J. Math. Pures Appl.,
76, 1997, p. 883-891

INÉGALITÉS DE HARDY SUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES NON-COMPACTES

Par G. CARRON

RÉSUMÉ. – On donne un critère et ses applications pour qu'une variété riemannienne vérifie une inégalité similaire à l'inégalité de Hardy sur $\mathbf{R}^n$.

Mots-clés : Inégalités de Sobolev, inégalités de Hardy.

ABSTRACT. – We give a criterium and its applications in order that a riemannian manifold satisfy a inequality similar to Hardy's inequality on $\mathbf{R}^n$.

Key-words: Sobolev inequalities, Hardy inequalities.

0. Introduction

Le but de cet article est d'établir des inégalités de (Sobolev-)Hardy sur les variétés riemanniennes non-compactes. Selon A. Ancona ([A]) une variété riemannienne complète admet des fonctions de Green positives si et seulement si il existe une fonction strictement positive f tel que l'on ait l'inégalité de Sobolev suivante :

$$(0.1) \qquad \int_M f(x)\, u^2(x)\, dx \leq \int_M |du|^2(x) dx, \ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

On dit alors que la variété riemannienne est non-parabolique. Toujours selon [A], une condition équivalente à la non-parabolicité est que, si on construit l'espace de Sobolev $H_0^1(M)$ en complétant l'espace $C_0^\infty(M)$ muni de la norme $u \mapsto \|du\|_{L^2}$ alors l'inclusion $C_0^\infty(M) \longrightarrow L^2_{loc}$ se prolonge par continuité à $H_0^1(M)$; c'est-à-dire que cet espace est constitué de fonctions localement intégrables.

Un exemple d'inégalité du type (0.1) est fourni par les espaces euclidiens $(\mathbf{R}^n, n \geq 3)$ où nous avons l'inégalité de Hardy :

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbf{R}^n} u^2(x) \frac{dx}{\|x\|^2} \leq \int_{\mathbf{R}^n} |du|^2(x) dx, \ \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n);$$

c'est pourquoi nous parlerons d'inégalité de Hardy à chaque fois que nous démontrerons une inégalité du type (0.1).

En général, la connaissance d'un plongement de l'espace H_0^1 dans un bon espace de fonctions permet d'obtenir beaucoup d'estimées sur le noyau de la chaleur, sur les valeurs propres pour le problème de Dirichlet des domaines de M. Evidemment, le cas d'un plongement dans un espace L^2 à poids n'est pas bon au sens où les techniques usuelles (itération de Nash-Moser) ne donnent rien. Cependant ces inégalités sont plus facile à obtenir; nous en verrons néanmoins dans [C1] des applications à la L^2-cohomologie.

En fait, on connait une fonction f pour laquelle l'inégalité de Hardy (0.1) a lieu, c'est la fonction $f(x) = |d \log G_{x_0}(x)|^2/4$, où G_{x_0} est la fonction de Green minimale de pole x_0. Cependant pour obtenir une inégalité de Hardy plus explicite, il faudrait minorer cette fonction, ce qui n'est pas facile. En revanche, nous donnerons dans une première partie un critère assez simple pour qu'une inégalité de Hardy soit vérifiée. La méthode est celle utilisée par J. Barta pour minorer la première valeur propre pour le problème de Dirichlet ([B], voir aussi [K]).

Dans une seconde partie, nous donnerons des applications de ce critère; concernant les sous-variétés d'un espace euclidien nous obtiendrons :

0.1. THÉORÈME. – *Si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une immersion isométrique dont le vecteur courbure moyenne est k, alors (M^n, g) vérifie l'inégalité de Hardy suivante*

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_M \left(\frac{u}{r}\right)^2 (x)\, dx \leq \int_M |du|^2(x) + \frac{n-2}{2}\frac{|k|}{r} u^2\, dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

où on a noté $r(x) = \|x - x_0\|$, x_0 étant un point quelconque de $\mathbf{R}^N$.

