{dt}{\Gamma(s)}.$$

Ces hypothèses assurent que la fonction $s \mapsto \zeta(s,z)$ existe lorsque la partie réelle de s est assez grande et qu'elle admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$. De plus, cette fonction se trouve être holomorphe au voisinage de 0, on pose alors

$$\det\,(A - z, A_0 - z) = e^{-\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}\zeta(s,z)}.$$

Ces déterminants ont été définis et étudiés par W. Müller. Dans [Mu 2], l'auteur donnent de nombreux exemples où de tels déterminants apparaissent. Dans un cadre euclidien, ces déterminants relatifs avaient déjà été définis et étudiés par V. Bruneau [Br]. On a alors

Proposition 4.1 *La fonction* $z \mapsto \det\,(A - z, A_0 - z)$ *est une fonction holomorphe sur* $\{z \in \mathbb{C},\ \Re z < 0\}$.

4.2 Dans notre cadre.

On suppose toujours que (M^n, g) est une variété riemannienne complète et

$$L\,:\,C_0^\infty(M,V) \longrightarrow C_0^\infty(M,V)$$

un laplacien généralisé comme précédemment mais on suppose de plus qu'il vérifie la propriété de propagation à vitesse finie (2.2) ; on note encore $\mathcal{L}$ l'opérateur auto-adjoint non-borné qui lui correspond sur $L^2(M,V)$. Soit $\Sigma \subset M$ une hypersurface compacte lisse de M, on note $\mathcal{L}_0$ l'opérateur non-borné sur $L^2(M,V)$ correspondant à l'opérateur L avec les conditions de Dirichlet sur Σ. Grâce au théorème 3.3, on sait que pour tout $t > 0$, l'opérateur $e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t\mathcal{L}_0}$ est à trace ; et que

$$\mathrm{Tr}\,\left(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t\mathcal{L}_0}\right) = -t\int_0^\infty e^{-t\lambda}\xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_0)d\lambda.$$

La seconde hypothèse est vérifiée grâce à un résultat de U. Bunke : dans [B], l'auteur montre que si Ω est un voisinage de l'infini ne rencontrant pas Σ alors il y a une constante positive C telle que lorsque $t \to 0^+$:

$$\mathrm{Tr}\,\left(\mathbf{1}_\Omega\left(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t\mathcal{L}_0}\right)\mathbf{1}_\Omega\right) = O(e^{-\frac{C}{t}}).$$

Ceci est obtenu à partir de la propriété de propagation à vitesse finie et de la formule de Duhamel. Alors grâce au fait que les noyaux de Schwartz des opérateurs $e^{-t\mathcal{L}}$ et $e^{-t\mathcal{L}_0}$ admettent des asymptotiques lorsque $t \to 0^+$, qui ne dépendent que de la géométrie locale ; on en déduit que lorsque $t \to 0^+$ on a l'asymptotique

$$\mathrm{Tr}\,\left(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t\mathcal{L}_0}\right) \sim \sum_{j=-(n-1)}^{\infty} a_j t^{j/2}. \tag{4.9}$$

On a même $a_{-(n-1)} = l\mathrm{vol}\,\partial\mathcal{O}/(4\pi)^{(n-1)/2}$, où l est la dimension des fibres de V Ceci montre que le déterminant relatif $\det\,(\mathcal{L} - z, \mathcal{L}_0 - z)$ est bien défini. Notre résultat est le suivant

Théorème. 4.2 *Il y a un polynôme à coefficients réels, P, de degré inférieur à $\frac{n-1}{2}$ tel que*

$$\det\ (\mathcal{L}-z,\mathcal{L}_0-z) = e^{P(z)}\det\ \mathcal{N}(z),$$

Où $\mathcal{N}(z)$ est l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann défini dans la deuxième partie.

Preuve .– Ceci découle des résultats précédents. En effet, si ν est un entier $\nu > (n-1)/2$ alors on a

$$\zeta(s,z) = -\int_0^\infty s\frac{\xi(\lambda)}{(\lambda-z)^{s+1}}d\lambda.$$

Ce qui est bien défini si $\Re s > \nu$. Selon 3.3, nous savons que lorsque $\Re s > 3\nu$ ou lorsque $s=\nu$ alors ceci vaut précisément la trace de l'opérateur

$$(\mathcal{L}-z)^{-s} - (\mathcal{L}_0-z)^{-s}.$$

On peut dériver ceci, et si on dérive ν fois on obtient

$$\frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu}\zeta(s,z) = -\int_0^\infty s(s+1)...(s+\nu)\frac{\xi(\lambda)}{(\lambda-z)^{s+\nu+1}}d\lambda,\ \Re s > \nu.$$

Or cette intégrale est maintenant absolument uniformément convergente pour s de partie réelle positive ou nulle. Et on a donc

$$\begin{aligned}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\log\det\ (\mathcal{L}-z,\mathcal{L}_0-z) &= -\frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu}\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0^+}\zeta(s,z)\\ &= (\nu-1)!\int_0^\infty \nu\frac{\xi(\lambda)}{(\lambda-z)^{\nu+1}}d\lambda\\ &= -(\nu-1)!\ \operatorname{Tr}\ \left((\mathcal{L}-z)^{-\nu}-(\mathcal{L}_0-z)^{-\nu}\right).\end{aligned}$$

On conclut alors grâce au théorème (2.2) que

$$\frac{d^\nu}{dz^\nu}\det\ (\mathcal{L}-z,\mathcal{L}_0-z) = \frac{d^\nu}{dz^\nu}\log\det\mathcal{N}(z).$$

Le fait que P soit à coefficients réels découlent des identités suivantes :

$$\overline{\det\ (\mathcal{L}-z,\mathcal{L}_0-z)} = \det\ (\mathcal{L}-\bar{z},\mathcal{L}_0-\bar{z})$$

$$\overline{\det\mathcal{N}(z)} = \det\mathcal{N}(\bar{z}).$$

Q.E.D.

Ceci, nous permet d'affirmer que l'on a le résultat suivant

Corollaire 4.3 *La fonction de décalage spectral du couple $(\mathcal{L},\mathcal{L}_0)$ et le déterminant relatif vérifient que pour presque tout $\lambda \geq 0$,*

$$\xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_0) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\ \operatorname{Arg}\det\ (\mathcal{L}-\lambda-i\varepsilon,\mathcal{L}_0-\lambda-i\varepsilon).$$

4.3 Asymptotique pour le déterminant relatif.

Notre but est ici de montrer comment nous pouvons utiliser les résultats de ([B-F-K]) afin d'estimer le polynôme apparaissant dans le théorème (4.2). Comme dans les articles [B-F-K] et [H-Z], nous commençons par montrer que le déterminant relatif admet un développement asymptotique lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$

Proposition 4.4 *Si* $L \ : \ C_0^\infty(M,V) \longrightarrow C_0^\infty(M,V)$ *un laplacien généralisé vérifiant la propriété de propagation à vitesse finie, alors lorsque* $\mu \to +\infty$*, le logarithme du déterminant relatif admet le développement asymptotique suivant :*

$$\log\det\ (\mathcal{L}+\mu, \mathcal{L}_0+\mu) \simeq \sum_{j=-(\dim\ M-1)}^{+\infty} \pi_j \mu^{-j/2}.$$

De plus les coefficients π_j *apparaissant dans cette formule ne dépendent que du germe de* L *près de* Σ

Preuve .– On utilise encore le résultat suivant de U. Bunke ([B]) : si Ω est un voisinage de l'infini ne rencontrant pas Σ alors il y a une constante positive C telle que

$$\left|\mathrm{Tr}\ \left(\mathbf{1}_\Omega \left(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t\mathcal{L}_0}\right)\mathbf{1}_\Omega\right)\right| \leq e^{-\frac{C}{t}}.$$

Ceci permet d'écrire la fonction zeta comme une somme

$$\zeta(s,-\mu) = \zeta_{M-\Omega}(s,-\mu) + \zeta_\Omega(s,-\mu),$$

avec

$$\zeta_\Omega(s,-\mu) = \int_0^\infty \mathrm{Tr}\ \left(\mathbf{1}_\Omega \left(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t\mathcal{L}_0}\right)\mathbf{1}_\Omega\right) e^{-t\mu} t^{s-1} \frac{dt}{\Gamma(s)}.$$

L'estimée de U. Bunke assure que la fonction $s \mapsto \zeta_\Omega(s,-\mu)$ est une fonction entière sur $\mathbb{C}$. De plus on peut majorer sa dérivée en 0 grâce à la formule de Cauchy :

$$\left|\frac{d}{ds}\zeta_\Omega(0,-\mu)\right| = \left|\int_{|s|=1/2} \zeta_\Omega(s,-\mu)\frac{ds}{2i\pi s^2}\right| \leq C\int_{|s|=1/2}\int_0^\infty e^{-\frac{C}{t}} e^{-t\mu} t^{\Re s-1} dt|ds|$$

Maintenant, il est facile de majorer cette intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\frac{C}{t}} e^{-t\mu} t^{\Re s-1} dt \leq \frac{C}{\mu^{(\Re s+1)/2}} e^{-\sqrt{C\mu}};$$

On a donc lorsque $\mu \to +\infty$,

$$\left|\frac{d}{ds}\zeta_\Omega(0,-\mu)\right| \leq Ce^{-\sqrt{C\mu}}.$$

Ceci montre que la dérivée en zéro de la fonction $\zeta(s,-\mu) - \zeta_{M-\Omega}(s,-\mu)$ vérifie la même estimée. Or les travaux de ([B-F-K]) montre que lorsque $\mu \to +\infty$, la dérivée en zéro de la fonction $s \mapsto \zeta_{M-\Omega}(s, -\mu)$ admet un dévelopement asymptotique

$$-\frac{d}{ds}\zeta_{M-\Omega}(0, -\mu) \simeq \sum_{j=-(\dim\ M-1)}^{+\infty} \pi_j \mu^{-j/2}.$$

De plus les coefficients π_j apparaissant dans cette formule ne dépendent que du germe de L près de Σ. **Q.E.D.**

Le déterminant de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann admet lui aussi un tel développement asymptotique, les coefficients du polynôme apparaissant dans le théorème (4.2) sont alors déterminés par ces développements asymptotiques.

