Remerciements,

Je tiens d'abord à remercier les collègues de l'UMPA. Je suis arrivé ici en 1995, voilà maintenant quatre ans. J'y ai été très bien accueilli. Je ne peux remercier chacun individuellement ; il me faudrait remercier ceux qui ont gentillement répondu à mes questions, ceux qui ont patiemment écouté mes idées mathématiques, ceux qui s'occupent avec efficacité des problèmes administratifs et informatiques...

Je voudrais aussi remercier mon ex-directeur de thèse qui m'a donné un bref et dernier conseil "Tu devrais regarder la L^2-cohomologie !" m'a dit S. Gallot en juin 1993. J'espère qu'il peut être satisfait de son flair.

N. Berline, J. Dodziuk, J. Lott ont accepté de rapporter sur mes travaux et ont accompli ce travail ardu avec diligence et soin. Je tiens à les remercier.

Je remercie aussi J.P. Bourguignon, T. Fack et J.P. Otal d'avoir accepté immédiatement de faire partie de mon jury. J'en suis très honoré.

Je remercie aussi T. Coulhon d'avoir suivi mes premiers pas dans la recherche avec intérêt et attention.

Pour finir, je voudrais que l'on se souvienne de Hubert Pesce. Je ne vais pas le remercier de nous avoir quitté mais son amabilité, son esprit accueillant nous manquent. Je lui dédie ce mémoire.

Table des matières :

0. Introduction.

Notre but est d'étudier certains liens entre la cohomologie L^2 (réduite), la topologie et la géométrie des variétés riemanniennes non-compactes. Rappelons que si (M^n, g) est une variété riemannienne complète son k-ième espace de L^2-cohomologie (réduite) peut être défini comme l'espace, $\mathcal{H}^k(M)$, des k-formes différentielles L^2 qui sont fermées et cofermées i.e. $\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M),\ d\alpha = 0,\ \delta\alpha = 0\}$. Lorsque la variété M est compacte (sans bord), le théorème de Hodge-de Rham dit que ces espaces sont de dimension finie et qu'ils sont isomorphes aux espaces de cohomologie réelle de M ; et nous avons la formule de Gauss-Bonnet :

$$\chi(M) = \int_M \Omega = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M),$$

où Ω est $n-$forme d'Euler ; par exemple en dimension 2, nous avons $\Omega = KdA/2\pi$ K étant la courbure de Gauss de (M, g) et dA la forme d'aire. Concernant les variétés riemanniennes non-compactes, on se pose naturellement les questions suivantes :

i) Quand peut-on affirmer que ces espaces de formes harmoniques L^2 sont de dimension finie ?

ii) Dans ce cas, quels liens ont ces espaces avec la topologie et la géométrie de la variété ?

iii) Si cela est bien défini comment peut-on comparer la caractéristique d'Euler L^2 définie par

$$\chi_{L^2}(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M)$$

et l'intégrale de la $n-$ forme d'Euler ? Autrement dit, quel type de formule de Gauss-Bonnet peut-on espérer ?

Un résultat de J. Lott nous amène à préciser un peu ces questions. Dans [L], J. Lott montre que la réponse à la première question ne dépend que de la géométrie à l'infini ; i.e. si deux variétés riemanniennes sont isométriques hors d'un compact alors si les espaces de L^2-cohomologie réduite sont de dimension finie pour l'une, ils le sont aussi pour l'autre. On peut alors raffiner ces questions en le programme de recherche suivant :

i) Quelles sont les géométries à l'infini qui imposent aux espaces de formes harmoniques L^2 d'être de dimension finie ?

Puis un fois fixée une telle géométrie :

ii) Quels sont les liens entre la topologie et les espaces de L^2-cohomologie, et quel type de formule de Gauss-Bonnet peut-on espérer ?

Dans la première partie de ce mémoire, on décrira la L^2-cohomologie réduite et on détaillera un peu ces questions. Ensuite, dans une deuxième partie, on donnera des exemples où on sait répondre à ces questions ou bien où je pense qu'une réponse est possible. Puis dans une troisième partie, on abordera un outil d'analyse globale sur les variétés : les inégalités de Sobolev. Cet outil m'a permis de répondre à ces questions pour des variétés qui vérifient une inégalité de Sobolev et dont une intégrale de courbure est finie. Par exemple, ceci recouvre des résultats de N. Borisov, W. Müller, R. Schrader et J. Brüning ([B-M-S], [B]) à propos des variétés (presque) euclidienne à l'infini, i.e des variétés riemanniennes dont la géométrie hors d'un compact est (proche) celle de l'espace euclidien : dans [B-M-S] et [B], les auteurs obtiennent des formules de Gauss-Bonnet ; pour ces variétés, notre approche nous permettra de plus le calcul des espaces de formes harmoniques L^2 en fonctions de la topologie.

Puis, nous avons cherché à généraliser ces résultats, pour cela on introduira dans la cinquième partie une condition analytique qui implique que les espaces de L^2-cohomologie réduite sont de dimension finie. Cette condition est par exemple vérifiée par les variétes riemanniennes plates à l'infini, les variétés riemanniennes à bouts cylindriques, à bouts cusps. Cette condition sera définie et décrite dans un contexte plus général : celui des opérateurs de type Dirac. Dans une sixième partie, on donnera les outils d'analyse qui mènent à une formule de l'indice pour les opérateurs qui vérifient cette condition ; i.e on obtiendra une formule de Gauss-Bonnet pour les variétés riemanniennes satisfaisant cette condition analytique. Enfin, dans une septième partie, on s'appliquera à trouver des liens entre la topologie et les formes harmoniques L^2 pour les variétés qui vérifient cette condition. Ceci nous permettra par exemple de traiter presque entièrement le cas des variétés dont la courbure est nulle à l'infini.

1. Les formes harmoniques L^2 sur les variétés riemanniennes non-compactes :

Je voudrais dans cette partie décrire une question qui a motivé mes travaux sur les formes harmoniques L^2 ; pour cela, je vais d'abord rappeler brièvement les résultats de deRham et de Hodge-deRham, ensuite je donnerai quelques exemples de variétés non-compactes où on sait calculer les espaces de formes harmoniques L^2.

1.a. La cohomologie de deRham. — Soit M^n une variété différentiable de dimension n, l'opérateur de différentiation extérieure agit de

$$d \ : \ C^\infty(\Lambda^k T^*M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)$$

et vérifie $d\circ d = 0$, ainsi on définit

i) $Z^k(M) = \mathrm{Ker}\{d : \ C^\infty(\Lambda^k T^*M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)\}$

ii) $B^k(M) = dC^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$.

Alors on a $B^k \subset Z^k$, le $k-$ième groupe de cohomologie (de deRham) est le quotient de ces deux espaces

$$H^k_{dR}(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}.$$

En fait ces espaces, qui sont a priori des invariants différentiables, sont en fait des invariants d'homotopie, plus précisément on a le résultat de deRham

1.1. Théorème. — *Les espaces de cohomologie de deRham sont isomorphes aux groupes de cohomologie réels de M , i.e. $H^k_{dR}(M) \simeq H^k(M,\mathbf{R})$.*

Remarque. — On peut définir la cohomologie de deRham à support compact : à partir de

$$d \; : \; C_0^\infty(\Lambda^k T^*M) \longrightarrow C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M),$$

on définit

$$H^k_c(M) = \frac{\{\alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*M),\; d\alpha = 0\}}{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)} \; .$$

Et lorsque la variété est l'intérieur d'une variété compacte à bord, ces espaces sont isomorphes aux espaces de cohomologie relative réel : $H^k_c(M) \simeq H^k(M,\partial M,\mathbf{R})$.

1.b. La L^2-cohomologie réduite. —

1.b.1. définition . — Soit maintenant (M^n,g) une variété riemannienne. La L^2-cohomologie réduite est définie à partir de l'action (non-bornée) de la différentiation extérieure d sur l'espace de Hilbert $L^2(\Lambda^k T^*M)$. On introduit

i) $Z^k_2(M)$, qui est le noyau de l'opérateur d agissant, de façon non-bornée, sur $L^2(\Lambda^k T^*M)$, ou de façon équivalente

$$Z^k_2(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M),\; d\alpha = 0\},$$

où on entend que $d\alpha$ est une distribution (ou un courant). Plus précisément, la structure Hilbertienne induite par la métrique nous permet de définir δ, l'opérateur différentiel adjoint à d, par la formule

$$\langle d\alpha,\beta\rangle_{L^2} = \langle \alpha,\delta\beta\rangle_{L^2} \,, \forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*M),\; \beta \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M).$$

Alors l'égalité au sens des courants $d\alpha = 0$, signifie que pour tout $\beta \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)$, on a

$$\langle \alpha,\delta\beta\rangle = 0.$$

C'est à dire que $Z^k_2(M) = \left(\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)\right)^\perp$, ce qui montre que c'est un sous-espace fermé de L^2.

ii) $B^k_2(M)$, qui est l'adhérence dans $L^2(\Lambda^k T^*M)$ de $d\left[C_b^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)\right]$; où on a noté $C_b^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$ l'espace des k-formes différentielles lisses à support borné ; par exemple si M est une variété à bord compacte alors les éléments de $C_b^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$ ont un support qui peut rencontrer le bord.

On a $B^k_2(M) \subset Z^k_2(M)$ et le k^{ieme} espace de L^2-cohomologie réduite est le quotient $H^k_2(M) = Z^k_2(M)/B^k_2(M)$. C'est donc un espace de Hilbert.

1.b.2. Quelques propriétés. — Il est clair que si g' est une autre métrique sur M^n qui est quasi-isométrique à g (i.e. $C^{-1}g \le g' \le C\,g$, pour une constante C) alors les espaces de L^2-cohomologie réduites de (M,g) et (M,g') sont isomorphes. En fait, on même mieux J. Lott a remarqué que ces espaces étaient des invariants d'homotopie Lipschitz, i.e. si $f_0, f_1 \; : \; (M,g) \longrightarrow (N,h)$ sont des applications

Lipschitz telles qu'il existe une application Lipschitz $F : ([0,1] \times M, dt^2 + g) \longrightarrow (N, h)$ homotopant f_0 et f_1 alors les applications $f_0^*, f_1^* : H_2^k(N) \longrightarrow H_2^k(M)$ sont égales.

1.b.3. Formes harmoniques et L^2-cohomologie réduite. — La L^2-cohomologie réduite a une interprétation en terme de formes harmoniques L^2. En effet, notons $\mathcal{H}^k(M)$ l'espace des k-formes harmoniques L^2 sur M :

$$\mathcal{H}^k(M) = \{h \in L^2(\Lambda^k T^* M), dh = \delta h = 0\}.$$

Alors on a la décomposition de Hodge-deRham-Kodaira

$$L^2(\Lambda^k T^* M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)} \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)}, \tag{1.2}$$

où l'adhérence s'entend pour la topologie de $L^2(\Lambda^k T^* M)$. Et de plus on a $Z_2^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)}$. Ainsi lorsque la variété est **complète** alors les fermés bornés sont les compacts et $C_0^\infty = C_b^\infty$ et donc on a dans ce cas l'isomorphisme $\mathcal{H}^k(M) \simeq H_2^k(M)$. De plus dans cas, le résultat d'Andreotti et Visentini affirme que si $\Delta = d\delta + \delta d$ est le Laplacien de Hodge-deRham alors on a aussi

$$\mathcal{H}^k(M) = \{h \in L^2(\Lambda^k T^* M), \Delta h = 0\}.$$

Attention, ces résultats sont faux si la variété riemannienne n'est pas complète. Par exemple si la variété est une variété compacte à bord alors cette dernière identité n'est pas valable, puisque pour $k = 0$, l'un des espaces est celui des fonctions localement constante et l'autre celui des fonctions harmoniques.

1.b.4. La L^2-cohomologie (non-réduite). — Elle est définie comme le quotient de $Z_2^k(M)$ par l'image par d de son domaine i.e.

$$H_{2,nr}^k(M) = Z_2^k(M)/\{d\alpha, \text{ tel que } \alpha \in L^2(\Lambda^{k-1} T^* M),\ d\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M)\}.$$

En fait, la L^2-cohomologie réduite et non-réduite coincident uniquement lorsque zéro n'est pas dans le spectre essentiel du Laplacien de Hodge-deRham. Les propriétés usuelles de cohomologie, comme les suites exactes de Mayer-Vietoris, de l'homomorphisme cobord, sont vraies pour la cohomologie L^2 non-réduite mais elles ne sont pas vraies en géneral pour la cohomologie réduite. Désormais, on nommera L^2-cohomologie la L^2-cohomologie réduite sauf lorsque cela sera ambigu.

1.b.5. Le cas des variétés compactes. — Supposons ici que la variété est compacte sans bord. Alors dans ce cas, les L^2-cohomologie réduite et non-réduite coïncident puisque le spectre du Laplacien de Hodge-deRham est discret ; en particulier l'espace des formes harmoniques est de dimension finie. Le théorème de Hodge-deRham affirme que l'on a la décomposition

$$C^\infty(\Lambda^k T^* M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus dC^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M) \oplus \delta C^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M),$$

et on a $Z^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus dC^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)$. Ce qui montre que les espaces de L^2-cohomologie, de formes harmoniques L^2, de cohomologie réelle sont égaux.

En particulier, on a la formule de Gauss-Bonnet :

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M) = \int_M \Omega^g,$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de M et où Ω^g est $n-$forme d'Euler ; par exemple en dimension 2, nous avons $\Omega = KdA/2\pi$ K étant la courbure de Gauss de (M, g) et dA la forme d'aire.

Une question naturelle est de comprendre ce qui se passe pour les variétés complètes non-compactes. Suivant J. Roe ([R]) on peut classifier ce problème sur les variétés non-compactes en trois types : I, II, III, en référence à la classification des algèbres de Von-Neumann. Le type I est celui où les espaces de formes harmoniques sont de dimension finie, le type II celui où ces espaces sont de dimension infinie ou nulle mais où on peut définir une dimension moyennée, par exemple si la variété est un revêtement infini d'une variété compacte ; une très bonne référence est l'article d'Atiyah [At]. le type III est celui où on considère les formes harmoniques L^2 sur les feuilles d'un feuilletage.

Ici, on s'intéresse uniquement au type I, et nos questions naïves sont les suivantes

i) Quand peut-on affirmer que ces espaces de formes harmoniques L^2 sont de dimension finie.

ii) Dans ce cas, quels liens ont ces espaces avec la topologie et la géométrie de la variété ?

iii) Si cela est bien défini comment peut-on comparer la caractéristique d'Euler L^2 définie par

$$\chi_{L^2}(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M)$$

et l'intégrale de la $n-$ forme d'Euler ? Autrement dit, quel type de formule de Gauss-Bonnet peut-on espérer ?

1.c. L^2-cohomologie et géométrie à l'infini. — Avant de donner des exemples, je voudrais donner le résultat suivant de J. Lott ([Lo])

1.3. Théorème. — *Si deux variétés riemanniennes complètes (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont isométriques hors d'un compact alors si tout les espaces de L^2-cohomologie réduite de l'une sont de dimension finie, alors ceux de la seconde aussi, i.e.*

$$(\dim \mathcal{H}^k(M_1) < \infty,\ \forall k) \Leftrightarrow (\dim \mathcal{H}^k(M_2) < \infty,\ \forall k).$$

Avant d'esquisser la preuve de ce résultat, je dois dire que ce théorème est une réponse à une question que m'a posé H. Pesce en 1995 et que cette question naturelle a guidé mon intuition.

Preuve. — Elle nécéssite de définir la L^2-cohomologie absolue et relative d'une variété riemannienne ouverte (Ω, g) à bord compact. La L^2-cohomologie absolue est la L^2-cohomologie réduite comme elle a été définie précédement. La L^2-cohomologie relative est définie par

$$H_2^k(\Omega,\partial\Omega)=\frac{\left(\delta C_b^\infty(\Lambda^kT^*\Omega)\right)^\perp}{\overline{\{d\alpha,\ i^*\alpha=0,\ \alpha\in C_b^\infty(\Lambda^{k-1}T^*\Omega)\}}},$$

où l'adhérence est pour la topologie L^2 et où i^* est l'application naturelle associée à l'inclusion $\partial\Omega\longrightarrow\Omega$. Lorsque l'espace métrique $(\bar\Omega,d_g)$ est complet, ces espaces ont une interprétation en terme de formes harmoniques :

1.4. Proposition . —
$$H_2^k(\Omega)=\{\alpha\in L^2(\Lambda^kT^*\Omega),d\alpha=\delta\alpha=0,\ \mathrm{int}_{\vec\nu}\alpha=0\}\ ;$$
$$H_2^k(\Omega,\partial\Omega)=\{\alpha\in L^2(\Lambda^kT^*\Omega),d\alpha=\delta\alpha=0,\ i^*\alpha=0\}\ ;$$
où $\vec\nu$ est la normale intérieure à $\partial\Omega\subset\Omega$.

