Analyse 2

Gilles Carron, Université de Nantes

6 juillet 2018

Table des matières

1 Les séries : 5

1.1 Sur la convergence des suites de Cauchy 5
1.2 Définitions 7
1.2.1 Définitions et notations 7
1.2.2 Quelques exemples 8
1.2.3 Une remarque générale 11
1.2.4 Opération sur les séries 11
1.3 Quelques séries de références 12
1.3.1 Les séries géométriques 12
1.3.2 Les séries de Riemann 13
1.4 Séries à termes généraux positifs 14
1.4.1 Une remarque générale 14
1.4.2 Comparaison et convergence 17
1.4.3 Critère de convergence 19
1.4.4 Avertissement 22
1.5 Séries absolument convergentes 23
1.5.1 Définition 23
1.5.2 Quelques critères 24
1.5.3 Exemples 25
1.6 Les séries alternées 25
1.6.1 Critère de convergence 25
1.6.2 Quelques exemples 27
1.7 Comportement asymptotique des séries de termes généraux positifs 28
1.8 Appendice I : Le critère d'Abel 32
1.8.1 Une formule 32
1.8.2 Critère d'Abel 33
1.8.3 Critère des séries alternées 34
1.8.4 Appendice II : un autre critère de Cauchy 36
1.9 Ce que l'on attend de vous 39

2 L'intégrale : 41

2.1 Uniforme continuité 44
2.1.1 Fonction continue 44

2.1.2 Définition . . . 45
2.1.3 Module de continuité . . . 47
2.1.4 Théorème de Heine . . . 48
2.2 Somme de Riemann (à pas uniforme) et intégrale . . . 48
2.2.1 Définition et notation . . . 48
2.2.2 Exemples . . . 50
2.2.3 Cas des fonctions monotones . . . 53
2.2.4 Cas des fonctions continues . . . 54
2.2.5 Cas des fonctions continues par morceaux . . . 56
2.3 Propriétés de l'intégrale ainsi définie . . . 58
2.3.1 Linéarité . . . 58
2.3.2 Changements de variables linéaires . . . 58
2.3.3 Comparaison . . . 59
2.3.4 Inégalité triangulaire . . . 61
2.3.5 Relation de Chasles . . . 61
2.3.6 Théorème fondamental de l'analyse . . . 64
2.3.7 Applications aux calculs de certaines limites . . . 65
2.4 Formule de Taylor-Lagrange et quelques applications . . . 67
2.4.1 Formule et inégalité de Taylor-Lagrange . . . 69
2.4.2 Formule de Taylor avec reste intégrale ou formule de Taylor-Mac Laurin . . . 69
2.4.3 Un encadrement de $\sqrt{2}$ (d'après L. Euler) . . . 70
2.4.4 L'exponentielle . . . 71
2.4.5 Une estimation de $(1+x)^n$. . . . 72
2.5 Calcul approché des intégrales . . . 72
2.5.1 Méthode des rectangles . . . 72
2.5.2 Méthodes des trapèzes . . . 73
2.6 Longueur des courbes planes . . . 75
2.6.1 Vocabulaire . . . 75
2.6.2 Définition . . . 76
2.6.3 Formule pour une courbe plane de classe $\mathcal{C}^1$ . . . 77
2.6.4 Quelques calculs de longueur . . . 80

3 Espaces vectoriels Normés **85**
3.1 Normes et distances . . . 86
3.1.1 Définition . . . 86
3.1.2 Quelques exemples . . . 86
3.2 Convergence de suites dans les espaces vectoriels normés . . . 90
3.2.1 Définition . . . 90
3.2.2 Propriétés . . . 91
3.2.3 Exemples . . . 92
3.2.4 Normes équivalentes . . . 93
3.2.5 En dimension 2, toutes les normes sont équivalentes . . . 95
3.3 Boules, ouverts, fermés . . . 96

3.3.1 Boules . . . 96
3.3.2 Parties ouvertes . . . 98
3.3.3 Parties fermées . . . 100
3.4 Parties compactes . . . 101
3.4.1 Définition . . . 101
3.4.2 Propriétés . . . 102
3.4.3 Exemples . . . 104
3.4.4 Équivalence des normes en dimension finie . . . 106
3.4.5 Caractérisation des parties compactes dans un espace vectoriel normé de dimension finie . . . 108
3.5 Fonctions continues . . . 108
3.5.1 Image directe/réciproque d'une partie . . . 108
3.5.2 Définition . . . 109
3.5.3 Caractérisation séquentielle de la continuité . . . 109
3.5.4 Addition et composition . . . 110
3.5.5 Quelques exemples . . . 111
3.5.6 Fonctions Polynomiales . . . 112
3.5.7 Caractérisation de la continuité globale . . . 113
3.6 Fonctions continues sur une partie compactes . . . 114
3.6.1 Images d'un compact par une application continue . . . 114
3.6.2 Applications . . . 115
3.6.3 Exemple :Point de Fermat . . . 115

4 Calcul Différentiel 119
4.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ . . . 119
4.1.1 Dérivées partielles . . . 120
4.1.2 Exemples de calculs . . . 120
4.1.3 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ . . . 123
4.1.4 Différentielle et dérivée le long d'une courbe . . . 126
4.1.5 Inégalités des accroissements finis . . . 130
4.1.6 Quelques outils de calcul supplémentaires . . . 134
4.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ . . . 136
4.2.1 Définition . . . 136
4.2.2 Dérivées croisées . . . 136
4.2.3 Développement limité à l'ordre 2 . . . 138
4.2.4 Différentielle seconde . . . 140
4.2.5 Cas particuliers des fonctions à valeurs réelles . . . 141
4.3 Extrema d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$. . . . 143
4.3.1 Minimum et maximum . . . 143
4.3.2 Condition nécessaire . . . 143
4.3.3 Condition suffisante . . . 145
4.4 Intégrales multiples . . . 148
4.4.1 Approche intuitive . . . 148
4.4.2 Quelques calculs . . . 152

4.4.3 Le changement de variable 156
4.4.4 Exemples de calculs 156
4.5 Courbes planes 161
4.5.1 Un cas bien connu 161
4.5.2 cas général 162
4.5.3 Un exemple 164

Chapitre 1

Les séries :

1.1 Sur la convergence des suites de Cauchy

Définition 1.1.1. *Soit (u_n) une suite de nombres complexes, on dit que (u_n) est une suite de Cauchy* [1] *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon \ .$$

Quelques exercices

i) Démontrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.

ii) Soit (u_n) une suite de nombres complexes, on définit $x_n = \mathcal{R}\mathrm{e}(u_n)$ et $y_n = \mathcal{I}\mathrm{m}(u_n)$ afin que $u_n = x_n + iy_n$ alors montrer les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   — La suite (u_n) converge si et seulement si les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes.
   — (u_n) est une suite de Cauchy si et seulement si (x_n) et (y_n) sont des suites de Cauchy.

Théorème 1.1.2. *Toute suite de Cauchy converge.*

Démonstration. On se contente de démontrer cela pour des suites à valeurs réelles, le cas général s'en suit à l'aide des exercices proposées plus haut. On considère donc une suite de Cauchy (u_n) :
Fait 1 : la suite (u_n) est bornée.
En effet, on sait que $3 > 0$, il y a donc un rang n_0 tel que $n, m \geq n_0 \Rightarrow |u_n - u_m| < 3$. En particulier pour $n \geq n_0$, nous avons

$$|u_n| = |u_n - u_{n_0} + u_{n_0}| \leq |u_n - u_{n_0}| + |u_{n_0}| \leq 3 + |u_{n_0}|$$

Si on pose $M = \max\{|u_0|, |u_1|], \ldots, |u_{n_0}|, |u_{n_0}| + 3\}$, on montre aisément l'implication $n \in \mathbb{N} \Rightarrow |u_n| \leq M$. La suite (u_n) est bien bornée.

1. Mathématicien français (1789-1857)

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble des valeurs prises par la suite (u_n) à partir du rang n :

$$A_n = \{u_\ell;\ \ell \in \mathbb{N} \text{ et } \ell \geq n\} = \{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

C'est une partie non vide majorée par M et minorée par $-M$, elle admet donc une borne inférieure et une borne supérieure :

$$a_n = \inf A_n \text{ et } b_n = \sup A_n.$$

Remarquons que $A_{n+1} \subset A_n$ donc a_n est également un minorant de A_{n+1} et puisque par définition $a_{n+1} = \inf A_{n+1}$ est le plus grand des minorants de A_{n+1}, nous en déduisons

$$a_n \leq a_{n+1}.$$

De la même façon, b_n est un majorant de A_{n+1} et puisque par définition $b_{n+1} = \sup A_{n+1}$ est le plus petit des majorants de A_{n+1}, nous en déduisons

$$b_{n+1} \leq b_n.$$

Il est par ailleurs évident que $a_n \leq b_n$. Nous avons donc obtenu

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \ldots b_1 \leq b_0\ ;$$

La suite (a_n) est donc croissante majorée par b_0, elle est donc convergente, on pose $\alpha = \lim_{n\to+\infty} a_n$. De même, la suite (b_n) est donc décroissante minorée par a_0, elle est donc convergente, on pose $\beta = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Nous avons également pour tout entier n : $u_n \in A_n \subset [a_n, b_n]$ donc

$$a_n \leq u_n \leq b_n. \tag{1.1.1}$$

Par ailleurs si l'on a une inclusion $A_n \subset [m, M]$ nous en déduisons que [2] $[a_n, b_n] \subset [m, M]$.

Fait 2 : $\alpha = \lim_{\mathbf{n}\to+\infty} \mathbf{a_n} = \lim_{\mathbf{n}\to+\infty} \mathbf{b_n} = \beta$

On concluera alors avec l'inégalité 1.1.1 C'est ici, dans la preuve de ce fait 2, que l'on utilise le critère de Cauchy. Nous avons :

— soit $\beta - \alpha = 0$

— soit $\beta - \alpha > 0$.

Si la seconde propriété est vérifiée alors $\varepsilon = \frac{\beta-\alpha}{10000} > 0$ et il y a un entier n_0 tel que pour tout

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

Ainsi pour tout entier $\ell \geq n \geq n_0$, nous avons [3] $u_\ell \in [u_{n_0} - \varepsilon, u_{n_0} + \varepsilon]$ et donc $A_n \subset [u_{n_0} - \varepsilon, u_{n_0} + \varepsilon]$, on a donc

$$[a_n, b_n] \subset [u_{n_0} - \varepsilon, u_{n_0} + \varepsilon].$$

2. car alors M est un majorant de A_n et m est un minorant de A_n.

3. Car $\forall \ell \geq n : u_\ell \in [u_{n_0} - \varepsilon, u_{n_0} + \varepsilon]$.

Ce qui équivaut à

$$u_{n_0} - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq, u_{n_0} + \varepsilon$$

Inégalités dont on déduit

$$n \geq n_0 \Rightarrow b_n - a_n \leq 2\varepsilon.$$

En passant à la limite dans cette inégalité large, on en déduit

$$0 \leq \beta - \alpha \leq 2\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{5000}.$$

Ce qui n'est pas possible donc forcément $\beta = \alpha$.

□

1.2 Définitions

1.2.1 Définitions et notations

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ou complexes, on note pour $p \leq q$:

$$\sum_{n=p}^{q} u_n = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_q$$

et lorsque $p > q$, on convient que

$$\sum_{n=p}^{q} u_n = 0.$$

On remarque que si $p \leq r \leq q$ alors

$$\sum_{n=p}^{q} u_n = \sum_{n=p}^{r} u_n + \sum_{n=r+1}^{q} u_n.$$

Et de la même façon si $p = r_0 + 1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_\ell \leq q = r_{\ell+1}$, alors

$$\sum_{n=p}^{q} u_n = \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{n=r_i+1}^{r_{i+1}} u_n.$$

On associe à cette suite une nouvelle suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n,$$

cette suite est la suite définie par la relation de récurrence :

$$S_n = S_{n-1} + u_n, \;\; et \;\; S_0 = u_0.$$

Symboliquement, cette suite est aussi parfois notée $\sum u_n$, mais on essayera ici d'éviter le recours à cette notation que vous pourrez néanmoins trouver dans certains ouvrages.

On appelle série associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie ; alors S_n est la n^{ieme} **somme partielle** de cette série et u_n est le terme général de la série. On dira aussi que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série de terme général u_n.

On remarquera alors la formule suivante : si $p \leq q$ alors

$$S_q - S_p = \sum_{n=p+1}^{q} u_n.$$

Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $s \in \mathbb{C}$ on dira que la série de terme général u_n converge et que s est la somme de cette série ; on notera alors

$$s = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Et également

$$\sum_{k\geq n} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n}^{N} u_k = \lim_{N\to+\infty} S_N - S_{n-1} = s - S_{n-1}$$

Lorsque la série de terme général u_n ne converge pas, on parlera de **série divergente**.

1.2.2 Quelques exemples

i) La série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$ est convergente. En effet nous étudions la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ Grâce à la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

La série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$ converge donc et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

ii) La série de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$ est convergente. En effet la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est croissante et de plus pour tout $k = 2, \ldots, n$ nous avons

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

On en déduit :

$$S_n = 1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1+1-\frac{1}{n} \leq 2$$

Ainsi la suite (S_n) est croissante majorée par 2, elle est donc convergente.
Vous verrez plus tard, au moins en L3, que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

iii) La série harmonique : il s'agit de la série de terme général $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$. C'est une série divergente. En effet, posons

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Il est évident que la suite (H_n) est croissante.
Fait 1 : $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$**.**
En effet on a

$$H_{2n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\cdots+\frac{1}{2n} = H_n+\frac{1}{n+1}\cdots+\frac{1}{2n} = H_n+\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

soit

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Mais $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \cdots + \frac{1}{2n}$ est une somme de n termes chacun plus grand que $\frac{1}{2n}$ ainsi

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

On peut alors en déduire que la suite (H_n) ne converge pas et cela de plusieurs façons.
Première façon Par l'absurde, on suppose que la suite (H_n) converge vers ℓ. Puisque $\frac{1}{4} > 0$ il y a un entier n_0 telle que pour tout $n \geq n_0$: $|H_n - \ell| < \frac{1}{4}$. Puisque la suite (H_n) est croissante, on a en fait :

$$n \geq n_0 \Rightarrow \ell - \frac{1}{4} < H_n \leq \ell$$

En particulier on a

$$\ell - \frac{1}{4} < H_{n_0} \leq H_{2n_0} \leq \ell$$

ce qui implique que

$$H_{2n_0} - H_{n_0} \leq \frac{1}{4}$$

ce qui est en contradiction avec le fait 1.

Seconde façon : on montre que $H_{2^n} \geq \frac{n}{2} + 1$

On a

$$\begin{aligned} H_{2^n} - H_1 = & \frac{1}{2} \\ & + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ & + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\ & + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} \\ & \vdots \\ & + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} H_{2^n} - H_1 = & H_2 - H_1 \\ & + H_4 - H_2 \\ & + H_8 - H_4 \\ & + H_{16} - H_8 \\ & \vdots \\ & + H_{2^n} - H_{2^{n-1}} \end{aligned}$$

ou encore

$$H_{2^n} = H_1 + \sum_{k=1}^{n} (H_{2^k} - H_{2^{k-1}})$$

Puisque pour tout entier k : $H_{2^k} - H_{2^{k-1}} \geq \frac{1}{2}$ et $H_1 = 1$, nous obtenons [4]

$$H_{2^n} \geq H_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \geq \frac{n}{2} + 1.$$

4. Une autre façon de démontrer cette inégalité est de considerer la suite (V_n) définie par

$$V_n = H_{2^n} - \left(\frac{n}{2} + 1\right).$$

On calcule $V_0 = 0$ puis on calcule

$$V_{n+1} - V_n = H_{2^{n+1}} - H_{2^n} - \frac{1}{2} = H_{2 \times 2^n} - H_{2^n} - \frac{1}{2} \geq 0.$$

La suite (V_n) est donc croissante et $V_0 = 0$, elle est donc toujours positive.

Il est alors facile de conclure que la suite (H_n) n'est pas majorée [5] donc elle ne peut pas converger.

1.2.3 Une remarque générale

Proposition 1.2.1. *Soit (u_n) une suite de nombre complexe. On suppose que la série de terme général (u_n) converge, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Démonstration. On considère donc une suite (u_n) et on suppose que la série de terme général (u_n) converge. La suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell$$

est convergente donc de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$ il y a alors un entier $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ telle que

$$n, m \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon.$$

Alors si $n \geq n_0(\varepsilon) + 1$ nous avons $n - 1 \geq n_0(\varepsilon)$ et

$$|u_n| = |S_n - S_{n-1}| < \varepsilon.$$

Pour chaque réel strictement positif ε, nous avons un rang $N(\varepsilon) = n_0(\varepsilon) + 1$ tel que

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

Nous avons bien montré que la suite (u_n) converge vers 0. □

Corollaire 1.2.2. *Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série de terme général u_n diverge.*

Par exemple la série de terme général $(-1)^n$ est divergente.

1.2.4 Opération sur les séries

Proposition 1.2.3. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres complexes, on suppose que les séries de termes généraux u_n et v_n convergent alors*

i) La série de terme général $u_n + v_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

5. Si $M \geq 0$ en posant $n_0 = E(2M) + 1000$, on a $H_{2^{n_0}} \geq \frac{n_0}{2} + 1 \geq M + 1$, donc M n'est pas un majorant de la suite (H_n). Donc aucun réel ne peut être un majorant de la suite (H_n).

ii) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ alors la série de terme général λu_n converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

La preuve de ces résultats est une conséquence directe des résultats correspondants sur les limites de sommes de suites.

1.3 Quelques séries de références

1.3.1 Les séries géométriques

Proposition 1.3.1. *Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe tel que $|z| < 1$ alors la série de terme général z^n converge.*

Démonstration. En effet, on sait que

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z},$$

et puisque $|z| < 1$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$ donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

On remarquera ici la formule valable pour $\ell \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=\ell}^{+\infty} z^n = \frac{z^\ell}{1 - z}.$$

□

Remarque 1.3.2.

Si $|z| \geq 1$ alors pour tout entier naturel n nous avons

$$|z|^n \geq 1$$

et la suite (z^n) ne converge pas vers 0, donc la série de terme général z^n est alors divergente.

1.3.2 Les séries de Riemann

Proposition 1.3.3. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, $n \geq 1$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. Nous avons

$$\frac{1}{k^\alpha} = e^{-\alpha \ln(k)}.$$

Cette expression est donc décroissante avec α.

- Si $\alpha \leq 1$: nous avons alors pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^\alpha}.$$

Et si on en déduit

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

On a vu un peu plus haut que (H_n) est une suite croissante non majorée qui tend vers $+\infty$ et donc la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ tend également vers $+\infty$. La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est donc divergente.

- Si $\alpha > 1$: On introduit alors la fonction $\varphi(x) = x^{-\alpha}$ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\varphi(x) = x^{-\alpha}$$

Puisque α est positif, on sait que la fonction φ est décroissante en particulier, nous avons pour $k \geq 2$:

$$x \in [k-1, k] \Rightarrow \frac{1}{k^\alpha} = \varphi(k) \leq \varphi(x).$$

Nous pouvons alors intégrer cette inégalité :

$$\frac{1}{k^\alpha} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha} dx \leq \int_{k-1}^{k} \varphi(x) dx.$$

En sommant, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \\
&\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \varphi(x)dx \\
&\leq 1 + \int_1^2 \varphi(x)dx + \int_2^3 \varphi(x)dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} \varphi(x)dx \\
&\leq 1 + \int_1^n \varphi(x)dx = 1 + \left[\frac{x^\alpha}{-\alpha+1}\right]_1^n \\
&\leq 1 + \frac{n^\alpha}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Remarquons que puisque $\alpha > 1$, nous savons que $\frac{n^\alpha}{-\alpha+1} < 0$ et nous obtenons

$$S_n \leq 1 - \frac{1}{-\alpha+1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

La suite (S_n) est donc croissante majorée par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$, elle est donc convergente.

□

1.4 Séries à termes généraux positifs

1.4.1 Une remarque générale

Lorsque (u_n) est une suite de réel positifs alors la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est croissante et on obtient :

Proposition 1.4.1. *Soit $(u_n)_n$ une suite de réels **positifs**. La série de terme général u_n converge si et seulement si la suite de ces sommes partielles est majorée.*

C'est à dire *La série de terme général u_n converge si et seulement si on peut trouver un réel M tel que pour tout entier n : $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$.*

Un exemple : On étudie la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{k}}.$$

Puisque pour tout entier n nous avons $n \leq n^2$, nous en déduisons que

$$S_n \leq S_{n^2}.$$

Posons $V_n = S_{n^2} = \sum_{k=0}^{n^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{k}}$ On a donc pour tout entier n : $S_n \leq V_n$. Et

$$V_{n+1} - V_n = \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{k}}$$

est une somme de $(n+1)^2 - (n^2+1) + 1 = 2n+1$ termes dont le plus grand [6]est $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n^2+1}}$ nous avons donc [7]

$$V_{n+1} - V_n \leq (2n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n^2+1}} \leq (2n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n^2}} = (2n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

On en déduit

$$V_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} V_{k+1} - V_k\right) + V_0 \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right) + 1.$$

On calcule maintenant la somme ci dessus en se servant du fait que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1).\left(\frac{1}{2}\right)^{k} &= \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1).\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1).\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1).\left(\frac{1}{2}\right)^{k}.\end{aligned}$$

Mais si (w_n) est une suite de nombre complexe, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \sum_{k=1}^{n} w_{k-1},$$

ainsi la seconde somme peut se réécrire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1).\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \sum_{k=1}^{n} (2k-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

6. Pensez au fait que la suite $n \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ est décroissante.

7. Encore une fois pour la dernière inégalité, pensez au fait $n \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ est décroissante.

Et on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1).\left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1).\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}(2k-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1).\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - (2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\left((2k+1)-(2k-1)\right).\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - (2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2.\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - (2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= 2 + 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\right) - (2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= 2 + 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) - -(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

On obtient donc que pour tout entier n :

$$S_n \leq V_n \leq 7.$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ est donc majorée, la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ converge donc.

Un second exemple : Pour $\lambda \geq 0$, on pose $u_n(\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!}$. Le cas où $\lambda = 0$ est facile. On suppose donc $\lambda > 0$. Nous avons facilement :

$$\frac{u_{n+1}(\lambda)}{u_n(\lambda)} = \frac{\lambda}{n+1}$$

Posons $N = E(2\lambda) + 1$, on sait que $N > 2\lambda$. Et alors pour $n \geq N$, nous avons :

$$\frac{u_{n+1}(\lambda)}{u_n(\lambda)} \leq \frac{1}{2}$$

soit

$$\frac{2^{n+1}u_{n+1}(\lambda)}{2^n u_n(\lambda)} \leq 1.$$

Ceci montre que la suite $(v_n(\lambda))$ définie par $v_n(\lambda) = 2^n u_n(\lambda)$ est décroissante à partir du rang N. En conséquence on a pour tout $n \geq N$:

$$v_n(\lambda) = 2^n u_n(\lambda) \leq v_N(\lambda)$$

ou encore

$$u_n(\lambda) \leq 2^{-n} v_N(\lambda)$$

et en sommant (toujours pour $n \geq N$) :

$$\sum_{k=0}^{n} u_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} u_n(\lambda) + \sum_{k=N+1}^{n} u_n(\lambda) \leq \sum_{k=0}^{N} u_n(\lambda) + \sum_{k=N+1}^{n} 2^{-k} v_N(\lambda)$$

Puisque

$$\sum_{k=N+1}^{n} 2^{-k} v_N(\lambda) = v_N(\lambda) \sum_{k=N+1}^{n} 2^{-k} \leq 2v_N(\lambda).$$

On a pour $n \geq N$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_n(\lambda) \leq \sum_{k=0}^{N} u_n(\lambda) + 2v_N(\lambda).$$

La suite des sommes partielles de la série terme général $u_n(\lambda)$ est donc majorée par

$$\sum_{k=0}^{N} u_n(\lambda) + 2v_N(\lambda).$$

La série de terme général $u_n(\lambda)$ est donc convergente.

Remarque 1.4.2. *On verra un peu plus loin, dans le cours sur l'intégrale, que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}.$$

1.4.2 Comparaison et convergence

Proposition 1.4.3. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres* **positifs***, on suppose qu'à partir d'un certain rang :*

$$u_n \leq v_n$$

alors

i) Si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge.

ii) Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge.

Démonstration. Définissons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Par hypothèse, il y a un entier N tel que $k \geq N \Rightarrow u_k \leq v_k$. On en déduit que si $n \geq N$ alors

$$S_n - S_N = \sum_{k=N}^{n} u_k \leq \sum_{k=N}^{n} v_k = T_n - T_N.$$

Si on suppose la série de terme général v_n convergente alors la suite (T_n) est majorée et il y a un réel M telle que pour tout entier n : $T_n \leq M$. On en déduit que pour tout entier $n \geq N$:

$$S_n \leq S_N + T_n - T_N \leq S_N + M - T_N.$$

Ceci montre que la suite des sommes partielles de la série terme général u_n est donc majorée par $S_N + M - T_N$, donc la série de terme général u_n converge.

Lorsque la série de terme général u_n diverge, on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

et puisque pour $n \geq N$, on a

$$S_n - S_N + T_N \leq T_n.$$

on a également $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$; la série de terme général v_n diverge. □

Corollaire 1.4.4. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres* **positifs***, on suppose de plus que pour tout n assez grand $v_n > 0$ et que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge. Si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge.*

Démonstration. En effet, une suite convergente est bornée donc majorée, il y a donc un entier N et un réel C tel que pour tout entier $n \geq N$

$$\frac{u_n}{v_n} \leq C$$

Puisque $v_n > 0$, on en déduit :

$$u_n \leq Cv_n.$$

Or si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général Cv_n converge et le critère précédent i) implique que la série de terme général u_n converge. □

Une application : On pose $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$; pour $n \geq 1$, ce sont des suites de réels strictement positifs. De plus

$$\frac{u_n}{v_n} = n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} = e^{\ln(n)+\ln(n+1)-\sqrt{n}\ln 2} = e^{-\ln(2)\sqrt{n}\left(1-\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}\ln 2}-\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}\ln 2}\right)}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} -\ln(2)\sqrt{n} = -\infty$, $\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}\ln 2}-\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}\ln 2} = 1$ et $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

On a vu que la série de terme général v_n était convergente donc la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ converge.