Corollaire 4.5 *Les coefficients du polynôme apparaissant dans le théorème (4.2) ne dépendent que du germe de l'opérateur près de Σ.*

Grâce au calcul fait par Burghelea-Friedlander-Kappeler nous pouvons en déduire la généralisation d'un résultat de [B-F-K] pour les surfaces compactes et de [H-Z] pour le plan euclidien.

Corollaire 4.6 *Si (M, g) est une surface complète et Σ une courbe compacte plongée dans M, alors pour le laplacien associé à la métrique on a :*

$$\det\,(\Delta - z, \Delta_0 - z) = \det\,\mathcal{N}(z).$$

Il est maintenant intèressant de calculer ce polynôme dans certains cas afin de savoir s'il est toujours nul :

Proposition 4.7 *Supposons que sur un voisinage de l'hypersurface Σ, l'opérateur L soit un produit*

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} + A.$$

Et que les métriques de M et de V respectent cette géométrie, alors
- *si la dimension de M est paire, le polynôme apparaissant dans le théorème (4.2) est nul.*
- *Si la dimension de M est impaire, ce polynôme n'est pas nul.*

Preuve .– Grâce, au corollaire (4.5), il suffit de calculer ce polynôme lorsque la variété est un produit riemannien $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, V est le tiré en arrière d'un fibré hermitien sur Σ et $A : C^\infty(\Sigma, V) \longrightarrow C^\infty(\Sigma, V)$ est un laplacien généralisé sur Σ.

Alors il est facile de calculer la trace de l'opérateur $e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t\mathcal{L}_0}$, puisque les noyaux de ces opérateurs de la chaleur sont le produit des noyaux corespondant sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R} - \{0\}$) et sur Σ. Mais le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}$ est

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

et sur $\mathbb{R} - \{0\}$ pour les conditions de Dirichlet en 0 il est

$$p_0(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(e^{\frac{|x-y|^2}{4t}} - e^{\frac{|x+y|^2}{4t}} \mathbf{1}_{xy>0} \right);$$

on obtient donc

$$\text{Tr }\left(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t\mathcal{L}_0}\right) = \frac{1}{2}\text{Tr } e^{-tA}.$$

Et donc, on a $\zeta(s,-\mu) = \frac{1}{2}\zeta_A(s,-\mu)$ et donc

$$\det\,(\mathcal{L}+\mu, \mathcal{L}_0+\mu) = \frac{1}{2}\det\,(A+\mu).$$

Puis diagonalisant l'opérateur A et en séparant les variables, il est facile de calculer explicitement l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann :

$$\mathcal{N}(-\mu) = 2\sqrt{A+\mu}.$$

Ainsi on a

$$\log\det\mathcal{N}(-\mu) = \frac{1}{2}\log\det\,(A+\mu) + \log 2,\zeta_A(0,-\mu).$$

La valeur en 0 de la fonction ζ s'exprime grâce au développement asymptotique

$$\text{Tr } e^{-tA} \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{-(n-1)/2+j}, \quad t \to 0+.$$

On a même $a_0 = l\text{vol}\,\Sigma/(4\pi)^{(n-1)/2}$, où l est la dimension des fibres de V. Il est bien connu que $\zeta_A(0,-\mu)$ s'annule si Σ est de dimension impaire, c'est à dire si M est de dimension paire. Puis si cette dimension est paire, donc $n = 2p+1$ est impaire, on a

$$\zeta_A(0,-\mu) = \sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^{p-j}}{(p-j)!} a_j \mu^{p-j}$$

qui est bien un polynôme non nul car a_0 est non nul. **Q.E.D.**

Ceci montre plutôt que la normalisation choisie ici et dans les autres références pour l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann n'est pas la bonne, il faudrait diviser cet opérateur par deux. Il serait intéressant de calculer les premiers termes du développement asymptotique des déterminants régularisés pour savoir si le polynôme est toujours nul en petite dimension, lorsque l'on normalise convenablement l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann.

4.4 Cas du scattering avec obstacle.

Soit $\mathcal{O} \subset M$ un compact à bord lisse de M, on note Σ le bord de $\mathcal{O}$ et $\Omega = M - \mathcal{O}$. Alors $\mathcal{L}_0$ est la somme de deux opérateurs :

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{\mathcal{O}} \oplus \mathcal{L}_\Omega.$$

Où $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ (resp. $\mathcal{L}_\Omega$) est l'opérateur associé à L sur $\mathcal{O}$ (resp. Ω) avec les conditions de Dirichlet sur le bord. Puisque $\mathcal{O}$ est compact, l'opérateur $e^{-t\mathcal{L}_{\mathcal{O}}}$ est un opérateur à trace et on peut bien définir le déterminant relatif de $(\mathcal{L}-z, \mathcal{L}_\Omega - z)$ et on aura

Proposition 4.8 *Il y a un polynôme à coefficients réels P de degré inférieur à $(n-1)/2$ tel que*

$$\det\,(\mathcal{L}-z,\mathcal{L}_\Omega-z)=e^{P(z)}\det\,\mathcal{N}(z)\,\det\,(\mathcal{L}_\mathcal{O}-z).$$

On peut aussi retrouver la fonction de décalage spectral associée au couple $(\mathcal{L},\mathcal{L}_\Omega)$.

Proposition 4.9 *Pour presque tout $\lambda\geq 0$,on a*

$$\begin{aligned}\xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_\Omega) &= \xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_0)-N_\mathcal{O}(\lambda)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\ \text{Argdet}\,\mathcal{N}(\lambda+i\varepsilon)-N_\mathcal{O}(\lambda).\end{aligned}$$

Où $N_\mathcal{O}$ est la fonction de comptage des valeurs propres de $\mathcal{L}_\mathcal{O}$:

$$N_\mathcal{O}(\lambda)=\text{Card}\{\mu\in\text{Sp}\,\mathcal{L}_\mathcal{O},\mu\leq\lambda\}.$$

4.5 Cas de deux opérateurs isométriques à l'infini.

Soient $L_i\,:\,C_0^\infty(M_i,V_i)\longrightarrow C_0^\infty(M_i,V_i)$, $i=1,2$, deux laplaciens généralisés vérifiant la propriété de propagation à vitesse finie. On suppose qu'il y a des compacts $K_i\subset M_i$, au dehors duquels les opérateurs L_1 et L_2 sont isométriques. Nous pouvons alors étudier le déterminant relatif $\det\,(\mathcal{L}_1-z,\mathcal{L}_2-z)$.

Pour ceci, on peut supposer que les compacts K_i sont à bords lisses. On identifie alors les bords de ces deux compacts et on le note Σ. De même on identifie M_1-K_1 à M_2-K_2, on notera cet ouvert Ω ; et on notera aussi V le fibré V_1 (ou V_2) au-dessus de Ω et L l'opérateur L_i sur Ω. Les opérateurs $(\mathcal{L}_i-z)^{-\nu}$ agissent naturellement sur l'espace

$$\begin{aligned}L^2(K_1,V_1)\oplus L^2(\Omega,V)\oplus L^2(K_2,V_2) &= L^2(M_1,V_1)\oplus L^2(K_2,V_2)\\ &= L^2(K_1,V_1)\oplus L^2(M_2,V_2).\end{aligned}$$

De plus si ν est un entier, $\nu>n/2$ alors l'opérateur

$$(\mathcal{L}_1-z)^{-\nu}-(\mathcal{L}_2-z)^{-\nu}$$

est à trace. En effet, si $\mathcal{L}_\Omega$ est l'opérateur associé à L pour les conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega$, alors on a

$$(\mathcal{L}_1-z)^{-\nu}-(\mathcal{L}_2-z)^{-\nu}=\left[(\mathcal{L}_1-z)^{-\nu}-(\mathcal{L}_\Omega-z)^{-\nu}\right]-\left[(\mathcal{L}_2-z)^{-\nu}-(\mathcal{L}_\Omega-z)^{-\nu}\right],$$

c'est donc une différence d'opérateur à trace, il est donc à trace. Et on aura donc

$$\det\,(\mathcal{L}_1-z,\mathcal{L}_2-z)=\frac{\det\,(\mathcal{L}_1-z,\mathcal{L}_\Omega-z)}{\det\,(\mathcal{L}_2-z,\mathcal{L}_\Omega-z)}.$$

Et si on note $\mathcal{N}_i$ les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann associés (ce sont des opérateurs agissant sur $C^\infty(\Sigma,V)$), et $\mathcal{L}_{K_i}$ l'opérateur associé à L_i, : $C_0^\infty(K_i,V_i)\longrightarrow C_0^\infty(K_i,V_i)$ avec les conditions de Dirichlet sur ∂K_i alors :

Proposition 4.10 *Il existe un polynôme à coefficients réels P de degré inférieur à $(n-1)/2$, tel que*

$$\det\,(\mathcal{L}_1 - z, \mathcal{L}_2 - z) = e^{P(z)} \frac{\det\,(\mathcal{L}_{K_1} - z)}{\det\,(\mathcal{L}_{K_2} - z)}\,\frac{\det\,\mathcal{N}_1(z)}{\det\,\mathcal{N}_2(z)}.$$

Nous pouvons améliorer quelque peu cette égalité. Les opérateurs de Dirichlet-to-Neumann $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ ne diffèrent que d'un opérateur à noyau lisse, en effet l'opérateur $\mathcal{N}_1(z)^{-1} - \mathcal{N}_2(z)^{-1}$ est un opérateur à noyau lisse. En effet, le noyau de Schwartz de cet opérateur est la différence des noyaux de Schwartz des opérateurs $(\mathcal{L}_i - z)^{-1}$, et comme les opérateurs L_i sont isométriques dans un voisinage de Σ, leurs résolvantes diffèrent bien d'un opérateur lissant. On peut donc écrire

$$\mathcal{N}_1(z) = \mathcal{N}_2(z)\,(\mathrm{Id} + \mathcal{S}(z))\,,$$

où $\mathcal{S}(z)$ est un opérateur à noyau lisse sur $C^\infty(\Sigma, V)$. Ainsi le déterminant de Fredholm de l'opérateur $\mathrm{Id} + \mathcal{S}(z)$ est bien défini et grâce à une remarque de M. Kontsevich et S. Vishik ([K-V]), on a

$$\det\,\mathcal{N}_1(z) = \det\,\mathcal{N}_2(z) \det_{Fr}\,(\mathrm{Id} + \mathcal{S}(z))\,.$$