Ces égalités ont été montrées par Duff-Spencer ([D-S]) et Connor ([Cn]) pour les variétés compactes à bord, ils ont aussi montré que ces espaces de formes harmoniques sont isomorphes au groupes de cohomologie absolue/relative de Ω. Les arguments de G. Duff, D.C. Spencer se généralisent aisément à notre cadre ; ces résultats sont bien connus et ils sont, par exemple, assez explicites dans les articles de M. Lesch et J. Brüning ([B-L]) et de J. Lott ([Lo]). Soit maintenant (M,g) une variété riemannienne complète et $K\subset M$ un compact à bord lisse de M, on pose $\Omega=M-K$, il y a des applications naturelles entre $H_2^k(M)$, $H_2^k(\Omega)$, $H_2^k(\Omega,\partial\Omega)$: d'abord l'application restriction

$$j^*\ :\ H_2^k(M)\longrightarrow H_2^k(\Omega)$$

et puis l'application extension par zéro

$$e\ :\ H_2^k(\Omega,\partial\Omega)\longrightarrow H_2^k(M).$$

Cette dernière application est bien définie car si $\alpha\in L^2(\Lambda^kT^*\Omega)$ vérifie les équations $d\alpha=\delta\alpha=0$, $i^*\alpha=0$ alors pour $\beta\in C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)$, on a à la formule de Stockes :

$$\int_M <d\alpha,\beta>-\int_M<\alpha,\delta\beta>=\int_{\partial\Omega}<i^*\alpha,\mathrm{int}_{\vec\nu}\beta>=0.$$

Ainsi l'extension par zéro de la forme α est faiblement fermée. Puis nous avons les deux faits suivants

i) $\mathrm{Im}\, j^*$ est de codimension finie dans $H_2^k(\Omega)$.

ii) $\mathrm{Im}\, e$ est de codimension finie dans $H_2^k(M)$.

Ces faits permettent de conclure la preuve du théorème 1.3 :

D'abord, quitte à passer au revêtement double, on peut supposer la variété orientée ; en effet sur le revêtement double orienté d'une variété riemannienne non-orientable, l'automorphisme du revêtement anticommute avec l'opérateur de dualité de Hodge, i.e si $\pi\ :\ \bar M\longrightarrow M$ est un tel revêtement et si γ est l'automorphisme de ce revêtement alors $*\gamma^*+\gamma^**=0$. Ainsi si on note

$$\mathcal{H}_\epsilon(\bar M)=\{\alpha\in\mathcal{H}(\bar M),\ \gamma^*\alpha=\epsilon\alpha\}$$

ceci pour $\epsilon \in \{+1,-1\}$, on a $\mathcal{H}(\bar{M}) = \mathcal{H}_{+1}(\bar{M}) \oplus \mathcal{H}_{-1}(\bar{M})$ et $\mathcal{H}_{+1}(\bar{M})$ est isomorphe à $\mathcal{H}(M)$, ainsi puisque $*$ réalise un isomorphisme entre $\mathcal{H}_{+1}(\bar{M})$ et $\mathcal{H}_{-1}(\bar{M})$, on a

$$\dim \mathcal{H}(\bar{M}) = 2 \dim \mathcal{H}(M).$$

On a alors une dualité de Hodge-Poincaré entre les espaces $H_2^k(\Omega)$ et $H_2^{n-k}(\Omega, \partial\Omega)$. Ainsi grâce au premier fait, si $\mathcal{H}^k(M)$ est de dimension finie alors $H_2^k(\Omega)$ est de dimension finie, ainsi que $H_2^{n-k}(\Omega, \partial\Omega)$. Puis le second fait montre que si $H_2^k(\Omega, \partial\Omega)$ est de dimension finie alors $\mathcal{H}^k(M)$ est de dimension finie. Ainsi on a

$$\dim \mathcal{H}^k(M) < \infty \Leftrightarrow \left(\dim H_2^k(\Omega) < \infty,\ \dim H_2^{n-k}(\Omega) < \infty\right).$$

Le premier fait se prouve avec l'application cobord $b : H_2^k(\Omega) \longrightarrow H_c^{k+1}(K)$. Cette application est définie ainsi : si α est un représentant lisse de $[\alpha] \in H_2^k(\Omega)$, on étend α en une forme lisse $\bar{\alpha}$ sur M fermée au voisinage de Ω, alors $b[\alpha]$ est la classe de cohomologie de $d\bar{\alpha}$ dans $H_c^k(K)$; ceci est bien défini, i.e. cela ne dépend pas du choix de α et de l'extension. Une vérification simple montre que l'on a $\ker b = \mathrm{Im} j^*$. Cette égalité est un héritage de la suite exacte en cohomologie de deRham associée à l'opérateur cobord. Cette égalité conclut le théorème puisque $\ker b$ est de codimension finie. Le second fait se prouve de même, en considérant l'application de restriction à K, $r : \mathcal{H}^k(M) \longrightarrow H^k(K)$, et de même, on a $\ker r = \mathrm{Im} e$. ■

Ce théorème et sa preuve montrent que l'on peut espérer en général établir des liens entre la topologie de la variété, la géométrie à l'infini, et la L^2-cohomologie de la variété. Ceci nous amène au programme suivant

i) Quelles sont les géométries à l'infini qui imposent aux espaces de formes harmoniques L^2 d'être de dimension finie ?

ii) Puis quelles sont les liens entre ces géométries à l'infini, la topologie et les espaces de L^2-cohomologie ?

Nous allons maintenant donner des exemples où on sait que ces espaces de L^2-cohomologie sont de dimension finie et de ce qu'on sait à propos de la seconde question. Le but de cette partie n'est pas d'être exhaustif sur tout les résultats de nullité et de finitude pour les espaces de formes harmoniques L^2, le but est d'exposer les exemples qui débouchent ou qui peuvent déboucher, selon moi, sur une réponse à la seconde question.

2. Des exemples :

2.a. Le cas des formes de degré 0 et n. —

2.1. PROPOSITION . — *Si (M^n, g) est une variété riemannienne complète connexe alors*

$$\mathcal{H}^0(M) = \mathbf{R}\mathbf{1}_M \text{ si et seulement si } \mathrm{vol}\, M < \infty,$$
$$\mathcal{H}^0(M) = \{0\} \text{ si et seulement si } \mathrm{vol}\, M < \infty.$$

Ce résultat se prouve simplement en utilisant la définition de la L^2-cohomologie réduite, puisqu'une fonction L^2 faiblement fermée est en fait localement constante. Ce résultat a deux corollaires l'un énonce un résultat similaire à propos des formes de degré n lorsque la variété et orientable. L'autre est que sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ il n'y a pas de forme harmonique L^2 non-nulle. On peut donner une autre preuve de ce résultat :

2.b. Cas des variétés produits. —

2.2. PROPOSITION . — *Si (M,g) est une variété riemannienne complète isométrique au produit riemannien $\mathbf{R}\times N$ alors*

$$\mathcal{H}^k(M)=\{0\},\ \forall k.$$

Preuve. — Une première preuve serait d'utiliser une formule de Künneth. La seconde preuve utilise la formule de Cartan. Soit $\frac{\partial}{\partial t}$ le champ de vecteurs unitaires tangent à $\mathbf{R}\subset\mathbf{R}\times N$ et φ^t le groupe à un paramètre d'isométries qu'il engendre, i.e. $\varphi^t(s,x)=(t+s,x)$. Si α est une k-forme harmonique L^2 alors $(\varphi^t)^*\alpha$ est aussi une forme harmonique L^2 et on a la formule de Cartan

$$(\varphi^t)^*\alpha-\alpha=d\int_0^t \mathrm{int}_{\frac{\partial}{\partial t}}(\varphi^s)^*\alpha\, ds.$$

On a évidement la majoration

$$\|\mathrm{int}_{\frac{\partial}{\partial t}}(\varphi^s)^*\alpha\|_{L^2}\leq\|(\varphi^s)^*\alpha\|_{L^2}.$$

Donc la forme $(\varphi^t)^*\alpha$ est L^2-cohomologue à la forme α, comme α est l'unique représentant harmonique dans sa classe on a $(\varphi^t)^*\alpha=\alpha$, puis comme α est de carré sommable, α est nulle. ■

La preuve de cette proposition s'étend aisément pour donner

2.3. PROPOSITION . — *Soit G un groupe de Lie dont la composante neutre du centre n'est pas compact alors pour tout k, on a $\mathcal{H}^k(G)=\{0\}$, ceci pour n'importe quelle métrique invariante à gauche.*

Preuve. — La preuve est la même : soit Z un élement de l'algèbre de Lie du centre de G, qui engendre un sous-groupe non-compact à un paramètre $(g^s)_{s\in\mathbf{R}}$, on note aussi L_{g^s} le difféomorphisme de G qui est la multiplication à gauche par g^s, c'est donc une isométrie. Si α est une k-forme harmonique L^2 alors $(L_{g^t})^*\alpha$ est aussi une forme harmonique L^2 et l'on a la formule de Cartan

$$L_{g^t}^*\alpha-\alpha=d\int_0^t \mathrm{int}_z L_{g^s}^*\alpha\, ds.$$

Où z est la champ de vecteur

$$z(x)=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^t.x.$$

On a la majoration
$$\|\mathrm{int}_z L_{g^s}^* \alpha\|_{L^2} \leq \max_{x \in G} |z(x)|\, \|\alpha\|_{L^2}.$$
Or
$$|z(x)| = \left| x^{-1}.\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^t.x \right| = |z(e)|,$$
car $x^{-1}g^t x = g^t$ puisque chaque g^t est un élément du centre de G. Donc $L_{g^t}^* \alpha = \alpha$ ceci pour tout $t \in \mathbf{R}$, ensuite le fait que le groupe g^t soit non compact assure que comme α est de carré sommable alors $\alpha = 0$. ■

Je remercie ici C. Pittet avec lequel j'ai oralement prouvé ce résultat.

2.4. Corollaire. — *Si G est un groupe nilpotent alors $\mathcal{H}^k(G) = \{0\}$, pour tout k.*

Nous décrirons plus loin les espaces de formes harmoniques L^2 des variétés qui sont euclidiennes à l'infini, i.e des variétés riemanniennes isométriques, hors d'un compact, au complémentaire d'une boule dans un espace euclidien. Mais je pose la question suivante à laquelle je ne sais répondre :

Si (M^n, g) est une variété riemannienne isométrique hors d'un compact au complémentaire d'un compact d'un groupe nilpotent (muni d'une métrique invariante à gauche) alors quels sont les liens entre les espaces de formes harmoniques L^2 et la topologie de M ? J'ignore même la réponse à cette question lorsque la géométrie à l'infini est celle du groupe de Heisenberg de dimension 3
$$\mathrm{Heis}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \right\}.$$

2.c. Le cas des variétés de révolution. — Dans [Do], J. Dodziuk a calculé explicitement la cohomologie des variétés de révolution.

2.5. théorème. — *Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction lisse impaire, nulle uniquement en zéro telle que $f'(0) = 1$, alors on munit $\mathbf{R}^n$ avec la métrique qui en coordonnées polaires s'écrit $g_f = dr^2 + f^2(r)d\theta^2$ où $d\theta^2$ est la métrique usuelle de la sphère , alors*
$$\mathcal{H}^k(\mathbf{R}^n, g_f) = \{0\} \text{ si } k \notin \{0, n/2, n\} \;;$$
$$\mathcal{H}^0(\mathbf{R}^n, g_f) = \mathcal{H}^n(\mathbf{R}^n, g_f) = \{0\} \text{ si } \int_0^\infty f^{n-1} = \infty \;;$$
$$\mathcal{H}^0(\mathbf{R}^n, g_f) \simeq \mathcal{H}^n(\mathbf{R}^n, g_f) \simeq \mathbf{R} \text{ sinon} \;;$$
$$\mathcal{H}^{\frac{n}{2}}(\mathbf{R}^n, g_f) = \{0\} \text{ si } \int_1^\infty f^{-1} = \infty \;;$$
$$\dim \mathcal{H}^{\frac{n}{2}}(\mathbf{R}^n, g_f) = \infty \text{ si } \int_1^\infty f^{-1} < \infty.$$

Ainsi se pose la question du calcul des espaces de formes harmoniques L^2 pour une variété riemannienne qui, hors d'un compact, est isométrique à $(\mathbf{R}^n, g_f)$. Par exemple, le résultat de J. Dodziuk montre que pour l'espace hyperbolique réel, on a

si $2k \neq n$ alors $\mathcal{H}^k(\mathbf{H}^n) = \{0\}$.

Si $2k = n$ alors $\dim \mathcal{H}^k(\mathbf{H}^n) = \infty$.

R. Mazzeo a entièrement résolu cette question du calcul des espaces de L^2-cohomologie pour les variétés asymptotiquement hyperboliques ([Ma]) :

2.6. THÉORÈME. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne qui au dehors d'un compact est isométrique au produit tordu $(]0, \infty[\times\Sigma, dr^2 + e^{2r}g)$, où g est une métrique riemannienne sur la variété compacte Σ alors*

$$\text{si } k < n/2,\ \mathcal{H}^k(M) \simeq H^i(K, \partial K),$$
$$\text{si } k > n/2,\ \mathcal{H}^k(M) \simeq H^i(K),$$
$$\text{si } k = n/2,\ \dim \mathcal{H}^k(M) = \infty.$$

De plus, R. Mazzeo détermine le spectre essentiel de l'opérateur de Hodge-deRham de ces variétés.

2.d. Le cas de la dimension moitié. — Si (M^n, g) est une variété riemannienne de dimension n paire, alors la norme L^2 sur les formes différentielles de degré $n/2$ est un invariant conforme, ainsi

2.7. PROPOSITION. — *Si (M^n, g) est une variété riemannienne de dimension paire et si $f \in C^\infty(M)$ on a*

$$\mathcal{H}^{\frac{n}{2}}(M, g) = \mathcal{H}^{\frac{n}{2}}(M, e^{2f}g).$$

On peut ainsi déterminer l'espace des formes harmoniques L^2 de degré $\frac{n}{2}$ sur l'espace hyperbolique réel $\mathbf{H}^n$. Nous donnons ici un autre type d'application de cette invariance conforme, pour cela nous commençons par le résultat suivant :

2.8. PROPOSITION. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte et K un compact de M de capacité nulle alors*

$$\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*(M - K)),\ d\alpha = \delta\alpha = 0 \text{ sur } M - K\}$$
$$= \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M),\ d\alpha = \delta\alpha = 0,\ \text{sur } M\}.$$

Rappelons la définition de la capacité d'un compact K d'une variété riemannienne compacte (M, g) :

$$\operatorname{cap} K = \inf\{\int_M |du|^2,\ \int_M u = 0, u \geq 1 \text{ sur } K\}.$$

Selon G. Courtois ([C]), si $H_0^1(M - K)$ le complété de $C_0^\infty(M - K)$ pour la norme H^1, $u \mapsto \sqrt{\|du\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2}$. Alors $\operatorname{cap} K = 0$ si et seulement si $H^1(M) = H_0^1(M - K)$. Ce qui implique que si $\operatorname{cap} K = 0$ alors $H_0^1(\Lambda^k T^*(M - K)) = H^1(\Lambda^k T^* M)$.

En effet, $H_0^1(\Lambda^k T^*(M-K))$ est le complèté de $C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M-K)$ muni de la norme $\alpha \mapsto \sqrt{\int_M |\nabla\alpha|^2 + |\alpha|^2}$. Montrons que $\alpha \in C^\infty(\Lambda^k T^* M)$ est dans $H_0^1(\Lambda^k T^*(M-K))$, ce qui conclura par densité. Si $\rho \in C^\infty(M)$ on a la formule d'intégration par parties

$$\int_M |\nabla(\rho\alpha)|^2 = \int_M |d\rho|^2|\alpha|^2 + \rho^2 < \alpha, \nabla^*\nabla\alpha >,$$

ceci montre que si ρ_k est une suite de fonctions de $C_0^\infty(M-K)$ tendant en norme H^1 vers la fonction constante 1, alors $(\rho_k\alpha)_k$ est une suite d'éléments de $C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M-K))$ tendant en norme H^1 vers α.

Preuve. — Par la loi du *qui peut le plus peut le moins* on a l'inclusion du second espace dans le premier. L'autre inclusion est évidente avec la définition de la capacité : soit α une k-forme harmonique L^2, alors on a $< \alpha, \delta\beta >= 0$, pour tout $\beta \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*(M-K))$. Or cette expression est continue par rapport à β pour la norme H^1, et donc elle est valide par densité pour tout $\beta \in H_0^1(\Lambda^k T^*(M-K))$, et donc pour toutes $(k-1)$-formes lisses sur M. Donc α est faiblement fermée sur M. Le même argument montre que α est faiblement cofermée et donc que α est harmonique sur M. ■

Remarques. —

i) Ceci montre que le complémentaire d'un compact de capacité nulle dans une variété connexe est connexe. En effet les fonctions localement constantes sur le complémentaire sont constantes. En fait, on peut trouver aussi une preuve avec le mouvement Brownien, puisque presque sûrement le mouvement Brownien évite les ensembles de capacité nulle.

ii) On a le même résultat sur les variétés non-compactes auxquelles on enlève un compact de capacité nulle relativement à un ouvert borné qui le contient.