1.4.3 Critère de convergence

Critère de D'Alembert

[8]

Proposition 1.4.5. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres strictement positifs.*

— *S'il existe un réel $\kappa \in [0,1[$ tel que à partir d'un certain rang :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \kappa$$

alors la série de terme général u_n converge.

— *Supposons que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ soit convergente :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

Si $\ell < 1$ alors la série de terme général u_n converge et si $\ell > 1$, alors la série de terme général u_n diverge.

Démonstration. Plaçons nous dans le premier cas : on considère donc une suite de réels strictement positifs $(u_n)_n$ et on suppose qu'il y a $\kappa \in [0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$n \geq N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \kappa$$

Nous en déduisons que

$$n \geq N \Rightarrow \frac{\kappa^{-n-1}u_{n+1}}{\kappa^{-n}u_n} \leq 1.$$

La suite $\left(\kappa^{-n}u_n\right)_n$ est donc décroissante à partir du rang N. Elle est donc majorée : il y a un réel $M \geq 0$ tel que pour tout entier n : $\kappa^{-n}u_n \leq M$, c'est à dire :

$$0 \leq u_n \leq M\kappa^n.$$

Puisque $\kappa \in [0,1[$, la série de terme général $M\kappa^n$ converge et ceci implique que la série de terme général u_n converge.

Plaçons nous maintenant dans le cas où $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ et $\ell \in [0,1[$. Posons alors $\kappa = \frac{1+\ell}{2}$, nous avons $0 < \ell < \kappa$ donc nous savons [9] qu'à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \kappa$. Nous pouvons alors appliquer le résultat que nous venons de démontrer et conclure que la série de terme général u_n converge.

Plaçons nous maintenant dans le cas où $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ et $\ell > 1$. En posant $L = \frac{1+\ell}{2}$, nous avons $1 < L < \ell$. Donc de la même façon, nous savons qu'à partir d'un certain rang N :

$$L < \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ donc } 1 < \frac{L^{-(n+1)}u_{n+1}}{L^{-n}u_n}.$$

8. Jean Rond D'Alembert : (1717-1783) il a participé à la rédaction de l'Encyclopédie de Diderot.

9. On utilise ici un résultat d'Analyse 1 selon lequel si une suite de nombre réel (v_n) converge vers un réel a et que $a < b$, alors à partir d'un certain rang $u_n < b$.

Ainsi la suite $(L^{-n}u_n)_n$ est croissante à partir d'un certain rang N et donc :

$$n \geq N \Rightarrow L^{-n}u_n \geq L^{-N}u_N \ ,$$

soit

$$n \geq N \Rightarrow u_n \geq L^{-N}u_N L^n.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et donc la série de terme général u_n ne peut pas converger. □

Critère de Cauchy

Proposition 1.4.6. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres positifs.*

— *S'il existe un réel $\kappa \in [0,1[$ tel que à partir d'un certain rang :*

$$\sqrt[n]{u_n} \leq \kappa$$

alors la série de terme général u_n converge.

— *Supposons que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_n$ soit convergente :*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$$

Si $\ell < 1$ alors la série de terme général u_n converge et si $\ell > 1$, alors la série de terme général u_n diverge.

Démonstration. Dans le premier cas, nous avons un réel $\kappa \in [0,1$ et un entier N tel que si $n \geq N$ alors

$$0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \kappa.$$

Puisque la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, nous en déduisons :

$$0 \leq u_n \leq \kappa^n.$$

Puisque $\kappa \in [0,1[$, la série de terme général κ^n converge et ceci implique que la série de terme général u_n converge.

Dans le cas où $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$ et $\ell \in [0,1[$ alors en posant de même $\kappa = \frac{1+\ell}{2}$, nous avons $0 < \ell < \kappa$ donc nous savons qu'à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{u_n} \leq \kappa$. On peut alors utiliser ce que l'on vient de démontrer et conclure que la série de terme général u_n converge.

Supposons maintenant que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$ et que $\ell > 1$, posons alors $L = \frac{1+\ell}{2}$, nous avons $1 < L < \ell$. Donc de la même façon, nous savons qu'à partir d'un certain rang N : $\sqrt[n]{u_n} > L$. Puisque la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que si $n \geq N$ alors $u_n > L^n$ mais $\lim_{n\to+\infty} L^n = +\infty$, on en conclut donc que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et donc la série de terme général u_n ne peut pas converger. □

Exemples

i) Pour $\lambda > 0$, on considère la suite $(u_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n(\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!}$, nous avons $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lambda}{n+1}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. On conclut avec le critère de D'Alembert que la série de terme général $\frac{\lambda^n}{n!}$ converge. Notez que dans ce cas $\sqrt[n]{u_n(\lambda)} = \frac{\lambda}{\sqrt[n]{n!}}$; il n'est facile, a priori d'estimer la limite de cette suite et donc d'utiliser le critère de Cauchy [10].

ii) Si (u_n) est la suite définie par

$$u_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 5^{-n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} 5^{-n-1}2^n = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2^{-n-1}5^n = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Le critère de d'Alembert ne permet de conclure mais puisque pour tout entier n : $u_n \leq 2^{-n}$, nous savons que la série de terme général u_n converge [11]

Critère de comparaison aux séries de Riemann

Proposition 1.4.7. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels positifs.*

— *Si pour un réel $\alpha > 1$ la suite*

$$(n^\alpha\, u_n)_n$$

est majorée alors la série de terme général u_n converge.

— *Si pour un réel $\alpha > 1$ la suite $(n^\alpha\, u_n)_n$ est convergente alors la série de terme général u_n converge.*

— *Si pour un réel $\boxed{\alpha \leq 1}$ la suite $(n^\alpha\, u_n)_n$ est convergente et si $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell \neq 0}$ alors la série de terme général u_n est divergente.*

Démonstration. Dans le premier cas, nous savons qu'il y a un réel $M > 0$ tel que

$$0 \leq n^\alpha u_n \leq M \text{ donc } u_n \leq \frac{M}{n^\alpha}$$

et puisque $\alpha > 1$, nous savons que la série de terme général $\frac{M}{n^\alpha}$ converge, ainsi la la série de terme général u_n converge. Le second cas est une conséquence directe du premier cas. Notons que nous aurions aussi pu utiliser le corollaire (1.4.4).

Plaçons nous dans le dernier cas. On sait que pour tout entier n : $n^\alpha u_n \geq 0$ ainsi par passage à la limite dans les inégalités larges, nous savons que $\ell \geq 0$.

10. On a en fait

$$n! \geq n.(n-1).\ldots E(n/2) \geq E(n/2)^{n/2} \geq \left(\frac{n}{2} - 1\right)^{n/2}.$$

Ce qui permet de conclure que $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n}{2} - 1}$.

11. Saurez vous montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{4}{3} + \frac{5}{24} = \frac{34}{24}$?

Puisqu'on suppose que $\ell \neq 0$ alors on a $\ell > 0$ et $\ell > \ell/2$. Nous savons donc qu'à partir d'un certain rang :

$$n^\alpha u_n \geq \frac{\ell}{2} \text{ soit } u_n \geq \frac{\ell}{2n^\alpha}.$$

Mais puisque $\alpha \leq 1$ et $\ell/2 \neq 0$, nous savons que la série de terme général $\frac{\ell}{2n^\alpha}$ diverge et l'on en déduit que la série de terme général u_n diverge également. □

Un exemple la série de terme général $\sin\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge car on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} n^{3/2} \sin\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = 1$$

et que pour tout entier $n \geq 1 : 0 \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$ et donc puisque la fonction $\sin$ est croissante sur $[0, \pi/2] : 0 \leq \sin\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

1.4.4 Avertissement

Dans le corollaire (1.4.4), il est important de vérifier que les séries soient à termes positifs. Par exemple si l'on considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n(\ln(n)+1)} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{n} .$$

Alors on sait que la série de termes général v_n converge. On sait que la série de terme général $u_n - v_n$ diverge [12]. De plus

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{(-1)^n}{(\ln(n)+1)}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 .$$

mais

— La série de terme général v_n converge.
— La série de terme général u_n diverge.

12. En effet, puisque $u_n - v_n = \frac{1}{n(\ln(n)+1)}$ et que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x)+1)}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que si $k \geq 1$ alors

$$\frac{1}{k(\ln(k)+1)} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} dx$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k)+1)} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} dx = \left[\ln\left(\ln(x)+1\right)\right]_1^{n+1} = \ln\left(\ln(n+1)\right).$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k)+1)} = +\infty$.

1.5 Séries absolument convergentes

1.5.1 Définition

Théorème 1.5.1. *Soit (u_n) une suite de nombres complexes. On suppose que la série de terme général $|u_n|$ converge alors la série de terme général u_n converge et l'on a :*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Dans ce cas, on dit que la série de terme général u_n ***converge absolument****.*

Démonstration. On donne deux preuves de ce résultat. Dans la **première preuve** , on suppose que la suite (u_n) est à valeurs réelles. On définit alors deux suites (v_n) et (w_n) par

$$v_n = \max\{u_n, 0\} = \frac{u_n + |u_n|}{2} = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } u_n < 0 \end{cases}$$

et

$$w_n = \max\{-u_n, 0\} = \frac{|u_n| - u_n}{2} = \begin{cases} -u_n & \text{si } u_n \leq 0 \\ 0 & \text{si } u_n > 0 \end{cases}.$$

Nous avons $u_n = v_n - w_n$ et puisque pour tout entier n : $0 \leq v_n \leq |u_n|$ et $0 \leq w_n \leq |u_n|$, nous savons que les séries de termes généraux v_n et w_n convergent. Nous en déduisons que la série de terme général u_n converge.

La **seconde preuve** est valide si (u_n) est une suite de nombres complexes. On se sert du critère de Cauchy. On pose donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|.$$

On sait que pour tout entiers $n \geq m$:

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |u_k| = T_n - T_m.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (T_n) converge, elle est de Cauchy ; il y a donc un entier n_0 tel que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |T_n - T_m| < \varepsilon$$

On en déduit que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon$$

La suite (S_n) est donc de Cauchy, elle converge : la série de terme général u_n converge donc.

Il reste à démontrer l'inégalité $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

On remarque d'abord que pour tout nombres complexes x, y, nous avons

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

ainsi si (z_n) est une suite de nombres complexes qui converge vers ℓ alors pour tout entier n :

$$||z_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|.$$

On en déduit que la suite $(|z_n|)$ converge vers $|\ell|$.

Grâce à l'inégalité triangulaire, nous savons alors que pour tout entier n :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|.$$

Or par définition $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |u_k| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, le point précédent nous informe alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \ ;$$

par passage à la limite dans les inégalités larges, on en déduit le résultat voulu. □

1.5.2 Quelques critères

Ainsi si (u_n) est une suite de nombres complexes et que la série de terme général $|u_n|$ vérifie l'un des critères obtenus dans le chapitre précédent, nous en déduisons que la série de terme général u_n converge absolument donc converge.

i) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. On suppose que à partir d'un certain rang [13]

$$|u_n| \leq v_n \ ;$$

Si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge absolument donc converge.

ii) Soit (u_n) est une suite de nombres complexes non nuls. Si la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)_n$ est convergente et si

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in [0, 1[$$

alors la série de terme général u_n converge absolument donc converge [14].

13. C'est à dire : il existe un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq v_n.$$

14. Avec la remarque faite plus haut selon laquelle

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |z_n| = |\ell|,$$

iii) Soit (u_n) est une suite de nombres complexes. Si la suite $\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)_n$ est convergente et que $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n|} \in [0,1[$ alors la série de terme général u_n converge absolument donc converge.

iv) Soit (u_n) est une suite de nombres complexes. Si la suite $\left(n^\alpha\,|u_n|\right)_n$ est convergente et si $\alpha > 1$ alors la série de terme général u_n converge absolument donc converge [15].

1.5.3 Exemples

α) Si $z \in \mathbb{C}$ alors la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ converge absolument. Vous verrez en Analyse 3 que c'est ainsi que l'on doit définir l'exponentiel complexe [16] :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

β) Si $a > 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors les séries de termes généraux

$$\frac{\cos(n\theta)}{n^a} \quad , \quad \frac{\sin(n\theta)}{n^a} \quad , \quad \frac{e^{in\theta}}{n^a}$$

sont absolument convergentes [17].

γ) Attention, une série convergente n'est pas forcément absolument convergente : par exemple la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n},\ n \geq 1$.

1.6 Les séries alternées

1.6.1 Critère de convergence

Théorème 1.6.1. *Si $(a_n)_n$ est une suite **décroissante** de réels **positifs** convergent vers 0 :*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

---

nous savons aussi que si (u_n) est une suite de nombres complexes non nuls tel que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ convergente vers ℓ et que et que $|\ell| \in [0,1[$ alors la série de terme général u_n converge absolument donc converge.

15. On peut faire ici la même remarque et conclure que si la suite $\left(n^\alpha u_n\right)_n$ est convergente et que si $\alpha > 1$ alors la série de terme général u_n converge absolument donc converge.

16. Rappelons qu'au cours de Mathématiques 1,vous avez défini

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right)\ .$$

17. En effet on a toujours les inégalités

$$\left|\frac{\cos(n\theta)}{n^a}\right| \leq \frac{1}{n^a} \quad , \quad \left|\frac{\sin(n\theta)}{n^a}\right| \leq \frac{1}{n^a} \quad , \quad \left|\frac{e^{in\theta}}{n^a}\right| \leq \frac{1}{n^a}.$$

Et puisque $a > 1$, la série de terme général $\frac{1}{n^a}$ converge.

alors la série de terme général

$$(-1)^n a_n$$

est convergente.

Démonstration. On considère donc $(a_n)_n$une suite décroissante de réels positifs tel que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Et on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k.$$

On a donc

$$S_{2n+2} = S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2}$$

et puisque la suite $(a_n)_n$ est décroissante : $-a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0$. On en déduit que la suite (S_{2n}) est décroissante. De la même façon

$$S_{2n+3} = S_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3}$$

et puisque la suite $(a_n)_n$ est décroissante : $+a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$, on en déduit que la suite (S_{2n+1}) est croissante. Par ailleurs, puisque $a_{2n+1} \geq 0$:

$$S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n}.$$

On en déduit donc que pour tout entier n :

$$S_1 \leq S_3 \leq \cdots \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_{2n-2} \leq \cdots \leq S_2 \leq S_0.$$

La suite (S_{2n}) est décroissante, minorée par S_1, elle est donc convergente. De même, la suite (S_{2n+1}) est croissante, majorée par S_0, elle est donc convergente. Par ailleurs $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$ et on a supposé $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1},$$

ce qui implique que la suite (S_n) est convergente [18]. la série de terme général $(-1)^n a_n$ est donc convergente. □

Remarque 1.6.2. *Notons que si on poursuit avec les notations de la preuve précédente, nous avons pour*

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \sup\{S_{2n+1}, n \in \mathbb{N}\} = \inf\{\{S_{2n}, n \in \mathbb{N}\}.$$

et pour tout entier n :

$$S_{2n+1} \leq s \leq S_{2n} \text{ et} S_{2n+1} \leq s \leq S_{2n+2}$$

18. Il s'agit d'un exercice d'Analyse 1 : *Si (u_n) est une suite de nombres complexes tel que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$ alors la suite (u_n) converge vers ℓ.*

On en déduit que pour tout entier n, la somme s est comprise entre S_n et S_{n+1} et puisque $|S_{n+1} - S_n| = |a_{n+1}|$, on en déduit l'encadrement :

$$|S_n - s| \leq |a_{n+1}|.$$

C'est à dire que l'écart de la somme partielle de la série à sa somme est toujours inférieur au terme suivant.

1.6.2 Quelques exemples

α) La suite

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$$

est bien une suite décroissante de réels positif qui converge vers 0, on sait donc que la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. On a vu que

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

On en déduit les encadrements :

$$\frac{37}{60} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \leq \ln(2) \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$$

β) Soit $a > 0$, la suite

$$\left(\frac{1}{n^a}\right)_{n\geq 1}$$

est bien une suite décroissante de réels positif qui converge vers 0, on en déduit que la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n^a}$ converge.

γ) Montrons que la suite $(u_n = n + \sin(n))_{n\geq 0}$ est croissante. En effet, l'égalité des accroissements finis implique que si x, y sont deux réels alors il y a un réel c dans l'intervalle ouvert délimité par x et y tel que

$$\sin(x) - \sin(y) = \cos(c)(x - y)\ ;$$

on en déduit que pour tout réels x, y alors

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

Ainsi pour tout entier n :

$$|\sin(n+1) - \sin(n)| \leq 1 \ \text{ et } \ -1 \leq \sin(n+1) - \sin(n) \leq 1.$$

On en déduit :

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \sin(n+1) - \sin(n) \geq 0.$$

Ce qui montre que la suite $(u_n = n + \sin(n))_{n\geq 0}$ est croissante. Par ailleurs $0 < 1 < \pi/2$ et la fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ donc $0 < \sin(1) < 1$ et $u_1 > 0$. On en déduit que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$a_n = \frac{1}{n + \sin(n)}$$

est une suite décroissante de réels strictement positif et pour $n \geq 2$:

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n-1}.$$

On en déduit que la suite (a_n) est décroissante, positive et converge vers 0 : le critère des séries alternées permet alors d'affirmer que la série de terme général

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n + \sin(n)}$$

converge.

1.7 Comportement asymptotique des séries de termes généraux positifs

Proposition 1.7.1. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels **strictement positifs**, on suppose que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

i) Si les séries de termes généraux u_n et v_n convergent, notons $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\tilde{s} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, on introduit les restes de séries à savoir les suites définies par

$$R_n = s - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \text{ et } \tilde{R}_n = \tilde{s} - \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{\tilde{R}_n} = 1.$$

ii) Si les séries de termes généraux u_n et v_n divergent, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{\sum_{k=0}^{n} v_k} = 1.$$

Si cette proposition est intéressante, mais elle ne donne pas dans le premier cas une estimation de l'écart entre $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et s.

Démonstration. Pour $\varepsilon = 1/2$, il existe un entier n_0 tel que

$$\big(n \geq n_0\big) \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \frac{1}{2} \ .$$

Pour $n \geq n_0$, on a donc [19] :

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) v_n \leq u_n \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right) v_n$$

soit

$$\frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n$$

Ce qui permet de conclure que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

Plaçons d'abord dans le premier cas : Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, on sait qu'il existe un entier $n_0(\varepsilon)$ tel que

$$\big(n \geq n_0(\varepsilon)\big) \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \varepsilon/2 \ .$$

Pour $n \geq n_0(\varepsilon)$, on a donc [20] :

$$(1 - \varepsilon/2) v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon/2) v_n.$$

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\tilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Soit $N \geq n \geq n_0(\varepsilon)$ alors on a

$$\begin{aligned}(1 - \varepsilon/2)(\tilde{S}_N - \tilde{S}_{n-1}) = \sum_{k=n}^{N} (1 - \varepsilon/2) v_k &\leq \sum_{k=n}^{N} u_k = S_N - S_{n-1} \\ &\leq \sum_{k=n}^{N} (1 + \varepsilon/2) v_k = (1 + \varepsilon/2)(\tilde{S}_N - \tilde{S}_{n-1}) \ .\end{aligned}$$

On fait maintenant tendre N vers $+\infty$ dans ces inégalités larges [21] on obtient pour $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$(1 - \varepsilon/2)\tilde{R}_n \leq R_n \leq (1 + \varepsilon/2)\tilde{R}_n,$$

puisque $\tilde{R}_n > 0$, nous avons pour $n \geq n_0(\varepsilon)$:

$$\left|\frac{R_n}{\tilde{R}_n} - 1\right| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \ .$$

19. On utilise ici que $v_n > 0$.
20. On utilise encore ici que $v_n > 0$.
21. Remarquons que par définition :

$$\lim_{N \to +\infty} (\tilde{S}_N - \tilde{S}_{n-1}) = \tilde{R}_n \ \text{ et } \ \lim_{N \to +\infty} (S_N - S_{n-1}) = R_n.$$

On a bien démontré le résultat voulu.

Plaçons nous maintenant dans le cas où les suites (S_n) et $(\tilde{S}_n)$ convergent vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$, on sait qu'il existe un entier $n_0(\varepsilon)$ tel que

$$\big(n \geq n_0(\varepsilon)\big) \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \varepsilon/2 \,.$$

Pour $n \geq n_0(\varepsilon)$, on a donc [22] :

$$|u_n - v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} v_n.$$

Pour $n \geq n_0(\varepsilon)$, on a donc :

$$S_n - \tilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n_0(\varepsilon)-1} (u_k - v_k) + \sum_{k=n_0(\varepsilon)}^{n} (u_k - v_k).$$

Posons $M_\varepsilon = \left|\sum_{k=0}^{n_0(\varepsilon)-1}(u_k - v_k)\right|$, on a donc, avec l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
|S_n - \tilde{S}_n| &\leq M_\varepsilon + \left|\sum_{k=n_0(\varepsilon)}^{n} (u_k - v_k)\right| \\
&\leq M_\varepsilon + \sum_{k=n_0(\varepsilon)}^{n} |u_k - v_k| \\
&\leq M_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0(\varepsilon)}^{n} v_k \\
&\leq M_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \tilde{S}_n \,.
\end{aligned}$$

Où on a utilisé que

$$\sum_{k=n_0(\varepsilon)}^{n} v_k \leq = \sum_{k=0}^{n} v_k \tilde{S}_n$$

Or $\tilde{S}_n > 0$, on en déduit donc que pour $n \geq n_0(\varepsilon)$, on a

$$\frac{|S_n - \tilde{S}_n|}{\tilde{S}_n} \leq \frac{M_\varepsilon}{\tilde{S}_n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais $\lim_{n\to+\infty} \frac{M_\varepsilon}{\tilde{S}_n} = 0$ car $\lim_{n\to+\infty} \tilde{S}_n = +\infty$. Il y a donc un $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ que l'on peut choisir plus grand que $n_0(\varepsilon)$: $n_1(\varepsilon) \geq n_0(\varepsilon)$ tel que

$$\big(n \geq n_1(\varepsilon)\big) \Rightarrow \frac{M_\varepsilon}{\tilde{S}_n} < \varepsilon/2 \,.$$

22. On utilise encore ici que $v_n > 0$.

Alors pour $n \geq n_1(\varepsilon)$ on a bien

$$\frac{|S_n - \tilde{S}_n|}{\tilde{S}_n} < \varepsilon.$$

□

Applications

— Considérons $\alpha > -1$, et les suites $(u_n = n^\alpha)_n$ et $\left(v_n = \frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)_n$. On a

$$\frac{v_n}{u_n} = n\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}$$

et puisque $(1+h)^{\alpha+1} = 1 + (\alpha+1)h + h\epsilon(h)$ où $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

De plus , on calcule aisément la somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

on en déduit que la série de terme général v_n diverge et donc la série de terme général u_n diverge. Et nous savons que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} n^\alpha}{\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}} = 1\,.$$

Exercice *presque* **corrigé :** Soit $a \in]0,1]$, on définit une suite (u_n) par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n - u_n^3\ ,\ u_0 = a$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est positive décroissante.
   On introduit la fonction f définie par $f(x) = x - x^3 = x(1-x^2)$, on a pour $x \in]0,1[$

   $$0 < (1-x^2) < 1 \ \text{ et } \ 0 < x < 1$$

   ainsi

   $$x \in]0,1[\Rightarrow f(x) \in]0,1[.$$

   Ceci garantit par une récurrence immédiate que pour tout entier n : $u_n \in]0,1[$ et donc que

   $$u_{n+1} - u_n = -u_n^3 < 0$$

2. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   La suite (u_n) est décroissante,minoré par 0 donc converge vers un réel ℓ. De plus la fonction f est continue donc

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

   et donc

$$\ell = \ell - \ell^3$$

   on en déduit que $\ell = 0$.
3. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = 2$.
   On a

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\left(u_n - u_n^3\right)^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - \left(u_n - u_n^3\right)^2}{\left(u_n - u_n^3\right)^2 u_n^2} = \frac{2u_n^4 - u_n^6}{\left(1 - u_n^2\right)^2 u_n^4} = \frac{2 - u_n^2}{\left(1 - u_n^2\right)^2}.$$

   .
4. En conclure que $u_n \simeq \frac{1}{\sqrt{2n}}$.
   On introduit la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n-1}^2}, n \geq 1.$$

   C'est une suite de réel strictement positif et puisque la série de terme général 2 diverge, on sait que la série de terme général v_n diverge et que si (S_n) est la suite définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1 - a^{-2}u_n^2}{u_n^2}$$

   alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{2n} = 1.$$

   Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue en 1, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n}\, u_n}{\sqrt{1 - a^{-2}u_n^2}} = 1.$$

   Il est alors facile de conclure avec l'égalité :

$$\sqrt{2n}\, u_n = \frac{\sqrt{2n}\, u_n}{\sqrt{1 - a^{-2}u_n^2}} \times \sqrt{1 - a^{-2}u_n^2}$$

   et le fait que la suite (u_n) converge vers 0.

1.8 Appendice I : Le critère d'Abel

1.8.1 Une formule

On commence par démontrer la formule suivante que l'on peut interpréter comme une formule d'intégration par partie discrète :

Lemme 1.8.1. *Soient $(u_n)_n$ et $(a_n)_n$ deux suites de nombres complexes, on définit*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k u_k = A_{n-1} u_n - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} \left(u_k - u_{k-1} \right).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} A_{k-1} \left(u_k - u_{k-1} \right) &= \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} u_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} u_{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} A_{k-1} u_k + A_{n-1} u_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k u_k - A_0 u_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(A_{k-1} - A_k \right) u_k + A_{n-1} u_n - A_0 u_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(-a_k \right) u_k + A_{n-1} u_n - a_0 u_0 \\
&= - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k + A_{n-1} u_n
\end{aligned}$$

□

1.8.2 Critère d'Abel

Théorème 1.8.2. *Soient $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes et $(u_n)_n$ une suite réelle **décroissante positive**. On suppose de plus que*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

et que la suite $\left(A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \right)_n$ est bornée alors la série de terme général

$$a_n \, u_n$$

est convergente.