Ce résultat est à rapprocher de celui de Hoffman-Spruck qui obtenaient une inégalité de Sobolev assez similaire à cette inégalité de Hardy ([H-S]). Ce résultat a la conséquence suivante sur les sous-variétés minimales :

0.2. COROLLAIRE. – *Si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une immersion isométrique minimale alors pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^N$, M^n vérifie l'inégalité de Hardy :*

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_M \left(\frac{u}{r}\right)^2 (x)\, dx \leq \int_M |du|^2(x)\, dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Nous obtiendrons aussi des inégalités de Hardy pour des immersions isométriques dans des variétés de Cartan-Hadamard et pour certaines variétés à courbure positive.

1. Un critère pour obtenir des inégalités de Hardy

1.a. – Nous avons le critère suivant

1.1. PROPOSITION. – *Si (M^n, g) est une variété riemannienne complète non-parabolique tel qu'il existe une fonction positive ρ vérifiant :*

i) $|d\rho| = 1$,

ii) *$\Delta\rho \leq -C/\rho$ au sens des distributions, ceci pour une constante $C > 1$,*

iii) *L'ensemble $\{x \in M,\ \rho(x) = 0\}$ est un compact de capacité nulle.*

alors (M^n, g) *vérifie l'inégalité de Hardy*

$$\left(\frac{C-1}{2}\right)^2 \int_M \left(\frac{u}{\rho}\right)^2(x)\,dx \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Rappelons que la capacité d'un compact $A \subset M$ est définie par :

$$\operatorname{cap} A = \inf\left\{\int_M |du|^2,\ u \in C_0^\infty(M), u = 1 \text{ sur } A\right\}.$$

La capacité d'un ensemble mesure sa « taille » dans l'espace $H_0^1(M)$ plus exactement lorsque (M, g) est non-parabolique et lorsque la capacité de A est nulle, l'espace $H_0^1(M - A)$ obtenu en complétant l'espace $C_0^\infty(M - A)$ muni de la norme $u \mapsto \|du\|_{L^2}$ est l'espace $H_0^1(M)$. Notons par exemple que les ensembles de codimension de Hausdorff supérieure ou égale à 2 ont une capacité nulle.

Preuve. – La preuve reprend l'idée de J. Barta reprise par A. Kasue qui obtenaient des minorations pour la première valeur propre pour le problème de Dirichlet ([B], [K]). On construit une fonction strictement positive ϕ satisfaisant à l'inéquation

$$\Delta\phi \geq \left(\frac{C-1}{2}\right)^2 \frac{\phi}{\rho^2}\ , \text{ au sens des distributions.}$$

Alors si u est une fonction lisse à support compact, on écrit $u = v\,\phi$, où $v \in H_0^1(M)$, alors on a

$$\begin{aligned}(1.2)\qquad \int_M |du|^2 &= \int_M \Delta(\phi\, v)\,\phi v \\ &= \int_M \phi\Delta\phi\, v^2 + \phi^2\Delta v\, v - 2 < d\phi, dv > \phi v \\ &= \int_M |dv|^2\phi^2 + \int_M \Delta\phi\,\phi v^2,\end{aligned}$$

ceci en intégrant par partie et se servant des identités $\Delta(\phi\, v) = v\Delta\phi + \phi\Delta v - 2 < d\phi, dv >$ et $\Delta(v^2) = 2v\Delta v - 2|dv|^2$. On conclura alors en se servant de l'inéquation vérifiée par ϕ.

On choisit ensuite ϕ de la forme $\phi = f(\rho)$ où $f\ :\ \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ est une fonction décroissante, ainsi

$$\Delta\phi = -f"|d\rho|^2 + \Delta\rho\, f' \geq -f" - \frac{C}{\rho}f',$$

si on prend $f(\rho) = \rho^{-(\frac{C-1}{2})}$ alors un calcul facile montre que cette fonction convient.

Cependant avec cette fonction ϕ, le calcul (1.2) n'est valide que pour des fonctions lisses à support compact dans $M - \rho^{-1}\{0\}$, ainsi l'égalité de Hardy a lieu pour toutes les fonctions appartenant à l'espace de Sobolev $H_0^1(M - \rho^{-1}\{0\})$, or la capacité de l'ensemble $\rho^{-1}\{0\}$ est nulle et donc cet espace de Sobolev est $H_0^1(M)$. ■

Remarquons dans ce théorème, nous n'avons pas supposé (M^n, g) complète, mais ces hypothèses ne sont pas vérifiées pour une variété compacte sans bord, car l'intégrale du Laplacien d'une fonction doit être nulle.