Ce résultat a quelques applications :

1) Soit S une surface riemannienne telle que $\int_S |K| dA < \infty$ alors grâce au résultat de Huber ([Hu]) on sait que S est conformément équivalente à une surface riemannienne compacte $\bar{S}$ à laquelle on a enlevé un nombre fini de points, ainsi comme ces points sont de capacité nulle, si g est le genre de S et donc de $\bar{S}$ on a
$$\dim \mathcal{H}^1(S) = \mathrm{b}_1(\bar{S}) = 2g.$$

2) Un autre exemple géométriquement intéressant est le suivant : on considère l'espace projectif complexe muni de la métrique de Fubini-Study ; soit $p_0 \in P^n(\mathbf{C})$, le cut-locus de p_0 est exactement l'espace projectif $P^{n-1}(\mathbf{C})$ situé à l'infini par rapport à p_0. De plus, en coordonnées exponentielles $(r,u) \in]0,\pi[\times \mathbf{S}^{2n-1}$, la métrique de Fubini-Study est exactement
$$dr^2 + r^2 g_{\pi - r}$$
où g_l est la métrique de Berger sur $\mathbf{S}^{2n-1}$ dont les fibres sont de longueur l, i.e on a la fibration totalement géodésique $l\mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{S}^{2n-1} \longrightarrow P^{n-1}(\mathbf{C})$. Or la

codimension du cut locus est ici 2, ainsi sa capacité est nulle ; les propositions précédentes montrent que si on munit $\mathbf{R}^{2n}$ de la métrique qui en coordonnées polaires s'écrit $dr^2 + r^2 g_{(1+r^2)^{-1}}$ alors cette métrique riemannienne est quasi-isométrique à une métrique conforme à la précédente, et donc cette variété riemannienne a une forme harmonique L^2 non-nulle en degré n. Pour $n = 2$, Escobar-Freire obtiennent, par le calcul, l'existence de cette forme harmonique de plus ils montrent que la courbure sectionnelle de cette variété est positive ([E-F]).

2.e. L^2 cohomologie et cohomologie de deRham. —

2.9. PROPOSITION. — *Si (M^n, g) est une variété riemannienne complète telle que $\mathrm{Im}(H^k_c(M) \longrightarrow H^k(M)) \neq \{0\}$ alors $\mathcal{H}^k(M) \neq \{0\}$ plus précisement $\mathrm{Im}(H^k_c(M) \longrightarrow H^k(M))$ s'injecte dans la cohomologie L^2.*

Preuve. — On a évidement une application naturelle $H^k_c(M) \longrightarrow \mathcal{H}^k(M)$ qui à une forme fermée à support compact associe sa classe de cohomologie L^2 ou sa projection orthogonale sur l'espace des formes harmoniques L^2. La proposition affirme que si α est une forme fermée à support compact qui est nulle en cohomologie L^2 alors elle est exacte, ceci découle du fait suivant [dR, Théorème 24] : pour toute forme $\beta \in L^2$, il y a une forme harmonique h, et deux courants S, T tels que $\beta = h + dS + \delta T$, de plus S et T sont lisses là où $\Delta\beta$ est lisse. On applique ceci à α une forme lisse fermée à support compact nul en cohomologie L^2, par hypothèse $T = 0$ puisque α est faiblement fermée, et $h(\alpha) = 0$ donc il existe une forme lisse T telle que $\alpha = dT$. ■

Ce résultat a l'application suivante due à M. Anderson ([An]) : i (M^n, g) est une variété riemannienne dont la classe d'Euler est non-nulle, alors $\dim \mathcal{H}^n(TM) \geq 1$. En effet, la classe de Thom du fibré est non-nulle et donc $\mathrm{Im}(H^n_c(TM) \longrightarrow H^n(TM)) \neq \{0\}$. Par exemple, le fibré tangent à $\mathbf{S}^{2p}$, $T\mathbf{S}^{2p}$ a une forme harmonique L^2 non-nulle de degré $2p$. Prenons l'exemple du fibré tangent à $\mathbf{S}^2$, on ne sait pas déterminer ses espaces de L^2 cohomologie. Ce fibré a une géométrie intéressante ; en effet, lorsqu'on lui enlève la section nulle, ce fibré à un revêtement double isométrique à $(]0, \infty[\times \mathbf{S}^3, dr^2 + g_{2\pi r})$, où on a noté g_l la métrique de Berger sur $\mathbf{S}^3$ dont les fibres sont de longueur l. Il serait intéressant de comprendre le lien qu'il y a sur ces variétés entre L^2-cohomologie et la géométrie. Par exemple, je conjecture que sur cette variété, l'espace des formes harmoniques L^2 est de dimension finie.

Pour conclure cette partie et ce paragraphe, je vais citer le résultat de Atiyah-Patodi-Singer ([A-P-S]) qui est le premier résultat liant cohomologie et formes harmoniques L^2.

2.10. THÉORÈME. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne à bouts cylindriques, i.e au dehors d'un compact, elle est isométrique au produit riemannien $(]0, \infty[\times \Sigma, dr^2 + h)$, où h est une métrique riemannienne sur la variété compact Σ*

alors
$$\mathcal{H}^k(M) \simeq \operatorname{Im}(H^k_c(M) \longrightarrow H^k(M)).$$

Ce résultat est fondamental pour obtenir la formule de la signature d'une variété compacte à bord.

Nous allons ensuite montrer comment des outils d'analyse sur les variétés permettent d'obtenir des résultats à propos des questions que nous avons posé à propos des liens entre la géométrie à l'infini, la topologie et les espaces de L^2-cohomologie. Pour cela, nous commençons par décrire un peu les outils d'analyse que nous utiliserons.

3. Inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes non-compactes.

Dans toute cette partie (M^n, g) est une variété riemannienne complète, non-compacte connexe.

3.a. Qu'est ce qu'une inégalité de Sobolev ?. — Pour cela, il faut des espaces de Sobolev, pratiquement on se limite ici aux espaces L^p et à l'espace H^1_0. Les espaces L^p : ce sont les espaces $L^p(M, dv_g)$ construits à partir de la mesure riemannienne dv_g. Pour p fini, c'est aussi le complété de $C^\infty_0(M)$ pour la norme L^p. Remarquons que si pour une variété compacte ces espaces ne dépendent pas de la métrique, pour une variété non-compacte ce n'est plus le cas, par exemple on a
$$1 \in L^1(M, dv_g) \Leftrightarrow \operatorname{vol} M < \infty.$$
Et il est facile de construire sur $\mathbf{R}^2$ des métriques complètes à volume fini ou infini.

3.1. Définition . — L'espace $H^1_0(M)$ est le complété de $C^\infty_0(M)$ pour la norme
$$u \mapsto \sqrt{\int_M |du|^2}\,.$$
C'est donc un espace de Hilbert. Remarquons que cet espace est bien défini, puisqu'une fonction à support compact et de gradient nul est constante, donc nulle. Cependant cet espace n'est pas toujours un espace de fonctions ; par exemple, sur $\mathbf{R}$ muni de la métrique euclidienne, si u est une fonction lisse à support compact qui vaut 1 sur un voisinage de 0 alors la suite de fonction $(t \mapsto u(t/k))_k$ converge vers 0 dans H^1_0 mais vers la fonction constante 1 dans L^1_{loc} ; c'est à dire que l'inclusion $C^\infty_0(\mathbf{R}) \longrightarrow L^1_{loc}$ n'est pas continue pour la norme H^1_0.

Remarque. — En fait, l'inclusion $C^\infty_0(\mathbf{R}) \longrightarrow L^1_{loc}$ est continue si seulement si l'inclusion $C^\infty_0(\mathbf{R}) \longrightarrow H^1_{loc}$ est continue. En effet, si K est un compact à bord lisse de M et si $\lambda_1(K)$ est la première valeur propre non-nulle pour le problème de Neumann alors on a l'inégalité de Poincaré
$$\lambda_1(K) \int_K u^2 \leq \int_K |du|^2 + \frac{1}{\operatorname{vol} K}\left(\int_K u\right)^2, \ \forall u \in C^\infty(M).$$

d'où on a toujours

$$\|u\|_{L^2(K)} \leq C(K) \left(\|u\|_{H_0^1(M)} + \|u\|_{L^1(K)} \right), \ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

A. Ancona a donné plusieurs caractérisations pour cette continuité ([A]):

3.2. Théorème. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

a) l'inclusion $C_0^\infty(\mathbf{R}) \longrightarrow H^1_{loc}$ se prolonge par continuité à $H_0^1(M)$.

b) Il existe un ouvert borné U de M et une constante strictement positive C telle que

$$C\left(\int_U |u|\right)^2 \leq \int_M |du|^2, \ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

c) L'équation $\Delta_y G_x(y) = \delta_x$ a des solutions positives pour un (ou pour tout) $x \in M$.

d) Il existe une fonction strictement positive f telle que

$$\int_M f|u|^2 \leq \int_M |du|^2, \ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Pour les surfaces simplement connexes, celles qui ne vérifient pas l'une de ces conditions sont conformément équivalentes à la sphère ou au plan. C'est pourquoi on nomme les variétés, qui satisfont à l'une des propriétés de ce théorème, non-paraboliques. Terme que l'on préfère à hyperbolique car si $n > 2$, l'espace euclidien vérifie les conditions du théorème. Par exemple, la fonction $\frac{C_n}{|x-y|^{n-2}}$ est une solution positive de l'équation aux dérivées partielles $\Delta_y G_x(y) = \delta_x$. On peut aussi le voir grâce à l'inégalité de Hardy

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbf{R}^n} u^2(x) \frac{dx}{\|x\|^2} \leq \int_{\mathbf{R}^n} |du|^2(x) dx, \ \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),$$

i.e. l'inégalité d) est vrai pour la fonction $f(x) = ((n-2)/(2|x|))^2$.

C'est pourquoi nous parlerons d'inégalité de Hardy à chaque fois que nous démontrerons une inégalité du type d). Ces inégalités expriment que l'espace $H_0^1(M)$ s'injecte continûment dans un espace L^2 à poids. Ainsi pour nous **une inégalité (ou inclusion) de Sobolev est une injection continue de $H_0^1(M)$ dans un "bon" espace de fonctions.** Le qualificatif "bon" dépend de l'usage que l'on désire avoir des inégalités. Il se trouve que les inégalités de Hardy sont très faciles à obtenir.

3.b. Inégalités de Hardy. — Dans [C2], j'ai donné une méthode pour en obtenir ; cette méthode fournit par exemple, l'inégalité suivante

3.3. théorème . — *Si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une immersion isométrique dont le vecteur courbure moyenne est k, alors (M^n, g) vérifie l'inégalité de Hardy suivante*

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_M \left(\frac{u}{r}\right)^2 (x)\, dx \leq \int_M |du|^2(x) + \frac{n-2}{2}\frac{|k|}{r} u^2\, dx, \ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

où on a noté $r(x) = \|x - x_0\|$, x_0 étant un point quelconque de $\mathbf{R}^N$.

Ce résultat est à rapprocher de celui de Hoffman-Spruck qui obtenaient une inégalité de Sobolev assez similaire à cette inégalité de Hardy ([H-S]) :

3.4. Théorème. — *Si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une immersion isométrique dont le vecteur courbure moyenne est k, alors (M^n, g) vérifie l'inégalité de Sobolev suivante*

$$c_n \left(\int_M |v|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |dv|^2(x) + |k|^2|v|^2(x)dx, \ \forall v \in C_0^\infty(M).$$

Ces deux résultats ont la conséquence suivante sur les sous-variétés minimales :

3.5. Corollaire. — *Si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une immersion isométrique minimale alors pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^N$, M^n vérifie les inégalités de Sobolev*

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_M \left(\frac{u}{r}\right)^2 (x)\, dx \leq \int_M |du|^2(x)\, dx, \ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

$$c_n \left(\int_M |v|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |dv|^2(x), \ \forall v \in C_0^\infty(M).$$

La dernière inégalité a été obtenue par Michael-Simon [M-S]. Remarquons qu'on ne peut retrouver l'inégalité de Hardy simplement à partir de l'inégalité de Sobolev et de l'inégalité de Hölder. Cette dernière inégalité de Sobolev de type euclidien, permet de faire de l'analyse sur le Laplacien comme on sait le faire sur $\mathbf{R}^n$.

3.c. Inégalités de Sobolev de type euclidienne. — On connait assez bien les propriétés équivalentes à ces inégalités en terme de noyau de la chaleur, d'inégalité de Faber-Krahn...Nous donnons ici uniquement les outils d'analyse qu'implique une telle inégalité de Sobolev

3.6. Théorème. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_\nu(M) \left(\int_M |u|^{\frac{2\nu}{\nu-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{\nu}} \leq \int_M |du|^2(x)dx, \ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

alors pour tout $p > 1, \ s > 0$ tels que $2sp < \nu$ on a

$$C(\mu_\nu, s, p)\|u\|_{L^{\frac{p\nu}{\nu-2ps}}} \leq \|\Delta^s u\|_{L^p}, \ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Et si $s > \nu/p$ alors on a les inégalités de Gagliardo-Nirenberg

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C(\nu, s, r)\mu^{-\theta}\|\Delta u\|^\theta_{L^{\frac{r}{2}}}\|u\|^{1-\theta}_{L^{\frac{s}{2}}}, \ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

où $\theta = \frac{\nu/s}{1-(\nu/r)+(\nu/s)}$.

Enfin si $(P(t,x,y))_{(t,x,y)\in \mathbf{R}^+\times M\times M}$ est le noyau de la chaleur de (M^n,g) (i.e. le noyau de l'opérateur $e^{-t\Delta}$) alors ce noyau vérifie

$$P(t,x,y) \leq \frac{C}{t^{\frac{\nu}{2}}}\left(1+\frac{d^2(x,y)}{t}\right)^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{d^2(x,y)}{4\,t}},\ \forall (t,x,y)\in \mathbf{R}^+\times M\times M.$$

La première propriété est due à N. Varopoulos dans [Va], la seconde à T. Coulhon dans [Co1], la majoration gaussienne du noyau de la chaleur est due à Davies-Pang [D-P], T. Coulhon [Co2], et Sikora [Si]. Nous allons maintenant essayer de donner une réponse à la question suivante :

3.d. Comment recoller des inégalités de Sobolev. — C'est à dire si (M_1,g_1) et (M_2,g_2) sont deux variétés riemanniennes qui vérifient une inégalité de Sobolev, alors quel type d'inégalité de Sobolev vérifie la variété $(M_1\#M_2,g_1\#g_2)$? Une autre question trés similaire est la suivante : si une variété riemannienne qui au dehors d'un compact vérifie une inégalité de Sobolev, alors quelle inégalité de Sobolev vérifie-t-elle ?

Par exemple, si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une imersion isométrique et si la courbure moyenne k de cette imersion vérifie $\int_M |k|^n < \infty$, alors d'après l'inégalité de Hoffman-Spruck (th 3.4), on sait qu'il y a un compact K de M tel que l'on ait l'inégalité de Sobolev

$$c_n/2\ \left(\int_{M-K} |v|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_{M-K} |dv|^2(x),\ \forall v\in C_0^\infty(M-K).$$

Ces questions ont deux motivations, la première est de comprendre comment est le noyau de la chaleur d'une somme connexe de variété riemannienne. En effet, selon N. Varopoulos ([Va]), on sait qu'une inégalité de Sobolev est l'outil qui permet de majorer le noyau de la chaleur. Ainsi si on comprend comment recoller des inégalités de Sobolev, on pourra espérer comprendre comment majorer le noyau de la chaleur d'une somme connexe.

La seconde motivation provient de nos résultats à propos des formes harmoniques L^2. On verra dans la prochaine partie comment obtenir un résultat de finitude pour la dimension de l'espace des formes harmoniques L^2 à partir d'une inégalités de Sobolev. Et selon le théorème de J. Lott (th 1.3), on sait que si on recolle deux variétés dont les espaces de formes harmoniques L^2 sont de dimension finie, alors l'espace des formes harmoniques L^2 de la variété obtenue est aussi de dimension finie. Il est donc naturel de savoir comment les outils d'analyse qui permettent ces résultats de finitude se comporte par somme connexe.

On cherche donc une classe d'espaces fonctionnels qui se recollent bien par somme connexe : c'est la classe des espaces de Orlicz

Espace de Orlicz. — Le but de ce paragraphe est de présenter les espaces de Orlicz non-uniformes, nous renvoyons le lecteur à [Mu] pour plus de détail.

Dans toute cette partie, (M,Σ,μ) désigne un espace de Borel mesuré σ-fini.