Démonstration. On va démontrer que la suite

$$\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k u_k \right)_n$$

est de Cauchy. Le formule précédente implique que pour $n \geq m$ on a

$$S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k u_k = A_{n-1}u_n - A_{m-1}u_m - \sum_{k=m+1}^{n} A_{k-1}\left(u_k - u_{k-1}\right).$$

Puisque la suite $(A_n)_n$ est bornée il y a un réel $R > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |A_n| \leq R.$$

On en déduit pour $n \geq m$:

$$|S_n - S_m| \leq R(|u_n| + |u_m|) + R \sum_{k=m+1}^{n} |u_k - u_{k-1}|.$$

La suite $(u_n)_n$ est décroissante positive donc pour $n \geq m$ on a

$$|u_n| = u_n \leq u_m$$

et

$$\sum_{k=m+1}^{n} |u_k - u_{k-1}| = \sum_{k=m+1}^{n} u_{k-1} - u_k = u_m - u_n \leq u_m.$$

On a donc démontrer que pour $n \geq m$ alors

$$|S_n - S_m| \leq 3Ru_m$$

Or $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc si $\varepsilon > 0$, il y a un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| = u_n \leq \frac{\varepsilon}{3R+1}.$$

Alors pour $n \geq m \geq n_0$, nous avons :

$$|S_n - S_m| \leq 3Ru_m \leq 3R\frac{\varepsilon}{3R+1} < \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(S_n)_n$ est de Cauchy, elle converge donc. □

1.8.3 Critère des séries alternées

Ce critère est un cas particulier du critère d'Abel :

Théorème 1.8.3. *Si $(u_n)_n$ est une suite **décroissante** de réels **positifs** convergent vers 0 :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

alors la série de terme général

$$(-1)^n u_n$$

est convergente.

En effet avec la suite $(a_n)_n$ définie par

$$a_n = (-1)^n$$

on a

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

est bien une suite bornée.

Un exemple classique d'utilisation du critère d'Abel : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ alors la série de terme général

$$\frac{\sin(n\theta)}{n} \ , n \geq 1$$

converge.

En effet c est clair si θ est un multiple de π [23]car alors on aura pour tout entier n

$$\sin(n\theta) = 0.$$

Supposons donc $\sin(\theta) \neq 0$. La suite

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$$

est bien une suite décroissante de réels positif qui converge vers 0. posons $a_n = \sin(n\theta)$ et démontrons que la suite

$$\left(A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)\right)_n$$

est bornée. En reconnaissant dans la troisième ligne la somme d'une suite géomé-

23. C'est à dire si $\sin(\theta) = 0$.

trique, on calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta) &= \sum_{k=1}^{n}\mathcal{I}\mathrm{m}\left(e^{ik\theta}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\mathcal{I}\mathrm{m}\left(e^{ik\theta}\right)\\
&= \mathcal{I}\mathrm{m}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ik\theta}\right)\\
&= \mathcal{I}\mathrm{m}\left(e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) = \mathcal{I}\mathrm{m}\left(e^{i\theta}\frac{e^{in\theta/2}\left(e^{-in\theta/2}-e^{in\theta/2}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}\right)}\right)\\
&= \mathcal{I}\mathrm{m}\left(e^{i\theta}e^{i(n-1)\theta/2}\frac{2i\sin(n\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)}\right)\\
&= \mathcal{I}\mathrm{m}\left(e^{i(n+1)\theta/2}\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right)\\
&= \sin((n+1)\theta/2)\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}
\end{aligned}$$

Puisque la fonction sinus ne prend que des valeurs dans $[-1,1]$, on en déduit que

$$|A_n| = \left|\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta)\right| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}.$$

La suite $(A_n = \sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta))_n$ est donc bornée et le critère d'Abel implique donc que la série de terme général :

$$\frac{\sin(n\theta)}{n} \quad , n \geq 1$$

converge.

1.8.4 Appendice II : un autre critère de Cauchy

On a alors la proposition suivante qui est du à Cauchy :

Proposition 1.8.4. *Soit $(v_n)_n$ une suite **décroissante** de réels **positifs** . Alors la série de terme général v_n converge si et seulement la série de terme général*

$$2^n v_{2^n}$$

converge.

Démonstration. La suite croissante $(S_n)_n$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

converge si et seulement si la suite $(S_{2^\ell})_\ell$ est converge. Or on a

$$\begin{aligned} S_{2^\ell} =& v_0 \\ &+ v_1 + v_2 \\ &+ v_3 + v_4 \\ &+ v_5 + v_6 + v_7 + v_8 \\ &\vdots \\ &v_{2^{\ell-1}+1} + v_{2^{\ell-1}+2} + \ldots + v_{2^\ell} \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} S_{2^\ell} =& v_0 + v_1 \\ &S_2 - S_1 \\ &S_4 - S_2 \\ &S_8 - S_4 \\ &\vdots \\ &S_{2^\ell} - S_{2^{\ell-1}} \end{aligned}$$

ou encore

$$S_{2^\ell} = v_0 + v_1 + \sum_{k=1}^{\ell} (S_{2^k} - S_{2^{k-1}})$$

On a

$$S_{2^k} - S_{2^{k-1}} = v_{2^{k-1}+1} + v_{2^{k-1}+2} + \ldots + v_{2^k} = \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} v_n.$$

Et puisque la suite (v_n) est **décroissante**, on a

$$2^{k-1} + 1 \leq n \leq 2^k \Rightarrow v_{2^k} \leq v_n \leq v_{2^{k-1}+1}$$

Puisqu'il y a 2^{k-1} entiers entre $2^{k-1}+1$ et 2^k on en déduit :

$$2^{k-1} v_{2^k} \leq S_{2^k} - S_{2^{k-1}} = \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} v_n \leq 2^{k-1} v_{2^{k-1}+1}.$$

On a donc

$$v_0 + v_1 + \sum_{k=1}^{\ell} 2^{k-1} v_{2^k} \leq S_{2^\ell} \leq v_0 + v_1 + \sum_{k=1}^{\ell} 2^{k-1} v_{2^{k-1}+1}$$

Or

$$v_0 + v_1 + \sum_{k=1}^{\ell} 2^{k-1} v_{2^k} = v_0 + v_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\ell} 2^k v_{2^k}$$

et puisque la suite (v_n) est décroissante :

$$v_0 + v_1 + \sum_{k=1}^{\ell} 2^{k-1} v_{2^{k-1}+1} = v_0 + v_1 + v_2 + \sum_{k=2}^{\ell} 2^{k-1} v_{2^{k-1}+1}$$
$$\leq v_0 + v_1 + v_2 + \sum_{k=2}^{\ell} 2^{k-1} v_{2^{k-1}}$$

On a donc les estimations :

$$v_0+v_1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\ell} 2^k v_{2^k} \leq S_{2^\ell} \leq v_0+v_1+v_2+\sum_{k=2}^{\ell} 2^{k-1} v_{2^{k-1}} = v_0+v_1+v_2+\sum_{k=1}^{\ell-1} 2^k v_{2^k}$$

qui permettent d'en déduire facilement le résultat.

Si la série de terme général $2^n v_{2^n}$ converge alors la suite

$$\left(v_0 + v_1 + v_2 + \sum_{k=1}^{\ell-1} 2^k v_{2^k} \right)_\ell$$

est majorée donc la suite croissante $(S_{2^\ell})_\ell$ est majorée donc convergente.

Vice versa si la suite la suite $(S_{2^\ell})_\ell$ est majorée, alors la suite $\left(\sum_{k=1}^{\ell} 2^k v_{2^k}\right)_\ell$ est majorée donc la série de terme général $2^n v_{2^n}$ converge. □

Une application aux séries de Riemann : Soit $p \in \mathbb{R}$, la série de terme général

$$\frac{1}{n^p}, \;\; n \geq 1$$

converge si et seulement si

$$p > 1 \;\; .$$

En effet, on rappelle que le terme général d'une série convergente converge vers 0. Or pour $p \leq 0$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \; p < 0 \\ 1 & \text{si } \; p = 0 \end{cases}$$

Donc si $p \leq 0$, la série de terme général $\frac{1}{n^p}, n \geq 1$ diverge.
Supposons donc que $p > 0$, alors la suite $\left(v_n = \frac{1}{n^p}\right\}_{n \geq 1}$ est positive décroissante. On peut utiliser le critère de Cauchy (1.8.4) ; or on a

$$2^\ell v_{2^\ell} = \frac{2^\ell}{(2^\ell)^p} = \frac{2^\ell}{2^{\ell p}} = 2^{(1-p)\ell} = \left(2^{(1-p)}\right)^\ell$$

La série de terme général $\left(2^{(1-p)}\right)^{\ell}, \ell \geq 0$ converge [24] si et seulement si

$$\left|2^{(1-p)}\right| = 2^{(1-p)} < 1$$

c'est à dire si et seulement si

$$p > 1.$$

1.9 Ce que l'on attend de vous

On se pose les questions suivantes
Le terme général de la série est-il positif ?

— **Si c'est le cas :**

i) peut on appliquer les critères d'Alembert, de Cauchy, de Riemann ?

ii) peut on majorer/minorer de façon élémentaire le terme général par le terme général d'une série de référence (géométrique, Riemman) ?

iii) Ai-je déjà majoré le terme général par le terme général d'une série de référence (géométrique, Riemman) ?

— **si ce n'est pas le cas :**
-Est ce que la série converge absolument ? C'est à dire on se repose les mêmes questions mais concernant la série de terme général $|u_n|$.
- Est ce une série alternée ? i.e. est ce que le terme général de la série est de la forme $(-1)^n a_n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs et convergeant vers zéro.

24. On utilise que lorsque $\zeta \in \mathbb{C}$ alors la série de terme général ζ^n converge si et seulement si $|\zeta| < 1$ et dans ce cas elle converge absolument et

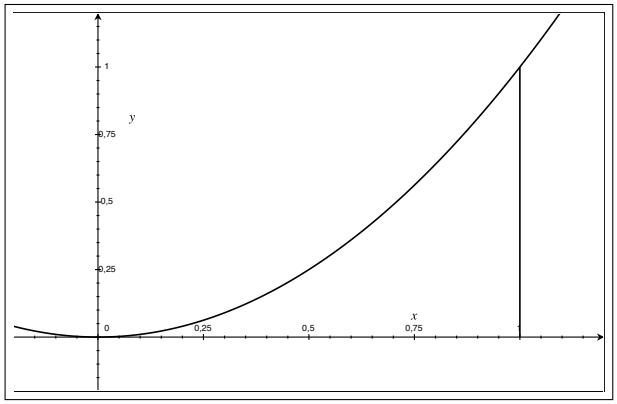
$$\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n = \frac{1}{1-\zeta}.$$

Chapitre 2

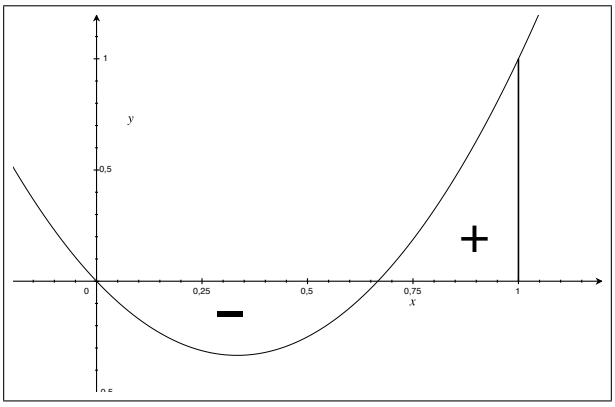
L'intégrale :

Avant Propos

On va ici définir rigoureusement l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Vous avez apreçu au lycée que si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ était une fonction continue positive alors $\int_a^b f(x)dx$ était une mesure de l'aire du domaine plan délimité par l'axe des x, le graphe de f et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

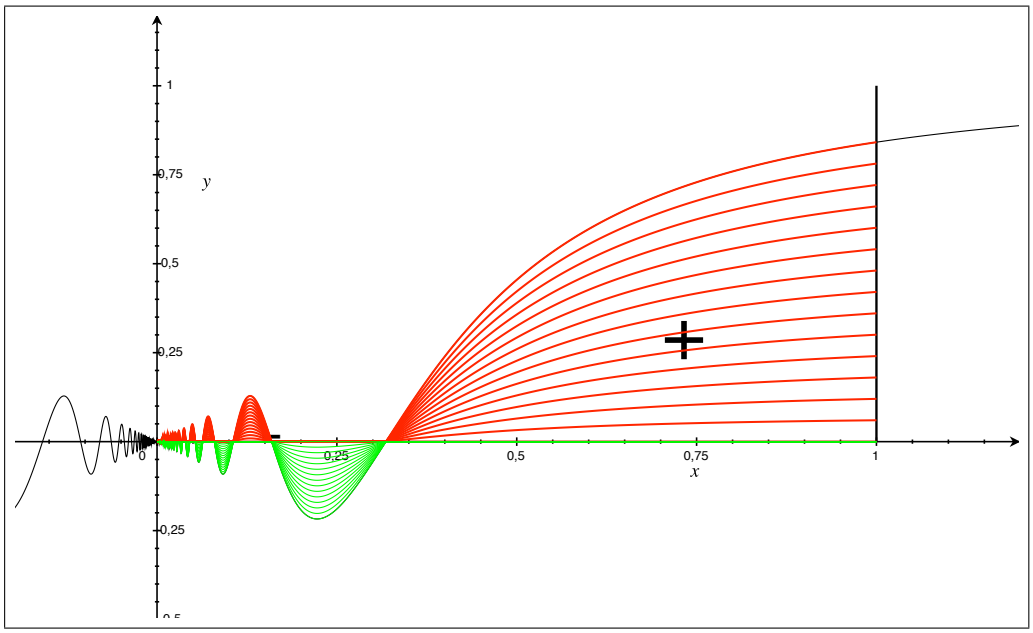


Lorsque $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ changeait de signe, on vous a expliqué que dans ce cas, il fallait compter négativement l'aire des portions contenues en dessous de l'axe des x.



Cependant une fonction continue peut changer de signe une infinité de fois sur un segment. C'est par exemple le cas de la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$$



Néanmoins dans la pratique, vous n'avez utilisé que le *théorème fondamental de l'analyse* suivant lequel :

Théorème : *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si F est une primitive* [1] *de f alors*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

1. C'est à dire F est dérivable et $F' = f$.

Ce que l'on propose de faire ici est de définir l'intégrale à partir de la *notion d'aire* et de vérifier le théorème fondamental de l'analyse qui établit ce lien entre intégrale et primitive. Pour savoir pourquoi on nomme ce théorème *théorème fondamental de l'analyse*, il faut se souvenir qu'avant l'invention du calcul intégral et différentiel par Newton et Leibniz, le moindre calcul d'aire, de volume était d'une complexité qui pouvait faire valoir à son auteur la célébrité ; et après la *découverte* de ce théorème fondamental de l'analyse, ces calculs d'aires et de volume devenaient accessible au plus grand nombre d'étudiants. Je vous invite à lire les pages du beau livre de D. Guedj "*Le théorème du perroquet*"[2], en voici un extrait :

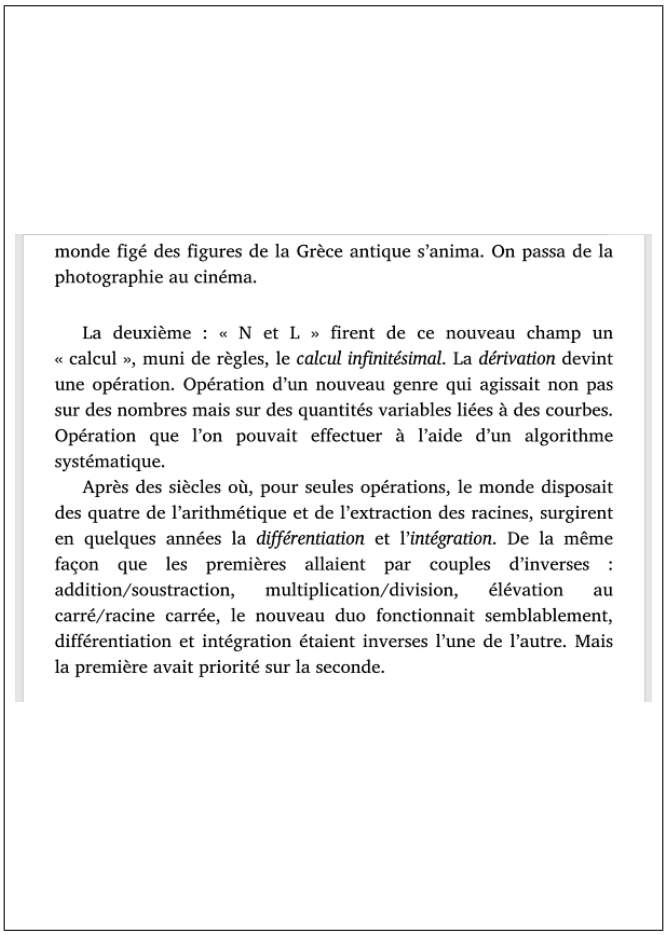
C'est là qu'intervinrent les deux véritables fondateurs de l'Analyse. N et L, Newton et Leibniz, les pères ennemis qui se déchirèrent pour que leur paternité soit reconnue ! On leur doit deux découvertes essentielles.

La première : Ils découvrirent que les deux directions différentes dans lesquelles les mathématiciens avaient travaillé jusqu'alors, détermination des tangentes et calcul d'aires, constituaient en fait les deux faces d'un même phénomène et que l'on pouvait passer de l'une à l'autre. On pouvait à partir des tangentes remonter à la courbe, on pouvait de la fonction dérivée remonter à la fonction dont elle était la dérivée. Une rectification avait été ramenée à une quadrature ! Si les Grecs voyaient ça !

Ce fut une révélation dans le monde des mathématiciens. Le même outil était capable d'effectuer des actions aussi différentes que calculer la longueur d'une courbe, déterminer l'aire d'une figure, calculer le volume d'un solide, positionner le centre de gravité d'une figure, localiser les minima et les maxima d'une courbe, déterminer les tangentes, exprimer des vitesses et des accélérations ! Une sorte d'outil universel qui enthousiasma ceux qui se préoccupaient de physique. Les variations de toutes sortes de phénomènes pourraient à l'avenir être étudiées avec cette technique. La porte s'ouvrait toute grande à la connaissance des phénomènes physiques. La physique et la mécanique avaient trouvé leur outil ! Et cet outil était mathématique.

Conséquence : le « mouvement », exclu le plus souvent des mathématiques, faisait une entrée en force. A la fin du XVII^{e} siècle, le

2. Denis Guedj, Le Théorème du Perroquet, Paris, Éditions du Seuil, coll. « Points roman », ? 2000 (1re éd. 1998), 654 p



monde figé des figures de la Grèce antique s'anima. On passa de la photographie au cinéma.

La deuxième : « N et L » firent de ce nouveau champ un « calcul », muni de règles, le *calcul infinitésimal*. La *dérivation* devint une opération. Opération d'un nouveau genre qui agissait non pas sur des nombres mais sur des quantités variables liées à des courbes. Opération que l'on pouvait effectuer à l'aide d'un algorithme systématique.

Après des siècles où, pour seules opérations, le monde disposait des quatre de l'arithmétique et de l'extraction des racines, surgirent en quelques années la *différentiation* et l'*intégration*. De la même façon que les premières allaient par couples d'inverses : addition/soustraction, multiplication/division, élévation au carré/racine carrée, le nouveau duo fonctionnait semblablement, différentiation et intégration étaient inverses l'une de l'autre. Mais la première avait priorité sur la seconde.

2.1 Uniforme continuité

2.1.1 Fonction continue

On rappelle qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{C}$ est dite continue en un point $x_0 \in I$ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(x \in I \ \&\ |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On dit qu'une fonction définie sur un intervalle y est continue si elle est continue en chacun des points de cet intervalle.
Un exemple : On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) .$$

C'est une fonction continue car $f = \sin \circ u$ où $u\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $u(x) = \frac{1}{x}$ et les fonctions u et $\sin$ sont continues.

On peut montrer cela directement. Soit $x_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$. On veut trouver $\delta > 0$ tel que si $x > 0$ & $|x - x_0| < \delta$ alors

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Puisque la dérivée de la fonction $\sin$ est bornée par 1, on sait, grâce à l'inégalité des accroissements finis, que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|.$$

On en déduit que si $x > 0$ alors

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{xx_0}.$$

On veut donc trouver $\delta > 0$ tel que si $x > 0$ & $|x - x_0| < \delta$ alors $\frac{|x-x_0|}{xx_0} < \varepsilon$. On doit assurer que le dénominateur n'est pas trop petit :

Si $x > x_0/2$ alors $\frac{|x-x_0|}{xx_0} < \frac{2|x-x_0|}{x_0^2}$. On pose alors $\delta = \min\{\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{2}\varepsilon\}$, on a alors

$$(x > 0 \ \& \ |x - x_0| < \delta) \Rightarrow \left(x > x_0/2 \ \& \ |x - x_0| \leq \frac{x_0^2}{2}\varepsilon\right).$$

Ainsi :

$$(x > 0 \ \ \& \ \ |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2.1.2 Définition

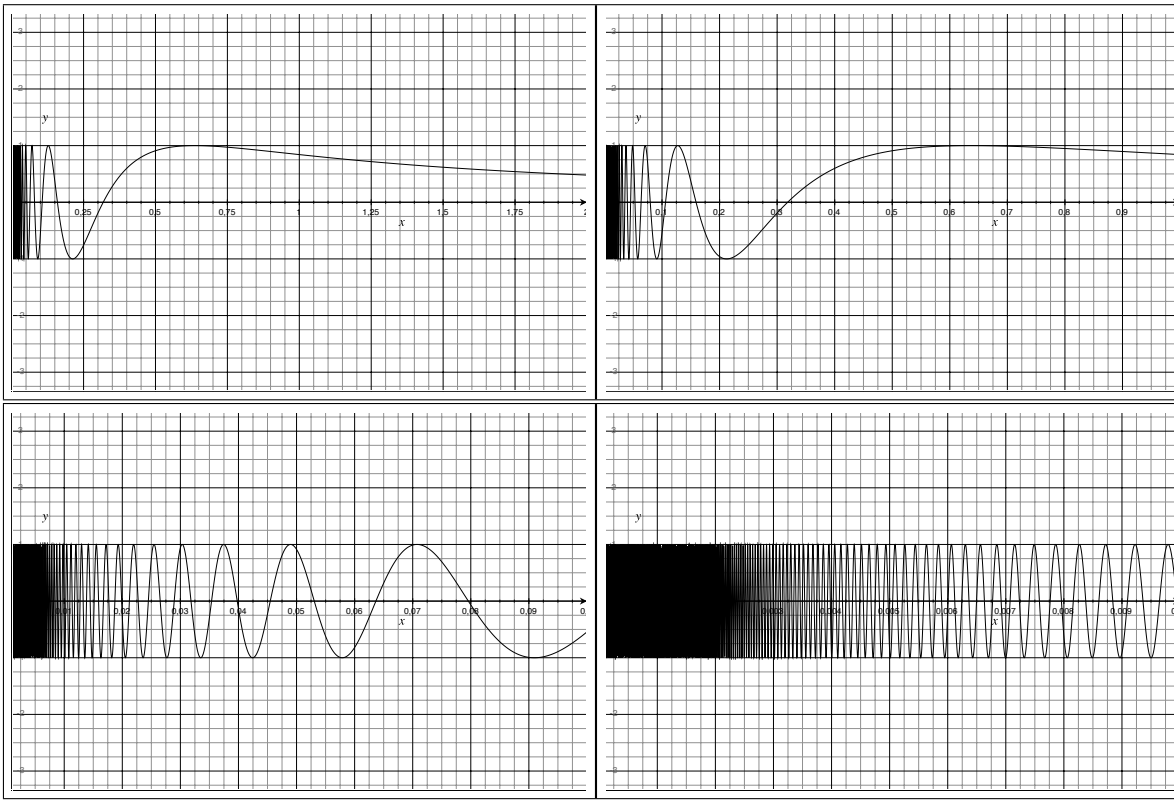
On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{C}$ est **uniformément continue** si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$(x, y \in I \ \& \ |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Remarques 2.1.1. *a) Il faut réfléchir à la définition assez longtemps pour qu'il soit évident qu'une fonction uniformément continue est continue.*

b) Une fois ceci compris, il faut bien comprendre d'où vient le qualificatif uniforme : c'est le fait que l'on puisse choisir le δ indépendamment de x_0.

c) La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. n'est pas uniformément continue.



Pour démontrer que f n'est pas uniformément continue, nous devons trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il y a deux réels $x_\delta, y_\delta > 0$ tels que $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ mais $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$.
Alors pour $k \in \mathbb{N}^*$, nous définissons

$$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \text{ et } y_k = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}.$$

Nous avons

$$f(x_k) = 1 \text{ et } f(y_k) = -1,$$

de plus $0 < x_k < y_k$ donc

$$|x_k - y_k| \leq \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} = \frac{2}{\pi(4k-1)}.$$

Considérons le réel $\varepsilon = 1 > 0$. Si $\delta > 0$, on trouve un entier non nul k tel que $y_k < \delta$ (par exemple $k = E\left(\frac{2}{\pi\delta}\right) + 12345$. On a alors $|x_k - y_k| < \delta$ et $|f(y_k) - f(x_k)| = 2 \geq 1 = \varepsilon$.