Ainsi on obtient le

Théorème. 4.11

$$\det\,(\mathcal{L}_1 - z, \mathcal{L}_2 - z) = e^{P(z)} \det_{Fr}\,(\mathrm{Id} + \mathcal{S}(z))\,\frac{\det\,(\mathcal{L}_{K_1} - z)}{\det\,(\mathcal{L}_{K_2} - z)}.$$

De plus, si $\xi(\lambda, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ est la fonction de décalage spectral associée au couple $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ alors on a pour presque tout $\lambda \geq 0$ l'égalité

$$\xi(\lambda, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = N_{K_2}(\lambda) - N_{K_1}(\lambda) + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi}\ \mathrm{Arg}\ \det_{Fr}\,(\mathrm{Id} + \mathcal{S}(\lambda + i\varepsilon))\,.$$

Où on a noté N_{K_i} est la fonction de comptage des valeurs propres de $\mathcal{L}_{K_i}$:

$$N_{K_i}(\lambda) = \mathrm{Card}\{\mu \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{L}_{K_i}, \mu \leq \lambda\}.$$

5 Asymptotique pour la fonction Xi.

Notre résultat principal est ici le suivant

Théorème. 5.1 *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète et*

$$L\,:\,C_0^\infty(M, V) \longrightarrow C_0^\infty(M, V)$$

un laplacien généralisé, vérifiant la propriété de propagation à vitesse finie, agissant sur les sections d'un fibré hermitien de rang l, comme précédemment ; on note encore $\mathcal{L}$ l'opérateur auto-adjoint non-borné qui lui correspond sur

$L^2(M,V)$. Soit $\mathcal{O} \subset M$ un domaine borné à bord lisse de M, on note $\mathcal{L}_{M-\mathcal{O}}$ l'opérateur non-borné sur $L^2(M-\mathcal{O},V)$ correspondant à l'opérateur $L : C_0^\infty(M-\mathcal{O},V) \longrightarrow C_0^\infty(M-\mathcal{O},V)$ avec les conditions de Dirichlet sur $\partial\mathcal{O}$. Alors si ξ est la fonction de décalage spectral associée au couple $(\mathcal{L},\mathcal{L}_{M-\mathcal{O}})$, on a :

$$\int_0^\Lambda \xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_{M-\mathcal{O}})d\lambda \sim_{\Lambda\to\infty} -l\ \frac{\operatorname{vol}\mathcal{O}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\frac{\Lambda^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+2)}.$$

Preuve .– Lorsque $t\to 0^+$, on a l'asymptotique (4.9)

$$\operatorname{Tr}\ \left(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t\mathcal{L}_{M-\mathcal{O}}}\right) \sim l\frac{\operatorname{vol}\mathcal{O}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\ .$$

Or la formule de M. Krein fournit

$$-t\int_0^\infty e^{-t\lambda}\xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_{M-\mathcal{O}})d\lambda \sim l\frac{\operatorname{vol}\mathcal{O}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\ .$$

L'idée est maintenant d'appliquer le théorème taubérien de Karamata. Ce serait direct si la fonction Xi était négative, ce qui n'est pas généralement le cas. On va donc reprendre pas à pas la preuve de ce théorème Tauberien. Selon (4.9) on a

$$\xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_{M-\mathcal{O}}) = \xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_0) - N_{\mathcal{O}}(\lambda),$$

où $\mathcal{L}_0$ est l'opérateur auto-adjoint correspondant à l'opérateur $L : C_0^\infty(M-\partial\mathcal{O},V) \longrightarrow C_0^\infty(M-\partial\mathcal{O},V)$ avec les conditions de Dirichlet sur $\partial\mathcal{O}$; et $N_{\mathcal{O}}(\lambda)$ est la fonction de comptage des valeurs propres de l'opérateur auto-adjoint $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ qui correspond à l'opérateur $L : C_0^\infty(\mathcal{O},V) \longrightarrow C_0^\infty(\mathcal{O},V)$ avec les conditions de Dirichlet sur $\partial\mathcal{O}$:

$$N_{\mathcal{O}}(\lambda) = \operatorname{Card}\{\mu\in \operatorname{Sp}\mathcal{L}_{\mathcal{O}},\ \mu\le\lambda\}.$$

On sait que

$$N_{\mathcal{O}}(\lambda) \sim_{\lambda\to\infty} l\ \frac{\operatorname{vol}\mathcal{O}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\int_0^\Lambda \xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_0)d\lambda = o\left(\Lambda^{\frac{n}{2}+1}\right),\ \Lambda\to+\infty.$$

Grâce à l'asymptotique (4.9), on sait déjà que

$$-t\int_0^\infty e^{-t\lambda}\xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_0)d\lambda \sim l\frac{\operatorname{vol}\partial\mathcal{O}}{(4\pi t)^{\frac{n-1}{2}}}\ .$$

On introduit alors la famille de mesures

$$d\mu_t(\lambda) = t^{\frac{n}{2}+1}\xi\left(\frac{\lambda}{t},\mathcal{L},\mathcal{L}_0\right)d\left(\frac{\lambda}{t}\right).$$

On a donc pour tout $s > 0$,

$$\lim_{t \to 0^+} \int_0^\infty e^{-s\lambda} e^{-\lambda} d\mu_t(\lambda) = 0.$$

On a donc

$$\lim_{t \to 0^+} \int_0^\infty f(\lambda) e^{-\lambda} d\mu_t(\lambda) = 0,$$

pour toute fonction f qui est une combinaison linéaire finie de fonctions du type $\lambda \mapsto e^{-s\lambda}, \;\; s > 0$. On veut montrer que cette limite est vrai pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$ et nulle à l'infini. Pour cela, il suffit de montrer que la famille de mesure $\{e^{-\lambda} d\mu_t(\lambda)\}_{0<t\leq 1}$ est bornée. Ceci repose sur le fait suivant,

$$\int_0^\infty |\xi(\lambda)| \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^{\frac{n}{2}+1}} < \infty. \tag{5.10}$$

Si n est pair, on a montré que l'opérateur $(\mathcal{L}+1)^{-\frac{n}{2}} - (\mathcal{L}_0+1)^{-\frac{n}{2}}$ est un opérateur à trace, car $n/2$ est un entier strictement plus grand que $(n-1)/2$. Et la théorie de M. Krein nous donne le résultat.

Lorsque n est impair, on introduit l'opérateur

$$K = L - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \; : \; C_0^\infty(M \times \mathrm{S}^1, \pi^* V) \longrightarrow C_0^\infty(M \times \mathrm{S}^1, \pi^* V),$$

où $\pi \; : \; M \times \mathrm{S}^1 \longrightarrow M$ est la projection sur le premier facteur. On note $\mathcal{K}$ est l'opérateur autoadjoint associé à K et $\mathcal{K}_0$ est l'opérateur associé à K avec les conditions de Dirichlet sur $\partial\mathcal{O} \times \mathrm{S}^1$. Alors la fonction de décalage spectral du couple $(\mathcal{K}, \mathcal{K}_0)$ est

$$\xi(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}_0) N(\lambda),$$

où $N(\lambda)$ est la fonction de comptage des valeurs propres de l'opérateur $-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ sur le cercle. De plus, on sait que l'opérateur

$$(\mathcal{K}+1)^{-\frac{n+1}{2}} - (\mathcal{K}_0+1)^{-\frac{n+1}{2}}$$

est à trace ; en conséquence, on a

$$\int_0^\infty |\xi(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}_0)| N(\lambda) \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^{\frac{n+1}{2}+1}} < \infty.$$

Mais on sait qu'il existe une constante $C > 1$ telle que $(1+\lambda)^{1/2}/C \leq N(\lambda) \leq C(1+\lambda)^{1/2}$, ce qui achève la preuve de (5.10).
De ce résultat, on en déduit facilement que

$$\sup_{0<t\leq 1} \;\; t^{\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty |\xi(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}_0)| e^{-\lambda t} d\lambda < \infty.$$

Ce qui montre que la famille de mesures $\{e^{-\lambda}d\mu_t(\lambda)\}_{0<t\leq 1}$ est bornée. Le théorème de Stone-Weierstrass permet alors d'affirmer que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ nulle à l'infini, alors

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^\infty f(\lambda)e^{-\lambda}d\mu_t(\lambda)=0.$$

Ainsi si φ est une fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}_+$ alors on a

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^\infty \varphi(\lambda)d\mu_t(\lambda)=0.$$

Le but est maintenant de montrer que ceci est valable pour la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,1]$. Pour ceci, on introduit la fonction

$$f_\delta(\lambda)=\min\left(1,\left(1-\frac{\lambda-1}{\delta}\right)_+\right).$$

On a donc

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^\infty f_\delta(\lambda)d\mu_t(\lambda)=0.$$

Et pour $0<t\leq 1$, on a les majorations

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,1]}(\lambda)d\mu_t(\lambda)-\int_0^\infty f_\delta(\lambda)d\mu_t(\lambda)\right| &\leq \int_1^{1+\delta} d|\mu_t|(\lambda)\\ &\leq t^{\frac{n}{2}+1}\int_{\frac{1}{t}}^{\frac{1+\delta}{t}}|\xi(\lambda)|d\lambda\\ &\leq t^{\frac{n}{2}+1}\sup_{\frac{1}{t}\leq\lambda\leq\frac{1+\delta}{t}}(1+\lambda)^{\frac{n}{2}+1}\int_{\frac{1}{t}}^\infty\frac{|\xi(\lambda)|d\lambda}{(1+\lambda)^{\frac{n}{2}+1}}\\ &\leq (2+\delta)^{\frac{n}{2}+1}\int_{\frac{1}{t}}^\infty\frac{|\xi(\lambda)|d\lambda}{(1+\lambda)^{\frac{n}{2}+1}}.\end{aligned}$$