Définitions. — Une fonction mesurable $\phi : \mathbf{R}_+ \times M \longrightarrow \mathbf{R}_+$ est une N-**fonction** si elle est localement essentiellement bornée et si pour tout $m \in M$ la fonction $t \mapsto \phi(t,m)$ est une fonction convexe réalisant une bijection croisssante de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$ et si la fonction $t \mapsto \frac{\phi(t,m)}{t}$ est croisssante et réalise une bijection croisssante de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$

On dit "N-fonction" pour "nice young function" , c'est à dire des fonctions convexes dont la fonctions conjuguée est définie sur $\mathbf{R}_+$. La fonction conjuguée d'une N-fonction ϕ est définie par

$$\varphi(t,m) = \sup_{x \geq 0} \left(xt - \phi(x,m)\right).$$

C'est aussi une N-fonction et si on note ϕ' la fonction dérivée à gauche de la fonction $t \mapsto \phi(t,m)$ alors la fonction dérivée à gauche de φ est définie par

$$\varphi'(t,m) = \inf\{y \in \mathbf{R}_+ \;/\; \phi'(y,m) > t\},$$

$$\text{et on a } \; \varphi(t,m) = \int_0^t \varphi'(s,m)ds.$$

On peut alors définir l'espace de Orlicz (non-uniforme) $L(\phi,\mu)$, c'est l'espace vectoriel suivant

$$L(\phi,\mu) = \{u : M \longrightarrow \mathbf{C} \text{ mesurable tel qu'il existe } \lambda > 0 \text{ avec } \int_M \phi\left(\frac{|u(m)|}{\lambda}, m\right) d\mu(m) < \infty\}/\sim \;,$$

où $\sim$ est la relation d'égalité presque partout, on norme alors cet espace avec l'une des deux normes suivantes

$$N_\phi(u) = \inf\{\lambda > 0, \; \int_M \phi\left(\frac{|u(m)|}{\lambda}, m\right) d\mu(m) \leq 1\}$$

$$\|u\|_\phi = \sup\{\int_M uv, \; \int_M \varphi(|v(m)|, m) d\mu(m) \leq 1\}.$$

Alors ces deux normes sont équivalentes, en fait on a les inégalités

$$\|u\|_\phi \geq N_\phi(u) \geq \|u\|_\phi/2 \;;$$

et ces normes font de $L(\phi,\mu)$ un espace de Banach et de plus

3.7. Proposition. — *$L(\phi,\mu)$ est constitué de fonctions localement intégrable.*

Exemples. —

i) Bien sur, les espaces L^p sont des exemples simples d'espaces de Orlicz, plus généralement si la fonction ϕ ne dépend pas de $m \in M$, on obtient un espace de Orlicz uniforme .
ii) Si f est une fonction mesurable positive localement essentiellement bornée sur M alors l'espace $L(t^p f(m),\mu)$ est isométrique à l'espace $L^p(M, f\mu)$.

iii) Un autre exemple, qui montre pourquoi on s'intéresse à ces espaces, est le suivant : si M est l'union disjointes des boreliens $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ (I fini), alors la fonction définie par

$$\phi(t,m) = t^{p_i} \text{ si } m \in \Omega_i$$

est une N-fonction pourvu que $p_i > 1$, $\forall i$; et l'espace de Orlicz obtenu est isomorphe à l'espace $\oplus_{i\in I} L^{p_i}(\Omega_i,\mu)$.

Ainsi les espaces de Orlicz non-uniformes permettent de découper et recoller des espaces de fonctions ; concernant les variétés riemanniennes non-compactes, ils seront le cadre naturel pour recoller différentes inégalités de Sobolev sur un voisinage de l'infini et aussi pour en obtenir une assez générale en recollant un certain aspect de la géométrie locale de la variété riemanienne. Notre résultat est le suivant ([C3])

3.8. THÉORÈME. — *Soit (M^n,g) une variété riemannienne complète non-parabolique telle que pour un compact $K \subset M$, chacunes des composantes connexes de $M - K = \coprod E_i$ vérifie une inégalité de Sobolev-Orlicz non-uniforme :*

$$N_{\phi_i}(u) \le \|du\|_{L^2(E_i)},\ \forall u \in C_0^\infty(E_i),$$

où les ϕ_i sont des N-fonctions, alors pour tout compact régulier $\tilde{K}$ contenant K dans son intérieur, on a l'inclusion de Sobolev suivante

$$H_0^1(M) \longrightarrow \bigoplus_i L(E_i - \tilde{K}, \phi_i) \oplus L^{\frac{2n}{n-2}}(\tilde{K}).$$

Un corollaire est le suivant

3.9. COROLLAIRE. — *Si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une imersion isométrique dont la courbure moyenne $|k|$ vérifie*

$$\int_M |k|^n < \infty$$

et si le volume de M est infini, alors (M^n,g) vérifie l'inégalité de Sobolev

$$S\ \left(\int_M |v|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{n}} \le \int_M |dv|^2(x),\ \forall v \in C_0^\infty(M).$$

Remarque. — En fait, la méthode ne permet pas d'obtenir une constante de Sobolev explicite.

Il s'avère qu'une inégalité de Sobolev-Orlicz est toujours vraie.

3.e. Une inégalité de Sobolev-Orlicz. — Nous avons obtenu, dans [C3], le résultat suivant

3.10. THÉORÈME. — *Soit (M^n,g) une variété riemannienne connexe, complète, supposons que pour un $x \in M$, le noyau de la chaleur P de (M,g) vérifie*

$$\int_1^\infty \left(\frac{P(t,x,x)}{t}\right)^{\frac{1}{2}} dt < \infty$$

alors si $\phi : \mathbf{R}_+ \times M \longrightarrow \mathbf{R}_+$ est la fonction définie par

$$\phi^2(\lambda, x) = P\left(\frac{1}{2\phi'^2(\lambda, x)}, x, x\right)$$
$$\phi(0, x) = 0$$

alors ϕ est une N-fonction et on a l'inégalité de Sobolev-Orlicz

$$N_{\phi^2}(u) \leq C\sqrt{\int_M |du|^2}, \ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

ceci pour une constante C universelle.

En fait, on peut aussi obtenir des inégalités à propos des normes $u \mapsto \|\Delta^s u\|_{L^p}$.

4. L^2-cohomologie et inégalités de Sobolev.

Le but de cette partie est de décrire comment on peut obtenir des résultats de finitude pour la dimension de l'espace des formes harmoniques L^2 grâce à une inégalité de Sobolev ; et de donner un lien entre topologie, formes harmoniques L^2 et géométrie à l'infini. Tout ceci repose sur la formule de Bochner-Weitzenböck :

4.a. la formule de Bochner-Weitzenböck. — Si $\Delta^k = d\delta + \delta d$ est le Laplacien de Hodge-deRham agissant sur les formes différentielles d'une variété riemannienne complète (M, g) ; alors nous avons

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M), \ \Delta^k\alpha = 0\},$$

de plus ce Laplacien admet la décomposition de Bochner-Weitzenbock suivante

$$\Delta^k = \bar{\Delta} + \mathcal{R}^k,$$

où $\bar{\Delta}$ est le Laplacien brut, c'est à dire c'est l'opérateur différentiel d'ordre deux symétrique construit à partir de la connexion de Leci-Civita ∇ et de la forme quadratique $\alpha \mapsto \int_M |\nabla\alpha|^2$; autrement dit $\bar{\Delta} = \nabla^*\nabla$, où ∇^* est l'opérateur adjoint à ∇. Et $\mathcal{R}^k$ est un endomorphisme symétrique de $\Lambda^k T^*M$, que l'on peut définir à l'aide de l'opérateur de courbure de (M^n, g) (cf [G-M]) ; par exemple $\mathcal{R}^1$ est l'endomorphisme associé au tenseur de Ricci, et nous avons toujours la minoration $\mathcal{R}^k \geq k(n-k)\rho$, où ρ est la plus petite valeur propre de l'opérateur de courbure ; de plus, on a $|\mathcal{R}^k|(x) \leq c(n)|R|(x)$ où R est le tenseur de courbure de (M, g). Un corollaire de cette formule est le suivant :

4.1. PROPOSITION. — *Si (M^n, g) est une variété riemannienne connexe complète de volume infini telle que $\mathcal{R}^k \geq 0$ alors $\mathcal{H}^k(M) = \{0\}$.*

Preuve. — En effet, si α est une forme harmonique L^2 de degré k, on peut justifier la formule d'intégration par partie

$$0 = <\alpha, \Delta^k\alpha> = \int_M |\nabla\alpha|^2 + <\mathcal{R}^k\alpha, \alpha> .$$

Ce qui montre que cette forme est forcément parallèle et donc sa norme ponctuelle est constante, l'hypothèse sur le volume implique donc que cette norme est nulle. ■

Lorsqu'on suppose que (M^n, g) vérifie une inégalité de Sobolev, on peut alors raffiner cette proposition :

4.2. PROPOSITION . — *Si (M^n, g) vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_\nu(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2\nu}{\nu-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{\nu}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et si on a

$$\|\mathcal{R}^k\|_{L^{\frac{\nu}{2}}} < \mu_\nu^{-1}$$

alors $\mathcal{H}^k(M) = \{0\}$.

Preuve. — Ceci repose sur l'inégalité de Kato i.e. si α est une forme différentielle lisse alors

$$|\nabla\alpha|(x) \geq |d|\alpha||(x).$$

Si α est une k-forme harmonique L^2, on se sert de la formule précédente

$$\int_M |d|\alpha||^2 \leq \int_M |\nabla\alpha|^2 = - < \mathcal{R}^k\alpha, \alpha > .$$

On utilise alors l'inégalité de Sobolev pour minorer le premier terme et l'inégalité de Hölder pour majorer le dernier terme et on obtient

$$\mu_\nu(M)\|\alpha\|^2_{L^{\frac{2\nu}{\nu-2}}} \leq \|\mathcal{R}^k\|_{L^{\frac{\nu}{2}}}\|\alpha\|^2_{L^{\frac{2\nu}{\nu-2}}},$$

ce qui conclut la preuve de cette proposition. ■

4.b. Un résultat de finitude. — Suivant la philosophie du résultat de J. Lott (th 1.3), l'intuition laisse supposer que si la courbure est de norme $L^{\nu/2}$ finie et que la variété vérifie la même inégalité de Sobolev alors les espaces de L^2-cohomologie sont de dimension finie. On peut en fait justifier ce raisonement heuristique ([C4]) :

4.3. THÉORÈME. — *Si (M, g) est une variété riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_\nu(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2\nu}{\nu-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{\nu}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et dont la courbure vérifie

$$\int_M |\mathcal{R}^k|^{\frac{\nu}{2}} < \infty$$

alors l'espace des k-formes harmoniques L^2 est de dimension finie. De plus, on a

$$\dim \mathcal{H}^k(M) \leq \frac{C(\nu, k)}{\mu_\nu} \int_M |\mathcal{R}^k|^{\frac{\nu}{2}} .$$

Avant de commenter ce résultat, nous donnons des exemples de variétés qui satisfont aux hypothèses de ce théorème :

i) Une variété riemannienne complète à courbure nulle au dehors d'un compact et dont le volume des boules géodésiques a un comportement uniformément équivalent à la fonction $(r \mapsto r^n)$ vérifie nos hypothèses pour $\nu = n$; en effet, pour ces variétés notre hypothèse sur la courbure est bien vérifiée, de plus selon T. Coulhon et L. Saloff-Coste, nous savons que pour les variétés à courbure de Ricci positive ou nulle sur un voisinage de l'infini, ce comportement uniforme du volume des boules géodésiques implique cette inégalité de Sobolev (en fait il y a même une équivalence, cf. [C-S]). Une telle variété a en fait un nombre fini de bout chaqu'un isométrique à un cone $\mathbf{R}^n - \mathbf{B}^n(r)/\Gamma$ où $\mathbf{B}^n(r)$ est la boule euclidienne de rayon r et où Γ est un sous-groupe fini de $O(n)$ agissant sans point fixe sur $\mathbf{S}^{n-1}$.

ii) On peut raffiner cet exemple, en supposant que la variété est quasi-isométrique à une telle variété et que la courbure est dans $L^{\frac{n}{2}}$.

iii) Une variété connexe, de volume infini, de dimension n isométriquement plongée dans un espace euclidien dont la seconde forme fondamentale de l'immersion est $n-$intégrable vérifie nos hypothèses pour $\nu = n$. En effet suivant la proposition (3.9), une telle variété vérifie l'inégalité de Sobolev puisque sa courbure moyenne est dans L^n ; de plus comme la courbure est majorée par un multiple universel de la seconde forme fondamentale, la courbure d'une telle variété est $n/2$-intégrable. Cependant remarquons que, appliquée à ce cadre, la majoration de la dimension de $\mathcal{H}^k(M)$ ne dit rien, puisque la constante de Sobolev n'est pas calculable à partir de $\int_M |II|^n$.

Les bornes sur la dimension reprennent essentiellement l'idée de P. Bérard et G. Besson ; dans [B-B], ils obtenaient une majoration d'invariants topologiques d'une variété compacte en fonction de la norme $L^{\frac{n}{2}}$ de la courbure. Ces estimations sont dit de Cwickel-Lieb-Rosenbljum, car en 1972, Rosenbljum obtient le résultat suivant ([Ro])

4.4. Théorème. — *Soit V une fonction $L^{\frac{n}{2}}$ sur $\mathbf{R}^n$ alors le nombre de valeurs propres strictement négatives de l'opérateur de Schrödinger $\Delta + V$ est majoré par*

$$C_n \int_{\mathbf{R}^n} V_-^{\frac{n}{2}}(x)dx,$$

où $V_- = (|V| - V)/2$ est la partie négative de V.

La constante C_n est très importante en mécannique quantique, cf [L] ; elle fut successivement améliorée par Cwickel ([Cw]) , E. Lieb ([L]) et P. Li- S.T. Yau ([L-Y]).

Je vais maintenant décrire la preuve du théorème 4.3 : grâce à l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de Kato, on montre que l'opérateur $\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{R}^k\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}$ est un opérateur continu de L^2 dans lui-même. Où $\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}$ est l'opérateur de L^2 sur H_0^1 défini à l'aide de la formule $\int_M |\nabla\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}\alpha|^2 = \int_M |\alpha|^2$, ceci pour tout $\alpha \in L^2$. On rappelle que l'espace $H_0^1(\Lambda^k T^*M)$ est défini comme étant le complèté de l'espace $C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)$ pour la norme $\alpha \mapsto \|\nabla\alpha\|_{L^2}$. De plus, on a la majoration de la norme de cet opérateur

$$\|\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{R}^k\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}\|_{L^2\to L^2} \leq \|\mathcal{R}^k\|_{L^{\frac{\nu}{2}}}/\mu_\nu.$$

Ainsi si $\mathbf{1}_R$ est la fonction caractéristique de la boule de centre x_0 fixé et de rayon R alors on a la limite en norme d'opérateur

$$\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{R}^k\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}} = \lim_{R\to\infty} \bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_R\mathcal{R}^k\mathbf{1}_R\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}.$$

On montre ensuite que les opérateurs $\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_R\mathcal{R}^k\mathbf{1}_R\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}$ sont compacts. Ainsi l'opérateur $\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{R}^k\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}$ est compact, et donc le noyau de $\mathrm{Id}_{L^2} + \bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{R}^k\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}$ est de dimension finie. On finit la preuve en montrant que l'application suivante

$$\sqrt{\bar{\Delta}} \,:\, \mathcal{H}^k(M) \longrightarrow \ker\{\mathrm{Id}_{L^2} + \bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{R}^k\bar{\Delta}^{-\frac{1}{2}}\},$$

est bien définie et est injective.

4.c. Toplogie et formes harmoniques L^2. — Une fois ce théorème établi, on se pose la question de savoir comment les espaces de formes harmoniques L^2 sont reliés à la topologie de (M^n, g). Nous commençons par un résultat sur le nombre de bouts ([C5]).

4.5. Proposition. — *Si (M, g) est une variété riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_\nu(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2\nu}{\nu-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{\nu}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

alors l'application naturelle $H_c^1(M) \longrightarrow \mathcal{H}^1(M)$ est injective.

Ceci a le corollaire suivant

4.6. Corollaire. — *Sous les hypothèses précédentes, si b est le nombre de bouts de M alors on a*

$$\dim \mathcal{H}^1(M) \geq b - 1.$$

En particulier, si

$$\int_M |\mathrm{ric}_-|^{\frac{\nu}{2}} < \infty$$

alors M a un nombre fini de bouts.

La preuve de la proposition est presque évidente : si α est une forme fermée à support compact dans D qui est nulle en cohomologie L^2, alors il existe une suite de fonctions $u_l \in C_0^\infty(M)$ telle que $\lim_{l\to\infty} \|\alpha - du_l\|_{L^2} = 0$, l'inégalité de Sobolev

$$\mu_\nu\left(\int_M |u|^{\frac{2\nu}{\nu-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{\nu}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

implique que la suite u_l est de Cauchy dans $L^{\frac{2\nu}{\nu-2}}$ et donc converge vers une fonction u, mais cette fonction u doit vérifier $du = \alpha$. Comme α est à support compact, u

est localement constante sur le complémentaire de D ; mais le volume des boules géodésiques de la variété est uniformément minoré ([C1]) et donc chaque bout de M^n a un volume infini et u est à suppport compact. Et α est cohomologue à 0 pour la cohomologie à support compact.

Remarque. — Ceci redémontre le résultat de [C-S-Z] qui affirme que si M est une sous-variété minimale d'un espace euclidien et si elle a au moins deux bouts elle possède une fonction harmonique d'énergie de Dirichlet bornée.