2.1.3 Module de continuité

Remarquons que si $f\colon I \to \mathbb{C}$ vérifie qu'il existe une fonction $\epsilon\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\lim_{\delta \to 0+} \epsilon(\delta) = 0 \text{ et } (x, y \in I \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon(|x - y|)\ ),$$

alors f est uniformément continue. On en conclut que :

a) s'il existe une constante positive κ telle que

$$x, y \in I \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \kappa\, |x - y|,$$

alors f est uniformément continue. On dit dans ce cas que la fonction f est κ-lipschitzienne ou simplement lipschitzienne [3]. si on ne veut pas spécifiée la valeur de la constante κ.

b) En particulier, I étant un intervalle ; si f est dérivable sur I et s'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in I$: $|f'(x)| \leq M$. Alors l'inégalité des accroissements finis [4] : nous apprend que f est M–lipschitzienne donc f est uniformément continue.

c) s'il existe une constante positive κ et $\alpha \in]0, 1]$ telle que

$$x, y \in I \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \kappa\, |x - y|^{\alpha},$$

3. Du nom de Rudolf Lipschitz (1832-1902) Mathématicien allemand.

4. Il y a une subtilité ici, car l'égalité des accroissements finis n'est pas vrai pour des fonctions à valeurs complexes mais l'inégalité des accroissements finis est elle valide :

Proposition 2.1.2. *Si $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$ et si $M \geq 0$ est tel que*

$$\text{pour tout } x \in]a, b[\ ,\ |f'(x)| \leq M$$

alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

Démonstration. Ce résultat se déduit de l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs réelles. le cas où $f(b) = f(a)$ est facile, on suppose donc que $f(b) \neq f(a)$ et on considère le module ρ et une détermination θ de l'argument de $f(b) - f(a)$:

$$f(b) - f(a) = \rho e^{i\theta}.$$

On étudie alors la fonction $u\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(x) = \Re\left(f(x)e^{-i\theta}\right).$$

Cette fonction est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. De plus si $x \in]a, b[$ alors

$$|u'(x)| = \left|\Re\left(f'(x)e^{-i\theta}\right)\right| \leq |f'(x)| \left|e^{-i\theta}\right| = |f'(x)| \leq M.$$

On en déduit que $|u(b) - u(a)| \leq M(b - a)$. Mais un calcul facile donne $u(b) - u(a) = \rho = |f(b) - f(a)|$. □

alors f est uniformément continue. On dit dans ce cas que la fonction f est α-Hölderienne [5] ou Hölderienne d'exposant α ou simplement Hölderienne [6]

d) Si $f\colon I \to \mathbb{C}$ est uniformément continue, nous pouvons introduire son module de continuité $\omega\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ défini par

$$\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \; ; \; x, y \in I \;\&\; |x - y| < \delta \} = \sup A_\delta$$

où $A_\delta = \{|f(x) - f(y)| \; ; \; x, y \in I \;\&\; |x - y| < \delta \}$. Si $\delta < \eta$ alors $A_\delta \subset A_\eta$ et donc $\omega(\delta) \leq \omega(\eta)$. La fonction ω est croissante et l'uniforme continuité de f s'exprime par le fait que la fonction ω a pour limite 0 en 0 :

$$\lim_{\delta \to 0+} \omega(\delta) = 0.$$

2.1.4 Théorème de Heine

[7] *Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue alors f est uniformément continue.*

Nous admettrons ce résultat dont la preuve est donnée dans le premier appendice de cette leçon.

2.2 Somme de Riemann (à pas uniforme) et intégrale

2.2.1 Définition et notation

Soit $f\colon I \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle I et $a, b \in I$. On définit

$$I_n^+(f, a, b) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) ,$$

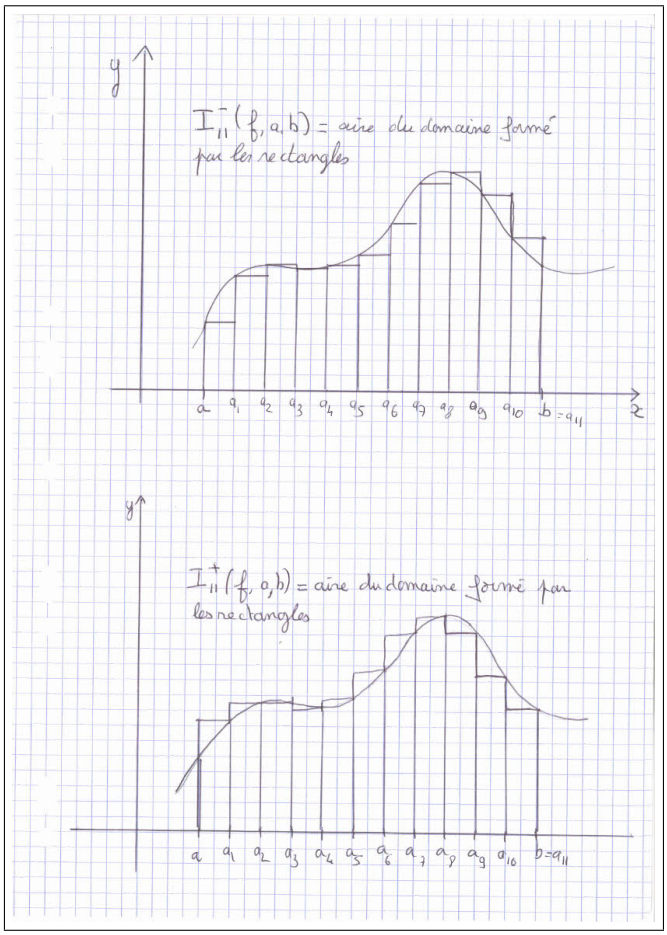
et

$$I_n^-(f, a, b) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) .$$

5. Du nom de Ludwig Otto Hölder (1859 -1937) Mathématicien allemand.

6. Démontrer que si f est Hölderienne d'exposant α où $\alpha > 1$ alors f est constante (I étant un intervalle).

7. Heinrich Heine (1821-1881) mathématicien allemand, il semblerait que ce théorème se trouve déjà dans des cours de Dirichlet en 1862 (ces cours ont été publiés en 1904) alors que H. Heine a publié la preuve en 1872. Avant ces travaux, la différence entre fonction continue et uniformément continue n'était pas clarifiée.



Posons $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$. L'intervalle $[a,b]$ est découpé en n sous intervalle de même longueurs

$$[a,b] = \cup_{k=0}^{n-1}[a_k, a_{k+1}].$$

Si f est à valeurs positives alors $I_n^+(f,a,b)$ est l'aire d'un domaine plan formé de la réunion des rectangles $[a_k, a_{k+1}] \times [0, f(a_{k+1})]$ alors que $I_n^-(f,a,b)$ est l'aire d'un domaine plan formé de la réunion des rectangles $[a_k, a_{k+1}] \times [0, f(a_k)]$.

Remarque 2.2.1. *On a*

$$\left|I_n^+(f,a,b) - I_n^-(f,a,b)\right| = \frac{|b-a|}{n}\ |f(b) - f(a)|\ ,$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} I_n^+(f,a,b) - I_n^-(f,a,b) = 0.$

Remarque 2.2.2. *On a*

$$I_n^\pm(f,a,b) = -I_n^\pm(f,b,a).$$

2.2.2 Exemples

i) On commence avec l'exemple d'Archimède pour la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$, nous avons alors

$$I_n^+(f, 0, 1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Ici on peut procéder de deux façons, la première est de se souvenir d'un exercice de Mathématiques 1 selon lequel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}.$$

et donc $I_n^+(f, 0, 1) = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}\left(n + \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et on a

$$\lim_{n\to+\infty} I_n^+(f, 0, 1) = \frac{1}{3}.$$

La seconde est d'introduire les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = n^2 \text{ et } v_n = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - n^3\right) = \frac{1}{3}\left(3n^2 + 3n + 1\right) = n^2 + n + \frac{1}{3}.$$

Ces suites sont à valeurs strictement positives et $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. De plus les séries de termes généraux u_n et v_n divergent, on sait donc que les suites (S_n) et (S'_n) définies par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ et } S'_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1\right)$$

sont équivalentes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{S'_n} = 1$$

Mais

$$I_n^+(f, 0, 1) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{S_n}{3S'_n} \frac{(n+1)^3 - 1}{n^3}.$$

Donc ce calcul mène également à la conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n^+(f, 0, 1) = \frac{1}{3}.$$

ii) Considèrons maintenant la fonction $f(x) = \sin(x)$ et un réel b :

$$I_n^+(f, 0, b) = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{kb}{n}\right) = \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{kb}{n}\right) = \frac{b}{n} \mathcal{I}\mathrm{m}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\frac{kb}{n}}\right).$$

On calcule alors la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de raison $\zeta = e^{i\frac{b}{n}}$.

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i\frac{kb}{n}} = \sum_{k=0}^{n} \zeta^k = \frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta} = \frac{1-e^{i(n+1)\frac{b}{n}}}{1-e^{i\frac{b}{n}}} = \frac{e^{i(n+1)\frac{b}{2n}}}{e^{i\frac{b}{2n}}} \frac{e^{-i(n+1)\frac{b}{2n}} - e^{i(n+1)\frac{b}{2n}}}{e^{-i\frac{b}{2n}} - e^{i\frac{b}{2n}}}.$$

Soit

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i\frac{kb}{n}} = \frac{e^{i(n+1)\frac{b}{2n}}}{e^{i\frac{b}{2n}}} \frac{-2i\sin\left((n+1)\frac{b}{2n}\right)}{-2i\sin\left(\frac{b}{2n}\right)} = \frac{e^{i\frac{b}{2}}e^{i\frac{b}{2n}}}{e^{i\frac{b}{2n}}} \frac{\sin\left((n+1)\frac{b}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2n}\right)} = e^{i\frac{b}{2}} \frac{\sin\left((n+1)\frac{b}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2n}\right)}.$$

Ceci permet d'obtenir l'égalité :

$$I_n^+(f,0,b) = \frac{b}{n}\sin\left(\frac{b}{2}\right)\frac{\sin\left((n+1)\frac{b}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2n}\right)} = 2\sin\left(\frac{b}{2}\right)\frac{\frac{b}{2n}}{\sin\left(\frac{b}{2n}\right)}\sin\left((n+1)\frac{b}{2n}\right).$$

Compte tenu du fait que $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)} = 1$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{b}{2n}}{\sin\left(\frac{b}{2n}\right)} = 1$$

et par continuité de la fonction sinus en $b/2$, nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\left((n+1)\frac{b}{2n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{b}{2}+\frac{b}{2n}\right) = \sin\left(\frac{b}{2}\right).$$

Au final, nous obtenons [8] :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n^+(f,0,b) = 2\sin^2\left(\frac{b}{2}\right) = 1-\cos(b).$$

iii) Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le c \\ 1 & \text{si } x > c \end{cases}.$$

Soient $a < b$ deux réels, on a alors :
— si $c < a$ alors $I_n^+(f,a,b) = 1$,
— si $c \ge b$ alors $I_n^+(f,a,b) = 0$
— si $a \le c \le b$ alors

$$I_n^+(f,a,b) = \frac{b-a}{n}N(n)$$

où $N(n)$ est le nombre d'entiers k dans l'intervalle $[1,n]$ vérifiant :

$$a + k\frac{b-a}{n} > c.$$

8. Avec la formule $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(\theta)}{2}$.

Donc

$$N(n) = \operatorname{card} A_n \text{ avec } A_n = \left\{ k \in \{1, \dots, n\}; a + k\frac{b-a}{n} > c \right\}.$$

Donc

$$A_n = \left\{ k \in \{1, \dots, n\}; k > n\frac{c-a}{b-a} \right\}.$$

Rappelons ici que si x est un nombre réel alors sa partie entière $E(x)$ est l'unique entier relatif tel que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Donc

$$k > n\frac{c-a}{b-a} \Rightarrow k \geq E\left(n\frac{c-a}{b-a}\right) + 1,$$

ainsi

$$A_n = \left\{ E\left(n\frac{c-a}{b-a}\right) + 1, E\left(n\frac{c-a}{b-a}\right) + 2, \dots, n \right\}$$

et

$$N(n) = n - E\left(n\frac{c-a}{b-a}\right)$$

en se servant de l'encadrement :

$$x - 1 < E(x) \leq x,$$

Nous en déduisons :

$$n\frac{b-c}{b-a} = n - \frac{c-a}{b-a} \leq N(n) \leq n - n\frac{c-a}{b-a} + 1 = n\frac{b-c}{b-a} + 1.$$

À l'aide du théorème des gendarmes, on en déduit donc :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n^+(f, a, b) = b - c.$$

Une extension facile de ces arguments montrent :

Proposition 2.2.3. *Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $c \in [a, b]$, on définit quatres fonctions*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq c \\ \lambda & \text{si } x > c \end{cases}, \; g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ \lambda & \text{si } x \geq c \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } x \leq c \\ 0 & \text{si } x > c \end{cases} \text{ et } \ell(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } x < c \\ 0 & \text{si } x \geq c \end{cases}.$$

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} I_n^+(f, a, b) = \lim_{n \to +\infty} I_n^+(g, a, b) = \lambda(b - c)$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} I_n^+(h, a, b) = \lim_{n \to +\infty} I_n^+(\ell, a, b) = \lambda(c - a).$$

2.2.3 Cas des fonctions monotones

Proposition 2.2.4. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone et $a, b \in I$ alors les suites $\left(I_n^+(f,a,b)\right)_n$ et $\left(I_n^-(f,a,b)\right)_n$ sont des suites de Cauchy et convergent vers la même limite. Cette limite est notée*

$$\int_a^b f(x)dx,$$

et elle est appelée l'intégrale de f entre a et b.

Démonstration. On fait la preuve pour une fonction croissante et pour $a < b$. On effectue au préalable quelques remarques qui nous seront utiles : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on note $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$. Puisque f est croissante, on a $f(a_k) \leq f(a_{k+1})$ et en sommant de $k = 0$ à $n-1$ ces inégalités, nous obtenons :

$$I_n^-(f,a,b) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1}) = I_n^+(f,a,b).$$

Ensuite on a aussi pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$: $f(a) \leq f(a_k) \leq f(b)$. Ainsi :

$$(\heartsuit)\quad f(a)(b-a) = I_1^-(f,a,b) \leq I_n^-(f,a,b) \leq I_n^+(f,a,b) \leq I_1^+(f,a,b) = f(b)(b-a)$$

Soit maintenant $n, m \in \mathbb{N}^*$, nous allons comparer $I_n^-(f,a,b)$ et $I_{mn}^-(f,a,b)$. On a

$$I_n^-(f,a,b) = \sum_{k=0}^{n-1} I_1^-(f,a_k,a_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{n-1} I_m^-(f,a_k,a_{k+1}) = I_{mn}^-(f,a,b).$$

L'inégalité provenant de l'inégalité $(\heartsuit)$ et la dernière égalité du fait que pour diviser l'intervalle $[a,b]$ en mn sous intervalle de même longueur, on peut le diviser en les n sous intervalles de même longueur : $[a_0,a_1] \cup [a_1,a_2] \cup \cdots \cup [a_{n-1},a_n]$ et ensuite diviser chacun de ces intervalles en m sous intervalles de même longueur.

De la même façon, nous obtenons

$$I_{mn}^+(f,a,b) \leq I_n^+(f,a,b),$$

D'où

$$I_n^-(f,a,b) \leq I_{mn}^-(f,a,b) \leq I_{mn}^+(f,a,b) \leq I_n^+(f,a,b).$$

et on obtient

$$0 \leq I_{mn}^-(f,a,b) - I_n^-(f,a,b) \leq I_n^+(f,a,b) - I_n^-(f,a,b) = \frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right).$$

Ainsi si $n, m \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|I_n^-(f,a,b) - I_m^-(f,a,b)\right| &\leq \left|I_n^-(f,a,b) - I_{mn}^-(f,a,b)\right| + \left|I_{mn}^-(f,a,b) - I_m^-(f,a,b)\right| \\ &\leq (b-a)\left(f(b)-f(a)\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right).\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Et posons

$$N_0 = E\left(\frac{2\,(b-a)\,(f(b)-f(a))}{\epsilon}\right) + 100.$$

Si $n, m \geq N_0$ alors

$$(b-a)\,(f(b)-f(a))\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

et on en déduit :

$$(n, m \geq N_0) \Rightarrow \left|I_n^-(f,a,b) - I_m^-(f,a,b)\right| < \epsilon.$$

La suite $(I_n^-(f,a,b))_n$ est donc de Cauchy donc converge. L'égalité obtenue à la remarque 2.2.1 garantit que le suite $(I_n^+(f,a,b))_n$ est aussi convergente (donc de Cauchy) et converge vers la même limite :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n^-(f,a,b) = \lim_{n\to+\infty} I_n^+(f,a,b).$$

□

Remarque 2.2.5. *Démontrer dans le cadre de la preuve ci dessus que*

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{I_n^-(f,a,b); n \in \mathbb{N}^*\} = \inf\{I_n^+(f,a,b); n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Remarque 2.2.6. *Une conséquence est que pour une fonction f qui est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante alors les suites $(I_n^+(f,a,b))_n$ et $(I_n^-(f,a,b))_n$ sont des suites de Cauchy et convergent vers la même limite que l'on note aussi $\int_a^b f(x)dx$.*

2.2.4 Cas des fonctions continues

Proposition 2.2.7. *Si $f\colon I \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $a, b \in I$ alors les suites $(I_n^+(f,a,b))_n$ et $(I_n^-(f,a,b))_n$ sont des suites de Cauchy et convergent vers la même limite. Cette limite est notée*

$$\int_a^b f(x)dx,$$

et appelée l'intégrale de f entre a et b.

Démonstration. Soit $f\colon I \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On fait la preuve uniquement pour $a < b$. On va estimer également la différence $I_n^-(f,a,b) - I_{mn}^-(f,a,b)$.

La restriction à l'intervalle $[a,b]$ de la fonction f est continue et donc d'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue. On introduit alors le module de continuité de la fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$:

$$\omega(\delta) = \sup\left\{|f(x)-f(y)|\ ;\ x,y \in [a,b]\ \&\ |x-y| < \delta\right\}.$$

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on note toujours $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$. On a

$$I^-_{nm}(f, a, b) = \sum_{k=0}^{n-1} I^-_m(f, a_k, a_{k+1})$$

et

$$I^-_n(f, a, b) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_k)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\left|I^-_m(f, a_k, a_{k+1}) - (a_{k+1} - a_k) f(a_k)\right| &= \frac{a_{k+1} - a_k}{m} \left| \sum_{\ell=0}^{m-1} f\left(a_k + \ell \frac{a_{k+1} - a_k}{m}\right) - f(a_k) \right| \\
&\leq \frac{a_{k+1} - a_k}{m} \sum_{\ell=0}^{m-1} \left| f\left(a_k + \ell \frac{a_{k+1} - a_k}{m}\right) - f(a_k) \right| \\
&\leq \frac{a_{k+1} - a_k}{m} \sum_{\ell=0}^{m-1} \omega\left(\ell \frac{b-a}{nm}\right) \\
&\leq \frac{b-a}{nm} \sum_{\ell=0}^{m-1} \omega\left(m \frac{b-a}{nm}\right) = \frac{b-a}{nm} m\omega\left(\frac{b-a}{n}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}
\left|I^-_{nm}(f, a, b) - I^-_n(f, a, b)\right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|I^-_m(f, a_k, a_{k+1}) - (a_{k+1} - a_k) f(a_k)\right| \\
&\leq n \frac{b-a}{n} \omega\left(\frac{b-a}{n}\right) = (b-a)\omega\left(\frac{b-a}{n}\right).
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors puisque $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ est uniformément continue, il y a $\delta > 0$ tel que

$$x \in]0, \delta] \Rightarrow \omega(\delta) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)+1} \Rightarrow (b-a)\omega(\delta) < (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons alors $N_0 = E\left(\frac{b-a}{\delta}\right) + 10000$. Si $n, m \geq N_0$ alors $(b-a)/n < \delta$ et $(b-a)/m < \delta$ donc

$$\begin{aligned}
\left|I^-_n(f, a, b) - I^-_m(f, a, b)\right| &\leq \left|I^-_n(f, a, b) - I^-_{mn}(f, a, b)\right| + \left|I^-_{mn}(f, a, b) - I^-_m(f, a, b)\right| \\
&\leq (b-a)\omega\left(\frac{b-a}{n}\right) + (b-a)\omega\left(\frac{b-a}{m}\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

La suite $(I_n^-(f,a,b))_n$ est donc de Cauchy donc converge. L'égalité obtenue à la remarque 2.2.1 garantie que le suite $(I_n^+(f,a,b))_n$ est aussi convergente (donc de Cauchy) et converge vers la même limite :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n^-(f,a,b) = \lim_{n\to+\infty} I_n^+(f,a,b).$$

□

2.2.5 Cas des fonctions continues par morceaux

Définition 2.2.8. *On dit qu'une fonction $f\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ est continue par morceaux s'il existe un ensemble fini de points $a_1 < a_2 < \cdots < a_d$ de l'intervalle $[a,b]$ tel que f soit continue en chaque point $x \in [a,b]\setminus\{a_1,a_2,\ldots,a_d\}$ et admet une limite à droite et à gauche (si cela à un sens) en a_1, $a_2,\ldots,$ a_d. La restriction de f à chaque intervalle $]a,a_1[$, $]a_1,a_2[$, $]a_2,a_3[$, $\ldots$, $]a_{d-1},a_d[$, $]a_d,b[$ est continue et peut être prolongé en une fonction continue sur la fermeture de ces intervalles.*

Remarques 2.2.9. *i) Si $f\colon I\to\mathbb{C}$ est une fonction à valeurs complexes, on dira que f est continue par morceaux si pour tout segment $[a,b]\subset I$, la restriction de la fonction f à l'intervalle $[a,b]$ est continue par morceaux.*

*ii) **Question :** La composée de fonction continue par morceaux est elle continue par morceaux*[9] *?*

iii) Soit $u\colon I\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que

$$x\in[a,b]\Rightarrow u(x)\in I.$$

Montrer que la fonction $u\circ f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux.

Proposition 2.2.10. *Si $f\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux alors les suites $(I_n^+(f,a,b))_n$ et $(I_n^-(f,a,b))_n$ sont des suites de Cauchy et convergent*

9. La réponse est non : on considère la fonction $H\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$H(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x\geq 0.\end{cases}$$

et $u\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$u(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x>0.\end{cases}$$

Puisque

$$x\in[0,1]\Rightarrow u(x)\in[-1,1],$$

la fonction $H\circ u$ est bien définie sur $[0,1]$ mais elle est discontinue en chaque réel de la forme $\frac{1}{k\pi}$ où $k\in\mathbb{N}^*$; elle a une nombre infini de points de discontinuités, elle n'est donc pas continue par morceaux.

vers la même limite. Cette limite est notée

$$\int_a^b f(x)dx,$$

et appelée l'intégrale de f entre a et b.

Démonstration. On considère donc une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, par définition, f n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_d.$$

On note $f(a_i-) = \lim_{x\to a_i-} f(x)$ et $f(a_i+) = \lim_{x\to a_i+} f(x)$. Si $a_1 = a$, on posera $f(a_1-) = f(a)$ et si $a_d = b$ on posera $f(a_d+) = f(b)$.

Pour chaque $i \in \{1,2,\dots,d\}$, on introduit une fonction de saut $h_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ qui capture la discontinuité de f en a_i :

$$h_i(x) = \begin{cases} f(a_i-) & \text{si } x < a_i \\ f(a_i) & \text{si } x = a_i \\ f(a_i+) & \text{si } x > a_i \end{cases}$$

On définit alors la fonction $g = f - \sum_{i=1}^d h_i$. C'est une fonction continue sur $[a,b]\backslash\{a_1,a_2,\dots,a_d\}$. Soit $i \in \{1,2,\dots,d\}$, on examine maintenant la continuité de g en a_i. Puisque

$$(f-h_i)(a_i) = 0 = \lim_{x\to a_i-} f(x) - h_i(x) = \lim_{x\to a_i+} f(x) - h_i(x),$$

la fonction $f - h_i$ est continue en a_i. De plus si $j \in \{1,2,\dots,d\}$ et $j \neq i$ alors la fonction h_j est continue [10] en a_i. Donc

$$g = f - h_i - \sum_{j=1}^{i-1} h_j - \sum_{j=j+1}^{d} h_j$$

est bien continue en a_i.

On a donc démontré que g est continue sur $[a,b]$, on sait donc que la suite $\left(I_n^+(g,a,b)\right)_n$ est de Cauchy. En se servant de la proposition 2.2.3, on peut facilement démontrer [11] que pour chaque $i \in \{1,2,\dots,d\}$, la suite $\left(I_n^+(h_i,a,b)\right)_n$

10. Elle est constante sur un intervalle ouvert contenant a_i.

11. En effet on a $h_i = h_i^- + h_i^+ + h_i^0$ où

$$h_i^-(x) = \begin{cases} f(a_i-) & \text{si } x < a_i \\ 0 & \text{si } x \geq a_i \end{cases}, \qquad h_i^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a_i \\ f(a_i+) & \text{si } x > a_i \end{cases}$$

$$\text{et} \qquad h_i^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_i \\ f(a_i) & \text{si } x = a_i \\ 0 & \text{si } x > a_i \end{cases}.$$

On a $I_n^+(h_i;a,b) = I_n^+(h_i^-;a,b) + I_n^+(h_i^+;a,b) + I_n^+(h_i^0;a,b)$. La proposition 2.2.3 assure que les suites $\left(I_n^+(h_i^-,a,b)\right)_n$ et $\left(I_n^+(h_i^+,a,b)\right)_n$ convergent. Par ailleurs, il est facile de montrer que $I_n^+(h_i^-,a,b) = 0$ ou $I_n^+(h_i^-,a,b) = \frac{b-a}{n} f(a_i)$, la suite $\left(I_n^+(h_i^0,a,b)\right)_n$ converge donc vers 0.

converge vers $(a_i - a)f(a_i-) + (b - a_i)f(a_i+)$ donc cette suite est aussi de Cauchy. Puisque pour chaque $n > 0$:

$$I_n^+(f, a, b) = I_n^+(g, a, b) + \sum_{i=1}^{d} I_n^+(h_i, a, b)$$

on peut en conclure que la suite $\left(I_n^+(f, a, b)\right)_n$ est de Cauchy donc converge. □

2.3 Propriétés de l'intégrale ainsi définie

2.3.1 Linéarité

Proposition 2.3.1. *Soient $u, v \colon I \to \mathbb{C}$ des fonctions continues par morceaux, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a, b \in I$ alors*

$$\int_a^b (u + \lambda v)(x)dx = \int_a^b u(x)dx + \lambda \int_a^b v(x)dx.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $k = 0, \ldots, n : a_k = a + k\frac{b-a}{n}$, alors nous avons :

$$I_n^-(u+\lambda v, a, b) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u(a_k) + \lambda v(a_k)) = \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} u(a_k) + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} v(a_k) \right),$$

on a donc

$$I_n^-(u + \lambda v, a, b) = I_n^-(u, a, b) + \lambda I_n^-(v, a, b),$$

on conclut alors en passant à la limite dans ces égalités. □

2.3.2 Changements de variables linéaires

Proposition 2.3.2. *Soient $u \colon I \to \mathbb{C}$ une fonction continues par morceaux et $a, b \in I$ alors*

i) $\int_a^b u(x)dx = -\int_b^a u(x)dx$.

ii) Pour $\kappa \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b u(x)dx = \kappa \int_{\frac{a-\alpha}{\kappa}}^{\frac{b-\alpha}{\kappa}} u(\kappa t + \alpha)dt.$$

Démonstration. La première identité provient de l'égalité

$$\begin{aligned} I_n^-(u,b,a) &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(b+k\frac{a-b}{n}\right) = -\frac{a-b}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(b+k\frac{a-b}{n}\right) \\ &= -\frac{a-b}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(\frac{nb+ka-kb}{n}\right) = -\frac{a-b}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(\frac{na+(n-k)(b-a)}{n}\right) \\ &= -\frac{a-b}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(a+\frac{(n-k)(b-a)}{n}\right) = -\frac{a-b}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u\left(a+\frac{\ell(b-a)}{n}\right) \\ &= -I_n^+(u,a,b). \end{aligned}$$

On conclut alors en passant à la limite dans ces égalités.