1.b. – On peut améliorer ce résultat en supposant uniquement que les hypothèses sur la fonction ρ sont vérifiées au delà d'un compact de M.

1.3. PROPOSITION. – *Soit (M, g) une variété riemannienne complète tel qu'il existe un compact K et une fonction strictement positive ρ sur $M - K$ nulle sur le bord de K et vérifiant :*

i) $|d\rho| = 1$,

ii) $\Delta\rho \leq -C/\rho$ *au sens des distributions, ceci pour une constante $C > 1$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante strictement positive C_ε tel que (M^n, g) vérifie l'inégalité de Hardy*

$$C_\varepsilon \int_M \inf\left(1, \left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^2\right) u^2 \leq \int_M |du|^2(x)dx + \int_{K_\varepsilon} u^2, \ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

où $K_\varepsilon = K \cup \rho^{-1}[0, \varepsilon]$.

De plus si

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\operatorname{vol}\{x, \ \rho(x) \leq R\}}{R^2} = \infty,$$

ou si (M, g) est non-parabolique alors il existe une strictement positive $\tilde{C}_\varepsilon$ tel que (M^n, g) vérifie l'inégalité de Hardy

$$\tilde{C}_\varepsilon \int_M \inf\left(1, \left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^2\right) u^2 \leq \int_M |du|^2(x)dx, \ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Nous ne refaisons pas la preuve, c'est celle de [C2] où nous avions recollé différentes inégalités de Sobolev à l'infini ; ici les hypothèses sont celles qui permettent d'affirmer qu'une inégalité de Hardy a lieu sur le complémentaire de K. La constante C_ε peut être explicité en fonction de ε et de la première valeur propre pour le problème de Neumann sur K_ε :

$$C_\varepsilon^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^N(K_\varepsilon)}} + \frac{2\varepsilon}{C-1}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{C-1}\right)^2.$$

Remarquons que cette proposition nous permet de nous affranchir de l'hypothèse sur la non-parabolicité de la variété et sur la capacité de l'ensemble où la fonction ρ s'annule.

1.c. D'autres inégalités de Hardy. – Les hypothèses du théorème 1.1 permettent d'obtenir d'autres inégalités de Hardy ; on les obtient à l'aide de l'identité suivante

$$\begin{aligned}\int_M \rho^\alpha |d(u\phi_\alpha)|^2 = \int_M \rho^\alpha \left[\Delta\phi_\alpha - \frac{\alpha}{\rho} < d\rho, d\phi_\alpha > \right]\phi_\alpha u^2 \\ + \int_M |dv|^2 \phi_\alpha^2 \rho^2\end{aligned}$$

identité qui est valable pour toute fonction u lisse à support compact dans $M - \rho^{-1}\{0\}$. On reprend alors la preuve développée précédemment en choisissant $\phi_\alpha = \rho^{-(\frac{C-\alpha-1}{2})}$, et on conclut :

1.4. THÉORÈME. – *Soit (M,g) une variété riemannienne et $\rho : M \longrightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction vérifiant :*

i) $|d\rho| = 1$,

ii) $\Delta\rho \leq -C/\rho$ *au sens des distributions,*

alors pour tout réel $\alpha < C - 1$ on a l'inégalité de Hardy suivante :

$$\left(\frac{C-\alpha-1}{2}\right)^2 \int_M \left(\frac{u}{\rho}\right)^2 (x)\,\rho^\alpha\,dx \leq \int_M |du|^2(x)\,\rho^\alpha\,dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M - \rho^{-1}\{0\}).$$

1.5. *Remarque*. – En fait, l'inégalité de Hardy obtenue à la proposition précédente est valide pour toute fonction $u \in C_0^\infty(M)$ si la codimension de $\rho^{-1}\{0\}$ est strictement supérieure à $2 - \alpha$.