Ces arguments peuvent être poussés plus loin et l'on obtient ainsi le théorème suivant ([C5])

4.7. Théorème. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète, qui pour un $\nu > 4$, vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_\nu(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2\nu}{\nu-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{\nu}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et telle que son tenseur de courbure vérifie $\displaystyle\int_M |R(x)|^{\frac{\nu}{2}}dx < \infty,$

alors si D est un ouvert borné (à bord régulier) de M, nous avons la suite exacte

$$.. \longrightarrow H^k(D,\partial D) \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathcal{H}^k(M) \xrightarrow{\mathrm{j}^*} H^k_{(2)}(M-D) \xrightarrow{\mathrm{b}} H^{k+1}(D,\partial D) \longrightarrow ..$$

Décrivons un peu les homomorphismes i, j^*, b : i est l'application naturelle qui à une forme fermée lisse à support compact dans D associe sa classe de L^2-cohomologie, si $[\alpha] \in H^k(D,\partial D)$ alors

$$\mathrm{i}[\alpha] = \alpha \text{ modulo } \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}.$$

Puis j^* est l'homomorphisme de L^2-cohomologie induit par l'application

$$\mathrm{j} : M - D \longrightarrow M.$$

L'homorphisme cobord L^2 est plus "compliqué" à définir : soit $\alpha \in Z_2^k(M-D) \cap C_c^\infty(\Lambda^k T^*(M-D)$, il existe alors une k-forme lisse sur M , $\bar\alpha$, telle que $\bar\alpha = \alpha$ sur $M-D$ et telle que $d\bar\alpha = 0$ sur un voisinage de $M-D$. Alors $d\bar\alpha$ est une forme fermée à support compact dans D et la classe de $d\bar\alpha$ dans $H^{k+1}(D,\partial D) \simeq H_c^{k+1}(D)$ ne dépend que de la classe de L^2 cohomologie de α. Ensuite si $\beta \in Z_2^k(M-D)$, alors on définit $\mathrm{b}[\beta] = [d\bar\alpha]$ où α est n'importe quel représentant lisse de la classe de L^2-cohomologie de β. Ainsi b est la composée de l'application naturelle $H_2^k(M-D) \longrightarrow H^k(M-D)$ et du morphisme de cobord en cohomologie de deRham $H^k(M-K) \longrightarrow H_c^{k+1}(D)$.

Remarque. — En fait, cette suite est toujours exacte pour la L^2-cohomologie non-réduite. En particulier, lorsque 0 n'est pas dans le spectre essentiel du Laplacien de Hodge-deRham, alors cette suite est vrai, puisque dans ce cas L^2-cohomologie réduite et non-réduite coincident. Par exemple, selon Donnelly-Xavier ([D-X]), sur une variété à courbure -1 hors d'un compact, de volume fini et de dimension paire, zéro n'est pas dans le spectre essentiel du Laplacien de Hodge-deRham ; et donc cette suite exacte a lieu. Cependant les variétés qui satisfont à nos hypothèses ont 0 dans le spectre esssentiel du Laplacien de Hodge-deRham (pourvu que le volume croisse polynômialement).

la preuve de ce théorème repose essentiellement sur deux ingrédients :

Le premier est l'existence d'un noyau de Green i.e. d'un opérateur continu

$$G : L^2(\Lambda T^*M) \longrightarrow H_0^1(\Lambda T^*M),$$

tel que si $\alpha \in L^2(\Lambda T^*M)$ alors

$$\alpha = h(\alpha) + dG(\alpha) + \delta G(\alpha).$$

Le second est le suivant si α est dans l'espace de Sobolev $H_0^1(\Lambda T^*M)$, qui vérifie

$$\Delta^k \alpha = \bar{\Delta}\alpha + \mathcal{R}^k \alpha \in C_0^\infty$$

alors α est L^2.

C'est pour prouver ce second fait que l'hypothèse sur la dimension de l'inégalité de Sobolev apparait. Cette condition est à rapprocher au fait que dans $\mathbf{R}^n$, $n > 4$, l'équation $(\Delta + V)u = 0$, pour V à support compact n'a pas de solution demi-bornée. Autrement dit le pôle en $\zeta = 0$ de la résolvante $(\Delta + V - \zeta)^{-1}$ provient uniquement de fonctions propres L^2.

Le premier fait est une conséquence du fait que l'opérateur $(d + \delta)$: $H_0^1(\Lambda T^*M) \longrightarrow L^2(\Lambda T^*M)$ est Fredholm, i.e. son noyau est de dimension finie, son image est fermée et de codimension finie. Nous reviendrons plus tard sur ce fait qui est le début d'une généralisation de ces travaux.

Il y a aussi un autre ingrédient : sous les hypothèses du théorème, la L^2-cohomologie réduite du complémentaire de D est de dimension finie. Pour cela, on identifie, cet espace à un sous-espace des formes harmoniques L^2 sur la variété double $(M - D)\#_{\partial D}(M - D)$. Plus exactement, on a

$$\mathcal{H}_n^k(M - D) \simeq \{\alpha \in \mathcal{H}^k((M - D)\#_{\partial D}(M - D)), \sigma^*\alpha = \alpha\},$$

où σ est la symétrie par rapport à ∂D qui échange les deux parties. A priori, la somme connexe de ces deux copies de $(M - D)$ est uniquement munie d'une métrique Lipschitz, c'est suffisant pour définir l'opérateur δ et donc on peut parler de formes harmoniques. Et comme, les espaces de L^2-cohomologie sont des invariants de quasi-isométries, si on lisse la métrique dans un voisinage de ∂D, la dimension des espaces de formes harmoniques L^2 ne change pas ; la courbure de la variété riemannienne lisse obtenue sera toujours dans $L^{\frac{\nu}{2}}$, et grâce au corollaire (3.9), l'inégalité de Sobolev aura encore lieu sur cette variété, ainsi le théorème montre que la L^2-cohomologie de cette variété est de dimension finie.

4.d. Formules de Gauss-Bonnet. — Cette suite exacte a de nombreuses applications, elles sont décrites dans [C5]. La première est la formule suivante pour la caractéristique d'Euler L^2 :

4.8. THÉORÈME . — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète qui vérifie les mêmes hypothèses qu'au théorème (4.7) alors si D est un ouvert borné de M on a*

$$\chi_{L^2}(M,g) = \chi(D,\partial D) + \chi_{L^2}(M-D,g).$$

Et un corollaire de cette formule est un théorème de l'indice relatif

4.9. COROLLAIRE. — *Soient (M_1^n, g_1) et (M_2^n, g_2) deux variétés riemanniennes complètes qui vérifient les mêmes hypothèses qu'au théorème (4.7) alors s'il existe D_1 (resp. D_2) un domaine compact de M_1 (resp. M_2) tel que $(M_1 - D_1, g_1)$ soit isométrique à $(M_2 - D_2, g_2)$ alors*

$$\chi_{L^2}(M_1,g_1) - \chi_{L^2}(M_2,g_2) = \int_{D_1} \Omega^{g_1} - \int_{D_2} \Omega^{g_2}.$$

M. Gromov et B. Lawson avaient démontré un tel résultat pour des opérateurs de Dirac sur des variétés non-compactes, complètes dont le potentiel courbure, qui apparait dans la formule de Bochner-Weitzenbock, est uniformément strictement positif sur un voisinage de l'infini ([G-L]); en fait comme l'a montré H. Donnely, le fait que le bas du spectre essentiel de l'opérateur de Dirac soit strictement positif suffit pour avoir une formule de l'indice L^2-relatif ([D]). Cependant, d'une part les variétés que nous considèrons ont, généralement, un bas du spectre essentiel nul, et d'autre part, lorsque le bas du spectre essentiel du Laplacien de Hodge-deRham est strictement positif, on sait que cette suite est exacte. De ce résultat, nous pouvons en déduire la formule de Gauss-Bonnet L^2 suivante qui généralise les travaux de N. Borisov, W. Müller, R. Schrader et J. Brüning sur les variétés asymptotiquement euclidiennes ([B-M-S], [B]) :

4.10. THÉORÈME. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 5$ dont le tenseur de courbure R vérifie*

$$\int_M |R(x)|^{\frac{n}{2}} dx < \infty,$$

et s'il existe un compact D de M tel que chaque composante connexe de $M - D$ soient quasi-isométrique au complémentaire d'une boule euclidienne de $\mathbf{R}^n$ alors

$$\chi_{L^2}(M,g) = \int_M \Omega^g.$$

En fait, ce résultat est aussi vrai pour $n \geq 3$. Pour prouver ce résultat, il suffit de montrer que si g est une métrique sur $\mathbf{R}^n$ quasi-isométrique à la métrique euclidienne et si $\int_{\mathbf{R}^n} |R^g|^{\frac{n}{2}} < \infty$ alors

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Omega^g = 0 \ ;$$

Ceci est en fait une conséquence des travaux de K. Ulhenbeck ; dans [U], elle montre que forcément cette intégrale est un entier et que l'on peut déformer "continûment" la connexion de Levi-Civita vers une connexion plate à l'infini ; "continûment" veut dire continue pour une topologie qui assure que $\nabla \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} \Omega(\nabla)$ est continue et donc reste constant ici.

4.e. Calcul d'espaces de L^2-cohomologie.

Une telle suite exacte peut aussi être utile pour calculer la L^2-cohomologie des variétés dont on connait la cohomologie L^2 à l'infini, par exemple

4.11. THÉORÈME. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne connexe de dimension $n \geq 5$ telle qu'il existe un compact D de M tel que chacune des b composantes connexes de $M - D$ soit quasi-isométrique au complémentaire d'une boule euclidienne de $\mathbf{R}^n$ alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k(M) &\simeq H_c^k(M) \text{ si } 0 \leq k \leq n-2 \\ \mathcal{H}^{n-1}(M) &\simeq H_c^{n-1}(M) \oplus \mathbf{R}^{b-1} \\ \mathcal{H}^n(M) &= \{0\}. \end{aligned}$$

Ceci est aussi vrai pour $n \geq 3$, et cela repose sur le calcul de la L^2-cohomologie du complémentaire d'une boule euclidienne de $\mathbf{R}^n$ ([C4]) :

4.12. LEMME. — *Soit $R > 0$ alors si $*$ est l'opérateur de dualité de Hodge, on a*

$$\begin{aligned} H_2^k(\mathbf{R}^n - \mathbf{B}^n(R)) &= \{0\} \text{ si } k \neq (n-1) \\ H_2^{n-1}(\mathbf{R}^n - \mathbf{B}^n(R)) &= \mathbf{R}\,\frac{*dr}{r^{n-1}}\,. \end{aligned}$$

A la suite de ces résultats, il apparait deux questions :

La première est de savoir dans quel cadre géométrique plus général, ces résultats sont encore vrais. Par exemple, ces résultats de finitude et de suite exacte sont ils encore vrais pour les variétés plates au voisinage de l'infini ?

La seconde est de comprendre comment ces résultats peuvent s'étendre à d'autres opérateurs elliptiques sur une variété non-compacte.

Je vais maintenant décrire comment une réponse à la seconde question permet de résoudre une partie de la première.

5. Les opérateurs de type Dirac non-paraboliques à l'infini :

Les opérateurs que nous considérons sont les opérateurs de type Dirac :

5.a. Les opérateurs de type Dirac . — Soit $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de type Dirac sur une variété riemannienne (M, g), i.e. D est un opérateur différentiel d'ordre 1 symétrique et le carré du symbole principal de D est la métrique g

$$\sigma(D)^2(x, \xi) = g(\xi, \xi)\,\mathrm{Id}_{E_x},\ \xi \in T_x^*M.$$

On rappele que le symbole principal de D est défini par la relation

$$D(f\tau)(x) = f(x)(D\tau)(x) - i\sigma(x, df(x))\tau, \;\; f \in C^\infty(M), \;\; \tau \in C^\infty(E), \;\; x \in M.$$

Des exemples. —

i) Sur $\mathbf{R}$ euclidien, l'opérateur

$$i\frac{d}{dt} : C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \longrightarrow C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$$

est un opérateur de type Dirac.

ii) Si (M, g) est une variété riemannienne alors l'opérateur de Gauss-Bonnet, $d + \delta : C_0^\infty(\Lambda T^*M) \longrightarrow C_0^\infty(\Lambda T^*M)$, est un opérateur de type Dirac.

iii) L'opérateur de Dirac d'une variété spin est de type Dirac.

iv) Si D est un opérateur de type Dirac et si V est une section lisse du fibré des endomorphismes symétriques de E i.e $V : x \in M \mapsto V(x) \in \mathrm{End}(E_x)$, alors $D + V$ est encore un opérateur de type Dirac.

Alors si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de type Dirac, E est un $Cl(M)$-module, en effet pour chaque $x \in M$, le symbole principal de D induit une application

$$\begin{aligned} T_x^*M \times E &\longrightarrow E \\ (\xi, \tau) &\mapsto -i\,\sigma(x, \xi)\tau = \xi.\tau. \end{aligned}$$

Cette application vérifie $v.(w.\tau) + w.(v.\tau) = -2g(v, w)\tau$, ainsi elle se prolonge donc uniquement à l'algèbre de Clifford de (T_xM, g) soit à $Cl_x(M)$. Et selon Ackermann et Tolksdorf ([A-T]), il existe une connexion orthogonale sur E

$$\nabla : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(T^*M \otimes E),$$

telle que $D\tau = \sum_{i=1}^n e_i.\nabla_{e_i}\tau$ où $\{e_i\}_i$ est un repère orthonormé local (ceci ne dépend pas du repère choisi).

Lorsque la connexion est compatible avec la structure de $Cl(M)-$module de E alors on dit que D est un opérateur de Dirac généralisé ; i.e. la connexion vérifie

$$\nabla_u(v.\tau) = (\nabla_u v).\tau + v.\nabla_u\tau, \;\; \forall u, v \in C^\infty(TM), \;\; \forall \tau \in C^\infty(E).$$

Où on a noté ∇ la connexion de Levi-Civita de M. Les opérateurs de Gauss-Bonnet et, sur une variété spin, l'opérateur de Dirac sont des opérateurs de Dirac généralisés. Et les opérateurs de Dirac généralisés satisfont à une identité de Bochner-Weitzenböck-Lichnerovicz :

5.1. THÉORÈME. — *Si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de Dirac généralisé alors*

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \mathcal{R},$$

où $\mathcal{R}(x)$ est un endomorphisme symétrique de E_x construit à l'aide des opérateurs de courbure de E et de TM.

Remarque. — Par exemple. la formule de Lichnerowicz dit que pour l'opérateur de Dirac d'une variété spin , le terme en potentiel-courbure $\mathcal{R}$ est l'homothétie $\mathrm{scal}_g(x)\,\mathrm{Id}_{E_x}/4$.

Comme on l'a fait pour l'opérateur de Gauss-Bonnet, on commence par rappeler le cas des variétés compactes sans bord.

5.b. Cas des variétés compactes. — Par définition, un opérateur de type Dirac est elliptique et la théorie standart de ces opérateurs nous apprend que

5.2. THÉORÈME. — *Si $D\ :\ C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de type Dirac sur un variété riemannienne compacte alors*

$$\dim\{\tau \in L^2(E),\ D\tau = 0\} < \infty\ .$$

Mieux, en fait l'opérateur $D\ :\ H^1(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm.

Que la variété soit compacte ou non, on définit l'espace $H^1(E)$ comme le complété de l'espace $C_0^\infty(E)$ pour la norme $\sigma \mapsto \left(\|\sigma\|_{L^2}^2 + \|D\sigma\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$. Lorsque la variété est complète, c'est aussi l'espace des sections L^2 de E, dont l'image par D est encore dans L^2, c'est à dire que c'est le domaine de D considéré comme opérateur non-borné agissant sur L^2. Cet espace est un sous-espace de $H^1_{loc}(E)$.

En fait, par régularité elliptique, on a forcément $\{\tau \in L^2(E),\ D\tau = 0\} \subset C^\infty(E)$. Ainsi dans le cas compact, la condition L^2 ne dit rien, on la garde ici pour faire le parallèle avec le cas non-compact.

On rappele qu'un opérateur borné est un opérateur de Fredholm si son noyau et son conoyau sont de dimension finie et si son image est fermée ; i.e. si E et F sont des espaces de Hilbert alors $T\ :\ E \longrightarrow F$ est Fredholm si et seulement si

i) $\dim\ker T < \infty$ et $\dim\ker T^* < \infty$

ii) $\overline{\mathrm{Im}\,T} = \mathrm{Im}\,T$.

Par exemple, un opérateur bijectif est Fredholm. A un opérateur de Fredholm entre deux espaces de Hilbert, on associe son indice

$$\mathrm{ind}\,T = \dim\ker T - \dim\left((\mathrm{Im}\,T)^\perp\right) = \dim\ker T - \dim\ker T^*.$$

Et on a la propriété fondamentale suivante

5.3. THÉORÈME. — *Si*

$$\begin{aligned} &[0,1] \longrightarrow \mathcal{L}(H_1, H_2)\\ &s \mapsto T_s \end{aligned}$$

est une famille continue d'opérateurs Fredholm, alors

$$\mathrm{ind}\,T_s = \mathrm{C^{te}}.$$

En fait on a même mieux : deux opérateurs de Fredholm peuvent être joints par une courbe continue d'opérateurs de Fredholm si et seulement si ils ont même *indice. i.e si on note $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm de E dans F alors* $\operatorname{ind} : \pi_0(\mathcal{F}(E,F)) \longrightarrow \mathbf{Z}$ *est un isomorphisme.*

Par exemple, un opérateur de Fredholm d'indice nul est homotope à l'identité. En fait l'espace des opérateurs de Fredholm est un ouvert de l'espace des opérateurs bornés.