Ce qui assure que $\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{n}{2}+1}\int_0^{1/t}\xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_0)d\lambda=0$. **Q.E.D.**

Remarque : si on sait que l'opérateur $(\mathcal{L}+1)^{-\alpha}-(\mathcal{L}_0+1)^{-\alpha}$ est à trace pour un réel $\alpha\in](n-1)/2,n/2]$, alors cet asymptotique s'améliore ; la même preuve fournit alors

$$\int_0^\Lambda \xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_0)d\lambda=o\left(\Lambda^{\alpha+1}\right).$$

Et donc on aura l'asymptotique :

$$\int_0^\Lambda \xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_{M-\mathcal{O}})d\lambda=-l\,\frac{\operatorname{vol}\mathcal{O}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\frac{\Lambda^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+2)}+o\left(\Lambda^{\alpha+1}\right).$$

La fonction ξ est une généralisation de la fonction de comptage des valeurs propres. Par exemple, si le spectre de $\mathcal{L}$ est discret, donc celui de $\mathcal{L}_{M-\mathcal{O}}$ aussi, on a alors

$$-\xi(\lambda,\mathcal{L},\mathcal{L}_{M-\mathcal{O}})=N_{\mathcal{L}}(\lambda)-N_{\mathcal{L}_{M-\mathcal{O}}}(\lambda),$$

où on a noté $N_{\mathcal{L}}$ et $N_{\mathcal{L}_{M-\mathcal{O}}}$ les fonctions de comptage des valeurs propres des opérateurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_{M-\mathcal{O}}$. Si la variété est compacte, alors on a les asymtotiques de Weyl, pour chaqu'une des fonctions de comptage. Et on obtient donc

$$-\xi(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}_{M-\mathcal{O}}) \sim_{\lambda\to\infty} l \frac{\operatorname{vol}\mathcal{O}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\lambda^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

C'est cette version dérivée de l'asymptotique qui est l'analogue de la formule asymptotique de Weyl pour la fonction de comptage de valeurs propres. Cependant cette version dérivée n'est pas valable en toute généralité. On va néanmoins donner un cadre dans lequel celle ci est vrai. Si la fonction $\xi(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}_{M-\mathcal{O}})$ est une fonction à variation bornée telle que, pour un réel $\alpha \in](n-1)/2, n/2]$, on ait

$$\int_0^\infty \frac{|d\xi(\lambda)|}{(1+\lambda)^\alpha} < \infty,$$

alors on a l'asymptotique de Weyl :

$$\xi(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}_{M-\mathcal{O}}) = l \frac{\operatorname{vol}\mathcal{O}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\lambda^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} + o\left(\lambda^\alpha\right). \tag{5.11}$$

La preuve de ce fait consiste à montrer que la fonction de décalage spectral du couple $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_0)$ vérifie

$$\xi(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}_0) = o\left(\lambda^\alpha\right).$$

Ceci se fait grâce à la formule suivante :

$$\operatorname{Tr}\ \left(e^{-t\mathcal{L}} - e^{-t\mathcal{L}_0}\right) = \int_0^\infty e^{-t\lambda} d\xi(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}_0) + \xi(0^+, \mathcal{L}, \mathcal{L}_0).$$

L'asymptotique de Weyl (5.11) pour la fonction $\xi(\lambda, \mathcal{L}, \mathcal{L}_{M\mathcal{O}})$ a été obtenu dans de nombreux cadres géométriques. Dans un cadre euclidien et pour le couple laplacien euclidien $\Delta_{\mathbb{R}^n}$ et $\Delta_{\mathbb{R}^n} + V$, où V est une fonction à support compact, ceci est due à V. Buslaev, Y. Colin de Verdière, L. Guillopé ([Bu],[CdV], [Gu]). Pour la cas du laplacien hors d'un obstacle, ceci a été montré sous certaines hypothèses (obstacle convexe, étoilé ou sans trajectoire captée) par A. Majda, J.Ralston [M-R], A. Jensen, T. Kato [J-K], et à V. Petkov, G. Popov [P-P] ; R. Melrose et D. Robert ont montré le cas général [Me], [R]. Signalons que dans [J-K], les auteurs avaient montré notre asymtotique dans le cas d'un obstacle quelconque dans $\mathbb{R}^n$. Le dernier résultat dans le cadre euclidien est due à T. Christiansen [C2] et L. Parnovski [P3], ils montrent que l'asymptotique de Weyl est vrai pour l'opérateur de Laplace sur les fonctions sur les variétés riemanniennes qui ont un voisinage de l'infini isométrique à un cône : $[0, \infty[\times\Sigma, dr^2 + r^2 h)$ où h est une métrique riemannienne sur Σ. Le résultat de T. Christiansen est vrai lorsque la géométrie est asymptote à celle-ci.

Le cas des variétés riemanniennes dont un voisinage de l'infini est cylindrique est due à T. Christiansen et M. Zworski et L. Parnovski [C-Z], [P1]. Le cas des surfaces hyperboliques à l'infini et de volume fini est du à W. Müller [Mu 1]

et à L. Parnoski [P2]. Enfin les cas des surfaces de géométrie finie est due à L. Guillopé et M. Zworski [G-Z].
Remarque : pour finir cette partie, nous notons que notre méthode permet de traiter le cas où on veut comparer l'opérateur $\mathcal{L}$ à un opérateur modèle $\overline{\mathcal{L}}$: si on sait que l'opérateur $(\mathcal{L}+1)^{-(n-1)/2}-(\overline{\mathcal{L}}+1)^{-(n-1)/2}$ est à trace, alors la fonction de décalage spectral du couple $(\overline{L}, L_{M-\mathcal{O}})$ vérifie

$$\int_0^\Lambda \xi(\lambda,\overline{\mathcal{L}},\mathcal{L}_{M-\mathcal{O}})d\lambda \sim_{\Lambda\to\infty} -l\ \frac{\mathrm{vol}\,\mathcal{O}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\frac{\Lambda^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+2)}.$$

6 Scattering supersymétrique : le cas des formes différentielles.

Notre but est d'expliquer ici comment les résultats de N. Borisov, W. Müller et R. Schrader se généralisent. Nous commençons par préciser le cadre :

6.1 L'opérateur de Gauss-Bonnet.

Soit (M^n,g) une variété riemannienne complète, alors l'opérateur de différentiation extérieure

$$d\,:\,C^\infty(\Lambda^pT^*M)\longrightarrow C^\infty(\Lambda^{p+1}T^*M)$$

a un adjoint formel

$$\delta\,:\,C^\infty(\Lambda^{p+1}T^*M)\longrightarrow C^\infty(\Lambda^pT^*M),$$

qui est défini à l'aide la formule d'intégration par partie

$$\int_M <d\alpha,\beta>=\int_M <\alpha,\delta\beta>,\ \forall\alpha\in C^\infty(\Lambda^pT^*M),\ \beta\in C^\infty(\Lambda^{p+1}T^*M).$$

L'opérateur de Gauss-Bonnet est l'opérateur

$$d+\delta\,:\,C^\infty(\Lambda^\bullet T^*M)\longrightarrow C^\infty(\Lambda^\bullet T^*M),$$

il envoie une forme de degré pair sur une forme de degré impair et vice-versa ; son carré est le laplacien de Hodge-deRham. Selon [Ch], ces opérateurs admettent une unique extension auto-adjointe à $L^2(\Lambda^\bullet T^*M)$.

6.2 Les conditions aux bords.

Soit $\Omega\subset M$ un domaine à bord, $\partial\Omega$ est supposé compacte et lisse. Si on considère l'opérateur de Gauss-Bonnet et le laplacien de Hodge-deRham sur Ω, ils admettent de nombreuses extensions autoadjointes ; nous étudions uniquement trois d'entre elles :

- Δ_0 qui est la réalisation du laplacien de Hodge-deRham sur Ω avec les conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega$.

– Les conditions relatives : on définit

$$\mathcal{D}\left((d+\delta)_{Rel}\right) = \{\alpha \in L^2(\Lambda T^*M), (d+\delta)\alpha \in L^2, \text{ et } i^*\alpha = 0\},$$

où $i : \partial\Omega \longrightarrow \Omega$ est l'inclusion ; alors

$$\left((d+\delta)_{Rel}, \mathcal{D}\left((d+\delta)_{Rel}\right)\right)$$

est un opérateur autoadjoint. Et le carré de cet opérateur est noté Δ_{Rel}, il correspond au laplacien de Hodge-deRham pour les conditions aux bords

$$\{i^*\alpha = 0, \ i^*(\delta\alpha) = 0\}.$$

– Les conditions absolues : on définit

$$\mathcal{D}\left((d+\delta)_{Absl}\right) = \{\alpha \in L^2(\Lambda T^*M), (d+\delta)\alpha \in L^2, \text{ et } \mathrm{int}_n\alpha = 0\},$$

où $n : \partial\Omega \longrightarrow T\Omega$ est le champ normal unitaire extérieur ; alors

$$\left((d+\delta)_{Abs}, \mathcal{D}\left((d+\delta)_{Abs}\right)\right)$$

est un opérateur autoadjoint. Et le carré de cet opérateur est noté Δ_{Abs}, il correspond au laplacien de Hodge-deRham pour les conditions aux bords

$$\{\mathrm{int}_n\alpha = 0, \ \mathrm{int}_n(d\alpha) = 0\}.$$

6.3 Existence des opérateurs d'ondes.

Nous avons le résultat suivant qui un analogue de la première partie du théorème (2.2) :

Théorème. 6.1 *Si ν est un entier $\nu > (n-1)/2$, alors pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$, les opérateurs*

$$(\Delta_{Rel}-z)^{-\nu}-(\Delta_0-z)^{-\nu}, \ (\Delta_{Abs}-z)^{-\nu}-(\Delta_0-z)^{-\nu}, \ (\Delta_{Abs}-z)^{-\nu}-(\Delta_{Rel}-z)^{-\nu}$$

sont à trace.