Pour la seconde identité, on suppose $a<b$ et on définit $f\colon \left[\frac{a-\alpha}{\kappa}, \frac{b-\alpha}{\kappa}\right] \to \mathbb{C}$ par

$$f(t) = u(\kappa t+\alpha).$$

Notons $h = \frac{b-\alpha}{\kappa} - \frac{a-\alpha}{\kappa} = \frac{b-a}{\kappa}$ et remarquons que $f\left(\frac{a-\alpha}{\kappa}+kh\right) = u\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$; ainsi

$$\begin{aligned} I_n^-\left(f, \frac{a-\alpha}{\kappa}, \frac{b-\alpha}{\kappa}\right) &= \frac{1}{n}\left(\frac{b-\alpha}{\kappa}-\frac{a-\alpha}{\kappa}\right)\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a-\alpha}{\kappa}+kh\right) \\ &= \frac{1}{\kappa}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \frac{1}{\kappa} I_n^-(u,a,b). \end{aligned}$$

On conclut alors en passant à la limite dans ces égalités. □

2.3.3 Comparaison

Proposition 2.3.3. *Soient $u, v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux à **valeurs réelles**. On suppose*

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ u(x) \le v(x),$$

alors

$$\int_a^b u(x)dx \le \int_a^b v(x)dx.$$

Si de plus il y a un point $x_0 \in [a,b]$ tel que $u-v$ est continue en x_0 et $u(x_0) < v(x_0)$ alors

$$\int_a^b u(x)dx < \int_a^b v(x)dx.$$

Par contraposition, on en déduit que

Corollaire 2.3.4. *Soient* $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux à* ***valeurs réelles****. On suppose*

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ h(x) \geq 0,$$

alors $\int_a^b h(x)dx \geq 0$ *et*

$$\int_a^b h(x)dx = 0$$

si et seulement si il y a un ensemble fini $a_1, \ldots, a_d \subset [a,b]$ *tel que*

$$\forall x \in [a,b] \setminus \{a_1, \ldots, a_d\},\ h(x) = 0.$$

Démonstration. On considère donc deux fonctions continues par morceaux $u, v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ u(x) \leq v(x),$$

On pose $h(x) = v(x) - u(x)$. On sait que pour tout $x \in [a,b]$, $h(x) \geq 0$. On en déduit que si $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$I_n^-(h,a,b) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \geq 0.$$

On en déduit par passage à la limite dans ces inégalités larges que

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b v(x)dx - \int_a^b u(x)dx \geq 0.$$

On suppose de plus que $h = u - v$ est continue en x_0 et $h(x_0) > 0$. Par continuité de h en x_0, on sait qu'il existe un intervalle [12] $[\alpha, \omega] \subset [a,b]$ tel que

$$x \in [\alpha, \omega] \Rightarrow h(x) \geq \frac{h(x_0)}{2}.$$

On introduit alors la fonction $\mathcal{E}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [\alpha, \omega] \\ \frac{h(x_0)}{2} & \text{si } x \in [\alpha, \omega]. \end{cases}$$

12. En effet puisque $\frac{h(x_0)}{2} > 0$, il y a un réel $\delta > 0$ tel que

$$(x \in [a,b]\ \&\ |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| < \frac{h(x_0)}{2},$$

donc

$$x \in [a,b] \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ \Rightarrow\ \frac{h(x_0)}{2} = h(x_0) - \frac{h(x_0)}{2} < h(x) < h(x_0) + \frac{h(x_0)}{2} = \frac{3h(x_0)}{2}.$$

Il suffit de poser $\alpha = \max\left(a, x_0 - \frac{\delta}{2}\right)$ et $\omega = \min\left(b, x_0 + \frac{\delta}{2}\right)$ car on aura $[\alpha, \omega] \subset [a,b] \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. .

Nous avons

$$\forall x \in [a,b], h(x) \geq \mathcal{E}(x).$$

Ainsi

$$\int_a^b h(x)dx \geq \int_a^b \mathcal{E}(x)dx.$$

Mais on a $\mathcal{E} = \mathcal{E}^- - \mathcal{E}^+$ où

$$\mathcal{E}^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{h(x_0)}{2} & \text{si } x \geq \alpha \end{cases} \text{ et } \mathcal{E}^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \omega \\ \frac{h(x_0)}{2} & \text{si } x \geq \omega \end{cases}$$

Donc avec la proposition 2.2.3, nous en déduisons :

$$\int_a^b \mathcal{E}(x)dx = \frac{h(x_0)}{2}(\omega - \alpha) > 0.$$

Ainsi on a bien démontré que

$$\int_a^b h(x)dx \geq \frac{h(x_0)}{2}(\omega - \alpha) > 0.$$

□

2.3.4 Inégalité triangulaire

Proposition 2.3.5. *Soit $u\colon I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et $a, b \in I$ alors*

$$\left|\int_a^b u(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |u(x)|dx\right|.$$

Démonstration. En effet si $u\colon I \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux alors la fonction $|u|\colon I \to \mathbb{R}_+$ définie par $|u|(x) = |u(x)|$ est également continue par morceaux. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et posons $a_k = a + k(b-a)/n$. Nous avons grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\left|I_n^-(u,a,b)\right| = \left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u(a_k)\right| \leq \frac{|b-a|}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|u(a_k)| = \left|I_n^-(|u|,a,b)\right|.$$

Nous pouvons alors conclure par passage à la limite $n \to +\infty$ dans ces inégalités larges. □

2.3.5 Relation de Chasles

Proposition 2.3.6. *Soit $u\colon I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et $a, b, c \in I$ alors*

$$\int_a^b u(x)dx = \int_a^c u(x)dx + \int_c^b u(x)dx.$$

Démonstration. On se contente de le montrer pour une fonction continue $g\colon I \to \mathbb{C}$ et pour le cas où $a \leq c \leq b$. En effet le cas général s'en déduira par linéarité car on sait que $u = g + \sum_{i=1}^{d} h_i$ où g est continue sur $[a,b]$ et chaque h_i est une fonction de saut pour laquelle on peut appliquer la proposition 2.2.3 et conclure que $\int_a^b h_i(x)dx = \int_a^c h_i(x)dx + \int_c^b h_i(x)dx$. On décompose

$$g = g^- + g^+$$

où

$$g^-(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < c \\ 0 & \text{si } x \geq c \end{cases} \text{ et } g^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ g(x) & \text{si } x \geq c \end{cases}.$$

Ainsi g^- et g^+ sont des fonctions continues par morceaux et par linéarité on a

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g^-(x)dx + \int_a^b g^+(x)dx.$$

Nous allons démontrer que

$$\int_a^b g^-(x)dx = \int_a^c g(x)dx$$

et

$$\int_a^b g^+(x)dx = \int_c^b g(x)dx.$$

On aura alors démontré la relation de Chasles. On ne démontre que la première identité. On a

$$\int_a^b g^-(x)dx = \lim_{n\to+\infty} I_n^-(g^-,a,b)$$

où en posant toujours $a_k = a + (b-a)/n$:

$$I_n^-(g^-,a,b) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g^-(a_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{K(n)-1} g(a_k)$$

où $K(n)$ est l'entier défini par

$$a_{K(n)-1} < c \leq a_{K(n)},$$

car $g^-(x) = 0 \Leftrightarrow x \geq c$; donc $K(n)$ est le plus petit entier k tel que $a_k \geq c$. En utilisant la formule définissant $a_{K(n)}$ on en déduit que si on introduit

$$\gamma = \frac{c-a}{b-a}$$

alors

$$\gamma n < K(n) \leq \gamma n + 1.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{K(n)}{n} = \gamma.$$

On compare alors $I_n^-(g^-, a, b)$ et $I_{K(n)}^-(g^-, a, c) = I_{K(n)}^-(g, a, c)$ Posons $\alpha_k = a + k\frac{c-a}{K(n)}$, on a donc

$$I_{K(n)}^-(g^-, a, c) = I_{K(n)}^-(g, a, c) = \frac{c-a}{K(n)} \sum_{k=0}^{K(n)-1} g(\alpha_k).$$

$$\begin{aligned}
\left| I_n^-(g^-, a, b) - \frac{K(n)}{\gamma n} I_{K(n)}^-(g, a, c) \right| &= \left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{K(n)-1} g(a_k) - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{K(n)-1} g(\alpha_k) \right| \\
&= \left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{K(n)-1} g(a_k) - g(\alpha_k) \right| \\
&\leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{K(n)-1} |g(a_k) - g(\alpha_k)|
\end{aligned}$$

Or g est continue sur le segment $[a, b]$ donc uniformément continue et on peut considérer son module de continuité

$$\omega(\delta) = \sup \{ |g(x) - g(y)| \; ; \; x, y \in [a, b], \; |x - y| \leq \delta \}.$$

Et puisque pour $k = 0, \ldots, K(n) - 1$:

$$\begin{aligned}
|a_k - \alpha_k| &= k\frac{b-a}{n} - k\frac{c-a}{K(n)} \\
&= \frac{k(b-a)}{nK(n)} \left(K(n) - \frac{c-a}{b-a} n \right) \\
&= \frac{k(b-a)}{nK(n)} \left(K(n) - \gamma n \right) \\
&\leq \frac{k(b-a)}{nK(n)} \leq \frac{b-a}{n}
\end{aligned}$$

Où on a utilisé dans la dernière inégalité $k \leq K(n)$, et dans l'inégalité précédente $\gamma n < K(n) \leq \gamma n + 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\left| I_n^-(g^-, a, b) - \frac{K(n)}{\gamma n} I_{K(n)}^-(g, a, c) \right| &\leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{K(n)-1} \omega\left(\frac{b-a}{n} \right) \\
&\leq \frac{b-a}{n} K(n) \omega\left(\frac{b-a}{n} \right) \leq \frac{b-a}{n} (n\gamma + 1) \omega\left(\frac{b-a}{n} \right)
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'en déduire

$$\lim_{n\to+\infty} I_n^-(g^-,a,b) - \frac{K(n)}{\gamma n} I_{K(n)}^-(g,a,c) = 0$$

et puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{K(n)}{\gamma n} = 1$$

on en déduit

$$\int_a^b g^-(x)dx = \lim_{n\to+\infty} I_n^-(g^-,a,b) = \lim_{n\to+\infty} I_{K(n)}^-(g,a,c) = \int_a^c g(x)dx.$$

□

2.3.6 Théorème fondamental de l'analyse

Proposition 2.3.7. *Soit $f\colon I \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $a \in I$, on définit $F\colon I \to \mathbb{C}$ par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Alors F est dérivable sur l'intervalle I et $F' = f$.

Démonstration. On considère donc $x_0 \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, on a alors, avec la relation Chasles :

$$\begin{aligned} F(x_0+h) - F(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \\ &= \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Puis $hf(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt$, d'où

$$\begin{aligned} |F(x_0+h) - F(x_0) - hf(x_0)| &= \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\, dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt \right|. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$; par continuité de f en x_0, il existe un réel $\delta > 0$, tel que

$$x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Soit maintenant $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \delta$ et $x_0 + h \in I$, on en déduit que si t appartient à l'intervalle délimité par x_0 et $x_0 + h$ alors $|t - x_0| \leq |h| < \delta$ donc $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. On en conclut donc que

$$|F(x_0 + h) - F(x_0) - hf(x_0)| \leq |h|\varepsilon.$$

On a démontré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$, tel que pour tout réel $h \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < |h| < \delta$ et $x_0 + h \in I$ alors

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon.$$

On a bien démontré que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Remarque 2.3.8. *La même preuve montre que Si $f\colon I \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux et $a \in I$, alors la fonction $F\colon I \to \mathbb{C}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable à droite et à gauche en tout point de I et

$$\forall x \in I, \;\; F'(x_+) = f(x+) \text{ et } F'(x_-) = f(x-).$$

2.3.7 Applications aux calculs de certaines limites

i) On a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2)$, en effet

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{n+\ell} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n}{n+\ell} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{1+\frac{\ell}{n}}.$$

Donc

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n} + I_n^-(f, 0, 1)$$

où $f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx} \ln(1+x)$. Puisque f est continue, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = 0 + \int_0^1 f(x)dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

ii) On a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$, en effet on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} + \frac{1}{2n}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = I_n^-(g,0,1) + \frac{1}{2n}$$

où $g(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx}\arctan(x)$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 g(x)dx + 0 = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

iii) On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}$.
En effet

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}\right) = -\ln(n) + \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) = -\ln(n) + \frac{1}{n}\ln(n!) = -\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}\right) &= -\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(k) - n\ln(n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln(k) - \ln(n)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) = I_n^+(\ln,0,1).
\end{aligned}$$

Nous avons ici un problème car la fonction $\ln$ n'est pas continue sur $[0,1]$, néanmoins en utilisant la fait que cette fonction est croissante sur $]0,1]$, nous obtenons facilement :

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \ln(x)dx \le \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx,$$

on en déduit l'encadrement :

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln(x)dx \le I_n^+(\ln,0,1) \le \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}}\ln(x)dx$$

En utilisant $\ln(x) = \frac{d}{dx}(x\ln(x) - x)$, on a

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln(x)dx = [x\ln(x) - x]_{\frac{1}{n}}^{1} = -1 + \frac{1}{n}\ln(n) + \frac{1}{n}.$$

On peut alors conclure, avec le théorème des gendarmes, que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}\right) = -1,$$

Le résultat anoncé est alors un corollaire de la continuité de la fonction $\exp$ en -1.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}\right)} = e^{\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}\right)} = e^{-1}.$$

Il existe en fait un résultat plus précis concernant l'asymptotique de la suite $(n!)$. Il s'agit de la formule de Stirling :

$$n! \sim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

2.4 Formule de Taylor-Lagrange et quelques applications

On rappelle ici l'égalité des accroissements finis :

Soit $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, on suppse f dérivable sur $]a,b[$ alors il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

La formule de Taylor-Lagrange est une extension de ce résultat

Théorème 2.4.1. *Soit $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction que l'on suppose n fois dérivable sur $[a,b]$ tel que $f^{(n)}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que*

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration. Soit donc $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ une telle fonction on introduit alors la fonction

$$\Phi(x) = f(x)-f(a)+\sum_{\ell=1}^{n}\frac{(b-x)^\ell}{\ell!}f^{(\ell)}(x)+A\,\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Où le réel A est choisi afin que $\Phi(a)=\Phi(b)$. C'est à dire :

$$\Phi(b)-\Phi(a) = f(b)-f(a)-\sum_{\ell=1}^{n}\frac{(b-a)^\ell}{\ell!}f^{(\ell)}(a)-A\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La fonction Φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que

$$0 = \Phi(b)-\Phi(a) = \Phi'(c)(b-a).$$

Calculons maintenant la dérivée de la fonction Φ. On a

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) + \sum_{\ell=1}^{n} v_\ell(x) + A\,\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où

$$v_\ell(x) = \frac{(b-x)^\ell}{\ell!} f^{(\ell)}(x).$$

En particulier

$$\begin{aligned} v'_\ell(x) &= \left(\frac{(b-x)^\ell}{\ell!}\right)' \left(f^{(\ell)}(x)\right) + \left(\frac{(b-x)^\ell}{\ell!}\right) \left(f^{(\ell)}(x)\right)' \\ &= -\frac{(b-x)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(x) + \frac{(b-x)^\ell}{\ell!} f^{(\ell+1)}(x) \\ &= -u_{\ell-1}(x) + u_\ell(x), \end{aligned}$$

avec $u_\ell(x) = \frac{(b-x)^\ell}{\ell!} f^{(\ell+1)}(x)$. De plus

$$\frac{d}{dx}\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} = -n\frac{(b-x)^n}{(n+1)!} = -\frac{(b-x)^n}{n!}.$$

Ainsi

$$\Phi'(x) = f'(x) + \sum_{\ell=1}^{n} \left(u_\ell(x) - u_{\ell-1}(x) \right) - A\frac{(b-x)^n}{n!} = f'(x) + u_n(x) - u_1(x) - A\frac{(b-x)^n}{n!},$$

compte tenu du fait que $u_1(x) = f'(x)$ et que $u_n(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$, on en déduit

$$\Phi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) - A\frac{(b-x)^n}{n!} = \frac{(b-x)^n}{n!} \left(f^{(n+1)}(x) - A\right).$$

Ainsi c vérifie l'équation $\Phi'(c) = 0$ et puisque $b - c \neq 0$, nous en déduisons :

$$f^{(n+1)}(c) = A$$

ce qui, compte tenu de la définition de A :

$$f(b) = f(a) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(b-a)^\ell}{\ell!} f^{(\ell)}(a) + A\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

montre le résultat voulu. □

2.4.1 Formule et inégalité de Taylor-Lagrange

On en déduit l'inégalité de Taylor-Lagrange :

Théorème 2.4.2. *Soit $f\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ une fonction que l'on suppose n fois dérivable sur $[a,b]$ tel que $f^{(n)}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que pour tout réel $c\in]a,b[$:*

$$|f^{(n+1)}(x)|\leq M$$

alors

$$\left|f(b)-f(a)-\sum_{\ell=1}^{n}\frac{(b-a)^{\ell}}{\ell!}f^{(\ell)}(a)\right|\leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

A priori la formule de Taylor-Lagrange ne donne le résultat que pour les fonctions à valeurs réelles. Pour obtenir cette inégalité pour une fonction à valeurs complexes, on procède comme dans la note en bas de la page 7.

2.4.2 Formule de Taylor avec reste intégrale ou formule de Taylor-Mac Laurin

Théorème 2.4.3. *Soit $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction que l'on suppose $n+1$ fois dérivable sur $[a,b]$ tel que $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$. Alors*

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^b\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)dx$$

Démonstration. On introduit la fonction :

$$\Psi(x)=f(x)-f(a)+\sum_{\ell=1}^{n}\frac{(b-x)^{\ell}}{\ell!}f^{(\ell)}(x).$$

Cette fonction est dérivable et le calcul précédent montre que

$$\Psi'(x)=\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x).$$

Ainsi Ψ' est continue et le théorème fondamental de l'analyse nous apprend que

$$\Psi(b)-\Psi(a)=\int_a^b\Psi'(x)dx=\int_a^b\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)dx.$$

Or

$$\Psi(b)-\Psi(a)=f(b)-f(a)-\sum_{\ell=1}^{n}\frac{(b-a)^{\ell}}{\ell!}f^{(\ell)}(a),$$

Ces deux dernières identités montrent la formule de Taylor avec reste intégral. □

2.4.3 Un encadrement de $\sqrt{2}$ (d'après L. Euler)

On considère la fonction $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

C'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ (c'est à dire infiniment dérivable). Et un calcul facile [13] montre que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}, & f''(x) &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}(1-x)^{-\frac{5}{2}} \\ f'''(x) &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}(1-x)^{-\frac{7}{2}}, & &\dots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}. \end{aligned}$$

Soit $x \in [0,1[$, pour $t \in [0,x]$, nous avons

$$0 \leq f^{(n+1)}(t) \leq f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2n+1}{2}(1-x)^{-\frac{2n+3}{2}} \leq \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2^{n+1}}(1-x)^{-\frac{2n+3}{2}}.$$

Pour $x = \frac{1}{50}$, nous avons

$$f(x) = \left(\frac{49}{50}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{50}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{5^2\times 2}{7^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{7}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1.4}\,.$$

Posons

$$u_n = \frac{1}{(50)^n n!}f^{(n)}(0) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\frac{1}{(50)^n n!} = 1\times 3\times\cdots\times(2n-1)\frac{1}{n!\,100^n}.$$

La formule de Taylor-Lagrange montre donc qu'il existe un réel $c \in \left]0, \frac{1}{50}\right[$ tel que

$$f\left(\frac{1}{50}\right) = \frac{\sqrt{2}}{1.4} = \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell + 1\times 3\times\cdots\times(2n-1)\frac{1}{n!\,100^n}(1-c)^{-\frac{2n+3}{2}}.$$

Ceci montre que la série de terme général u_n converge car pour tout entier n :

$$0 \leq \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell \leq \frac{\sqrt{2}}{1.4}.$$

De plus

$$0 \leq \frac{\sqrt{2}}{1.4} - \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell \leq 1\times 3\times\cdots\times(2n+1)\frac{1}{n!\,100^n}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{-\frac{2n+3}{2}}.$$

13. basé sur $\frac{d}{dx}(1-x)^{-\alpha} = \alpha(1-x)^{-\alpha-1}$..

Si on définit $\epsilon_n = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)\frac{1}{n!\,100^n}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{-\frac{2n+3}{2}}$, cela définit une suite de réels strictement positif et alors on calcule

$$\frac{\epsilon_n}{\epsilon_{n-1}} = \frac{2n+1}{n}\frac{1}{100}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{-1} = \frac{2n+1}{n}\frac{1}{100}\frac{50}{49} \leq \frac{1}{25}.$$

Ceci garantit que la suite (ϵ_n) converge vers 0 et donc

$$\frac{\sqrt{2}}{1.4} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Pour $n = 1$, nous avons l'estimation

$$0 \leq \frac{\sqrt{2}}{1.4} - 1 \leq \frac{1}{49}\frac{\sqrt{2}}{1.4}$$

On en déduit

$$\frac{\sqrt{2}}{1.4} - \frac{1}{49}\frac{\sqrt{2}}{1.4} \leq 1$$

D'où

$$1 \leq \frac{\sqrt{2}}{1.4} \leq 1 + \frac{1}{48}.$$

2.4.4 L'exponentielle

On sait que $\exp$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\exp' = \exp$. Sur l'intervalle $]-\infty, R]$, la dérivée n^{ieme} de la fonction $\exp$ est borné par e^R :

$$\forall x \in]-\infty, R], \ \left|\frac{d^n}{dx^n}\exp(x)\right| \leq e^R.$$

Ainsi, on en déduit que si $x \in]-\infty, R]$ alors

$$\left|e^x - \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{x^\ell}{\ell!}\right| \leq \frac{|x|^n}{n!}e^R.$$

Puisque

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0$$

on en déduit que la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge et

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{x^\ell}{\ell!} = e^x.$$

Ceci étant valide pour tout $R > 0$ et tout $x \leq R$. On en déduit que l'identité est valide pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2.4.5 Une estimation de $(1+x)^n$.

Démontrer que si $x \in \left]0, \frac{1}{n-1}\right[$ alors [14]

$$1 + nx \leq (1+x)^n \leq \frac{1+x}{1-(n-1)x} .$$

2.5 Calcul approché des intégrales

Vous avez vu et appris en L1 plusieurs méthodes exactes pour déterminer la valeur d'une intégrale. Il y a en fait très peu de fonctions dont on peut déterminer de façon exacte l'intégrale sur un segment et même dans les cas où si cela est possible il peut être être très long de mener à terme le calcul. Le calcul de l'intégrale d'une fonction a parfois besoin d'être fait très rapidement et pour cela il convient d'implémenter dans un ordinateur des méthodes de calcul approché.