5.c. Indice des opérateurs de type Dirac sur une variété compacte sans bord. — Lorsque M est compact sans bord, D est Fredholm de H^1 dans L^2, cependant son indice est nul, car D est auto-adjoint ($D = D^*$). Désormais, nous considèrons uniquement des variétés orientés et on supposera que le fibré E admet la décomposition orthogonale $E = E^+ \oplus E^-$ et que D se décompose en

$$\begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} : C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-).$$

On dira que $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gradué. On a $(D^+)^* = D^-$ puisque qu'on suppose D symétrique. Alors $D^+ : H^1(E^+) \longrightarrow L^2(E^-)$ est Fredholm et c'est l'indice de D^+ qui est intéressant :

$$\operatorname{ind} D^+ = \dim\{\sigma \in L^2(E^+),\ D^+\sigma = 0\} - \dim\{\sigma \in L^2(E^-),\ D^-\sigma = 0\}.$$

Exemple. — L'opérateur de Gauss-Bonnet, $D = d + \delta$ agissant sur les formes différentielles, envoie les formes de degré pair sur celles de degré impair :

$$d + \delta : C^\infty(\Lambda^{2\bullet}T^*M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{2\bullet+1}T^*M)$$

et son indice est égale à la caractéristique d'Euler de M

$$\sum_k (-1)^k \dim\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M),\, d\alpha = \delta\alpha = 0\} = \chi(M).$$

Le fait que D^+ soit Fredholm montre que si on le déforme dans la classe des opérateurs elliptiques, son indice ne change pas. Par exemple, l'indice de l'opérateur de Gauss-Bonnet ne dépend pas de la métrique, résultat que l'on connait déjà grâce au théorème de Hodge-deRham. On peut donc se demander si, comme dans le cas de l'opérateur de Gauss-Bonnet, il n'y a pas une formule topologique pour cet indice. Cette question fut posée par Gelfand et la réponse est donnée par le théorème d'Atiyah-Singer

5.4. Théorème . —

$$\operatorname{ind} D^+ = \int_M \alpha_{D^+}$$

où la forme caractéristique de D^+, α_{D^+}, est une forme différentielle (une classe de cohomologie) s'exprimant localement à l'aide des courbures de E et de M.

Par exemple, pour l'opérateur de Gauss-Bonnet

$$\alpha_{d+\delta} = \Omega^g = \operatorname{Pfaff}(\frac{\mathcal{R}}{2i\pi}),$$

où $\mathcal{R}$ est l'opérateur de courbure.

De façon similaire aux questions posées précédemment à propos de la L^2-cohomologie, on peut se demander ce qui serait encore vrai dans le cas des variétés non-compactes.

5.d. Les opérateurs de type Dirac Fredholm sur leurs domaines. La question est la suivante, si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de type Dirac $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -gradué sur une variété riemanienne complète alors quand est-ce que

$$D : H^1(E) \longrightarrow L^2(E)$$

est Fredholm et que peut-on dire de l'indice de D^+ : $\mathrm{ind}_{L^2} D^+ = \dim\ker_{L^2} D^+ - \dim\ker_{L^2} D^-$?

On sait que $D : H^1(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm si et seulement si 0 n'est pas dans le spectre essentiel de D (ou de D^2), i.e. si le spectre de D autour de 0 est constitué de valeurs propres isolées et chacune de multiplicité finie.

La première étude générale est due à Gromov et Lawson ; dans [G-L], les auteurs montrent

5.5. THÉORÈME. — *Si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de Dirac généralisé et si il y a un compact K de M tel que la plus petite valeur propre $\mathcal{R}_-$ du terme en potentiel courbure $\mathcal{R}$ appparaissant dans la formule de Bochner-Weitzenböck-Lichnerovicz vérifie*

$$\inf_{x \notin K} \mathcal{R}_-(x) > 0$$

alors $D : H^1(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm. De plus si $D_0 : C^\infty(M_0, E_0) \longrightarrow C^\infty(M_0, E_0)$ est un opérateur de Dirac généralisé qui est isométrique à $D|_{M-K}$ au dehors d'un compact $K_0 \subset M_0$ alors

$$\mathrm{ind}_{L^2} D^+ - \mathrm{ind}_{L^2} D_0^+ = \int_K \alpha_{D_1^+} - \int_{K_0} \alpha_{D_0^+} .$$

Ce résultat, connu sous le nom de théorème de l'indice relatif, fut généralisé à tout les opérateurs de Dirac généralisés par H. Donnely ([D], et aux opérateurs de type Dirac par N. Anghel ([A1]), . La philosophie de ce résultat est que si on change la variété et l'opérateur sur un compact alors l'indice change de la même quantité que si on avait déformé de la même façon une variété compacte. Autrement dit, l'indice d'un opérateur de type Dirac Fredholm sur son domaine est la somme d'une contribution locale donnée par la formule de Atiyah-Singer et d'une contribution de l'infini. Une caractérisation des opérateurs de type Dirac Fredholm sur leur domaine a été donné par N. Anghel ([A1])

5.6. THÉORÈME. — *Si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de type Dirac alors $D : H^1(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm si et seulement si il existe un compact K de M et une constante strictement positive Λ tel que*

$$\Lambda \|\sigma\|_{L^2} \le \|D\sigma\|_{L^2},\ \forall \sigma \in C_0^\infty(M-K, E).$$

5.e. La notion de non-parabolicité. — Ces résultats intéressants ne sont pas assez généraux ; par exemple, dans [B-M-S], Borisov-Müller-Schrader montrent un théorème de l'indice relatif pour les variétés asymptotiquement euclidiennes et l'opérateur de Gauss-Bonnet ; dans ce cadre le spectre essentiel de l'opérateur est $\mathbf{R}$; un autre exemple est celui des variétés hyperboliques à l'infini et de volume fini, alors selon Donnely et Xavier ([D-X]), en dimension paire l'opérateur de Gauss-Bonnet est Fredholm sur son domaine mais pas en dimension impaire. Remarquons que nous avons le fait suivant

5.7. Théorème. — *Si (M,g) vérifie, pour un $\nu > 4$, l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_\nu(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2\nu}{\nu-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{\nu}} \leq \int_M |du|^2(x)dx, \ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et si la courbure de (M,g) vérifie $R \in L^{\frac{\nu}{2}}$ alors

$$d+\delta \ : \ H_0^1(\Lambda T^*M) \longrightarrow L^2(\Lambda T^*M)$$

est Fredholm.

C'est par exemple le cas des variétés asymptotiquement euclidiennes. Qu'est ce qui change par rapport aux résultats précédents ? On a l'inclusion $H^1 \subset H_0^1$ mais ces deux espaces ne sont pas égaux. On rappele que l'espace $H_0^1(\Lambda T^*M)$ est le complèté de $C_0^\infty(\Lambda T^*M)$ muni de la norme $\alpha \mapsto \|\nabla\alpha\|_{L^2}$. L'inégalité de Sobolev assure que cet espace s'injecte continûment dans H^1_{loc}, i.e que l'inclusion de $C_0^\infty(\Lambda T^*M)$ dans H^1_{loc} se prolonge par continuité à H_0^1. Dans [C6], on a introduit une notion qui permet de généraliser le théorème (5.7) et les résultats qui vont avec :

5.8. Définition. — Un opérateur de type Dirac $D \ : \ C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est non-parabolique à l'infini si et seulement si il existe un espace de Hilbert $W(E)$ tel que

i) $C_0^\infty(E)$ est dense dans $W(E)$.

ii) L'injection $C_0^\infty(E) \longrightarrow H^1_{loc}(E)$ se prolonge par continuité à $W(E)$.

iii) $D \ : \ W(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm (en particulier continue).

De façon similaire au résultat de N. Anghel, on a ([C6])

5.9. Proposition . — *Soit $D \ : \ C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ un opérateur de type Dirac sur une variété riemannienne (M^n,g), D est non-parabolique à l'infini si et seulement si il existe un compact K de M tel que pour tout ouvert U relativement compact dans $M-K$, il existe une constante strictement positive $C(U)$ telle que*

$$C(U)\,\|\sigma\|_{L^2(U)} \leq \|D\sigma\|_{L^2(M-K)}, \ \forall \sigma \in C_0^\infty(M-K,E).$$

C'est ce qui justifie l'appellation non-parabolique à l'infini . En effet, cette proposition signifie qu'au dehors d'un compact (i.e. à l'infini) la forme quadratique $\sigma \mapsto \|D\sigma\|$ vérifie les estimées de non-parabolicité du théorème (3.2). Nous avons même une autre caractérisation qui ressemble à une des caractérisation des variétés riemanniennes non-paraboliques ([C6]) :

5.10. PROPOSITION. — *Un opérateur de type Dirac $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ sur une variété riemannienne complète (M,g) est non-parabolique à l'infini si et seulement si il existe un compact K de M tel que si l'on complète $C_0^\infty(E)$ avec la norme*

$$N_K(\sigma) = \sqrt{\|\sigma\|^2_{L^2(K)} + \|D\sigma\|^2_{L^2(M)}},$$

afin d'obtenir $W(E)$ alors l'injection $C_0^\infty(E) \longrightarrow H^1_{loc}(E)$ se prolonge par continuité à $W(E)$.

Ces équivalences montrent qu'il n'y a qu'un seul espace de Sobolev vérifiant les propriétés i-ii-iii) de (5.8). Aussi, on a les inclusions $H^1(E) \subset W(E) \subset H^1_{loc}$, et donc une solution L^2 à l'équation $D\sigma = 0$ est en fait dans W, ainsi :

5.11. COROLLAIRE . — *Si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est non-parabolique à l'infini alors*

$$\dim\{\tau \in L^2(E),\ D\tau = 0\} < \infty\ .$$

Avant de décrire comment on peut obtenir des formules pour l'indice de $D^+ : W(E) \longrightarrow L^2(E)$, je vais donner quelques exemples qui, je l'espère, montre l'intérêt de cette notion.

5.f. Exemples. — Le premier exemple est celui des opérateurs Fredholm sur leur domaine, par exemple ceux étudiés par Gromov-Lawson. Ceux-ci peuvent se généraliser ainsi

5.12. THÉOÈME ([C6]). — *Si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de Dirac généralisé et si le terme en potentiel courbure $\mathcal{R}$ appparaissant dans la formule de Bochner-Weitzenböck-Lichnerovicz est positif ou nul au dehors d'un compact alors D est non-parabolique à l'infini . De plus si la variété (M,g) est non-parabolique alors $D : H^1_0(E) \longrightarrow L^2(E)$ est Fredholm.*

Par exemple, si (M,g) est une variété riemannienne à courbure nulle hors d'un compact alors l'opérateur de Gauss-Bonnet est non-parabolique à l'infini ; en particulier l'espace des formes harmoniques L^2 est de dimension finie.

Grâce à l'inégalité de Sobolev (3.10) on peut obtenir

5.13.THÉORÈME ([C6]). — *Il existe une constante universelle C telle que si (M,g) est une variété riemannienne complète, dont $(P(t,x,y))_{(t\in\mathbf{R}_+,\,x,y\in M)}$ est le noyau de l'opérateur de la chaleur et si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de Dirac généralisé sur M dont le terme $\mathcal{R}$ en potentiel courbure apparaisant dans la formule de Bochner-Weitzenbock vérifie*

$$\int_M \mathcal{R}_-(x)\left(\int_{\frac{C}{\mathcal{R}_-(x)}}^\infty \sqrt{\frac{P(s,x,x)}{s}}ds\right)^2 dx < \infty,$$

alors

$$D : H_0^1(E) \longrightarrow L^2(E)$$

est Fredholm.

Un corollaire de ce théorème est le théorème (5.7) sans aucune autre condition sur ν que d'être plus grand que 2 ; en effet, l'inégalité de Sobolev implique la majoration suivante du noyau de la chaleur

$$P(t,x,x) \leq C(\mu_\nu,\nu)/t^{\frac{\nu}{2}},\ \forall (t,x) \in]0,\infty[\times M.$$

Une autre classe d'exemple est donnée dans [C7] à propos des variétés qui sont un produit tordu à l'infini :

5.14. THÉORÈME . — *Si (M^n,g) est une variété riemannienne dont un voisinage de l'infini est isométrique au produit tordu $(\mathbf{R}_+ \times \Sigma, dr^2 + f^2(r)g)$ où la fonction f vérifie l'une des deux propriétés suivantes*

i) $\lim_{r\to\infty} f'(r) = 0$,

ii) $f(r) = ar$, *pour* $r > 1$

alors l'opérateur de Gauss-Bonnet est non-parabolique à l'infini . De plus si dans ces cas là, la variété est spin alors l'opérateur de Dirac est non-parabolique à l'infini .

5.g. Variétés à bout cylindrique et indice étendu. — Un cas particulier de ce théorème, sur lequel il est bon de s'attarder un peu, est celui où (M,g) est à bout cylindrique : i.e. il existe un compact K de M tel que $(M-K,g)$ soit isométrique au produit riemannien $\mathbf{R}_+ \times \partial K$ et où l'opérateur de type Dirac $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ respecte cette géométrie. C'est à dire que la métrique de $E|_{M-K}$ ne dépend pas de la distance à ∂K ; et sur $\mathbf{R}_+ \times \partial K$, D prend la forme suivante

$$D = n.\left(\frac{\partial}{\partial r} + A\right),$$

où $n.$ est la multiplication de Clifford par la normale extérieure à $\{r\} \times \partial K$ et A est un opérateur elliptique auto-adjoint sur $E|_{\partial K}$.

Ces opérateurs ont été étudiés par Atiyah-Patodi-Singer, dans [A-P-S], ils faisaient une analyse très poussée de ces opérateurs, cela leurs permettait d'obtenir une formule pour la signature d'une variété compacte à bord. Décrivons un peu l'espace de Sobolev W associé à un tel opérateur :

5.15. PROPOSITION . —

$$W = \{\tau \in H^1_{loc}(E),\ D\tau \in L^2,\ (1+\rho)^{-1}\tau \in L^2\},$$

où $\rho(x) = \mathrm{dist}(x,K)$.

Ensuite passons aux solutions de l'équation $\{D\sigma = 0,\ \sigma \in W\}$. Grâce à la décomposition spectrale de l'opérateur A, on écrit

$$L^2(\partial K, E) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp} A} \mathbf{C}\varphi_\lambda,$$

où

$$A\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda,$$
$$\int_{\partial K} |\varphi_\lambda|^2 = 1.$$

Une solution de l'équation $D\sigma = 0$ admet au-dessus de $\mathbf{R}_+ \times \partial K$ la décomposition en série de Fourier suivante :

$$\sigma(y,\theta) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} A} c_\lambda e^{-\lambda y}\varphi_\lambda(\theta) \ .$$

La caractérisation de l'espace W montre que $\sigma \in W$ si et seulement si $c_\lambda = 0,\ \forall\lambda < 0$. Or c'est exactement ce que Atiyah-Patodi-Singer nomment solutions étendues de l'équation $D\sigma = 0$. C'est pourquoi lorsque $D\,:\,C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-)$ sera un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini , on nommera indice étendu les indices de

$$D\,:\,W(E) \longrightarrow L^2(E)$$
$$D^+\,:\,W(E^+) \longrightarrow L^2(E^-).$$

i.e.

$$\mathrm{ind}_e\, D = \dim\{\sigma \in W(E),\ D\sigma = 0\} - \dim\{\sigma \in L^2(E),\ D^-\sigma = 0\}.$$

De plus, on a vu que $\ker_{L^2} D \subset \ker_W D$, on a donc $\mathrm{ind}\, D = \dim\left(\ker_W D/\ker_{L^2} D\right) = h_\infty(D)$. On peut définir de même

$$h_\infty(D^{\pm}) = \dim\left(\frac{\ker_W D^{\pm}}{\ker_{L^2} D^{\pm}}\right).$$

ceci permet de relier indice étendu et indice L^2

$$\mathrm{ind}_e\, D^+ = h_\infty(D^+) + \mathrm{ind}_{L^2} D^+ = h_\infty(D^+) + \dim\ker_{L^2} D^+ - \dim\ker_{L^2} D^-.$$

Remarquons qu'il est impropre de parler d'indice L^2 puisque celui ci ne correspond pas à l'indice d'un opérateur Fredholm.

Dans l'exemple des opérateurs de type Dirac sur une variété riemannienne à bout cylindrique, en reprenant les notations ci-dessus, on a

Une solution de l'équation $D\sigma = 0$ est dans W si et seulement si au dessus de $M - K$, on a

$$\sigma = \sum_{\lambda \geq 0} c_\lambda e^{-\lambda y}\varphi_\lambda(\theta) \ .$$

Et cette solution est dans L^2 si et seulement si $c_0 = 0$.

Ainsi dans ce cadre là, l'espace quotient $\ker_W D/\ker_{L^2} D$ s'interprète comme l'espace des valeurs à l'infini des solutions étendues.

6. Indice des opérateurs de type Dirac non-parabolique à l'infini :

Le but de cette partie est de présenter les résultats d'analyse de [C7] qui permettent de calculer l'indice d'un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini . On ne fera pas de preuve mais on illustrera chaque résultat par le cas des opérateurs de type Dirac sur une variété à bout cylindrique.