La preuve de ce théorème se déroule de la même façon que la preuve du théorème (2.2). Comme dans cette preuve, nous notons $G_{Rel}(z,x,y)$, $G_{Abs}(z,x,y)$ et $G_0(z,x,y)$ les noyaux de Schwartz des opérateurs $(\Delta_{Rel}-z)^{-1}$, $(\Delta_{Abs}-z)^{-1}$ et $(\Delta_0-z)^{-1}$. Par exemple, $G_{Rel}(z,x,y) \in \mathrm{Hom}(\Lambda T_y^*\Omega, \Lambda T_x^*\Omega)$ et si $f \in L^2(\Lambda T^*\Omega)$, alors

$$(\Delta_{Rel}-z)^{-1}f(x) = \int_\Omega G_{Rel}(z,x,y)f(y)dy.$$

il suffit de montrer que les deux premiers opérateurs sont à trace, puisque le troisième est la différence des deux premiers. Comme la preuve du théorème (2.2), ceci repose sur les deux identités suivantes

$$\begin{aligned} G_{Rel}(z,x,y) - G_0(z,x,y) &= \int_{t\in\partial\Omega} G_{Rel}(z,x,t)\theta_t \wedge \delta_t G_0(z,t,y)dt \\ G_{Abs}(z,x,y) - G_0(z,x,y) &= -\int_{t\in\partial\Omega} G_{Abs}(z,x,t)\mathrm{int}_{n_t} d_t G_0(z,t,y)dt, \end{aligned}$$

où $n_t \in T_t\Omega$ est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$ en t et $\theta_t \in T^*\Omega$ est la 1-forme différentielle $\theta_t(.) =< n_t, . >$. Ces formules sont des conséquences de la formule de Green :

$$(\Delta u, v) - (u, \Delta v) = \int_{\partial\Omega} < u, \mathrm{int}_n dv > - < \mathrm{int}_n u, v > + < \delta u, \mathrm{int}_n v > - < \mathrm{int}_n u, \delta v > .$$

Comme dans 2.2, ces traces sont reliées à des déterminants d'opérateurs de Dirichlet-to-Neumann.

6.4 Les opérateurs Dirichlet-vers-Relatif et Dirichlet-vers-absolu

On considère l'opérateur suivant : à $\alpha \in C^\infty(\Lambda T^*\partial\Omega)$, on associe β l'unique solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} (\Delta - z)\beta = 0 & \text{sur } M - \partial\Omega \\ i^*\beta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \mathrm{int}_n\beta = \alpha & \text{sur } \partial\Omega \\ \beta \in C^\infty(\Lambda T^*\overline{\Omega}) \cap L^2 & \end{cases}$$

On pose alors

$$\mathcal{N}_{Rel}(z)\alpha = -i^*(\delta\beta).$$

L'opérateur de Dirichlet-vers-Relatif $\mathcal{N}_{Rel}$ est alors un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre 1 inversible. Et il vérifie les mêmes propriétés que l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann. Ces propriétés résultent du fait que l'opérateur $\mathcal{N}_{Rel}^{-1}$ a pour noyau de Schwartz $\mathrm{int}_{n_x} G_{Rel}(z, x, y)\theta_y \wedge \quad$. C'est à dire que si $\alpha \in C^\infty(\Lambda T^*\partial\Omega)$, alors

$$\mathcal{N}_{Rel}(z)^{-1}\alpha(x) = \int_{\partial\Omega} \mathrm{int}_{n_x} G_{Rel}(z, x, y)\theta_y \wedge \alpha(y)\ dy.$$

En effet, si

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} G_{Rel}(z, x, y)(\theta_y \wedge \varphi(y))dy$$

où $\varphi \in C^\infty(\Lambda T^*\partial\Omega)$, alors u vérifie les équations

$$\begin{cases} (\Delta - z)u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u \in C^\infty(\Lambda T^*\overline{\Omega}) \cap L^2 & \\ i^*u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De plus, la formule de Green montre que $-i^*(\delta u) = \varphi$ ainsi $\mathcal{N}_{Rel}(z)^{-1}\varphi = \mathrm{int}_n u$. En effet, si T est la distribution $v \mapsto \int_{\partial\Omega} < v, \theta \wedge \varphi >$, alors la distribution $(\Delta_{Rel} - z)^{-1}T$ est dans L^2 et elle est égale à u, i.e.

$$(\Delta_{Rel} - z)^{-1}T(v) = T\left((\Delta_{Rel} - \bar{z})^{-1}v\right) = \int_\Omega < v, u > .$$

Mais la formule de Green montre que si $v \in \mathcal{D}(\Delta_{Rel})$ alors

$$< (\Delta - \bar{z})v, u >= - \int_{\partial\Omega} < v, \theta \wedge \delta u >$$

Or ceci doit aussi valoir $T(v)$.

On montre de la même façon que si $\mathcal{N}_{Abs}(z)$ est l'opérateur qui à $\alpha \in C^\infty(\Lambda T^* \partial\Omega)$ associe $\mathcal{N}_{Abs}(z)\alpha = \mathrm{int}_n d\beta$, où β est la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} (\Delta - z)\beta = 0 & \text{sur } M - \partial\Omega \\ i^*\beta = \alpha & \text{sur } \partial\Omega \\ \mathrm{int}_n \beta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \beta \in C^\infty(\Lambda T^* \overline{\Omega}) \cap L^2 & \end{cases}$$

Alors $\mathcal{N}_{Abs}(z)$ est aussi un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre 1 inversible. Et le noyau de Schwartz de l'opérateur $\mathcal{N}_{Abs}(z)^{-1}$ est $i_x^* i_y^* G_{Abs}(z, x, y)$, c'est à dire que

$$\mathcal{N}_{Abs}(z)^{-1} f(x) = \int_{\partial\Omega} i_x^* i_y^* G_{Abs}(z, x, y) f(y) \; dy.$$

Maintenant, la même preuve que le théorème 2.2 montre que

Théorème. 6.2 *Si ν est un entier $\nu > (n-1)/2$, alors on a*

$$(\nu - 1)! \ \mathrm{Tr} \ \left[(\Delta_{Rel} - z)^{-\nu} - (\Delta_0 - z)^{-\nu} \right] = \frac{d^\nu}{dz^\nu} \log \det \mathcal{N}_{Rel}(z),$$

$$(\nu - 1)! \ \mathrm{Tr} \ \left[(\Delta_{Abs} - z)^{-\nu} - (\Delta_0 - z)^{-\nu} \right] = - \frac{d^\nu}{dz^\nu} \log \det \mathcal{N}_{Abs}(z).$$

Remarque : On pourrait énoncer une formule analogue à propos de l'opérateur $(\Delta_{Abs} - z)^{-\nu} - (\Delta_{Rel} - z)^{-\nu}$:

$$\begin{aligned} & (\nu - 1)! \ \mathrm{Tr} \ \left[(\Delta_{Abs} - z)^{-\nu} - (\Delta_{Rel} - z)^{-\nu} \right] \\ = & - \frac{d^\nu}{dz^\nu} \log \det \mathcal{N}_{Abs}(z) - \frac{d^\nu}{dz^\nu} \log \det \mathcal{N}_{Rel}(z). \end{aligned} \quad (6.12)$$

6.5 Scattering supersymétrique

Nous rappelons d'abord ce que sont les données du scattering supersymétrique comme elles sont définies dans [B-M-S]. C'est la donnée d'un couple d'opérateurs auto-adjoint non-bornés (Q, Q_0) agissant sur un espace de Hilbert H telle que

– H est muni d'une involution τ qui anticommute avec Q et Q_0, i.e.

$$\tau^2 = \mathrm{Id}_H \ ; \ Q\tau + \tau Q = 0, \text{ sur } \mathcal{D}(Q_0) \ ; \ Q_0 \tau + \tau Q_0 = 0, \text{ sur } \mathcal{D}(Q_0).$$

Autrement dit si $H^\pm = \mathrm{Ker}\,(\tau \mp \mathrm{Id}_H)$ alors $H = H^+ \oplus H^-$ et dans cette décomposition, on a

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & Q^- \\ Q^+ & 0 \end{pmatrix}, \ Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & Q_0^- \\ Q_0^+ & 0 \end{pmatrix}.$$

– Les opérateurs d'ondes $W^{\pm}(Q^2, Q_0^2) = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itQ^2} e^{-itQ_0^2} P_0$ existent et sont complets, où P_0 est le projection spectral de Q_0^2 correspondant à son spectre absolument continu.
– Ces opérateurs d'ondes enlacent Q et Q_0, i.e.

$$QW^{\pm}(Q^2, Q_0^2)P_0 = W^{\pm}(Q^2, Q_0^2)Q_0 P_0, \text{ sur } \mathcal{D}(Q_0).$$

Dans [B-M-S], les auteurs obtiennent le critère suivant pour que le couple (Q, Q_0) définissent des données de scattering supersymétrique.

Proposition 6.3 *Si les opérateurs $Qe^{-tQ^2} - Q_0 e^{-tQ_0^2}$ sont à trace pour tout $t > 0$ ou si pour un réel ν les opérateurs $Q(Q^2 - z)^{-\nu} - Q_0(Q_0^2 - z)^{-\nu}$ sont à trace pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$, alors le couple (Q, Q_0) définit des données de scattering supersymétrique.*

6.6 L'indice de Witten.

Soient (Q, Q_0) des données de scattering supersymétrique. Lorsque cela a un sens, on peut définir l'indice de Witten

$$W(t) = \text{Tr } \tau \left(e^{-tQ^2} - e^{-tQ_0^2} \right).$$

Lorsque Q_0 (et donc Q) a un spectre discret, cette quantité ne dépend pas de t et vaut l'indice relatif entre Q^+ et Q_0^+ :

$$W(t) = \text{ind } Q^+ - \text{ind } Q_0^+ = \dim \text{Ker } Q^+ - \dim \text{Ker } Q^- - \dim \text{Ker } Q_0^+ + \dim \text{Ker } Q_0^-.$$

Dans le cas où le spectre de Q_0 n'est pas discret, $W(t)$ est la régularisation à la Witten de l'indice relatif entre Q^+ et Q_0^+. De plus selon [G-S 1], si Q_0 (et donc Q) est Fredholm alors

$$W(\infty) = \lim_{t \to +\infty} W(t) = \text{ind } Q^+ - \text{ind } Q_0^+.$$

Ces indices régularisés à la Witten ont été beaucoup étudiés notamment en lien avec la théorie du scattering (supersymétrique) (cf. entre autres [B-G-G-S-S], [B-M-S], [G-S 1], [B-B 1,2,3], [Mo 1,2],...).