2.5.1 Méthode des rectangles

Proposition 2.5.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et*

$$M_1 = \sup\{|f'(x)| \; ; \; x \in [a;b]\}.$$

Alors

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{M_1}{2n} (b-a)^2 \ .$$

Démonstration. Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on définit $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)\, dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x) - f(a_k))\, dx. \end{aligned}$$

14. **Solution :** On utilise juste l'égalité des accroissements finis : si $x > 0$ il y a un réel $c \in]0, x[$ tel que

$$(1+x)^n = 1 + nx(1+c)^{n-1}.$$

On en déduit $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Et aussi

$$(1+x)^n \leq 1 + nx(1+x)^{n-1} = 1 + nx\frac{(1+x)^n}{1+x}.$$

D'où

$$(1+x)^n - nx\frac{(1+x)^n}{1+x} = (1+x)^n \frac{1+x-nx}{1+x} \leq 1.$$

Avec l'inégalité triangulaire, nous en déduisons :

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a_k\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left(f(x)-f(a_k)\right)dx.\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x)-f(a_k)|\,dx.$$

Mais grâce à l'inégalité des accroissements finis, nous savons que $|f(x)-f(a_k)| \leq M_1|x-a_k|$ d'où

$$\begin{aligned}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x)-f(a_k)|\,dx &\leq M_1\int_{a_k}^{a_{k+1}} M_1|x-a_k|dx \\ &\leq M_1\left[\frac{(x-a_k)^2}{2}\right]_{a_k}^{a_{k+1}} = M_1\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2} \\ &\leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n^2}.\end{aligned}$$

En sommant ces inégalités, nous obtenons :

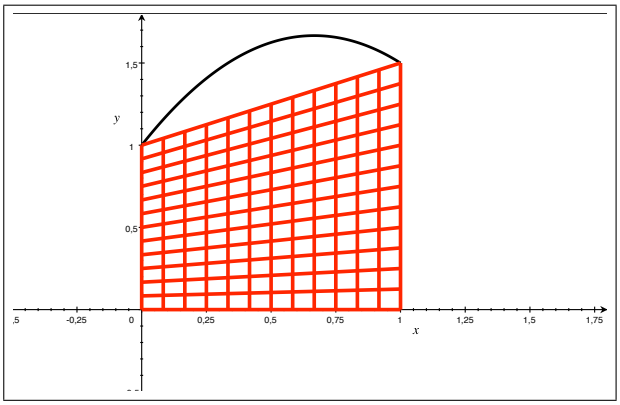
$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a_k\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M_1(b-a)^2}{2n^2} = \frac{M_1(b-a)^2}{2n}.$$

□

2.5.2 Méthodes des trapèzes

L'idée est ici d'approximmer l'intégrale de f sur l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ par l'aire du trapèze de base le segment $[a_k, a_{k+1}]$ et de sommets les points $(a_k, f(a_k))$ et $(a_{k+1}, f(a_{k+1}))$, ce trapèze a une aire égale à

$$(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_{k+1})+f(a_k)}{2}.$$



Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et on pose pour $k = 0, 1, \ldots, n$: $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$. On veut comparer $\int_a^b f(x)dx$ à

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\frac{f(a_{k+1}) + f(a_k)}{2} = \frac{1}{2}\left(I_n^-(f, a, b) + I_n^+(f, a, b)\right).$$

Proposition 2.5.2. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et*

$$M_2 = \sup\{|f''(x)| \ ; \ x \in [a; b]\}.$$

Alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right)\right| \leq \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3 \ .$$

Démonstration. On commence par comparer $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx$ à $(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_{k+1})+f(a_k)}{2}$. Pour cela on introduit les fonctions

$$\varphi(x) = x - \frac{a_k + a_{k+1}}{2} \text{ et } \Psi(x) = \int_{a_k}^x \varphi(t)dt.$$

On a en particulier $\Psi(a_k) = \Psi(a_{k+1}) = 0$ et $\varphi(a_k) = -\varphi(a_{k+1}) = \frac{a_{k+1}-a_k}{2}$. En intégrant deux fois par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx &= [\varphi(x)f(x)]_{a_k}^{a_{k+1}} - \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi(x)f'(x)dx \\
&= (a_{k+1} - a_k)\frac{f(a_{k+1}) + f(a_k)}{2} - \int_{a_k}^{a_{k+1}} \Psi'(x)f'(x)dx \\
&= (a_{k+1} - a_k)\frac{f(a_{k+1}) + f(a_k)}{2} - \left[\Psi(x)f'(x)\right]_{a_k}^{a_{k+1}} + \int_{a_k}^{a_{k+1}} \Psi(x)f''(x)dx \\
&= (a_{k+1} - a_k)\frac{f(a_{k+1}) + f(a_k)}{2} + \int_{a_k}^{a_{k+1}} \Psi(x)f''(x)dx. \qquad (\star)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - (a_{k+1} - a_k)\frac{f(a_{k+1}) + f(a_k)}{2}\right| &\leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\Psi(x)f''(x)|dx \\
&\leq M_2 \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\Psi(x)|dx.
\end{aligned}$$

Il reste à faire le calcul de $\int_{a_k}^{a_{k+1}} |\Psi(x)|dx$; on trouve [15]

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} |\Psi(x)|dx = \frac{(b-a)^3}{12n^3}.$$

15. Le plus simple est de remarquer la fonction Ψ est négative et si on applique l'identité $(\star)$ obtenu plus haut à la fonction $f(x) = (x - a_k)^2/2$, nous obtenons :

$$\frac{(a_{k+1} - a_k)^3}{6} = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx = (a_{k+1} - a_k)\frac{(a_{k+1} - a_k)^3}{4} + \int_{a_k}^{a_{k+1}} \Psi(x)dx.$$

On en déduit donc

$$\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - (a_{k+1} - a_k)\frac{f(a_{k+1}) + f(a_k)}{2} \right| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^3}.$$

Le résultat est alors une conséquence de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} | \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2n} (f(a) + f(b)) - \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) | & \\ = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - (a_{k+1} - a_k)\frac{f(a_{k+1}) + f(a_k)}{2} \right) \right| & \\ \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - (a_{k+1} - a_k)\frac{f(a_{k+1}) + f(a_k)}{2} \right| & \\ \leq n M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^3} = M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2} & \end{aligned}$$

□

Autres méthodes

Il existe d'autres méthodes, par exemple la méthode dite du point milieu qui consiste à approximmer $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx$ par $(a_{k+1} - a_k) f\left(\frac{a_{k+1}+a_k}{2}\right)$. Cette méthode est du même ordre que celle des trapèze.

2.6 Longueur des courbes planes

2.6.1 Vocabulaire

Une application

$$\begin{aligned} \gamma \colon I &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

est dite de continue (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) si les fonctions $x, y \colon I \to \mathbb{R}$ sont continues (resp. de classe $\mathcal{C}^k$). On dit que γ est un arc paramétré ou une courbe continu(e) (resp. de classe $\mathcal{C}^k$).

Remarque 2.6.1. *Il faut distinguer l'arc paramétré ou la courbe de son image, par exemple si $M_0 = (x_0, y_0)$ et $M_1 = (x_1, y_1)$ sont deux points du plan on peut paramétrer le segment $[M_0, M_1]$ par $\gamma \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$\gamma(t) = M_0 + t\overrightarrow{M_0M_1} = ((x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)),$$

ou par par $\widehat{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\widehat{\gamma}(t) = M_0 + t^2 \overrightarrow{M_0 M_1} = \big((x_0 + t^2(x_1 - x_0), y_0 + t^2(y_1 - y_0)\big)\,.$$

Mais on pourrait aussi faire N*-aller-retour sur ce segment, à l'aide de* $c_N\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *défini par*

$$\begin{aligned} c_N(t) &= M_0 + \sin^2(N\pi\, t)\, \overrightarrow{M_0 M_1} \\ &= \big(x_0 + \sin^2(N\pi\, t)\,(x_1 - x_0), y_0 + \sin^2(N\pi\, t)\,(y_1 - y_0)\big)\,. \end{aligned}$$

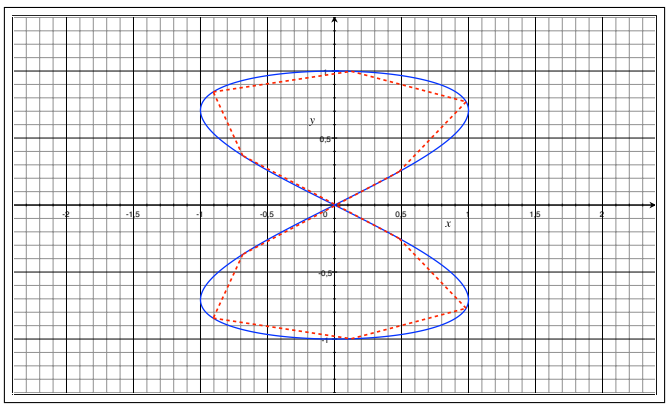
2.6.2 Définition

Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré et $\sigma \subset [a,b]$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$: C'est à dire $\sigma = \{t_0, t_1, \ldots, t_d\}$ où $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{d-1} < t_d$. On lui associe la longueur de la ligne polygonale joignant les points $\gamma(t_i)$:

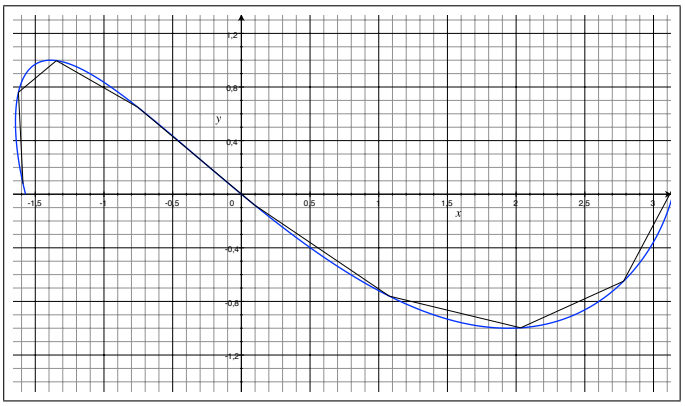
$$LP(\sigma, \gamma) = \sum_{j=0}^{d-1} \left\| \overrightarrow{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)} \right\| = \sum_{j=0}^{d-1} d\left(\gamma(t_{i-1}),\, \gamma(t_i)\right).$$

Où si $\vec{u} = (a,b)$ on a noté $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Grâce à l'inégalité triangulaire,il n'est pas difficile [16] de démontrer que si $\sigma' \supset \sigma$ est une subdivision plus fine que σ alors

$$LP(\sigma, \gamma) \leq LP(\sigma', \gamma).$$



16. C'est juste pénible à écrire !



Définition 2.6.2. *On dira qu'une courbe* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *est rectifiable si l'ensemble*

$$\{LP(\sigma,\gamma)\,,\ \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}$$

est majoré. Dans ce cas on appelle longueur de γ *:*

$$L(\gamma) = \sup\{LP(\sigma,\gamma)\,,\ \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}\,.$$

Remarques 2.6.3. *i) Avec cette définition, il est clair que le chemin le plus court pour aller d'un point* A *à un point* B *est la ligne droite. Car si* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *est une courbe joignant* A *à* B *:*

$$\gamma(a) = A \text{ et } \gamma(b) = B\ ;$$

alors $\sigma = \{a,b\}$ *est une subdivision de* $[a,b]$ *et donc nécessairement :*

$$\|\overrightarrow{AB}\| = LP(\sigma,\gamma) \leq L(\gamma).$$

ii) ***Exercice :*** *Si* $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ *est une bijection continue, montrer que* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *est rectifiable si et seulement si* $\gamma \circ \varphi\colon [c,d] \to \mathbb{R}^2$ *est rectifiable* [17] *et*

$$L(\gamma) = L(\gamma \circ \varphi).$$

2.6.3 Formule pour une courbe plane de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 2.6.4. *Soit* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *une courbe de classe* $\mathcal{C}^1$ *alors* γ *est rectifiable et*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt.$$

17. En fait, on peut démontrer qu'il suffit pour cela que $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ soit continue, monotone et surjective.

Cette dernière formule doit être intuitivement évidente, puisque $\gamma'(t)$ représente le vecteur vitesse et $\|\gamma'(t)\|$ son intensité, c'est à dire la vitesse instantanée qui est égale à la dérivée par rapport à t de la longueur parcourue :

$$\|\gamma'(t)\| = \frac{d}{dt} L\left((\gamma|_{[a,t]}\right).$$

Démonstration. Soit donc $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe $\mathcal{C}^1$. Montrons d'abord que γ est rectifiable.

Soit $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, alors

$$\left\|\overrightarrow{\gamma(\alpha)\gamma(\beta)}\right\| \leq \int_\alpha^\beta \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Ceci est en effet un corollaire du fait que le module de l'intégrale est inférieure à l'intégrale du module lorsqu'on identifie le plan $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et que l'on voit que [18]

$$\overrightarrow{\gamma(\alpha)\gamma(\beta)} = \int_\alpha^\beta \gamma'(t)\, dt.$$

On peut aussi redémontrer cela d'une autre façon : si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ le résultat est évident. Supposons donc que $\gamma(\alpha) \neq \gamma(\beta)$ et posons

$$\overrightarrow{\gamma(\alpha)\gamma(\beta)} = \rho\vec{u}$$

où $\|\vec{u}\| = 1$, ainsi $\rho = \left\|\overrightarrow{\gamma(\alpha)\gamma(\beta)}\right\|$. On définit alors $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ par [19]

$$\varphi(t) = \overrightarrow{\gamma(\alpha)\gamma(t)}.\vec{u}\ .$$

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\varphi'(t) = \gamma'(t).\vec{u}.$$

Ainsi

$$\varphi'(t) \leq |\varphi'(t)| \leq \|\gamma'(t)\|\,\|\vec{u}\| = \|\gamma'(t)\|.$$

Et en intégrant nous trouvons

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(b) = \rho = \left\|\overrightarrow{\gamma(\alpha)\gamma(\beta)}\right\| \leq \int_\alpha^\beta \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

18. Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ l'intégrale $\int_\alpha^\beta \gamma'(t)\, dt$ est calculé composante par composante :

$$\int_\alpha^\beta \gamma'(t)\, dt = \left(\int_\alpha^\beta x'(t)\, dt\,,\, \int_\alpha^\beta y'(t)\, dt\right).$$

19. On note $\vec{v}.\vec{u}$ le produit scalaire d'un vecteur $\vec{v}$ et d'un vecteur $\vec{u}$.

Cette seconde preuve a l'avantage de fournir le cas d'égalité : on a $\left\|\overrightarrow{\gamma(\alpha)\gamma(\beta)}\right\| = \int_\alpha^\beta \|\gamma'(t)\|\,dt$ si et seulement si il y a une fonction $\psi\colon [\alpha,\beta] \to [0,1]$ continue surjective croissante [20] tel que

$$\gamma(t) = \gamma(\alpha) + \psi(t)\,\overrightarrow{\gamma(\alpha)\gamma(\beta)}.$$

Revenons maintenant à notre problème et démontrons que γ est rectifiable. Soit $\sigma = \{t_0, t_1, \ldots, t_d\}$ une subdivision de $[a,b]$; on a démontré que pour tout $i \in \{0,1,\ldots,d-1\}$:

$$\left\|\overrightarrow{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)}\right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\|\,dt.$$

Ainsi en sommant ces inégalités et avec la relation de Chasles, nous obtenons :

$$LP(\sigma,\gamma) = \sum_{j=0}^{d-1} \left\|\overrightarrow{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)}\right\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt.$$

Ainsi le réel $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$ est un majorant de l'ensemble

$$\{LP(\sigma,\gamma)\,,\ \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}\,.$$

Donc γ est rectifiable et

$$L(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt.$$

Il s'agit maintenant de démontrer l'inégalité inverse. Pour cela on utilise le fait que $\gamma'\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ est continue et donc d'après le théorème de Heine γ' est uniformément continue. On introduit alors son module de continuité :

$$\omega(\delta) = \sup\left\{d(\gamma'(t),\gamma'(s))\,,\ s,t \in [a,b]\ \&\ |s-t| \leq \delta\right\}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ_n la subdivision régulière de pas $(b-a)/n$:

$$\sigma_n = \left\{a_k = a + k\frac{b-a}{n}\ ,\ k = 0,1,\ldots,n-1,n\right\}$$

On a pour $k = 0,1,\ldots,n-1$:

$$\overrightarrow{\gamma(a_k)\gamma(a_{k+1})} - (a_{k+1}-a_k)\gamma'(a_k) = \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left(\gamma'(t) - \gamma'(a_k)\right)dt.$$

20. ici $u(t) = \frac{1}{\rho}\int_\alpha^t \|\gamma'(s)\|\,ds$.

Et donc

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{\gamma(a_k)\gamma(a_{k+1})} - (a_{k+1}-a_k)\gamma'(a_k)\right\| &= \left\|\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left(\gamma'(t)-\gamma'(a_k)\right) dt\right\| \\ &\leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left\|\gamma'(t)-\gamma'(a_k)\right\| dt \\ &\leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \omega(|t-a_k|)dt \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \omega(a_{k+1}-a_k)dt \\ &\leq \frac{b-a}{n}\omega\left(\frac{b-a}{n}\right).\end{aligned}$$

Mais $-\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \leq |\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|| \leq \|\vec{u}-\vec{v}\|$ on en déduit

$$-\left\|\overrightarrow{\gamma(a_k)\gamma(a_{k+1})}\right\| + \frac{b-a}{n}\|\gamma'(a_k)\| \leq \frac{b-a}{n}\omega\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Posons $v(t) = \|\gamma'(t)\|$. En sommant ces inégalités, nous obtenons alors :

$$-LP(\sigma_n,\gamma) + I_n^-(v,a,b) \leq (b-a)\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

D'où

$$I_n^-(v,a,b) \leq (b-a)\omega\left(\frac{b-a}{n}\right) + LP(\sigma_n,\gamma) \leq (b-a)\omega\left(\frac{b-a}{n}\right) + L(\gamma).$$

Or γ' est uniformément continue donc $\lim_{n\to+\infty}(b-a)\omega\left(\frac{b-a}{n}\right) = 0$ et en passant à la limite dans ces inégalités larges, nous obtenons :

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \lim_{n\to+\infty} I_n^-(v,a,b) \leq L(\gamma).$$

□

2.6.4 Quelques calculs de longueur

a) **Un segment :** si A et B sont deux points du plan et si on paramètre le segment $[A,B]$ par

$$\gamma(t) = A + t\overrightarrow{AB},\ t \in [0,1]$$

on a $\gamma'(t) = \overrightarrow{AB}$ et donc $L(\gamma) = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A,B)$.

b) **Un arc de cercle :** On paramètre un arc de cercle de rayon R par

$$c(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t)),\ t \in [\theta,\varphi]$$

où (x_0,y_0) sont les coordonnées du centre du cercle. On a $c'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t))$ donc $\|c'(t)\| = R$ et donc

$$L(c) = R(\varphi - \theta).$$

c) **un bout de chaînette :** On paramètre un bout du graphe de la fonction cosh par

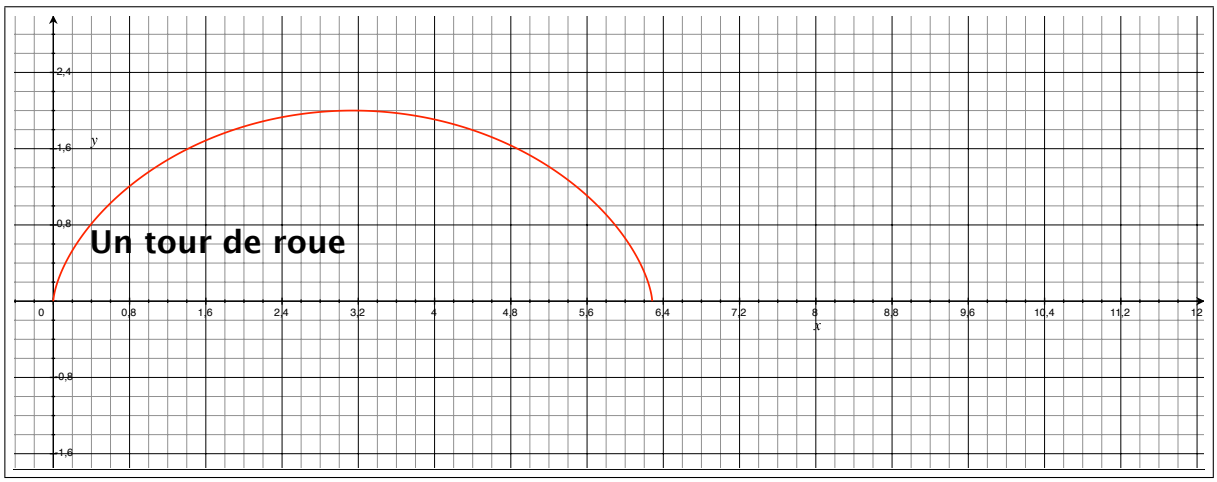
$$f(t) = (t, \cosh(t)), t \in [-a, a]$$

alors $f'(t) = (1, \sinh(t))$ et $\|f'(t)\|^2 = 1 + \sinh^2(t) = \cosh^2(t)$ donc

$$L(f) = \int_{-a}^{a} \cosh(t)dt = 2\sinh(a).$$

d) **Un bout de cycloïde :** La cycloïde est la courbe décrite par la valve d'une roue de vélo.

$$g(t) = (Rt - R\sin(t), R(1 - \cos(t))) \ , t \in [0, \pi]$$



On a $g'(t) = (R(1 - \cos(t)), R\sin(t))$ donc

$$\begin{aligned}
\|g'(t)\|^2 &= R^2\left((1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)\right) \\
&= R^2\left(1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)\right) \\
&= 2R^2(1 - \cos(t)) \\
&= 4R^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\|g'(t)\| = 2R\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|,$$

mais sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ la fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ est positive donc $\|g'(t)\| = 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ et

$$L(g) = 2R\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = 4R\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 8R.$$

En conclusion lorsque la roue de vélo fait un tour sur la route et donc le vélo avance de $2\pi R$, la valve parcourt $8R$.

Appendice 1 : Preuve du théorème de Heine

On considère donc $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On raisonne par l'absurde en supposant que f n'est pas uniformément continue. Il y a alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, on trouve $x_\delta, y_\delta \in [a,b]$ tel que $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ mais $|f(x_\delta) - (y_\delta)| \geq \varepsilon$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on trouve donc $u_n = x_{2^{-n}}$ et $v_n = x_{2^{-n}}$ tel que $|u_n - v_n| < 2^{-n}$ mais $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon$.

On reprend alors une partie du schéma de la preuve du théorème de Cauchy. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble des valeurs prises par la suite (u_n) à partir du rang n :

$$A_n = \{u_\ell;\ \ell \in \mathbb{N} \text{ et } \ell \geq n\} = \{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

C'est une partie non vide majorée par b, elle admet donc une borne supérieure :

$$b_n = \sup A_n.$$

Remarquons que $A_{n+1} \subset A_n$, ainsi b_n est un majorant de A_{n+1} et puisque par définition $b_{n+1} = \sup A_{n+1}$ est le plus petit des majorants de A_{n+1}, nous en déduisons

$$b_{n+1} \leq b_n.$$

La suite (b_n) est donc décroissante minorée par a, elle est donc convergente, on pose $\beta = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par caractérisation de la borne supérieure, il y a un entier $k(n) \geq n$ tel que

$$b_n - \frac{1}{2^n} < u_{k(n)} \leq b_n.$$

Posons $w_n = u_{k(n)}$ et $z_n = v_{k(n)}$. On a donc pour tout entier n

$$b_n - \frac{1}{2^n} < w_n \leq b_n \ .$$

Et le théorème des gendarmes assure que la suite (w_n) converge vers β :

$$\beta = \lim_{n\to+\infty} w_n.$$

De plus $k(n) \geq n$, et donc nous avons

$$|w_n - z_n| \leq \frac{1}{2^{k(n)}} \leq \frac{1}{2^n}.$$

On en déduit également :

$$\beta = \lim_{n\to+\infty} z_n.$$

Par continuité de f en β, nous en déduisons

$$\lim_{n\to+\infty} |f(w_n) - f(z_n)| = 0\ ;$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite

$$|f(u_{k(n)}) - f(v_{k(n)})| = |f(w_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon.$$

et le passage à la limite dans les inégalités larges qui impliquerait

$$\lim_{n \to +\infty} |f(w_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon.$$

Chapitre 3

Espaces vectoriels Normés

Avant propos

Vous avez étudié de façon extensive les limites de suites à valeurs réelles ou complexes. On va étudier ici les suites à valeurs dans $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^k$. Et la fin de cette leçon, nous allons démontré un résultat analogue à celui que vous avez découvert en Analyse 1 :

Une fonction continue sur un intervalle fermé borné y est bornée et atteint ses bornes.

pour les fonctions définies sur des parties *fermées* [1] *bornées* de $\mathbb{R}^k$. Ceci nous permettra de démontrer que si A, B, C sont trois points du plan $\mathbb{R}^2$ non alignés alors il existe un unique point [2] F tel que

$$\forall M \in \mathbb{R}^2,\ d(M,A) + d(M,B) + d(M,C) \geq d(F,A) + d(F,B) + d(F,C).$$

Où on rappelle que si $M_0 = (x_0, y_0)$ et $M_1 = (x_1, y_1)$ alors

$$d(M_0, M_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \left\| \overrightarrow{M_0 M_1} \right\|.$$

Si (u_n) est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, avec $u_n = (x_n, y_n, z_n)$. Il est naturel de dire que la suite (u_n) converge vers $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ si et seulement si les suites (x_n), (y_n) et (z_n) convergent et

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell_1,\ \lim_{n\to+\infty} y_n = \ell_2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} z_n = \ell_3.$$

On peut montrer que cela équivaut au fait que la suite

$$\lim_{n\to+\infty} d(u_n, \ell) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{(x_n - \ell_1)^2 + (y_n - \ell_2)^2 + (z_n - \ell_3)^2} = 0.$$

Le bon concept qui permet d'étudier la convergence de suites à valeurs vectorielLEs est la notion de norme. Une norme joue le rôle de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ ou du module sur $\mathbb{C}$.

1. terme que nous définirons
2. appelé point de Fermat du triable ABC.

3.1 Normes et distances

3.1.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, on dit qu'une application $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ est une norme si elle vérifie les trois conditions suivantes :

i) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

iii) $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Un espace vectoriel normé (E, N) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E équipé d'une norme N.

Si (E, N) est un espace vectoriel normé , on définit une distance sur E par

$$d(x, y) = N(x, y).$$

Cette distance dépend bien évidement de la norme N. Cette fonction distance vérifie les trois propriétés suivantes :

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) **symétrie :** $\forall x, y \in E,\ d(x, y) = d(y, x)$.

iii) **inégalité triangulaire :** $\forall x, y, z \in E,\ d(x, z) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

L'inégalité triangulaire est une conséquence de la troisième propriété de la norme N ; car si $x, y, z \in E$ alors

$$d(x,z) = N(x-z) = N(x-y+y-z) \leq N(x-y)+N(y-z) = d(x,y)+d(y,z).$$

Remarque 3.1.1. *Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, une norme sur E serait une application $N\colon E \Rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant*

i) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

iii) $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Notons qu'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est naturellement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et donc qu'une norme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est toujours une norme pour la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel sous jacente.