6.a. L'opérateur de Dirac-Neuman. — Dans toute cette partie, on suppose que $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini et que $K \subset M$ est un compact à bord lisse hors duquel on a les estimées suivantes : pour tout ouvert U relativement compact dans $M - K$, il existe une constante strictement positive $C(U)$ telle que

$$C(U)\,\|\sigma\|_{L^2(U)} \leq \|D\sigma\|_{L^2(M-K)},\ \forall \sigma \in C_0^\infty(M-K,E). \tag{6.1}$$

On notera $\Sigma = \partial K$ et $\Omega = M - K$. Le premier résultat est que l'on peut résoudre le problème de Dirichlet extérieur :

6.2. THÉORÈME. — *Si $\sigma \in C^\infty(\Sigma, E)$ alors il existe un unique $\mathcal{E}(\sigma) \in \mathbf{C}^\infty(\Omega, E) \cap W(E)$ tel que*

$$\begin{cases} \Delta\mathcal{E}(\sigma) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \mathcal{E}(\sigma) = \sigma & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

Remarque. — $W(\Omega, E)$ est défini comme le sous-espace de $H^1_{loc}(\bar\Omega, E)$ formé des sections qui ont une extension dans $W(M,E)$. C'est aussi le complèté de $C_0^\infty(\bar\Omega, E)$ pour la norme

$$N(\sigma) = \sqrt{\|\sigma\|^2_{H^{1/2}(\Sigma)} + \int_\Omega |D\sigma|^2}\ .$$

Exemple. — Traitons le cas d'un opérateur de type Dirac sur une variété à bout cylindrique : on a $\Omega =]0,\infty[\times\Sigma$ et $D = n\left(\frac{\partial}{\partial r} + A\right)$ et $D^2 = \Delta = -\frac{\partial}{\partial r^2} + A^2$. Si $\{\phi_\lambda\}_{\lambda\in\mathrm{Spec}A}$ est une base orthonormée diagonalisant A alors si $\sigma = \sum_\lambda c_\lambda\phi_\lambda$, on a

$$\mathcal{E}(\sigma)(r,\theta) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}A} c_\lambda e^{-|\lambda| r}\phi_\lambda(\theta),\ (r,\theta)\in\mathbf{R}_+\times\Sigma.$$

A partir de ce théorème, on fait la remarque élémentaire suivante : si $\sigma \in C^\infty(\Sigma,E)$ alors l'extension harmonique de $D\mathcal{E}(\sigma)|_\Sigma$ est $D\mathcal{E}(\sigma)$, en effet $D^2 D\mathcal{E}(\sigma) = 0$. Ceci permet de définir l'opérateur de Dirac-Neumann T_Ω : $C^\infty(\Sigma,E) \longrightarrow C^\infty(\Sigma,E)$ par

$$T_\Omega(\sigma) = D(\mathcal{E}\sigma)|_{\partial\Omega}$$

alors nous avons le résultat fondamental suivant :

6.3. THÉORÈME. — *$T_\Omega \circ T_\Omega = 0$ et T_Ω est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 et son symbole principal est*

$$\sigma(T_\Omega)(x,\xi) = -n.|\xi| + i\xi,\ \xi \in T_x^*(\partial\Omega)\,,$$

où n est la normale intérieure à $\partial\Omega$ en x.

Dans notre exemple. — $T_\Omega = n(A - |A|)$ où $|A|$ est l'opérateur pseudo-différentiel définit par $|A| = \sqrt{A^2} = \int_0^\infty e^{-tA^2} dt/\sqrt{\pi t}$. En effet, on a

$$T\left(\sum_\lambda c_\lambda \phi_\lambda\right) = \sum_\lambda n.(-|\lambda| + \lambda) c_\lambda \phi_\lambda.$$

Ceci est à rapprocher des résultats concernant l'opérateur de Neumann $\mathcal{N}$ qui à une fonction lisse, sur le bord d'une variété riemannienne compacte à bord N, associe la dérivée normale de son extension harmonique :

$$\mathcal{N}f = \frac{\partial}{\partial n}\mathcal{E}f, \text{ avec } \Delta\mathcal{E}(f) = 0, \text{ sur } N, \text{ et } \mathcal{E}(f) = f \text{ sur } \partial N.$$

Il est bien connu que l'opérateur de Neumann est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 ([H],[T]); la preuve du théorème (6.3) consistera essentiellement à se ramener au cas de l'opérateur de Neuman.

Ce résultat montre aussi que T_Ω définit un complexe elliptique et donc l'espace quotient

$$\{\sigma \in C^\infty(\Sigma, E),\ T_\Omega = 0\}/T_\Omega(C^\infty(\Sigma, E))$$

est de dimension finie.

Dans notre exemple, on a

$$\ker T_\Omega = \oplus_{\lambda \geq 0} \mathbf{C}\phi_\lambda \ ;\ \operatorname{Im} T_\Omega = \oplus_{\lambda > 0} \mathbf{C}\phi_\lambda.$$

En effet, l'hypothèse que A et D soient symétriques implique que $nA + An = 0$. Dans cet exemple, on a donc $\ker T_\Omega / \operatorname{Im} T_\Omega \simeq \ker A$. En fait, le noyau de T_Ω s'identifie, via restriction au bord, à l'espace des solutions à l'équation $D\sigma = 0$, $\sigma \in W(\Omega, E)$ alors que l'image de T_Ω s'identifie à l'espace des solutions à l'équation $D\sigma = 0$, $\sigma \in L^2(\Omega, E)$. En fait ceci est tout à fait général

6.4. THÉORÈME. — *Par restriction à Σ, on a les isomorphismes entre*

$\{\sigma \in C^\infty(\Omega, E) \cap W,\ D\sigma = 0\}$ et $\{\sigma \in C^\infty(\Sigma, E),\ T_\Omega \sigma = 0\}$;
$\{\sigma \in C^\infty(\Omega, E) \cap L^2,\ D\sigma = 0\}$ et $T_\Omega\left(C^\infty(\Sigma, E)\right)$.

La première identification est immédiate avec le principe suivant dit de continuation unique : *Si $\sigma \in C^\infty(\bar{\Omega}, E)$ vérifie $D\sigma = 0$ et $\sigma|_\Sigma = 0$ alors $\sigma = 0$.*

La seconde nécéssite de recourrir au travaux de Calderon-Seeley ([Ca]-[P]-[S]) sur les valeurs au bord des solutions de l'équation $D\sigma = 0$, $\sigma \in L^2(\Omega, E)$.

6.b. Formules de l'indice. — On va ici donner différentes formules de l'indice pour un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gradué $D : C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-)$. Comme dans le paragraphe précédent, on suppose que $K \subset M$ est un compact à bord lisse hors duquel on a les estimées (6.1) ; on note de même $\Omega = M - K$. Nous commençons par faire quelques remarques :

La première est que l'on peut résoudre le problème de Dirichlet intérieur : si $\sigma \in C^\infty(\Sigma, E)$ alors il existe un unique $\mathcal{E}(\sigma) \in C^\infty(K, E) \cap H^1$ tel que

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{E}(\sigma) = 0 \text{ sur } K \\ \mathcal{E}(\sigma) = \sigma \qquad \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

Ceci permet de définir un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 : $T_K : C^\infty(\Sigma, E) \longrightarrow C^\infty(\Sigma, E)$. Et le symbole principal de T_K est

$$\sigma(T_K)(x, \xi) = n.|\xi| + i\xi, \ \xi \in T_x^*(\Sigma),$$

où n est la normale unitaire de Σ rentrante dans Ω et sortante de K.

La deuxième remarque est que comme E et D sont $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gradués, alors les opérateurs de Dirac-Neuman aussi i.e.

$$\begin{pmatrix} 0 & T_K^- \\ T_K^+ & 0 \end{pmatrix} : C^\infty(\Sigma, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(\Sigma, E^+ \oplus E^-).$$

On peut alors identifier l'indice étendu de D et de D^+ grâce aux identifications (6.4) ; i.e on a les identifications $\ker T_\Omega \cap \ker T_K \simeq \ker_W D$ et $\mathrm{Im}\, T_K \cap \mathrm{Im}\, T_\Omega \simeq \ker_{L^2} D$. On a donc

$$\mathrm{ind}_e\, D = \dim \ker T_\Omega \cap \ker T_K - \dim \mathrm{Im}\, T_K \cap \mathrm{Im}\, T_\Omega,$$

et on a une formule similaire pour l'indice étendu de D^+. De plus, les opérateurs $n.T_\Omega$ et $n.T_K$ sont autodjoints, en effet on peut justifier l'intégration par parties :

$$\int_\Sigma (nT_\Omega \sigma, \tau) = \int_\Omega (D\mathcal{E}(\sigma), D\mathcal{E}(\tau)), \ \forall \sigma, \tau \in C^\infty(\Sigma, E).$$

Ainsi on a $(\ker T_\Omega)^\perp = n\, \mathrm{Im}\, T_\Omega$ et $(\ker T_K)^\perp = n\, \mathrm{Im}\, T_K$. Nous savons que la multiplication de Clifford par la normale $n : E \longrightarrow E$ est un isomorphisme donc

$$\dim\big(\mathrm{Im}\, T_K \cap \mathrm{Im}\, T_\Omega\big) = \dim\big(\mathrm{Im}\, nT_K \cap \mathrm{Im}\, nT_\Omega\big) = \dim\left((\ker T_\Omega)^\perp \cap (\ker T_K)^\perp\right).$$

On arrive donc aux formules :

$$\mathrm{ind}_e\, D = \dim \ker T_\Omega \cap \ker T_K - \dim\left((\ker T_\Omega)^\perp \cap (\ker T_K)^\perp\right),$$
$$\mathrm{ind}_e\, D^+ = \dim \ker T_\Omega^+ \cap \ker T_K^+ - \dim\left((\ker T_\Omega^+)^\perp \cap (\ker T_K^+)^\perp\right).$$

Ces indices peuvent être réinterprétés comme des indices de paires de Fredholm.

Paires de Fredholm. — Rappellons qu'un couple (H_1, H_2) de sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert est une paire de Fredholm si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

i) $\dim(H_1 \cap H_2) < \infty$,

ii) $H_1 + H_2$ est fermé et $\dim(H_1^\perp \cap H_2^\perp) < \infty$.

Dans ce cas on note $\mathrm{ind}(H_1, H_2) = \dim(H_1 \cap H_2) - \dim\left(H_1^\perp \cap H_2^\perp\right)$ l'indice de cette paire de Fredhlom. Si on note P_i le projecteur orthogonal sur H_i, alors

$(1-P_2)P_1 \ : \ H_1 \longrightarrow H_2^{\perp}$ est Fredholm et $\operatorname{ind}((1-P_2)P_1 : H_1 \longrightarrow H_2) = \operatorname{ind}(H_1, H_2)$. Nous avons la proposition suivante:

6.5. LEMME. — *Pour tout réel s,* $(\ker_{H^s} T_K, \ker_{H^s} T_\Omega)$ *et* $(\ker_{H^s} T_K^+, \ker_{H^s} T_\Omega^+)$ *forment des paires de Fredholm. Et donc*

$$\operatorname{ind}_e D = \operatorname{ind}(\ker_{H^s} T_K, \ker_{H^s} T_\Omega)$$

et

$$\operatorname{ind}_e D^+ = \operatorname{ind}(\ker_{H^s} T_K^+, \ker_{H^s} T_\Omega^+).$$

6.6. Remarques. — Remarquons que le projecteur orthogonal P sur $\ker T_\Omega$ est un opérateur pseudo-différentiel et que c'est un projecteur de Calderòn puisque son symbole principal est

$$\sigma(P^+)(x,\xi)u = \frac{1}{2}\left(1 + ni\frac{\xi}{|\xi|}\right).u, \ \xi \in T_x^*\Sigma, \ u \in E_x^+.$$

Par exemple, sur une variété à bout cylindrique, ce projecteur est le projecteur spectral de A sur les espaces propres associés aux valeurs propres positives ou nulles.

Dans le cas des variétés compactes, ce résultat (6.5) fût conjecturé par Bojarski [Bo], et prouvé par Booss-Wojciechowski [B-W].

Les paires de Fredholm ont de nombreuses propriétés, nous renvoyons au livre de Booss-Wojciechowski [B-W] et à l'article de Avron-Seiler-Simon [A-S-S] . On a par exemple

6.8. THÉORÈME. — *Soit* (H_1, H_2) *et* (H_2, H_3) *des paires de Fredholm, si on note* P_i *le projecteur orthogonal sur* H_i*, et si les opérateurs* $P_1 - P_2$ *et* $P_2 - P_3$ *sont compacts alors* (H_1, H_3) *est une paire de Fredholm et on a*

$$\operatorname{ind}(H_1, H_3) = \operatorname{ind}(H_1, H_2) + \operatorname{ind}(H_2, H_3).$$

Ce théorème a de nombreuses conséquences, la première est que le théorème de l'indice étendu relatif a lieu :

6.9. THÉORÈME. — *Soient deux opérateurs de type Dirac non-paraboliques à l'infini*

$$D_1 \ : \ C^\infty(M_1, E_1) \longrightarrow C^\infty(M_1, E_1), \ D_2 \ : \ C^\infty(M_2, E_2) \longrightarrow C^\infty(M_2, E_2)$$

$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *gradués et isométriques à l'infini, c'est à dire qu'il existe deux compacts* $K_1 \subset M_1$ *et* $K_2 \subset M_2$ *et une isométrie* $\iota \ : \ (M_1 - K_1, g_1) \longrightarrow (M_2 - K_2, g_2)$ *qui induit une isométrie graduée entre les fibrés et telle que*

$$D_1 \circ \iota^* = \iota^* \circ D_2, \text{ au dessus de } M_2 - K_2.$$

alors on a

$$\operatorname{ind}_e D_1^+ - \operatorname{ind}_e D_2^+ = \int_{K_1} \alpha_{D_1^+} - \int_{K_2} \alpha_{D_2^+},$$

où on a noté $\alpha_{D_i^+}$ est la forme caractéristique construite à l'aide du symbole principale de D_i^+.

Nous pouvons alors grâce à la discussion de 5.g relier les indices L^2 des deux opérateurs D_1^+ et D_2^+ :

6.10. COROLLAIRE. —

$$\mathrm{ind}_{L^2} D_1^+ - \mathrm{ind}_{L^2} D_2^+ = \int_{K_1} \alpha_{D_1^+} - \int_{K_2} \alpha_{D_2^+} - \big(h_\infty(D_1^+) - h_\infty(D_2^+)\big)\,,$$

où $h_\infty(D_i^+)$ est la dimension de l'espace $\ker_W D_i^+ / \ker_{L^2} D_i^+$, i.e. la dimension de l'espace des valeurs à l'infini des solutions à l'équation $\{D_i^+\sigma = 0,\ \sigma \in W\}$.

Selon U. Bunke lorsque les fibrés et les variétés riemanniennes sont à géométries bornées, alors cette différence entre les dimensions de l'espace des valeurs à l'infini pourrait s'interpréter comme un indice de scattering entre les opérateurs D_1^2 et D_2^2 ([B1]). Il serait intéressant de mieux comprendre ceci, afin de rendre calculable ces dimensions. Ceci a été fait par W. Müller dans le cas des variétés à bouts cylindriques ; pour cela dans [M], l'auteur a utilisé les résulats de L. Guillope à propos de la théorie spectrale de ces variétés ([G]).

Nous avons aussi les formules pour l'indice étendu de D :

6.11. THÉORÈME. — *Si $D : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E)$ est un opérateur de type Dirac non-parabolique à l'infini et Ω est un voisinage de l'infini à bord lisse sur lequel les estimées (6.1) ont lieu alors*

$$\mathrm{ind}_e D = \frac{1}{2} \dim \frac{\ker T_\Omega}{\operatorname{Im} T_\Omega} = \dim \frac{\ker T_\Omega^+}{\operatorname{Im} T_\Omega^-} = \dim \frac{\ker T_\Omega^-}{\operatorname{Im} T_\Omega^+}.$$

Ce résultat est la généralisation d'un résultat d'Atiyah-Patodi-Singer qui montraient que dans le cas d'un opérateur sur une variété riemannienne à bout cylindrique, la dimension de l'espace des valeurs à l'infini des solutions étendues est égale à la dimension du noyau de A^+ (la partie paire de la partie tranversale de l'opérateur, [A-P-S]); en effet $\ker T_\Omega^+ / \operatorname{Im} T_\Omega^-$ s'identifie à $\ker \big(T_\Omega^+ + (T_\Omega^-)^*\big)$, et dans ce cadre l'opérateur $T_\Omega^+ + (T_\Omega^-)^*$ est précisement $4\,A^+$. On a ainsi exprimer l'indice étendu de l'opérateur en fonction d'un complexe elliptique sur une hypersurface, dans l'esprit cela ressemble aux résultats de [Cl], [A2], [B2] et [Ra]. Avec la même méthode, on déduira la formule suivante des travaux de Atiyah-Patodi-Singer [A-P-S] :

6.12. THÉORÈME. — *Soit $D : C^\infty(M, E^+ \oplus E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+ \oplus E^-)$ un opérateur de type Dirac sur une variété M qui est non-parabolique à l'infini ; on suppose que K est un compact hors duquel on a les estimées (6.1) et on suppose qu'un voisinage de ∂K est isométrique au produit riemannien $]-\varepsilon, \varepsilon[\times \partial K$ et qu'au dessus de ce voisinage le fibré E et l'opérateur D respecte cette géométrie, en particulier sur ce voisinage $D \simeq n.(\frac{\partial}{\partial r} + A)$, où $A : C^\infty(\partial K, E) \longrightarrow C^\infty(\partial K, E)$*

est un opérateur de type Dirac alors

$$\operatorname{ind}_e D^+ = \int_K \alpha_{D^+} - \frac{\eta_{A^+}(0) + \dim \ker A^+}{2} + \operatorname{ind}(\mathcal{H}_{\leq 0}, \ker T^+_{M-K}),$$

où

a) α_D *est la forme caractéristique définie par le symbole principal de* D^+.

b) $\eta_{A^+}(0)$ *est la valeur en 0 de l'extension méromorphe de*

$$\eta_{A^+}(s) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp} A^+} \operatorname{sign} \lambda |\lambda|^{-s},$$

en fait, cette extension est holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re} s > -1/2$,

c) $\mathcal{H}_{\leq 0}$ *est le sous-espace vectoriel de* $L^2(\partial K, E^+)$ *engendré par les espaces propres de* A^+ *associés aux valeurs propres négatives ou nulles de* A^+.