6.7 Dans notre cadre.

Nous étudions le couple $((d + \delta)_{Abs}, (d + \delta)_{Rel})$ sur $L^2(\Lambda T^*\Omega)$. L'espace $L^2(\Lambda T^*\Omega)$ se décompose par rapport à la parité du degré des formes différentielles :

$$L^2(\Lambda T^*\Omega) = L^2(\Lambda^{2\bullet} T^*\Omega) \oplus L^2(\Lambda^{2\bullet+1} T^*\Omega).$$

Et l'involution est l'application τ définit par $\tau\alpha = (-1)^p \alpha$ si $\alpha \in L^2(\Lambda^p T^*\Omega)$. De la même façon que précédemment, nous avons

Proposition 6.4 *Si ν est un entier $\nu > n/2$, alors pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$, les opérateurs*

$$(d+\delta)_{Abs}\left(\Delta_{Abs} - z\right)^{-\nu} - (d+\delta)_{Rel}\left(\Delta_{Rel} - z\right)^{-\nu}$$

sont à trace. Donc le couple $((d+\delta)_{Abs}, (d+\delta)_{Rel})$ définit des données de scattering supersymétrique.

Ceci se montre à l'aide de la formule suivante :

$$\begin{aligned}(d+\delta)_{Rel}G_{Rel}(z,x,y) \quad - \quad & (d+\delta)_{Abs}G_{Abs}(z,x,y) = \\ & \int_{t\in\partial\Omega} (d+\delta)_x G_{Rel}(z,x,t)\theta_t \wedge \delta_t G_{Abs}(z,t,y)dt \\ + \quad & \int_{t\in\partial\Omega} (d+\delta)_x d_t G_{Rel}(z,x,t)\theta_t \wedge G_{Abs}(z,t,y)dt.\end{aligned}$$

Et nous avons le théorème suivant concernant l'indice de Witten :

Théorème. 6.5 *L'indice de Witten $W(t) = \mathrm{Tr}\ \tau\left(e^{-t\Delta_{Abs}} - e^{-t\Delta_{Rel}}\right)$ est indépendant de t et il vaut*

$$W(t) = \chi(\partial\Omega),$$

où $\chi(\partial\Omega)$ est la caractéristique d'Euler du bord de Ω.

Preuve .– Ce résultat est une conséquence directe du résultat de U. Bunke ([B] qui affirme que dans ce cas $W(t)$ est indépendant de t, et que si on scinde la trace en

$$W(t) = W_K(t) + W_{\Omega-K}(t)$$

où la première trace est sur un voisinage compact K de $\partial\Omega$ et la seconde sur le complémentaire de ce compact, alors pour une constante $C > 0$, on a

$$|W_{\Omega-K}(t)| = O(e^{-c/t})$$

lorsque $t \to 0^+$. Ainsi

$$\lim_{t\to 0^+} W(t) = \lim_{t\to 0^+} W_K(t).$$

maintenant cette limite se calcule à l'aide de l'asymptotique local de

$$\mathrm{Tr}_{\ \Lambda T_x^*\Omega}\left[\tau\left(e^{-t\Delta_{Abs}} - e^{-t\Delta_{Rel}}\right)(x,x)\right].$$

Q.E.D.

Lorsque Ω est compact, ceci est bien connu ; en effet chaqu'un des opérateurs $(d+\delta)_{Abs}$ et $(d+\delta)_{Rel}$ a un spectre discret et suivant le théorème de Hodge-deRham pour les variétés compactes à bord, on sait que le noyau de $(d+\delta)_{Abs}$ agissant sur les p-formes différentielles est isomorphe aux p-ième groupe de cohomologie absolue de Ω et de même le noyau de $(d+\delta)_{Rel}$ agissant sur les p-formes différentielles est isomorphe aux p-ième groupe de cohomologie relative de Ω (cf. [Co]). On a ainsi

$$\mathrm{ind}\ (d+\delta)^+_{Abs} = \chi(\Omega) \text{ et } \mathrm{ind}\ (d+\delta)^+_{Rel} = \chi(\Omega, \partial\Omega).$$

Et le théorème dans ce cas n'est autre que l'égalité

$$\chi(\Omega) = \chi(\Omega, \partial\Omega) + \chi(\partial\Omega) \tag{6.13}$$

Egalité qui dans ce cas résulte de la suite exacte longue associée à l'homomorphisme cobord :

$$... \longrightarrow H^{p-1}(\partial\Omega) \longrightarrow H^p(\Omega, \partial\Omega) \longrightarrow H^p(\Omega) \longrightarrow H^p(\partial\Omega) \longrightarrow ...$$

Ce théorème montre donc que si on régularise chaqu'un des termes de 6.13 à la Witten, cette égalité a encore lieu même si la variété n'est pas compacte. Ceci permet de relier les déterminants relatifs de $(\Delta_{Abs} - z)$ et $(\Delta_{Rel} - z)$ aux déterminants de $\mathcal{N}_{Abs}$ et $\mathcal{N}_{Rel}$. Grâce à (6.12), la même preuve que précédemment montre que sur $L^2(\Lambda^p T^*\Omega)$, on a

$$\frac{d^\nu}{dz^\nu} \log\det\ (\Delta_{Abs} - z, \Delta_{Rel} - z) = \frac{d^\nu}{dz^\nu} \log\det \mathcal{N}_{Abs}(z) - \frac{d^\nu}{dz^\nu} \log\det \mathcal{N}_{Rel}(z).$$

Remarquons que ici $\mathcal{N}_{Abs}(z)$ est un opérateur sur $L^2(\Lambda^p T^*\partial\Omega)$ alors que $\mathcal{N}_{rel}(z)$ est un opérateur sur $L^2(\Lambda^{p-1} T^*\partial\Omega)$. On peut définir les super-déterminants :

Définition 6.6

$$\det{}_\tau(\Delta_{Abs} - z, \Delta_{Rel} - z) = \prod_{p=0}^{n} \left[\det\ (\Delta_{Abs} - z, \Delta_{Rel} - z, L^2(\Lambda^p T^*\Omega))\right]^{(-1)^p}.$$

$$\det{}_\tau \mathcal{N}_{Abs}(z) = \prod_{p=0}^{n-1} \left[\det\ (\mathcal{N}_{Abs}(z), L^2(\Lambda^p T^*\partial\Omega))\right]^{(-1)^p}.$$

$$\det{}_\tau \mathcal{N}_{Rel}(z) = \prod_{p=0}^{n-1} \left[\det\ (\mathcal{N}_{Rel}(z), L^2(\Lambda^p T^*\partial\Omega))\right]^{(-1)^p}.$$

Suivant le théorème (4.2), il existe un polynôme à coefficients réels P, de degré inférieur ou égale à $(n-1)/2$, tel que

$$\det{}_\tau(\Delta_{Abs} - z, \Delta_{Rel} - z) = e^{P(z)} \det{}_\tau \mathcal{N}_{Abs}(z) / \det{}_\tau \mathcal{N}_{Rel}(z),\ \ z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+.$$

Cependant le super-déterminant relatif de $(\Delta_{Abs} - z, \Delta_{Rel} - z)$ est défini à l'aide de la fonction zeta $\zeta(s,z) = \int_0^\infty e^{tz} W(t) t^{s-1} dt / \Gamma(s) = (-z)^{\chi(\partial\Omega)}$. Ainsi, nous avons le théorème :

Théorème. 6.7 *Il existe un polynôme P à coefficients réels de degré inférieur à $(n-1)/2$ telle que*

$$\det{}_\tau \mathcal{N}_{Abs}(z) = (-z)^{\chi(\partial\Omega)} e^{P(z)} \det{}_\tau \mathcal{N}_{Rel}(z).$$

6.8 Scattering super-symétrique par un obstacle.

Nous pouvons évidemment étudier de la même façon le couple formé par l'opérateur de Gauss-Bonnet sur une variété riemannienne complète (M^n, g) et l'opérateur de Gauss-Bonnet au dehors d'un obstacle compact pour les conditions absolues sur le bord. Soit donc (M^n, g) une variété riemannienne complète et $\mathcal{O} \subset M$ un domaine compact à bord lisse ; on considère alors l'opérateur $(d + \delta)$ agissant sur $L^2(\Lambda T^*M)$, cet opérateur est auto-adjoint si son domaine est

$$\mathcal{D}(d + \delta) = \{\alpha \in L^2(\Lambda T^*M),\ (d + \delta)\alpha \in L^2(\Lambda T^*M)\}.$$

Et l'opérateur $(d+\delta)_{Abs}$ agissant sur $L^2(\Lambda T^*(M - \mathcal{O}))$, cet opérateur est auto-adjoint si son domaine est

$$\mathcal{D}\left((d + \delta)_{Abs}\right) = \{\alpha \in L^2(\Lambda T^*M), (d + \delta)\alpha \in L^2, \text{et } \mathrm{int}_n\alpha = 0\},$$

où $n : \partial\mathcal{O} \longrightarrow TM$ est le champ normal unitaire extérieur à $M-\mathcal{O}$. En utilisant l'inclusion de $L^2(\Lambda T^*(M - \mathcal{O}))$ dans $L^2(\Lambda T^*M)$, on considèra abusivement que $(\Delta_{Abs} - z)^{-1}$ est un opérateur sur $L^2(\Lambda T^*M)$. On a alors le théorème suivant