3.1.2 Quelques exemples

a) La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ ou le module sur $\mathbb{C}$ sont des normes.

b) Sur $\mathbb{R}^k$ on introduit $N_1, N_2, N_\infty\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$ définis par

$$\begin{aligned} N_1((x_1,\ldots,x_k)) &= \sum_{i=1}^{k} |x_i| \,, \\ N_2((x_1,\ldots,x_k)) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} \,, \\ \text{et} \quad N_\infty((x_1,\ldots,x_k)) &= \max\big\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_k|\big\}. \end{aligned}$$

Proposition 3.1.2. *$N_1,\ N_2,\ N_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^k$.*

On ne démontre que l'inégalité triangulaire pour N_2 et que N_∞ est une norme. Les autres assertions sont laissées à titre d'exercices.

Lemme 3.1.3. ***Inégalité de Cauchy-Schwartz :*** *Si $x = (x_1, \ldots, x_k),\ y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ alors*

$$|x.y| = \left| \sum_{i=1}^{k} x_i y_i \right| \leq N_2(x) N_2(y).$$

Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwartz : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons

$$0 \leq N_2(x + \lambda y)^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i + \lambda y_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(x_i^2 + 2\lambda x_i y_i + \lambda^2 y_i^2 \right).$$

Ainsi le trinôme du second degré

$$T(\lambda) = N_2(x+\lambda y)^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{k} x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{k} y_i^2 = N_2(x)^2 + 2\lambda x.y + \lambda^2 N_2(y)^2.$$

est de signe constant son discriminant est donc négatif :

$$(2(x.y))^2 - 4N_2(x)^2 N_2(y)^2 \leq 0.$$

Soit

$$(x.y)^2 \leq N_2(x)^2 N_2(y)^2$$

et donc puisque la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante et que $\sqrt{(x.y)^2} = |x.y|$:

$$x.y \leq |x.y| \leq N_2(x) N_2(y).$$

□

Démonstration de l'inégalité triangulaire pour N_2 : On en déduit alors l'inégalité triangulaire car, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour obtenir la première inégalité :

$$\begin{aligned} T(1) = N_2(x+y)^2 &= N_2(x)^2 + 2x.y + N_2(y)^2 \\ &\leq N_2(x)^2 + 2N_2(x)N_2(y) + N_2(y)^2 \\ &\leq \left(N_2(x) + N_2(y)\right)^2 \end{aligned}$$

et car la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante. □

Concernant la norme N_∞ : Nous avons évidement $N_\infty(0) = 0$ et puisque pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$:

$$0 \leq |x_i| \leq N_\infty((x_1, \ldots, x_k))$$

nous en déduisons que si $N_\infty((x_1,\dots,x_k))=0$ alors pour tout $i\in\{1,2,\dots,k\}$: $x_i=0$.
Si $x=(x_1,\dots,x_k)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, nous avons

$$N_\infty(\lambda x)=\max\{|\lambda x_1|,|\lambda x_2|,\dots,|\lambda x_n|\}=\max\{|\lambda|\,|x_1|,|\lambda|\,|x_2|,\dots,|\lambda|\,|x_n|\}=|\lambda|N_\infty(x).$$

Maintenant si $x=(x_1,\dots,x_k)$, $y=(y_1,\dots,y_k)\in\mathbb{R}^k$ et si $i\in\{1,2,\dots,k\}$: alors

$$|x_i+y_i|\le|x_i|+|y_i|\le N_\infty(x)+N_\infty(y)$$

donc

$$N_\infty(x+y)=\max\left\{|x_1+y_1|,|x_2+y_2|,\dots,|x_k+y_k|\right\}\le N_\infty(x)+N_\infty(y).$$

c) Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on définit

$$\|P\|=\sum_{j=0}^{n}|P(j)|.$$

Proposition 3.1.4. *$\|\bullet\|$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$,*

Démonstration : L'inégalité triangulaire est facile à vérifier car si $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$ alors

$$\begin{aligned}\|P+Q\|&=\sum_{j=0}^{n}|P(j)+Q(j)|\\&\le\sum_{j=0}^{n}(|P(j)|+|Q(j)|)=\sum_{j=0}^{n}|P(j)|+\sum_{j=0}^{n}|Q(j)|=\|P\|+\|Q\|.\end{aligned}$$

On démontre de même la deuxième propriété : si $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors

$$\|\lambda P\|=\sum_{j=0}^{n}|\lambda P(j)|=\sum_{j=0}^{n}|\lambda||P(j)|=|\lambda|\sum_{j=0}^{n}|P(j)|=|\lambda|\|P\|.$$

Il est évident que $\|0\|=0$. Considérons maintenant un polynôme P de degré inférieur à n tel que $\|P\|=0$, celui ci s'annule en $0,\ 1,\ 2,\dots,\ n$, il a donc $n+1$ racines : c'est le polynôme nul.

d) Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie peut être équipé d'une norme. En effet soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie k. Considèrons $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k)$ une base de E. Cette base fournit un isomorphisme $\Psi\colon\mathbb{R}^k\to E$ donné par

$$\Psi(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\vec{e}_j.$$

Ainsi si $\vec{x}\in E$ alors $\Psi^{-1}(\vec{x})=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k)$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{x}$ dans la base $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k)$.

On peut définir alors plusieurs normes sur E. Par exemple

$$\|\vec{x}\|_1 = N_1\left(\Psi^{-1}\left(\vec{x}\right)\right),$$

c'est à dire

$$\left\|\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\vec{e}_j\right\|_1 = \sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|.$$

On pourrait aussi définir

$$\|\vec{x}\|_2 = N_2\left(\Psi^{-1}\left(\vec{x}\right)\right),$$

c'est à dire

$$\left\|\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\vec{e}_j\right\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^2}\,.$$

Et aussi

$$\|\vec{x}\|_\infty = N_\infty\left(\Psi^{-1}\left(\vec{x}\right)\right),$$

c'est à dire

$$\left\|\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\vec{e}_j\right\|_2 = \max\left\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\ldots,|\lambda_k|\right\}.$$

En général si N est une norme sur $\mathbb{R}^k$. Alors on peut associer une norme sur E par

$$\|\vec{x}\| = N\left(\Psi^{-1}(\vec{x})\right).$$

Par exemple dans l'exemple précédent, on dispose d'un isomorphisme

$$\Phi\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$$

donné par

$$\Phi(P) = (P(0), P(1), \ldots, P(n)).$$

L'isomorphisme $\Psi = \Phi^{-1}$ est associé à la base des polyômes d'interpolation de Lagrange au points $0, 1, 2, \ldots, n$:

$$L_j(X) = \frac{\prod_{i\neq j}(X-i)}{\prod_{i\neq j}(j-i)}.$$

On a alors pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$P(X) = \sum_{j=0}^{n} P(j)L_j(X),$$

i.e.

$$\Psi(\lambda_0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{j=0}^{n}\lambda_j L_j(X).$$

et la norme précédente était définie par

$$\|P\| = N_1(\Phi(P)).$$

e) **Exercice :** Sur l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs complexes que l'on note $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$, on définit

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$$

et

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}\,.$$

Montrer que ce sont deux normes [3].

f) **Exercice :** Démontrer que si $(E_1,N_1),\ (E_2,N_2),\ \ldots,\ (E_k,N_k)$ sont des espaces vectoriels normés alors $N\colon E_1\times E_2\times\cdots\times E_k\to\mathbb{R}_+$ défini par

$$N(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\sum_{j=1}^{k} N_j(x_j)$$

est une norme.

3.2 Convergence de suites dans les espaces vectoriels normés

3.2.1 Définition

Soit (E,N) un espace vectoriel normé et (u_n) une suite à valeurs dans E et $\ell\in E$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ si la suite $\big(N(u_n-\ell)\big)_n$ converge vers zéro :

$$\lim_{n\to+\infty} N(u_n-\ell)=0.$$

On note alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$. On peut aussi donner une définition équivalente en termes de "epsilon" : on a $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$ si et seulement si :

Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier n_0 tel que :

$$(n\geq n_0)\Rightarrow N(u_n-\ell)<\varepsilon.$$

3. Indication : la seule difficulté est l'inégalité triangulaire pour $\|\bullet\|_2$. Mais ce se démontre de même façon que pour la norme N_2 sur $\mathbb{R}^k$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz : si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ alors

$$\mathcal{R}e\left(\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt\right)\leq \|f\|_2\,\|g\|_2.$$

.

3.2.2 Propriétés

Unicité de la limite

Proposition 3.2.1. *Une suite dans un espace vectoriel normé ne converge que pour une seule valeur limite.*

Démonstration. En effet si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell'$ alors pour tout entier n nous avons, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$0 \leq N(\ell - \ell') \leq N(\ell - u_n) + N(u_n - \ell') = N(u_n - \ell) + N(u_u - \ell')$$

et par passage dans ces inégalités larges, nous obtenons $0 \leq N(\ell - \ell') \leq 0$ et donc $N(\ell - \ell') = 0$ c'est à dire $\ell = \ell'$. □

Norme de la limite

Proposition 3.2.2. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et (u_n) une suite à valeurs dans E qui converge vers ℓ, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} N(u_n) = N(\ell).$$

C'est en fait un corollaire de l'inégalité suivante

$$\forall x, y \in E,\ \big|N(x) - N(y)\big| \leq N(x - y).$$

Que l'on déduit de l'inégalité triangulaire ; car si $x, y \in E$ alors

$$N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y)$$

et donc

$$N(x) - N(y) \leq N(x - y).$$

On en déduit de la même façon :

$$N(y) - N(x) \leq N(x - y).$$

D'où le résultat car $|a| = \max\{a, -a\}$ et donc

$$\big|N(x) - N(y)\big| = \max\{N(x) - N(y), N(y) - N(x)\}.$$

La proposition est alors une conséquence de l'inégalité

$$0 \leq \big|N(u_n) - N(\ell)\big| \leq N(u_n - \ell)$$

et du théorème des gendarmes.

Linéarité

Proposition 3.2.3. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans E que l'on suppose convergentes :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$$

et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la suite $\big(u_n + \lambda v_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \lambda\ell'$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, nous avons, avec l'inégalité triangulaire :

$$N\big((u_n+\lambda v_n)-(\ell+\lambda\ell')\big) = N\big((u_n-\ell)+\lambda(v_n-\ell')\big) \leq N\big(u_n-\ell\big)+N\big(\lambda(v_n-\ell')\big),$$

mais $N\big(\lambda(v_n - \ell')\big) = |\lambda|N\big(v_n - \ell'\big)$ et on en déduit

$$0 \leq N\big((u_n + \lambda v_n) - (\ell + \lambda\ell')\big) \leq N\big(u_n - \ell\big) + \lambda|N\big(v_n - \ell'\big)$$

et puisqu'on suppose

$$\lim_{n\to+\infty} N\big(u_n - \ell\big) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} N\big(v_n - \ell'\big) = 0,$$

nous pouvons conclure. □

Exercice : Soit $(E, \|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E qui converge vers $\ell \in E$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que la suite $(a_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell$ [4] .

3.2.3 Exemples

Proposition 3.2.4. *Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^k$. On note $u_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{k,n})$ et $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k)$. Alors les quatres propriétés suivantes sont équivalentes*

i) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *dans* $(\mathbb{R}^k, N_1)$*, c'est à dire* $\lim_{n\to+\infty} N_1(u_n - \ell) = 0$*,*

ii) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *dans* $(\mathbb{R}^k, N_2)$*, c'est à dire* $\lim_{n\to+\infty} N_2(u_n - \ell) = 0$*,*

4. **Solution :** On a

$$a_n u_n - \lambda\ell = (a_n - \lambda)\ell + a_n(u_n - \ell)$$

et l'inégalité triangulaire implique que

$$0 \leq N(a_n u_n - \lambda\ell) \leq N(\,(a_n - \lambda)\ell\,) + N(\,a_n(u_n - \ell)\,) = |a_n - \lambda|N(\ell) + |a_n|N(u_n - \ell).$$

Or nous avons par hypothèse :

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n - \lambda| = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\lambda| \text{ et } \lim_{n\to+\infty} N(u_n - \ell) = 0$$

ainsi le théorème des gendarmes implique que

$$\lim_{n\to+\infty} N(a_n u_n - \lambda\ell) = 0.$$

iii) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *dans* $(\mathbb{R}^k, N_\infty)$*, c'est à dire* $\lim_{n\to+\infty} N_\infty(u_n - \ell) = 0$*,*

iv) Pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *la suite à valeurs réelles* $(x_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ_j *:*

$$\lim_{n\to+\infty} x_{j,n} = \ell_j.$$

Démonstration. On commence par comparer les normes N_1, N_2, N_∞ :

Soit $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ alors pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$: $|x_i| \leq N_\infty(x)$; et donc $N_1(x) = \sum_{j=1}^k |x_i| \leq kN_\infty(x)$. On a également pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$: $|x_i| \leq N_1(x)$ et donc $N_\infty(x) \leq N_1(x)$. On a donc démontré

$$(\heartsuit) \qquad N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq kN_\infty(x).$$

On démontre avec les mêmes arguments que

$$(\diamondsuit) \qquad N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq \sqrt{k}\, N_\infty(x).$$

De l'inégalité $(\heartsuit)$ et du théorème des gendarmes, on déduit l'équivalence $i) \Leftrightarrow iii)$ et même de l'inégalité $(\diamondsuit)$ et du théorème des gendarmes, on déduit l'équivalence $ii) \Leftrightarrow iii)$. Il reste une équivalence à démontrer par exemple $i) \Leftrightarrow iv)$. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} N_1(u_n - \ell) = 0$ et considérons $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Nous avons

$$0 \leq |x_{j,n} - \ell_j| \leq N_1(u_n - \ell)$$

et on conclut alors que $\lim_{n\to+\infty} |x_{j,n} - \ell_j| = 0$. Réciproquement si pour chaque $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} |x_{j,n} - \ell_j| = 0$ alors puisque

$$N_1(u_n - \ell) = |x_{1,n} - \ell_1| + |x_{2,n} - \ell_2| + \cdots + |x_{k,n} - \ell_k|$$

on en déduit [5] $\lim_{n\to+\infty} N_1(u_n - \ell) = 0$. □

3.2.4 Normes équivalentes

Définition 3.2.5. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* $N, \|\,.\,\| : E \to \mathbb{R}_+$ *deux normes sur* E*. On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe deux constantes* c, C *strictement positives telles que*

$$\forall x \in E,\ c\|x\| \leq N(x) \leq C\|x\|.$$

Exercice : Démontrer que deux normes $N, \|\,.\,\| : E \to \mathbb{R}_+$ sont équivalentes si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiées :

i) Il existe des constantes $c, C > 0$ telle que

$$\big\{\, (x \in E \,\&\, \|x\| \leq 1) \Rightarrow N(x) \leq C \,\big\} \text{ et } \big\{\, (x \in E \,\&\, N(x) \leq 1) \Rightarrow \|x\| \leq c \,\big\}$$

5. Une somme **finie** de suites réelles qui convergent vers zéro, converge vers zéro.

ii) Il existe des constantes $c, C > 0$ telle que

$$\left\{ (x \in E \,\&\, \|x\| = 1) \Rightarrow N(x) \leq C \right\} \text{ et } \left\{ (x \in E \,\&\, N(x) = 1) \Rightarrow \|x\| \leq c \right\}$$

Ainsi, nous avons dans la sous-section précédente démontré que sur $\mathbb{R}^k$, les normes N_1, N_2, N_∞ sont équivalentes. Il est clair que des normes équivalentes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel induisent les mêmes suites convergentes. Nous avons en fait

Proposition 3.2.6. *Soient deux normes N, $\|\,.\,\| : E \to \mathbb{R}_+$ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Ces deux normes sont équivalentes si et seulement si :*

Pour toute suite (u_n) à valeurs dans E et $\ell \in E$ nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ dans } (E, N) \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ dans } (E, \|\,.\,\|).\,;$$

C'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} N(u_n - \ell) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\| = 0.$$

Démonstration. Le sens direct est une conséquence du théorème des gendarmes. Pour montrer le sens réciproque, nous montrons la contraposée du sens réciproque. Nous supposons donc que les deux normes N, $\|\,.\,\| : E \to \mathbb{R}_+$ ne sont pas équivalentes et nous devons trouver une suite qui converge dans un des deux espaces vectoriels normés et par dans l'autre. Nous avons deux cas : soit il n'existe pas de constante réelle strictement positive c telle que

$$\forall x \in E,\; c\|x\| \leq N(x)\,;$$

soit il n'existe pas de constante réelle strictement positive C telle que

$$\forall x \in E,\; N(x) \leq C\|x\|.$$

Plaçons nous dans le second cas, le premier cas se traiterait de la même façon [6]. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc un vecteur $x_n \in E$ tel que

$$N(x_n) > n\|x_n\|.$$

Ainsi $N(x_n) > 0$ et nous pouvons définir :

$$u_n = \frac{1}{N(x_n)} x_n\,.$$

Nous avons

$$N(u_n) = N\left(\frac{1}{N(x_n)} x_n\right) = \frac{1}{N(x_n)} N\left(x_n\right) = 1$$

6. C'est à dire : vous devez *adapter* la preuve à ce cas là.

et par hypothèse nous avons :

$$\|u_n\| = \left\| \frac{1}{N(x_n)} x_n \right\| = \frac{1}{N(x_n)} \|x_n\| < \frac{1}{n}.$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = 0$ et la suite (u_n) converge vers 0 dans $(E, \|\,.\,\|)$ mais puisque pour tout $n > 0$:

$$N(u_n) = 1,$$

la suite (u_n) ne converge pas vers 0 dans (E, N). □

Remarque 3.2.7. *Il est facile de démontrer que sur $\mathbb{R}$ toute les normes sont proportionnelles et donc équivalentes. Sur $\mathbb{R}^2$, on peut démontrer que toutes les normes sont équivalentes à la norme N_2 et donc que toutes les normes sont équivalentes entre elles. Ceci peut se démontrer avec les outils d'analyse 1. Et un des objectifs de cette leçon est de démontrer que ce résultat vaut sur tout les $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.*

3.2.5 En dimension 2, toutes les normes sont équivalentes

Soit donc $N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ une norme sur $\mathbb{R}^2$. On va démontrer qu'elle est équivalente à N_2. On note $\gamma(\theta) = \big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$.

a) Démontrons que la fonction $\theta \mapsto N(\gamma(\theta))$ est continue.
Notons $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Si $\theta,\ \varphi \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\begin{aligned} |N(\gamma(\theta)) - N(\gamma(\varphi))| &\leq N(\gamma(\theta) - \gamma(\varphi)) \\ &= N\left((\cos(\theta) - \cos(\varphi))\vec{i} + (\sin(\theta) - \sin(\varphi))\vec{j}\right). \end{aligned}$$

Et avec l'inégalité triangulaire et le fait que les fonctions cos *et* sin *sont* 1*-Lipschitzienne. On en déduit :*

$$\begin{aligned} |N(\gamma(\theta)) - N(\gamma(\varphi))| &\leq |\cos(\theta) - \cos(\varphi)| N(\vec{i}) + |\sin(\theta) - \sin(\varphi)| N(\vec{j}) \\ &\leq |\theta - \varphi| \left(N(\vec{i}) + N(\vec{j})\right). \end{aligned}$$

Ainsi la fonction $\theta \mapsto N(\gamma(\theta))$ est lipschitzienne donc continue.

b) On en déduit que la restriction de cette fonction à l'intervalle $[0, 2\pi]$ est aussi continue donc elle y est bornée et atteint ces bornes : il y a donc deux constantes c, C et $\theta_-, \theta_+ \in [0, 2\pi]$ telles que

$$\forall \theta \in [0, 2\pi],\ c = N(\gamma(\theta_-)) \leq N(\gamma(\theta) \leq C = N(\gamma(\theta_+)).$$

Puisque $N_2(\gamma(\theta_\pm)) = 1$, nous savons que $\gamma(\theta_\pm) \neq 0$ et donc $c = N(\gamma(\theta_-)) > 0$ et de même $C = N(\gamma(\theta_+)) > 0$.

c) Or si $x \in \mathbb{R}^2$ vérifie $N_2(x) = 1$ alors il y a un $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $x = \gamma(\theta)$ et donc on sait que $c \leq N(x) \leq C$.

d) Ceci permet de démontrer que

$$\forall x \in E,\ cN_2(x) \leq N(x) \leq CN_2(x).$$

Les normes N et N_2 sont donc bien équivalentes.

e) La relation d'être équivalente pour les normes est une relation d'équivalence. En particulier si $\|\,.\,\|, N, \mathcal{N} \colon E \to \mathbb{R}_+$ sont trois normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et si $\|\,.\,\|, N$ sont équivalentes et si $N, \mathcal{N}$ sont équivalentes alors $\|\,.\,\|, \mathcal{N}$ sont équivalentes.

3.3 Boules, ouverts, fermés

3.3.1 Boules

Définition 3.3.1. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $x \in E$ et $r \geq 0$, on appelle boule ouverte de centre x et de rayon r :*

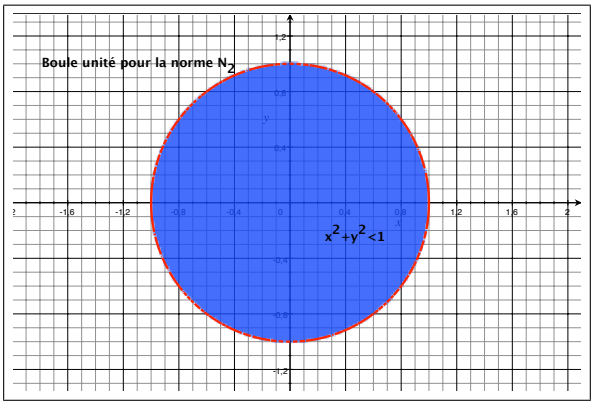
$$B(x, r) = \{z \in E,\ N(z - x) < r\}.$$

Des exemples :

i) Par exemple dans $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$, $B(x, \epsilon) =]x - \epsilon, x + \epsilon[$.

ii) Pour $(\mathbb{R}^2, N_2)$ les boules ouvertes correspondent aux disques ouverts : Si $\Omega = (a, b)$ alors

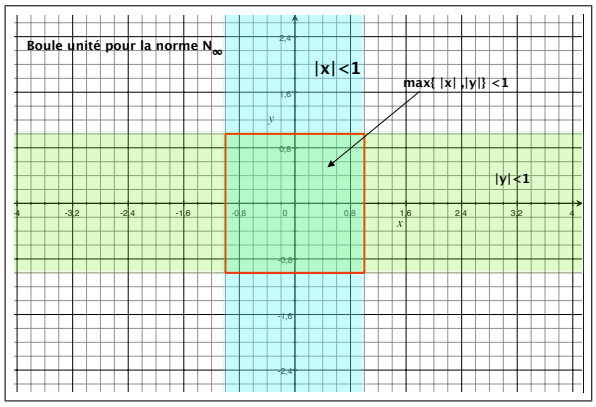
$$B(\Omega, R) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2\right\}.$$



iii) Pour $(\mathbb{R}^2, N_\infty)$. On examine la boule unité $B(0, 1)$. On a

$$(x, y) \in B(0, 1) \Leftrightarrow N_\infty((x, y)) = \max\left\{|x|, |y|\right\} < 1 \Leftrightarrow (\,|x| < 1 \text{ et } |y| < 1\,).$$

On remarque que l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|x| < 1$ est le produit cartésien $]-1, 1[\times\mathbb{R}$. et l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|y| < 1$ est le produit cartésien $\mathbb{R}\times]-1, 1[$. Et la boule unité de $(\mathbb{R}^2, N_\infty)$ est le carré $]-1, 1[\times]-1, 1[$.



iv) Pour $(\mathbb{R}^2, N_1)$. On examine la boule unité $B(0,1)$. On a

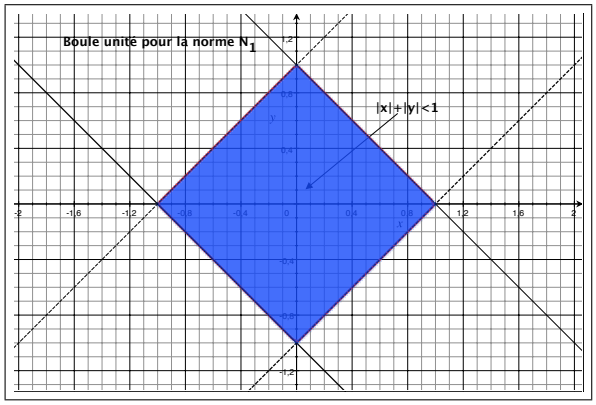
$$(x,y) \in B(0,1) \Leftrightarrow N_1((x,y)) = |x| + |y| < 1.$$

Cette boule est donc la réunion de quatre domaines du plan

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \geq 0,\, y \geq 0\,,\, x+y < 1\right\},\ \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \leq 0,\, y \geq 0\,,\, -x+y < 1\right\}$$

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \leq 0,\, y \leq 0\,,\, -x-y < 1\right\},\ \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \geq 0,\, y \leq 0\,,\, x-y < 1\right\}$$

Le premier est délimité par le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, et $(0,1)$, le deuxième est délimité par le triangle de sommets $(0,0)$, $(-1,0)$, et $(0,1)$, le troisième est délimité par le triangle de sommets $(0,0)$, $(-1,0)$, et $(0,-1)$ et le dernier est délimité par le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, et $(0,-1)$.



On parle parfois aussi de boules fermées ; si $x \in E$ et $r \geq 0$, la boule fermée de centre x et de rayon r est l'ensemble

$$B(x,r] = \{z \in E,\ N(z-x) \leq r\,\}.$$

3.3.2 Parties ouvertes

Définition 3.3.2. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé . On dit qu'une partie $U \subset E$ est ouverte, ou que U est un ouvert de l'espace vectoriel normé (E, N) si pour tout $x \in U$, il y a un $\epsilon > 0$ tel que*

$$B(x, \epsilon) \subset U \ .$$

Si (E, N) est un espace vectoriel normé alors :

i) Démontrer que si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert alors I est un ouvert de $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$

ii) $\emptyset$ et E sont des ouverts de (E, N).

iii) Si $x \in E$ et $r \geq 0$, alors la boule ouverte $B(x, r)$ est un ouvert de (E, N). En effet si $z \in B(x, r)$ alors $N(z - x) < r$ donc $\rho = r - N(z - x) > 0$. Soit maintenant $y \in B(z, \rho)$ alors

$$N(y-x) = N(y-z+z-x) \leq N(y-z)+N(z-x) < \rho+N(z-x) = r.$$

On a donc démontré

$$z \in B(z, \rho) \Rightarrow z \in B(x, r) \ ,$$

c'est à dire

$$B(z, \rho) \subset B(x, r).$$

On a donc bien démontré que $B(x, r)$ est un ouvert de (E, N).

iv) **Exercice :** Démontrer que si $x \in E$ et $r \geq 0$ alors démontrer que le complémentaire dans E de la boule fermée de centre x et de rayon r :

$$\{z \in E \, , \, N(z - x) > r \, \}$$

est un ouvert de (E, N).