1.d. Une généralisation. – On peut améliorer les résultats précédents en utilisant un opérateur de Schrodinger $\Delta + q$ au lieu de l'opérateur de Laplace-Beltrami. En effet si on suppose que $\rho : M \longrightarrow \mathbf{R}_+$ vérifie $|d\rho| = 1$ et l'inéquation

$$\Delta\rho \leq \frac{-C}{\rho} + V$$

où V est une fonction positive ou nulle sur M, alors pour $\alpha < C - 1$, $\phi_\alpha = \rho^{-(\frac{C-\alpha-1}{2})}$ et $u \in C^\infty(M - \rho^{-1}\{0\})$ on a :

$$\begin{aligned}\int_M \rho^\alpha[|d(u\phi_\alpha)|^2 + q(\phi_\alpha u)^2] &= \int_M \rho^\alpha\left[\Delta_\alpha\phi - \frac{\alpha}{\rho} < d\rho, d\phi_\alpha >\right]\phi_\alpha u^2 + q(\phi_\alpha u)^2 \\ &\quad + \int_M |dv|^2\phi_\alpha^2\rho^2 \\ &\geq \int_M \rho^{\alpha-2}[\mu^2 + q\rho^2 - \mu V\rho](\phi_\alpha u)^2,\end{aligned}$$

où $\mu = \frac{C-1-\alpha}{2}$. D'où en choisissant $q = \mu V/\rho$, on peut énoncer le :

1.6. THÉORÈME. – *Soit (M,g) une variété riemannienne et ρ, $V : M \longrightarrow \mathbf{R}^+$ des fonctions vérifiant :*

i) $|d\rho| = 1$,

ii) $\Delta\rho \leq -C/\rho + V$ *au sens des distributions,*

alors pour tout réel $\alpha < C - 1$ et pour $\mu_{\alpha,C} = \frac{C-\alpha-1}{2}$, on a l'inégalité de Hardy suivante :

$$\mu_{\alpha,C}^2 \int_M \left(\frac{u}{\rho}\right)^2 (x)\,\rho^\alpha\,dx \leq \int_M \left[|du|^2(x) + \mu_{\alpha,C}\frac{V}{\rho}u^2\right]\rho^\alpha\,dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M - \rho^{-1}\{0\}).$$

On peut bien entendu faire ici la même remarque qu'en (1.5).

2. Exemples d'inégalités de Hardy

1.a. Les variétés de Cartan-Hadamard. – Pour une variété de Cartan-Hadamard de dimension n, *i.e.* une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure négative où nulle, les théorèmes de comparaison montrent que la fonction distance à un point vérifie l'inéquation $\Delta r \leq -(n-1)/r$, ainsi on peut énoncer la :

2.1. PROPOSITION. – *Si (M^n, g) est une variété de Cartan-Hadamard alors on a l'inégalité de Hardy*

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_M u^2(x)\frac{dx}{r^2} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

où r est la fonction distance à un point quelconque fixé de M.

2.b. Les sous-variétés d'un espace euclidien. – Si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une immersion isométrique alors on calcule aisément le Laplacien de la fonction distance euclidienne si $r(x) = \|x - x_0\|$ alors $\Delta r^2 = -n + < k, x - x_0 >$ d'où

$$\Delta r \leq -\frac{n-1}{r} + < k, \frac{x-x_0}{r} >,$$

où k est le vecteur courbure moyenne de l'immersion qui est défini par $k(x) = \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i)$ où $(e_i)_{i=1}^n$ est une base orthonormée de T_xM et où B est la seconde forme fondamentale de l'immersion. Ainsi en appliquant la proposition 1.5. nous obtenons le :

2.2. THÉORÈME. – *Si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une immersion isométrique dont le vecteur courbure moyenne est k, alors (M^n, g) vérifie l'inégalité de Hardy suivante :*

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_M \left(\frac{u}{r}\right)^2(x)\,dx \leq \int_M |du|^2(x) + \frac{n-2}{2}\frac{|k|}{r}u^2\,dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

où on a noté $r(x) = \|x - x_0\|$, x_0 étant un point quelconque de $\mathbf{R}^N$.

On a aussi le résultat suivant :

2.3. THÉORÈME. – *Si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une immersion isométrique dont le vecteur courbure moyenne est k, alors pour $\alpha + n - 2 > 0$, (M^n, g) vérifie l'inégalité de Hardy suivante :*

$$\left(\frac{n-2-\alpha}{2}\right)^2 \int_M r^\alpha \left(\frac{u}{r}\right)^2(x)\,dx \leq \int_M r^\alpha \left[|du|^2(x) + \frac{n-2-\alpha}{2}\frac{|k|}{r}u^2\right] dx,$$
$$\forall u \in C_0^\infty(M),$$

où on a noté $r(x) = \|x - x_0\|$, x_0 étant un point quelconque de $\mathbf{R}^N$.