Théorème. 6.8 *Si ν est un entier $\nu > n/2$, alors, pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$, les opérateurs*

$$(\Delta - z)^{-\nu} - (\Delta_{Abs} - z)^{-\nu} \ \text{ et } (d + \delta)(\Delta - z)^{-\nu-1} - (d + \delta)_{Abs}(\Delta_{Abs} - z)^{-\nu-1}$$

sont à trace. Ainsi le couple $((d + \delta), (d + \delta)_{Abs})$ définit des données de scattering supersymétrique. De plus, l'indice de Witten est indépendant de t et il vaut la caractéristique d'Euler relative de $\mathcal{O}$, i.e.

$$W(t) = \mathrm{Tr}\ \tau\left(e^{-t\Delta} - e^{-t\Delta_{Abs}}\right) = \chi(\mathcal{O}, \partial\mathcal{O}).$$

Ce théorème permet de relier les super-déterminants de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann, de l'opérateur Dirichlet-vers-absolu et de $\Delta_{\mathcal{O}}$ (le laplacien de Hodge-deRham sur $\mathcal{O}$ pour les conditions de Dirichlet sur le bord) :

Corollaire 6.9

$$\det{}_\tau(\Delta - z, \Delta_{Abs} - z) = (-z)^{\chi(\mathcal{O},\partial\mathcal{O})}.$$

De plus, il exsite un polynôme P à coefficients réels de degré inférieur à $(n-1)/2$ tel que

$$\det{}_\tau\mathcal{N}(z)\det{}_\tau(\Delta_{\mathcal{O}} - z) = (-z)^{\chi(\mathcal{O},\partial\mathcal{O})}e^{P(z)}\det{}_\tau\mathcal{N}_{Abs}(z). \qquad (6.14)$$

6.9 Liens avec les formes harmoniques L^2.

Lorsque le noyau L^2 de Δ_{Abs} est de dimension finie, alors celui du laplacien de Hodge-deRham aussi (cf. [L]), il est donc naturel de se demander si l'égalité

$$\mathrm{Tr}\ \tau\left(e^{-t\Delta} - e^{-t\Delta_{Abs}}\right) = \chi_{L^2}(M) - \chi_{L^2}(M - \mathcal{O})$$

est vrai ; où $\chi_{L^2}(M) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \text{dim}\ \left(\text{Ker}\ \Delta \cap L^2(\Lambda^p T^* M)\right)$ et $\chi_{L^2}(M - \mathcal{O}) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \text{dim}\ \left(\text{Ker}\ \Delta_{Abs} \cap L^2(\Lambda^p T^*(M - \mathcal{O}))\right)$ sont les caractéristiques d'Euler L^2 de M et de $M - \mathcal{O}$. Cette égalité est vrai lorsque 0 n'est pas dans le spectre essentiel de l'opérateur de Gauss-Bonnet. Et selon [B-M-S], ceci est encore vrai sur $\mathbb{R}^{n>2}$ ou une variété riemannienne euclidienne à l'infini de dimension supérieure ou égale à trois.

Cependant ceci n'est pas vrai sur $\mathbb{R}^2$. En effet, le plan euclidien n'a pas de formes harmoniques L^2 non-nulles et le plan privé du disque $\mathbb{D}$ n'en a pas qui satisfont aux conditions absolues, on a donc $\chi_{L^2}(\mathbb{R}^2) = 0 = \chi_{L^2}(\mathbb{R}^2 - \mathbb{D})$. Cependant, on a Tr $\tau\left(e^{-t\Delta} - e^{-t\Delta_{Abs}}\right) = \chi(\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) = 1$! Dans ce cas, la formule (6.14) donne

$$\text{det}_\tau \mathcal{N}_{Abs}(z) = e^C \text{det}_\tau \mathcal{N}(z) \text{det}_\tau(\Delta_0^{\mathbb{D}} - z)/(-z).$$

Maintenant, on a $\text{det}_\tau \mathcal{N}(z) = \text{det}_\tau(\Delta_0^{\mathbb{D}} - z) = 1$ puisque $\Lambda^0 T^*\mathbb{R}^2 \oplus \Lambda^2 T^*\mathbb{R}^2$ et $\Lambda^1 T^*\mathbb{R}^2$ sont unitairement équivalent grâce à une isométrie qui entrelace les parties paires et impaires de ces opérateurs. On a donc l'existence d'une constante réel strictement positive c telle que

$$\text{det}_\tau \mathcal{N}_{Abs}(z) = -\frac{c}{z}.$$

Nous allons maintenant expliquer d'où vient cette singularité en $1/z$ lorsque z tend vers 0. Δ_{Abs} n'a pas de valeurs propre L^2, et on va voir que cette singularité provient des différentes contributions des 4 états résonnants d'énergie nulle.

Pour une fonction $f \in C^\infty(\mathrm{S})$, il est facile de résoudre le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} (\Delta - z)\tilde{f} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 - \mathbb{D} \\ \tilde{f} = f & \text{sur S} \end{cases}$$

Si on développe f en série de Fourier :

$$f(\theta) = \sum_k f_k e^{ik\theta}\ ;$$

alors cette solution $\tilde{f}$ s'expriment en coordonnées polaires

$$\tilde{f}(r,\theta) = \sum_k f_k \frac{\mathrm{H}^1_{|k|}(\lambda r)}{\mathrm{H}^1_{|k|}(\lambda)} e^{ik\theta}.$$

Où $\lambda^2 = z$, Im $\lambda \geq 0$ et $\mathrm{H}^1_{|k|}$ est la fonction de Hankel de première espèce et d'indice $|k|$. On a ainsi

$$\mathcal{N}(z)f(\theta) = -\sum_k \lambda\ \frac{\mathrm{H}^1_{|k|}{}'(\lambda)}{\mathrm{H}^1_{|k|}(\lambda)}\ f_k\ e^{ik\theta} \quad .$$

Lorsque ζ tend vers 0, les fonctions de Hanckel admettent des développements limités suivant (cf. [Le] page 101)

$$\mathrm{H}^1_{|k|}(\zeta) = -i\frac{\Gamma(k)}{\pi}\left(\frac{2}{\zeta}\right)^k \left((1 - \frac{1}{|k|-1}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^2\right) + O\left(|\zeta|^2 \log|\zeta|\right), \quad \text{si} \quad |k| \geq 2.$$

$$\mathrm{H}_1^1(\zeta) = -\frac{2i}{\pi\zeta} + \frac{\zeta}{2}\left[i2\log\zeta + C\right] + O\left(|\zeta|^2\log|\zeta|\right).$$

$$\mathrm{H}_0^1(\zeta) = 2i\log\zeta + C' + O(|\zeta|^2\log|\zeta|).$$

Ainsi on a les développements limités

$$\lambda\frac{\mathrm{H}_{|k|}^1{}'(\lambda)}{\mathrm{H}_{|k|}^1(\lambda)} = -k - \frac{\lambda^2}{2(k-1)} + O(|\lambda|^2), \quad \text{si} \quad |k| \geq 2.$$

$$\lambda\frac{\mathrm{H}_1^1{}'(\lambda)}{\mathrm{H}_1^1(\lambda)} = -1 - \frac{\pi}{2}\lambda^2\log\lambda + O(|\lambda|^2),$$

$$\lambda\frac{\mathrm{H}_0^1{}'(\lambda)}{\mathrm{H}_0^1(\lambda)} = -\frac{1}{\log\lambda} + O\left(\frac{1}{(\log|\lambda|)^2}\right). \tag{6.15}$$

On en déduit donc que lorsque z tend vers 0 on a :

$$\det\mathcal{N}_{Abs}^0(z) = \mathrm{C}\frac{2}{\log(1/z)} + O\left(\frac{1}{(\log|z|)^2}\right).$$

Puis pour les 1-formes : si $\alpha = adr + brd\theta = Adx + Bdy$ est solution de l'équation $\Delta\alpha = z\alpha$ alors les fonctions A et B sont solutions des équations $\Delta A = zA$ et $\Delta B = zB$. Or en coordonnées polaires, on a

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(r,\theta).$$

Ainsi si on introduit la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}X + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}X + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}X - X - 2J\frac{\partial}{\partial\theta}X\right] + zX = 0.$$

Maintenant si on développe X en séries de Fourier

$$X(r,\theta) = \sum_k X_k(r)e^{kJ\theta},$$

alors on obtient que chaque X_k vérifie l'équation suivante

$$X_k'' + \frac{1}{r}X_k' + \left(z - \frac{(k+1)^2}{r^2}\right)X_k = 0.$$

On a ainsi

$$X_k(r) = \frac{\mathrm{H}_{|k+1|}^1(\lambda r)}{\mathrm{H}_{|k+1|}^1(\lambda)}X_k(1)$$

où comme précédemment $z = \lambda^2$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Si on s'intéresse à $\mathcal{N}_{Abs}$, alors la fonction a est nulle sur le cercle. On a donc

$$\sum_k e^{kJ\theta} X_k(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Si on pose $X_k(1) = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ et si on développe $b(1,\theta)$ en séries de Fourier

$$b(1,\theta) = b_0 + \sum_{n>0} b_n \cos(n\theta) + \sum_{n>0} c_n \sin(n\theta).$$

Alors on obtient $x_n = -x_{-n} = c_n/2$ et $y_0 = b_0$, $y_n = -y_{-n} = b_n/2$. Ainsi la solution du problème de Dirichlet : $\Delta\alpha = \lambda^2\alpha$ avec $\alpha = a(r,\theta)dr + b(r,\theta)rd\theta$ et $a(1,\theta) = 0$ est donnée par

$$a(r,\theta) = \sum_{n>0} \frac{c_n}{2} \cos(n\theta) \left[Q_{n+1} - Q_{n-1}\right] + \sum_{n>0} \frac{b_n}{2} \sin(n\theta) \left[Q_{n+1} - Q_{n-1}\right],$$

$$b(r,\theta) = Q_1 b_0 + \sum_{n>0} \frac{c_n}{2} \cos(n\theta) \left[Q_{n+1} + Q_{n-1}\right] + \sum_{n>0} \frac{b_n}{2} \sin(n\theta) \left[Q_{n+1} + Q_{n-1}\right].$$