En fait, si on note $H^1(K, E^+, \ker T^+_\Omega)$ l'espace des sections de $E^+|_K$ qui sont dans H^1 et dont la valeur au bord est dans le noyau de T^+_Ω, alors il est toujours vrai que $D^+ : H^1(K, \Omega, \ker T^+_\Omega) \longrightarrow L^2(K, E^-)$ est Fredholm et son indice est précisément l'indice étendu de D^+.

7. Applications à la L^2-cohomologie.

On va ici exposer comment nos résultats à propos des opérateurs de type Dirac non-paraboliques à l'infini permettent d'obtenir des liens entre la topologie, la géométrie à l'infini et les espaces de formes harmoniques L^2. Ces résultats sont prouvés dans [C8].

7.a. Propriétés. — Supposons ici que (M, g) est une variété riemannienne complète dont l'opérateur de Gauss-Bonnet est non-parabolique à l'infini , notons $W(\Lambda T^*M)$ l'espace de Sobolev défini par la condition de non-parabolicité. On a alors la décomposition de Hodge-deRham

$$L^2(\Lambda^k T^*M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus dW(\Lambda^{k-1}T^*M) \oplus \delta W(\Lambda^{k+1}T^*M).$$

Et il y a un opérateur de Green continu $G : L^2(\Lambda T^*M) \longrightarrow W(\Lambda T^*M)$ tel que si $\alpha \in L^2(\Lambda T^*M)$ alors

$$\alpha = h(\alpha) + dG(\alpha) + \delta G(\alpha).$$

De plus si α est faiblement fermé alors $\delta G(\alpha) = 0$ et si α est faiblement cofermé alors $dG(\alpha) = 0$.

7.b. Conséquences sur la topologie. —

7.1. Proposition. — *Si l'opérateur de Gauss-Bonnet est non-parabolique à l'infini alors* M *a un nombre fini de bouts, mieux en fait*

$$\dim H^1_c(M) < \infty.$$

Nous pouvons alors obtenir une suite exacte de la même façon que précédement :

7.2. THÉORÈME. — *Si l'opérateur de Gauss-Bonnet d'une variété riemannienne complète est non-parabolique à l'infini et si $h_\infty(d+\delta)=0$ alors si D est un ouvert borné (à bord régulier) de M, nous avons la suite exacte*

$$(7.3) \qquad .. \longrightarrow H^k(D,\partial D) \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathcal{H}^k(M) \xrightarrow{\mathrm{j}^*} H^k_{(2)}(M-D) \xrightarrow{\mathrm{b}} H^{k+1}(D,\partial D) \longrightarrow ..$$

Remarques. —

i) Bien évidement, la condition de non-parabolicité ne dépend que de la géométrie de l'infini, en particulier D est un ouvert borné (à bord régulier)de M, alors l'opérateur de Gauss-Bonnet de la somme connexe $(M-D)\#_{\partial D}(M-D)$ est encore non-parabolique à l'infini . Ainsi, les espaces de L^2-cohomologie réduite de $M-D$ sont de dimension finie.

ii) D'après le théorème 6.11, la condition $h_\infty(d+\delta)=0$ équivaut à la suivante
$$\{\alpha \in L^2(\Lambda T^*(M-D)) \cap C^\infty, d\alpha=\delta\alpha=0\} =$$
$$\{\alpha \in W(\Lambda T^*(M-D)) \cap C^\infty, d\alpha=\delta\alpha=0\}.$$
Ce qui équivaut à la condition suivante : si $\alpha \in W(\Lambda T^*M)$, vérifie $(d+\delta)\alpha \in C_0^\infty(\Lambda T^*M)$ alors $\alpha \in L^2$. Cette condition est très proche d'un des ingrédients de la preuve du théorème 4.7.

7.c. Applications. — Ce résultat a deux applications :

7.4. THÉORÈME. — *Il y a une constante $C(n)$ telle que si (M^n,g) est une variété riemannienne complète dont le tenseur de courbure R et dont le noyau de la chaleur $(P(t,x,y))_{((t,x,y)\in\mathbf{R}_+^*\times M\times M)}$ vérifient*

$$\int_M |R|^2(x)\left(\int_{\frac{C(n)}{|R|(x)}}^\infty \sqrt{P(t,x,x)}dt\right)^2 dx < \infty$$

alors la suite exacte (7.3) a lieu.

Ceci généralise le théorème 4.7, puisque pour les variétés considérées au théorème 4.7, on a la majoration suivante du noyau de la chaleur $P(t,x,x) \leq Ct^{-\nu/2}, \forall x \in M,\ \forall t>0$. Ce dernier résultat s'applique par exemple à une variété riemannienne (M^n,g) plate hors d'un compact et dont chaque bout B vérifie $\mathrm{rang}\pi_1(B) \leq n-4$. En fait, on a mieux

7.5. THÉORÈME. — *Si (M^n,g) est une variété riemannienne complete dont la courbure s'annule au dehors d'un compact et si pour chaque bout B de M on a $\mathrm{rang}\,\pi_1(B) \leq n-3$, alors la suite exacte (7.3) a lieu.*

Grâce aux travaux de Eshenburg-Schroeder [E-S], on peut décrire un peu la géométrie de ces variétés : tout d'abord, une telle variété a un nombre fini de bouts $B_1,...,B_b$. Soit B un tel bout, on peut le choisir de telle façon que le revêtement universel de B soit le produit riemannien $\mathbf{R}^l \times \left(\mathbf{R}^{n-l}-\mathbf{B}^{n-l}(r)\right)$, où $l=\mathrm{rang}\pi_1(B)$ et où on a noté $\mathbf{B}^{n-l}(r)$ la boule euclidienne de rayon r dans

$\mathbf{R}^{n-l}$. Ainsi, on peut voir le groupe $\pi_1(B)$ comme un sous-groupe du groupe des isométries de $\mathbf{R}^l \times \mathbf{S}^{n-l-1}$, i.e

$$\pi_1(B) \subset \mathrm{Isom}(\mathbf{R}^l) \times O(n-l) = (\mathbf{R}^l.O(l)) \times O(n-l).$$

Notons $\vec{\Gamma}(B)$ l'image de $\pi_1(B)$ dans $O(l)$ via la projection $(\mathbf{R}^l.O(l)) \times O(n-l) \longrightarrow O(l)$. On a alors la formule de Gauss-Bonnet suivante

7.6. Théorème. — *Si (M^n, g) est une variété riemannienne complète orientée de dimension paire, dont la courbure s'annule au dehors d'un compact et si pour chaque bout B de M on a* $\mathrm{rang}\pi_1(B) \leq n-3$, *alors*

$$\chi_{L^2}(M) = \int_M \Omega^g + \sum_{B \text{ bout de } M} q(B),$$

où $q(B)$ est ainsi défini:

Si $\mathrm{rang}\,\pi_1(B) = 0$, *alors* $q(B) = \frac{1}{|\pi_1(B)|} - 1$

Si $\mathrm{rang}\,\pi_1(B) = l > 0$ *alors*

$$q(B) = \frac{(-1)^{l-1}}{|\vec{\Gamma}(B)|} \sum_{\gamma \in \vec{\Gamma}(B)} \det(\gamma - \mathrm{Id}).$$

8. Bibliographie

[A-T] T. Ackermann, J. Tolksdorf. — *The generalized Lichnerowicz formula and analysis of Dirac operator*, J. reine angrew. Math, **471** (1996), 23–42.

[A] A. Ancona. — *Théorie du potentiel sur des graphes et des variétés*, Lectures Notes n°1427, 1990.

[An] M. Anderson. — *L^2-harmonic forms on complete Riemannian manifolds*, Geometry and Analysis on manifolds (Katata/Kyoto, 1987), p 1–19, Lectures Notes in Math. n°1339, Springer Berlin-New-York, 1988.

[A1] N. Anghel. — *An abstract index theorem on non-compact riemannian manifolds*, Houston J. Math., **19:2** (1993), 223–237.

[A2] N. Anghel. — *On the index of Callias type operators*, GAFA, **3(5)** (1995), 432–438.

[At] M.F. Atiyah. — *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, Soc. Math. France, Astérisque, **32,33** (1976), 43–72.

[A-P-S] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer. — *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **77** (1975), 43–69.

[A-S-S] J. Avron, R. Seiler, B. Simon. — *The index pair of projections*, J. Funct. Anal., **120,n°2** (1994), 220–237.

[B-B] P. Bérard, G. Besson. — *Number of ground states and estimates on some geometric invariants*, J. Funct. Anal., **94, n.2** (1990), 375–396.

[Bo] B. Bojarski. — *The abstract linear conjugation problem and Fredholm pairs of subspaces*, In Memoriam I.N. Vekua, Tbilisi,pp 45–60, 1979.

[B-W] B. Booss, K. Wojciechowski. — *Elliptic boundary problems for Dirac Operators*, Birkhauser, Boston, 1993.

[B-M-S] N.V. Borisov, W. Müller, R. Schrader. — *Relative index theorems and supersymmetric scattering theory*, Comm. math. Phys., **114** (1988), 475–513.

[Br] J. Brüning. — *L^2-index theorems on a certain complete manifold*, J. Differential Geometry , **32** (1990), 491–532.

[B-L] J. Brüning, M. Lesch. — *Hilbert complexes*, J. Funct. Anal., **108** (1992), 88–132.

[B1] U. Bunke. — *Relative Index theory*, J. Funct. Anal., **105** (1992), 63–76.

[B2] U. Bunke. — *A K-Theoretic relative Index Theorem and Callias-type Dirac operator*, Math. Ann., **303, n°2** (1995), 241–279.

[Ca] A. P. Calderón. — *Boundary value problems for ellipic equations*, Outlines of the Joint Soviet-American Symposium on Partial Differential Equations, Novosibirsh, 1963.

[Cl] C. Callias. — *Axial Anomalies and index theorems on open spaces*, Commun. Math. Phys., **62** (1978), 213–234.

[C-S-Z] H.D. Cao, Y. Shen, S. Zhu. — *The structure of stable minimal hypersurfaces in $\mathbf{R}^{n+1}$*, Math. Res. Lett., **4** (1997), n°5, 637–644.

[C1] G. Carron. — *Inégalités de Faber-Krahn et conséquences*, "Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de M. Berger", collection SMF Séminaires et Congrès, n°1, 1994.

[C2] G. Carron. — *Inégalité de Hardy sur les variétés riemanniennes*, J. Math. Pures Appli., **76** (1997), 883–891.

[C3] G. Carron. — *Inégalités de Sobolev-Orlicz non-uniformes*, Colloq. Math., **77** (1998), n°2,163–178.

[C4] G. Carron. — *L^2-cohomologie et inégalités de Sobolev*, prépublication n°306 de l'institut J. Fourier, à paraître dans Math. Ann., 1994.

[C5] G. Carron. — *Une suite exacte en L^2-cohomologie*, Duke Math. J., **95, n°2** (1998), 343-372.

[C6] G. Carron. — *Un théorème de l'indice relatif*, Prépublication n°196 de l'ENS Lyon, 1996.

[C7] G. Carron. — *Théorèmes de l'indice sur les variétés non-compactes*, Prépublication n°218 de l'ENS Lyon, 1997.

[C8] G. Carron. — *L^2-cohomology and Sobolev's inequalities*, Prépublication n°227 de l'ENS Lyon, 1998.

[Cn] P.E. CONNOR. — *The Neumann problem for differential forms on Riemannian manifold*, Mem. Amer. Math. Soc. n°20, 1956.

[Co1] T.COULHON. — *Inégalités de Gagliardo-Nirenberg pour les semigroupes d'opérateurs et applications*, Potential Analysis, **1** (1992), 343–353.

[Co2] T.COULHON. — *Itération de Moser et estimation Gaussienne du noyau de la chaleur*, Jour. Oper. Th., **29** (1993), 157–165.

[Co-S] T. COULHON, L. SALOFF-COSTE. — *Isopérimétrie pour les groupes et les variétés*, Rev. Mat. Iberoamericana, **9** (1993), n°2, 293–314.

[C] G. COURTOIS. — *Sperctrum of manifolds with holes*, J. Funct. Anal., **134, n°2** (1995), 194–221.

[Cw] W. CWIKEL. — *Weak type of estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators*, Ann. Math., **106** (1977), 93–100.

[D-P] E.B. DAVIES, M. PANG. — *Sharp heat kernel bounds for some Laplace operators*, Quart. J. Math. Oxford, **Ser. 2, 40** (1989), 281–290.

[dR] G.DE RHAM. — *Variétés différentiables*, Herman, Paris, 1960.

[Do] J.DODZIUK. — *L^2-harmonic form on rotationnaly symmetric Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., **77** (1979), 395–400.

[D] H. DONNELY. — *Essential spectrum and heat kernel*, J. Funct. Anal., **75** (1987), 362–381.

[D-X] H. DONNELY, F. XAVIER. — *On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifold*, Amer. J. Math., **106** (1984), 169–185.

[D-S] G. DUFF, D.C. SPENCER. — *Harmonic Tensors on Riemannian Manifolds with boundary*, Ann. of Math. Stud., **56, n°1** (1952), 115–127.

[E-F] J.S. ESCOBAR, A. FREIRE. — *The differential form spectrum of manifold of positive curvature*, Duke J. Math., **69** (1993), 1–42.

[E-S] J.H. ESCHENBURG, V. SCHROEDER. — *Riemannian Manifolds with flat ends*, Math. Z. , **196** (1987), 573–589.

[G-M] S. GALLOT, D. MEYER. — *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J. Math. Pures Appli., **54** (1975), 259–284.

[G-P-Z] R.E. GREENE, P. PETERSEN, S. ZHU . — *Riemannian Manifolds of faster than quadratic curvature decay*, I.M.R.N., **n°9** (1994), 363–377.

[G-L] M. GROMOV, H.B. LAWSON. JR. — *Positive scalar curvature and the Dirac operator on a complete Riemannian manifold*, Publ. Math. I.H.E.S., **58** (1983), 83–196.

[G] L. GUILLOPE. — *Théorie spectrale de quelques variétés à bouts*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **22** (1989), 137–160.

[H-S] D. HOFFMAN, J.SPRUCK. — *Sobolev and isoperimetric inequalities for*

Riemannian submanifolds, Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974), 7156–727.

[H] L. Hörmander. — *The analysis of linear partial differential oprator, Vol III*, Springer-Verlag, New-York, 1985.

[Hu] A. Huber. — *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv., **32** (1957), 13–72.

[L-Y] P. Li, S.T. Yau. — *On the schrödinger equation and the eigenvalue problem*, Comm. Math. Phys., **88** (1983), n°3, 309–318.

[L] E. Lieb. — *The number of bound states of one-body schrödinger operator and the Weyl problem*, Proc. Sym. Pure math, **36** (1980), 241–252.

[Lo] J. Lott . — *L^2-cohomologie of geometrically infinite hyperbolic 3-manifolds*, Geom. Funct. Anal., **7** (1997), 81–119.

[Ma] R. Mazzeo. — *The Hodge cohomology of a conformally compact metric*, J. Differential Geom., **28, n°2** (1988), 309–339.

[M-S] J. Michael, L. Simon. — *Sobolev and mean value inequalities on generalized submanifold of $\mathbf{R}^n$*, Comm. Pure Appl. Math., **26** (1973), 361–379.

[M] W. Müller. — *L^2-index and resonances*, Geometry and Analysis on manifolds (Katata/Kyoto, 1987), p 203–211, Lectures Notes in Math. n°1339, Springer Berlin-New-York, 1988.

[Mu] J. Musielak. — *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, L. N. in Math n°1034, Springer, 1983.

[P] R. Palais. — *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Annals of Math. Studies, 1965.

[Ra] J. Rade. — *Callias'Index theorem, Elliptic Boundary conditions amd cutting and Gluing*, Commun. Math. Phys. , **161** (1994), 51–61.

[R] J. Roe. — *An index theorem on open manifolds I, II* , J. Differential Geometry, **27** (1988), 87-113,115-136.

[Ro] G. Rosenbljum. — *Distribution of the discrete spectrum of singular operator*, Dokl. Aka. Nauk SSSR, **202** (1972), 1012–1015.

[S] R.T. Seeley. — *Singular integral and boundary value problems*, Amer. J. Math. , **88** (1966), 781–809.

[Si] A. Sikora. — *Sharp pointwise estimates on heat kernels* , Quart. J. Math. Oxford, **Ser. 2, 47** (1996), 371–382.

[T] M. E.Taylor. — *Partial Differential Equations II*, Applied Mathematical Sciences n°116, Springer, 1996.

[U] K. Uhlenbeck. — *The Chern-Classes of Sobolev connections*, Comm. math. Phys., **101** (1985), 449–457.

[Va] N. Varopoulos. — *Hardy-Littlewood theory for semigroups*, J. Funct. Anal., **63, n°2** (1985), 240–260.