En particulier, nous avons :

2.4. COROLLAIRE. – *Si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une immersion isométrique dont le vecteur courbure moyenne k vérifie pour un $x_0 \in \mathbf{R}^N$,*

$$\kappa = \sup_{x \in M} |k(x)||x - x_0| < \infty,$$

alors pour $\alpha < n-2-\kappa$ et $\alpha > 2-n$ si $x_0 \in M$, (M^n, g) vérifie l'inégalité de Hardy suivante :

$$\left(\frac{n-2-\alpha}{2}\right)^2 \int_M \left(\frac{u}{r}\right)^2 (x)\, r^\alpha\, dx \leq \int_M |du|^2(x)\, r^\alpha\, dx, \ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Ceci montre en particulier que si M^n est une variété complète de dimension $n \geq 3$ minimalement immergée dans un borné d'un espace euclidien, alors le bas du spectre du Laplacien est strictement positif ; par exemple ceci montre que pour ces variétés, le volume des boules croit exponentiellement. Notons que l'on ignore si de telles variétés existent, c'est un problème de Calabi-Yau ([Y]).

2.c. Les sous-variétés d'une variété de Cartan-Hadamard. – On peut aussi appliquer les critères de la première partie aux sous-variétés d'une variété de Cartan-Hadamard. Soit $M^n \longrightarrow X^N$ une immersion isométrique d'une variété riemannienne (M^n, g), on peut calculer le Laplacien de la fonction distance à un point en restriction à M^n :

$$\Delta^M r(x) = -\sum_{i=1}^n \mathrm{Hess}^X r(e_i, e_i) + < k, dr >,$$

où $\mathrm{Hess}^X r$ est le Hessien de la fonction distance à un point fixé et où $(e_i)_{i=1}^n$ est une base orthonormée de $T_x M$. Si la courbure sectionnelle de X est uniformément majorée par $-a^2$ alors les théorèmes de comparaison donnent

$$\mathrm{Hess}^X r \geq \frac{a}{\mathrm{th}\, ar}\mathrm{Id},$$

ainsi on obtient la majoration suivante

$$\Delta^M r \leq -\frac{a\,(n-1)}{\mathrm{th}\, ar} + |k|.$$

Or les valeurs de la fonction tangente hyperbolique sont toujours inférieures à 1 on obtient

$$r\Delta^M r \leq (-a\,(n-1) + |k|)r,$$

ainsi on peut énoncer le :

2.6. THÉORÈME. – *Si $M^n \longrightarrow X^N$ est une immersion isométrique d'une variété riemannienne M dans une variété de Cartan-Hadamard dont la courbure sectionnelle est majorée par $-a^2$ alors si $C = \sup_{x\in M}(-a\,(n-1) + |k|(x))r(x)$,* i.e. *si*

$$|k| \leq a\,(n-1) - C/r$$

où $r(x) = d(x, x_0)$ alors pour tout $\alpha < C-1$ on a l'inégalité de Hardy

$$\left(\frac{C-\alpha-1}{2}\right)^2 \int_M \left(\frac{u}{r}\right)^2 (x)\, r^\alpha\, dx \leq \int_M |du|^2(x)\, r^\alpha\, dx, \ \forall u \in C_0^\infty(M - \{x_0\}).$$

De plus si $x_0 \in M$ et $n-2+\alpha > 0$, alors on a l'inégalité de Hardy

$$\left(\frac{C-\alpha-1}{2}\right)^2 \int_M \left(\frac{u}{r}\right)^2 (x)\, r^\alpha\, dx \leq \int_M |du|^2(x)\, r^\alpha\, dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