Où on a noté $Q_n = \mathrm{H}_n^1(\lambda r)/\mathrm{H}_n^1(\lambda)$. Alors on a

$$\mathcal{N}_{Abs}(bd\theta) = -\left[\frac{\partial}{\partial r} b + b\right] d\theta.$$

Et Grâce aux développements limités (6.15), on a

$$\mathcal{N}_{Abs}(\lambda^2)(d\theta) = \left[\pi\lambda^2 \log\lambda + O(\lambda^2)\right] d\theta,$$

$$\mathcal{N}_{Abs}(\lambda^2)(\cos\theta d\theta) = \left[\frac{-1}{\log\lambda} + O\left((\log|\lambda)^{-2}\right)\right] (\cos\theta d\theta),$$

$$\mathcal{N}_{Abs}(\lambda^2)(\sin\theta d\theta) = \left[\frac{-1}{\log\lambda} + O\left((\log|\lambda)^{-2}\right)\right] (sin\theta d\theta),$$

$$\mathcal{N}_{Abs}(\lambda^2)(\cos(n\theta)d\theta) = \left[n - 1 + O(|\lambda|^2)\right] (\cos(n\theta)d\theta) \text{ si } n > 1,$$

$$\mathcal{N}_{Abs}(\lambda^2)(\sin(n\theta)d\theta) = \left[n - 1 + O(|\lambda|^2)\right] (\sin(n\theta)d\theta) \text{ si } n > 1.$$

Sur les 1-formes, on obtient pour une constante non-nulle C :

$$\det \mathcal{N}_{Abs}(\lambda^2) = \mathrm{C}\lambda^2 \log\lambda \left(\frac{-1}{\log\lambda}\right)^2 \left[1 + O\left(1/\log|\lambda|\right)\right] = \mathrm{C}\frac{\lambda^2}{\log\lambda} \left[1 + O\left(1/\log|\lambda|\right)\right].$$

Finallement, la singularité en $z = 0$ du déterminant de $\mathcal{N}_{Abs}(z)$ sur les 1-formes provient de trois états résonnants d'énergie nulle

- la forme $d\theta$ qui contribue à une singularité en $Cz\log z$,
- Les formes $d(x/r) - dx$ et $d(y/r) - dy$ qui contribuent à une singularité en $C/\log z$.

Puis, la singularité en $z = 0$, du déterminant de $\mathcal{N}_{Abs}(z)$ sur les fonctions, provient de l'état résonnant d'énergie nulle qui est la fonction constante, cette fonction contribue à une singularité en $C/\log z$. Le quotient de ces déterminants présente donc bien une singularité en C/z.

7 Bibliographie.

Références

[BK] M.Sh Birman, M.G. Krein, on the theory of wave operators and scattering operators, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **144** (1962), 475–478 ; traduction anglaise in *Soviet. Math. Dokl.* **3** (1962).

[B-Y] M.Sh Birman, D.R. Yafaev, The spectral shift function, the work of M.G. Krein and its further development,*St. Petersburg Math. J.* **4** (1993), no 5, 833–870.

[B-B 1] R. Blankenbecler, D. Boyanovsky, Fractional indices in supersymmetric theories. *Phys. Rev. D* **(3) 30** (1984), no. 8, 1821–1824.

[B-B 2] R. Blankenbecler, D. Boyanovsky,. Axial and parity anomalies and vacuum charge : a direct approach. *Phys. Rev. D* **(3) 31** (1985), no. 12, 3234–3250.

[B-B 3] R. Blankenbecler, D. Boyanovsky, Fractional charge and spectral asymmetry in one dimension : a closer look. *Phys. Rev. D* **(3) 31** (1985), no. 8,

[B-G-G-S-S] D. Bollé, F. Gesztesy, H. Grosse, W. Schweiger, B. Simon, Witten index, axial anomaly, and Kreĭn's spectral shift function in supersymmetric quantum mechanics. *J. Math. Phys.* **28** (1987), no. 7, 1512–1525.

[B-M-S] N.V. Borisov, W. Müller, R. Schrader, Relative index theorems and supersymmetric scattering theory, *Comm. math. Phys.*, **114** (1988), 475–513.

[Br] V. Bruneau, Fonctions zêta et êta en présence de spectre continu. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **323** (1996), no. 5, 475–480.

[B] U. Bunke, Relative Index theory, *J. Funct. Anal.*,**105** (1992), 63–76.

[B-F-K] D. Burghelea, L. Friedlander, T. Kappeler, Mayer-Vietoris formula for determinants of elliptic operators, *J. Funct. Anal.***107** (1992) 34–65.

[Bu] V.S. Buslaev, Scattered plane waves, spectral asymptotics and trace formulae in exterior problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **197** (1971) 999–1002 ; traduction anglaise *Soviet Math. Dokl.* **12** (1971), 591–595].

[C] G. Carron, L^2-cohomology and Sobolev's inequalities, prépublication no 227 de l'ENS Lyon, 1998.

[Ch] P. Chernoff, Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations, *J. Funct. Anal.***12** (1973), 401–414.

[C-Z] T. Christiansen, M. Zworski, Spectral asymptotics for manifolds with cylindrical ends, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* , **45**, (1995),251–263.

[C1] T. Christiansen, Spectral asymptotics for compactly supported perturbations of the Laplacian on R^n, *Comm. Partial Differential Equations*, **23** (1998), no. 5-6, 933–948.

[C2] T. Christiansen, Weyl asymptotics for the laplacian on asymtotically euclidean spaces, *American J. of Math.* **121** (1999), 1–22.

[CdV] Y. Colin de Verdière, Une formule de trace pour l'opérateur de Schr"odinger dans $\mathbb{R}^3$, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **4** (1981), 27–39.

[Co] P.E. Conner, The Neumann's problem for differential forms on Riemannian manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.* **20** (1956), 56 pp.

[F] R. Forman, Functional determinants and geometry, *Invent. Math.*, **88** (1987) 447–493.

[G-S 1] F. Gesztesy, B. Simon, Topological invariance of the Witten index. *J. Funct. Anal.***79** (1988), no. 1, 91–102.

[G-S 2] F. Gesztesy, B. Simon, The Xi function,*Acta Math.* **176** (1996), 49–71.

[Gi] P. Gilkey, The spectral geometry of a riemannian manifold, *J. Differential Geom.*, **10** (1975), 601–618.

[Gu] L. Guillopé, Asymptotique de la phase de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger avec potentiel. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.***293** (1981), n° 12, 601–603.

[G-Z] L. Guillopé, M. Zworski, Scattering asymptotics for Riemann surfaces, *Ann. of Math.*,**145** (1997), 597–660.

[H-Z] A. Hassell, S. Zelditch, Determinants of laplacians in exterior domains,IMRN, (1999), number 18, pp 971-1004..

[J-K] A. Jensen, T. Kato, Asymptotics behaviour of the scattering phase for exterior domains, *Comm. Partial Differential Equations* ,**3** (1978), 1165–1195.

[K-V] M. Kontsevich, S. Vishik, Geometry of determinants of elliptic operators. *Functional analysis on the eve of the 21st century*, Vol. 1 (New Brunswick, NJ, 1993), 173–197, Progr. Math., **131**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.

[K1] M.G. Krein, On the trace formula in perturbation theory, *Mat. Sb.* bf 75 (1953), 597–626.

[K2] M.G. Krein, On perturbation determinants and the trace formula for unitary and selfadjoint operators.*Dokl. Akad. Nauk SSSR* **144** (1962), 268–271 ; traduction anglaise in *Soviet. Math. Dokl.* **3** (1962).

[Le] N. Lebedev, Special Functions and their Applications, Dover, New-York, 1974.

[L-S] S. Levit, U. Smilansky, A theorem on infinite products of eigenvalues of Sturm type operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*,**65**, (1977),299–303.

[L] J. Lott, L^2-cohomology of geometrically infinite hyperbolic 3-manifolds. *Geom. Funct. Anal.*, **7** (1997), n°. 1, 81–11.

[M-R] A. Majda, J. Ralston, An analogue of Weyl's theorem for unbounded domains,I, II, III, *Duke Math. J.* **45** (1978), 183–196, 513–536 ;**46** (1979), n° 4, 725–731.

[Me] R. Melrose, Weyl asymptotics for the phase in obstacle scattering, *Comm. Partial Differential Equations* , **13** (1988), 1431–1439.

[Mo 1] A. Moroz, The Aharonov-Casher theorem and the axial anomaly in the Aharonov-Bohm potential. *Phys. Lett. B* **358** (1995), n^o 3-4, 305–311.

[Mo 2] A. Moroz, On indices of the Dirac operator in a non-Fredholm case. *Modern Phys. Lett. A* **11** (1996), n^o 12, 979–986.

[Mu 1] W. Müller, Spectral geometry and scattering theory for certain complete surfaces of finite volume, *Invent. Math.*, **109**, (1992), 265–305.

[Mu 2] W. Müller, Relative zeta functions, relative determinants and scattering theory, *Comm. Math. Phys.*, **192** (1998), n^o 2, 309–347

[P1] L. B. Parnovski, Spectral asymptotics of the Laplace operator on manifolds with cylindrical ends. *Internat. J. Math.*, **6** (1995), n^o 6, 911–920.

[P2] L. B. Parnovski, Spectral asymptotics of Laplace operators on surfaces with cusps. *Math. Ann.*, **303** (1995), no. 2, 281–296.

[P3] L. B. Parnovski, Scattering matrix for manifolds with conical ends. *J. Lond. Math. Soc.*, **61** (2000), n^o 2, 555–567.

[P-P] V. Petkov, G. Popov, Asymptotic behavior of the scattering phase for non-trapping obstacles, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **32** (1982), 111–149.

[R-S] D.B. Ray, I.M. Singer, R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds.*Advances in Math.***7** (1971), 145–210.

[R] D. Robert, Sur la formule de Weyls pour les ouverts non-bornés, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **319** (1994), 29–34.