2.d. Les variétés à courbure positive. – Soit (M,g) une variété riemannienne complète à courbure positive ou nulle, alors selon [C-G], il existe dans M une sous-variété S compacte totalement géodésique, appelée âme, et M est difféomorphe à NS, le fibré normal à S ; nous supposons ici que ce difféomorphisme est réalisé par l'exponentielle $\exp_S : NS \longrightarrow M$ (ceci n'est évidemment pas toujours le cas). Et nous supposons que les courbures radiales vérifient

$$0 \leq K_r \leq \frac{c(1-c)}{r^2}$$

où r est la fonction distance à l'âme S, alors en étudiant dans [E-F] l'équation de Ricatti vérifiée par la seconde forme fondamentale des hypersurfaces équidistantes de S, J. Escobar et A. Freire arrivent à la majoration suivante du Laplacien de la fonction r

$$\Delta r \leq -\frac{(n-\dim S-1)c}{r},$$

ainsi on a le résultat suivant :

2.7. THÉORÈME. – *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète à courbure positive ou nulle dont l'âme S est de dimension s, si $\exp_S : NS \longrightarrow M$ est un difféomorphisme et si les courbures radiales vérifient*

$$0 \leq K_r \leq \frac{c(1-c)}{r^2}$$

alors pour $\alpha < (n-s-1)c-1$, on a l'inégalité de Hardy

$$\left(\frac{(n-s-1)c-1-\alpha}{2}\right)^2 \int_M \left(\frac{u}{r}\right)^2 (x)\, r^\alpha\, dx \leq \int_M |du|^2(x)\, r^\alpha\, dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M-S).$$

De plus si $s \leq n-2$ et si $(n-s-1)c > 1$ alors on a l'inégalité de Hardy

$$\left(\frac{(n-s-1)c-1}{2}\right)^2 \int_M \left(\frac{u}{r}\right)^2 (x) dx \leq \int_M |du|^2(x)\, dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Le dernier résultat résultant de la proposition 1.1 car un ensemble de codimension supérieure ou égale à 2 est de capacité nulle.

Signalons que selon [S], le revêtement universel d'une variété qui satisfait aux hypothèses de ce théorème est de la forme $K \times E \times P$ où K est une variété compacte à courbure positive ou nulle, où E est un espace euclidien et où P est une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure positive ou nulle et dont l'âme est réduit à un point.

2.e. Remarque. – Evidemment tous les résultats de cette partie ont une version localisée à l'infini, c'est-à-dire une version où nous supposons que les hypothèses des théorèmes n'ont lieu qu'au delà d'un compact.

BIBLIOGRAPHIE

[A] A. ANCONA, *Théorie du potentiel sur des graphes et des variétés*, Lectures Notes n° 1427, 1990.

[B] J. BARTA, Sur la vibration fondamentale d'une menbrane, *Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, *204*, 1937, p. 472-473.

[C1] G. CARRON, *L^2-cohomologie et inégalités de Sobolev II*, en préparation, 1996.

[C2] G. CARRON, *Inégalités de Sobolev-Orlicz non-uniforme*, prépublication n° 195 de l'ENS. Lyon, 1996, to appear in *Colloq. Math.*

[C-G] J. CHEEGER et D. GROMOLL, On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, *Ann. of Math.*, *96*, 1972, p. 423-443.

[E-F] J. ESCOBAR et A. FREIRE, The spectrum of the Laplacian of manifolds of positive curvature, *Duke Math. J.*, *65*, 1992, p. 1-21.

[G] A. A. GRIGOR'YAN, On the existence of positive fundamental solutions of the Laplace equation on Riemannian Manifold, *Math. USSR Sbornik*, *56*, 1987, n° 2, p. 349-357.

[H-S] D. HOFFMAN et J. SPRUCK, Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds, *Comm. Pure Appl. Math.*, *27*, 1974, p. 7156-727.

[K] A. KASUE, On a lower bound for the first eigenvalue, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, *17*, 1984, p. 31-44.

[S] M. STRAKE, A splitting theorem for nonnegatively curved open manifolds, *Manuscripta Math*, *61*, 1988, p. 315-325.

[Y] S. T. YAU, Problem Section in the seminar on Differential Geometry ed. by S. T. Yau, Princeton University Press, Princeton, *Ann. Math. Study*, n° 102, 1982.

(Manuscrit reçu en février 1997.)

G. CARRON
UMPA, CNRS U.M.R. 128,
ENS Lyon,
46, allée d'Italie,
69364 Lyon cedex 07.
email : gcarron@umpa.ens-lyon.fr