Proposition 3.3.3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et N, $\|\,.\,\| \colon E \to \mathbb{R}_+$ deux normes sur E. Si ces deux normes sont équivalentes alors les espaces vectoriels normés (E, N) et $(E, \|\,.\,\|)$ ont les mêmes parties ouvertes.*

Démonstration. On se place donc dans les hypothèses de la proposition. Il y a donc deux constantes strictement positives c, C telles que

$$\forall x \in E, \ c\|x\| \leq N(x) \leq C\|x\|.$$

On va noter $B_N(x, r)$ les boules pour la norme N et $B_{\|\,.\,\|}(x, r)$ les boules pour la norme $\|\,.\,\|$. On a facilement

$$z \in B_N(x, r) \Rightarrow N(z - x) < r \Rightarrow \|x - z\| < \frac{r}{c} \Rightarrow z \in B_{\|\,.\,\|}\left(x, \frac{r}{c}\right)$$

et

$$z \in B_{\|\,.\,\|}(x,r) \Rightarrow \|z-x\| < r \Rightarrow N(x-z) < Cr \Rightarrow z \in B_N(x,Cr).$$

On a donc les inclusions

$$B_N(x,r) \subset B_{\|\,.\,\|}\left(x,\frac{r}{c}\right) \text{ et } B_{\|\,.\,\|}(x,r) \subset B_N(x,Cr).$$

On démontre alors facilement que si U est un ouvert pour (E,N) alors U est un ouvert pour $(E,\|\,.\,\|)$: En effet, si $x \in U$ alors on sait par définition qu'il y a $r>0$ tel que $B_N(x,r) \subset U$. Alors

$$B_{\|\,.\,\|}\left(x,\frac{r}{C}\right) \subset B_N(x,r) \subset U.$$

et

$$\frac{r}{C} > 0.$$

On a bien démontré que U est un ouvert de $(E,\|\,.\,\|)$.

Les mêmes arguments montrent que si U est un ouvert pour $(E,\|\,.\,\|)$ alors U est un ouvert pour (E,N). □

Proposition 3.3.4. *Soit (E,N) un espace vectoriel normé , alors :*

i) Soit $U_\alpha, \alpha \in A$ des ouverts de (E,N) alors $\mathcal{U} = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ est un ouvert de (E,N).

ii) Soit $U_1, U_2, \ldots, U_k$ un nombre fini d'ouverts de (E,N) alors $\Omega = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ est un ouvert de (E,N).

Démonstration. Soit $U_\alpha, \alpha \in A$ des ouverts de (E,N) et

$$x \in \mathcal{U} = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha = \{z \in E, \exists \alpha \in A, z \in U_\alpha\}.$$

Il y a donc un indice $\alpha \in A$ tel que $x \in U_\alpha$ mais U_α est un ouvert de (E,N), il y a donc un réel strictement positif $r>0$ tel que $B(x,r) \subset U_\alpha$ or par définition $U_\alpha \subset \mathcal{U}$ donc $B(x,r) \subset \mathcal{U}$. On a bien démontré que $\mathcal{U}$ est un ouvert de (E,N).

Soit $U_1, U_2, \ldots, U_k$ un nombre fini d'ouverts de (E,N) et $x \in \Omega = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$. Soit $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, on sait $x \in U_i$ et que U_i est ouvert, il y a donc un réel strictement positif $r_i > 0$ tel que $B(x,r_i) \subset U_i$. Posons $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$, on a bien $r > 0$. Si $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ alors on a $r \leq r_i$ et donc $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset U_i$ Ces inclusions impliquent $B(x,r) \subset \Omega = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$. On a bien démontré que $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ est un ouvert de (E,N). □

Proposition 3.3.5. *Soit (E,N) un espace vectoriel normé et $\mathcal{U}$ un ouvert de (E,N). Soit (u_n) une suite à valeurs dans E. On suppose que la suite (u_n) converge vers ℓ et que $\ell \in \mathcal{U}$. Alors à partir d'un certain rang*

$$u_n \in \mathcal{U}.$$

Ce résultat est l'analogue du résultat du cours d'analyse 1 selon lequel si une suite de nombres réels (v_n) converge vers un réel ℓ et que $\ell < b$, alors à partir d'un certain rang $u_n < \ell$. En effet l'intervalle $I =]-\infty, \ell[$ est un ouvert de $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$ et ce résultat d'analyse 1 est donc un cas particulier de cette proposition. Nous vous invitons à relire la preuve de ce résultat d'analyse 1 et de la comparer avec la preuve ci-dessous.

Démonstration. On considère donc (E, N) un espace vectoriel normé , $\mathcal{U}$ un ouvert de (E, N) et (u_n) une suite à valeurs dans E qui converge vers $\ell \in \mathcal{U}$. Alors puisque $\mathcal{U}$ est un ouvert de (E, N), il y a un réel $\epsilon > 0$ tel que $B(\ell, \epsilon) \subset \mathcal{U}$. Or $\lim_{n\to+\infty} N(u_n - \ell) = 0$, il y a donc un entier n_0 tel que

$$(n \geq n_0) \Rightarrow N(u_n - \ell) < \epsilon.$$

C'est à dire

$$(n \geq n_0) \Rightarrow u_n \in B(\ell, \epsilon) \subset \mathcal{U}.$$

On a bien démontré qu'à partir du rang n_0 : $u_n \in \mathcal{U}$. □

3.3.3 Parties fermées

Définition 3.3.6. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé . On dit qu'une partie $F \subset E$ est une partie fermée, ou que F est un fermé de l'espace vectoriel normé (E, N) si $E \setminus F$, le complémentaire de F dans E, est un ouvert de (E, N)*

Quelques exemples :

i) Des intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont des fermés de $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$.

ii) Une boule fermée d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de celui ci.

On déduit facilement des propriétés des ouverts les propriétés suivantes pour les fermés :

i) Soit $F_\alpha, \alpha \in A$ des fermés d'un espace vectoriel normé (E, N) alors $\mathcal{F} = \cap_{\alpha\in A} F_\alpha$ est un fermé d'un espace vectoriel normé (E, N).

ii) Soit $F_1, F_2, \ldots, F_k$ un nombre fini de fermés de (E, N) alors $\Omega = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k$ est un fermé de (E, N).

iii) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $N,\ \|\,.\,\| : E \to \mathbb{R}_+$ deux normes sur E. Si ces deux normes sont équivalentes alors les espaces vectoriels normés (E, N) et $(E, \|\,.\,\|)$ ont les mêmes parties fermées.

On dispose également de la caractérisation séquentielle des parties fermés d'un espace vectoriel normé .

Proposition 3.3.7. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $\mathcal{F} \subset E$ alors : $\mathcal{F}$ est une partie fermée de (E, N) si et seulement si*

"Si (u_n) est une suite à valeurs dans $\mathcal{F}$ qui converge vers ℓ alors $\ell \in \mathcal{F}$".

Démonstration. Le sens direct est une conséquence de la proposition 3.3.5. En effet si $\mathcal{F}$ est un fermé de (E, N) alors $E \setminus \mathcal{F}$ est un ouvert de E et si (u_n) est une suite à valeurs dans E qui converge vers ℓ et que $\ell \notin \mathcal{F}$ alors $\ell \in \mathcal{U}$ ainsi à partir d'un certain rang $u_n \in \mathcal{U}$ et donc la suite (u_n) ne peut être à valeurs dans $\mathcal{F}$.

Concernant le sens réciproque, on le démontre par contraposée. On suppose que $\mathcal{F}$ n'est pas un fermé de (E, N) ainsi la partie $\mathcal{U} = E \setminus \mathcal{F}$ n'est pas ouverte. Il y a donc $\ell \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la boule ouverte $B(\ell, 2^{-n})$ n'est pas incluse dans $\mathcal{U}$: il y a donc u_n un vecteur de E tel que $u_n \in B(\ell, 2^{-n}) \cap \mathcal{F}$ On a donc trouvé une suite (u_n) à valeurs dans $\mathcal{F}$ qui vérifie $N(u_n - \ell) < 2^{-n}$ ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

mais $\ell \notin \mathcal{F}$. □

Ceci permet de démontrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et que si $t \in \mathbb{R}$ alors la partie

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq t\}$$

est un fermé de $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$. On utilise pour cela la caractérisation séquentielle des parties fermées. On considère une suite (u_n) à valeurs dans $\mathcal{F}$ qui converge vers ℓ. Par continuité de f en ℓ, on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

On a, par définition, que pour tout entier n :

$$f(u_n) \leq t.$$

Et par passage à la limite dans ces inégalités larges, on en déduit :

$$f(\ell) \leq t.$$

C'est à dire $\ell \in \mathcal{F}$.

Il faut comprendre que la notion de parties fermées est celle qui permet de généraliser ce qu'on appelle le passage à la limite dans les inégalités larges.

3.4 Parties compactes

3.4.1 Définition

Définition 3.4.1. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé . On dit qu'une partie $K \subset E$ est compacte ou que K est un compact de (E, N) si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans K, on peut trouver une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\ell \in K$ tel que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell.$$

Remarques 3.4.2. — *Si (u_n) est une suite à valeurs dans E, les suites de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, sont dites sous-suite ou suite extraites de la suite (u_n).*

— *Soit (u_n) une suite. Si $A \subset \mathbb{N}$ est une partie infinie, on peut lui associer une suite extraite dont les valeurs sont les $\{u_n, n \in A\}$. En effet on peut énumérer A :*

$$A = \{n_0 < n_1 < n_2 < \ldots\ldots\}$$

et définir $\varphi(j) = n_j$. Par construction $\varphi(j)$ sera le $(j+1)^{\text{ieme}}$ entier de A et φ est bien strictement croissante et $A = \varphi(\mathbb{N})$.

— *On remarquera que si $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante alors pour tout entier n :*

$$\varphi(n) \geq n.$$

— *Si (u_n) est une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé (E, N) qui converge vers ℓ. Alors les suites extraites de (u_n) converge également vers ℓ. Il s'agit d'un exercice analogue à l'exercice d'analyse 1 où on démontre que si (v_n) est une suite à valeurs réelles qui converge vers ℓ alors on a $\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \ell$.*

— *On peut démontrer que si (u_n) est une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé (E, N) et $\ell \in E$ alors il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers ℓ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il y a une infinité d'entiers tel que $u_n \in B(\ell, \varepsilon)$, c'est à dire si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble*

$$A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}, N(u_n - \ell) < \varepsilon\}$$

est infini[7].

— *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et N, $\|\,.\,\|\colon E \to \mathbb{R}_+$ deux normes sur E. Si ces deux normes sont équivalentes alors les espaces vectoriels normés (E, N) et $(E, \|\,.\,\|)$ ont les mêmes parties compactes.*

3.4.2 Propriétés

Proposition 3.4.3. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et K un compact de (E, N) alors K est une partie*

— *fermée,*

— *bornée, c'est à dire qu'il y a un réel M tel que $K \subset B(0, M]$ i.e. $x \in K \Rightarrow N(x) \leq M$.*

7. Vous devez vous convaincre que le sens direct est facile. Pour le sens réciproque : on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble A_ε est infini alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un entier $k(n) \geq n$ tel que $N\left(u_{k(n)} - \ell\right) < 2^{-n}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} k(n) = +\infty$, on peut construire par récurrence une suite strictement croissante $\varphi\colon \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ par $\varphi(0) = k(0)$ et pour $n \geq 0$: $\varphi(n+1) = \min\{k(m), m \geq n+1 \text{ et } k(m) > \varphi(n)\}$. Par construction, on a $\varphi(n) \geq k(n)$ et donc pour cette suite extraite :

$$N\left(u_{\varphi(n)} - \ell\right) < 2^{-n}.$$

Démonstration. On montre d'abord qu'une partie compacte K est fermé. Soit donc (u_n) un suite convergente à valeurs dans K :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Puisque K est compact, il existe une sous suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers un élement $\ell' \in K$. Or on sait déjà que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$$

donc par unicité de la limite, on a $\ell = \ell' \in K$.

Soit $K \subset E$ une partie non bornée. Démontrons que celle ci n'est pas compact. Soit $n \in \mathbb{N}$ il y a donc $u_n \in K$ tel que $N(u_n) > n$. Si $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante alors on a

$$N(u_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \geq n$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} N(u_{\varphi(n)}) = +\infty$$

et la suite $(u_{\varphi(n)})$ ne peut pas converger [8]. Aucune suite extraite de la suite (u_n) ne converge. K n'est donc pas compact. □

On peut même démontrer

Proposition 3.4.4. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et K un compact de (E, N) alors il y a un $x_0 \in K$ tel que*

$$N(x_0) = \sup\{\, N(x),\ x \in K \,\}$$

i.e.

$$x \in K \Rightarrow N(x) \leq N(x_0).$$

Démonstration. En effet, on sait que la partie

$$\{\, N(x),\ x \in K \,\}$$

est majorée non vide, on peut donc considérer :

$$R = \sup\{\, N(x),\ x \in K \,\}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ par caractérisation de la borne supérieure, on trouve $u_n \in K$ tel que

$$R - 2^{-n} < N(u_n) \leq R.$$

Puisque la suite (u_n) est à valeurs dans K et que K est compact, il existe $x_0 \in K$ et une application strictement croissante $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = x_0.$$

8. on rappelle que si la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge alors la suite $\big(N(u_{\varphi(n)})\big)$ converge.

On sait par ailleurs que

$$\lim_{n\to+\infty} N(u_{\varphi(n)}) = N(x_0).$$

et que pour tout entier n :

$$R - 2^{-n} \leq R - 2^{-\varphi(n)} < N(u_{\varphi(n)}) \leq R,$$

et par passage à la limite dans les inégalités larges, nous en déduisons $N(x_0) = R$. □

Exercice : Démontrer que si $K \subset \mathbb{R}$ est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$ alors il y a des réels $\alpha \leq \omega$ tel que $\alpha; \omega \in K$ et

$$K \subset [\alpha, \omega].$$

Il y a une autre propriété des parties compactes qui est très utile :

Proposition 3.4.5. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $K \subset E$ une partie compacte. Alors si $F \subset K$ est une partie fermée alors F est compacte.*

Nous ne faisons pas la preuve de ce résultat mais en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés, vous devez vous convaincre que ce résultat est juste la conséquence d'une loi universerselle : *Qui peut le plus, peut le moins.*

3.4.3 Exemples

a) *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné alors $[a, b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.*
Démonstration : Nous devons démontrer que si (u_n) est une suite à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$ alors une sous suite de cette suite converge vers une limite, limite qui appartient à l'intervalle $[a, b]$. On reprend ici les arguments déjà présentés dans la preuve du théorème de Heine : Soit (u_n) une suite à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble des valeurs prises par la suite (u_n) à partir du rang n :

$$A_n = \{u_\ell;\ \ell \in \mathbb{N} \text{ et } \ell \geq n\} = \{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

C'est une partie non vide majorée par b, elle admet donc une borne supérieure :

$$b_n = \sup A_n.$$

Remarquons que $A_{n+1} \subset A_n$, ainsi b_n est un majorant de A_{n+1} et puisque par définition $b_{n+1} = \sup A_{n+1}$ est le plus petit des majorants de A_{n+1}, nous en déduisons

$$b_{n+1} \leq b_n.$$

La suite (b_n) est donc décroissante minorée par a, elle est donc convergente, on pose $\beta = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par caractérisation de la borne supérieure, il y a un entier $k(n) \geq n$ tel que

$$b_n - \frac{1}{2^n} < u_{k(n)} \leq b_n.$$

Posons $w_n = u_{k(n)}$. On a donc pour tout entier n

$$b_n - \frac{1}{2^n} < w_n \leq b_n \ .$$

Et le théorème des gendarmes assure que la suite (w_n) converge vers β :

$$\beta = \lim_{n \to +\infty} w_n.$$

La fonction $n \mapsto k(n)$ n'est peut être pas strictement croissante, pour remédier à cela on remarque que puisque $k(n) \geq n$, la partie

$$\{k(n),\, n \in \mathbb{N}\}$$

est infinie. Il y a donc une application strictement croissante $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $\varphi(\mathbb{N}) = \{k(n),\, n \in \mathbb{N}\}$. En particulier, nous avons pour tout entier n, il y a un entier $m_n \geq n$ tel que $\varphi(n) = k(m_n)$. Et on a bien $\lim_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = \beta$. Remarquons que le passage à la limite dans les inégalités larges $a \leq u_{\varphi(n)} \leq b$ garantit que $\beta \in [a, b]$. □.

b) De ceci, on en déduit que *les parties compactes de* $\mathbb{R}$ *sont les parties fermées bornées de* $\mathbb{R}$.

Démonstration : En effet, on sait déjà que les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont fermés bornés. Il faut donc montrer que si $F \subset \mathbb{R}$ est une partie fermée , bornée alors c'est une partie compacte. Puisqu'une telle partie est borné, il y a un réel $R \geq 0$ tel que

$$F \subset [-R, R],$$

mais on sait que l'intervalle $[-R, R]$ est compact donc F est une partie fermée d'un compact donc F est compact. □.

c) *Soit* $R \geq 0$ *alors* $[-R, R] \times [-R, R]$ *est une partie compacte de* $\mathbb{R}^2$.

On a vu que sur $\mathbb{R}^2$ toutes les normes étaient équivalentes, c'est pourquoi on ne précise pas ici la norme employée.

Démonstration : On considère donc une suite $\big((x_n, y_n) \big)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leq R \text{ et } |y_n| \leq R.$$

On va extraire de cette suite une sous-suite convergente. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans l'intervalle $[-R, R]$ qui est une partie compacte de $\mathbb{R}$. Il y a donc une application strictement croissante $\varphi_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\ell \in [-R, R]$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi_1(n)} = \ell.$$

Ensuite la suite $\big(y_{\varphi_1(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans l'intervalle $[-R,R]$ qui est une partie compacte de $\mathbb{R}$. Il y a donc une application strictement croissante $\varphi_2\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ et $\kappa\in[-R,R]$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} y_{\varphi_1(\varphi_2(n))}=\kappa.$$

La fonction $\psi=\varphi_1\circ\varphi_2\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est strictement croissante et on a $\lim_{n\to+\infty} x_{\psi(n)}=\ell$ car la suite $\big(x_{\psi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $\big(x_{\varphi_1(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\big(x_{\psi(n)},y_{\psi(n)}\big)=(\ell,\kappa).$$

Et $(\ell,\kappa)\in[-R,R]\times[-R,R]$. On a bien extrait de la suite $\big((x_n,y_n)\big)$ une sous-suite convergente vers $(\ell,\kappa)\in[-R,R]\times[-R,R]$. On a bien démontré que $[-R,R]\times[-R,R]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. $\square$.

d) Ce dernier résultat montre de la même façon que les parties compactes de $\mathbb{R}^2$ sont les fermés bornés.

e) Il est facile mais fastidieux d'adapter ces arguments pour démontrer que si $R\geq 0$ alors $[-R,R]^k$ est une partie compacte de $(\mathbb{R}^k,N_\infty)$ et que *les parties compactes de* $(\mathbb{R}^k,N_\infty)$ *sont les parties fermées bornées.*

3.4.4 Équivalence des normes en dimension finie

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer un résultat rassurant :

Théorème 3.4.6. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie alors sur E toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. On considère $(e_1,\dots,e_k)$ une base de E et on introduit la norme $\|\,.\,\|_\infty$ définie par

$$\left\|\sum_{j=1}^k\lambda_j e_j\right\|_\infty=\max\{|\lambda_1|,\dots,|\lambda_k|\}=N_\infty(\,(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\,).$$

On considère

$$K=\left\{\sum_{j=1}^k\lambda_j e_j\,,\ (\lambda_1,\dots,\lambda_k)\in[-1,1]^k\right\}$$

la boule unité de $(E,\|\,.\,\|_\infty)$. Les arguments précédents nous montrent que K est une partie compacte de $(E,\|\,.\,\|_\infty)$. Soit $N\colon E\to\mathbb{R}_+$ une autre norme. Soit $x=\sum_{j=1}^k\lambda_j e_j\in E$. En utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$(\heartsuit)\qquad N(x)\leq\sum_{j=1}^k N\left(\lambda_j e_j\right)\leq\sum_{j=1}^k|\lambda_j|N\left(e_j\right)\leq C\|x\|_\infty$$

Où $C = \sum_{j=1}^{k} N(e_j)$.

Il nous reste donc à trouver une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in E,\ c\|x\|_\infty \leq N(x).$$

On raisonne par l'absurde : Si une telle constante n'existait pas, il y aurait pour chaque entier n un $x_n \in E$ telle que

$$2^{-n}\|x_n\|_\infty > N(x_n).$$

Ainsi en posant $u_n = \frac{1}{\|x_n\|_\infty} x_n$, on aurait une suite (u_n) telle que

$$\|u_n\|_\infty = 1 \text{ et } N(u_n) < 2^{-n}$$

Ce qui impliquerait que

$$\lim_{n\to+\infty} N(u_n) = 0$$

et que

$$\forall n,\ u_n \in K$$

Puisque K est une partie compacte de $(E, \|\,.\,\|_\infty)$ il y aurait une application strictement croissante $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\ell \in K$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_{\varphi(n)} - \ell\|_\infty = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_{\varphi(n)}\|_\infty = 1 = \|\ell\|_\infty.$$

Donc $\ell \neq 0$ L'inégalité précédente ($\heartsuit$) impliquerait alors

$$\lim_{n\to+\infty} N(u_{\varphi(n)} - \ell) = 0.$$

Or on sait déjà que $\lim_{n\to+\infty} N(u_{\varphi(n)}) = 0$ donc par unicité de la limite on a $\ell = 0$. Ce qui est absurde.

On vient de démontrer qu'une norme N sur E est forcément équivalente à la norme $\|\,.\,\|_\infty$. Ceci permet montre que toutes les normes sur E sont équivalentes. □

Ceci a la conséquence suivante.

Corollaire 3.4.7. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$ une base de E et $x_1, \ldots, x_k\colon E \to \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées associées à cette base :*

$$\forall \vec{v} \in E,\ \vec{v} = \sum_{j=1}^{k} x_i(\vec{v})\,\vec{e}_j.$$

Si $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur E et $(\vec{u}_n)$ une suite de E et $\vec{\ell} \in E$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} N(\vec{u}_n - \vec{\ell}) = 0 \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, k\},\ \lim_{n\to+\infty} x_j(\vec{u}_n) = x_j(\vec{\ell}).$$

3.4.5 Caractérisation des parties compactes dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Puisqu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes la notion de compact est indépendante du choix d'une norme. Notre étude des compacts de $(\mathbb{R}^k, N_\infty)$ permet alors d'affirmer [9] que

Théorème 3.4.8. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors les parties compactes de (E, N) sont les parties fermées bornées.*

3.5 Fonctions continues

3.5.1 Image directe/réciproque d'une partie

Définition 3.5.1. *Soient E et F deux ensembles et $f\colon E \to F$ une fonction. Si $A \subset E$, on définit l'image directe de A par f :*

$$f(A) = \{f(a),\ a \in A\}.$$

Et si $B \subset F$, on définit l'image réciproque de B par f :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

Des exemples :

i) On considère $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det M \neq 0\}$ l'ensemble des matrices carrées de taille n inversible. C'est l'image réciproque de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par la fonction $\det\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

ii) On considère $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det M = 1\}$ l'ensemble des matrices carrées de taille n de déterminant 1. C'est l'image réciproque de $\{1\}$ par la fonction $\det\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

iii) On considère le cercle unité

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$$

c'est l'image réciproque de $\{1\}$ par la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$.

iv) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction alors le graphe de f :

$$\{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}\}$$

est l'image directe de $\mathbb{R}$ par l'application $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(x) = (x, f(x))$. C'est aussi l'image réciproque de $\{0\}$ par la fonction $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $E(x, y) = y - f(x)$.

9. L'assertion qui suit repose sur le fait que des normes équivalentes ont les mêmes parties bornées : vous devez être capable de démontrer ce résultat.

v) Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $\tau_x \colon E \to E$ la translation de vecteurs x :

$$\tau_x(y) = x + y.$$

Alors $\tau_x(B(0,r)) = B(x,r)$ et $\tau_x^{-1}(B(0,r)) = B(-x,r)$.

vi) $B(x,r) = f_x^{-1}(]-\infty, r[)$ où $f_x(y) = N(x-y)$.

Quelques propriétés (à titre d'exercices) : Soient E et F deux ensembles et $f \colon E \to F$ une fonction.

a) Si $B, C \subset F$ alors démontrer que $f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$, $f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C)$ et $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$.

b) Les propriétés analogues sont elles vraies pour l'image directe ?

c) Démontrer que si $A \subset E$ alors $A \subset f^{-1}(f(A))$. A-t-on égalité ?

d) Démontrer que si $B \subset E$ alors $B \cap f(E) = f(f^{-1}(B))$.

e) Soit $A \subset B \subset E$ alors démontrer que $f(A) \subset f(B)$.

3.5.2 Définition

Définition 3.5.2. *Soient (E, N) et $(F, \|\,.\,\|)$ deux espaces vectoriels normés et $A \subset E$ une partie de E et $f \colon A \to F$. On dit que f est continue en un point $a \in A$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que*

$$(N(x-a) < \delta \text{ et } x \in A) \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon,$$

ou encore

$$f(B(a,\delta) \cap A) \subset B_{\|\,.\,\|}(f(a), \varepsilon).$$

On dira que f est continue sur A si f est continue en chaque point a de A.

Si $\widehat{A} \subset A$. On dira que f est continue sur $\widehat{A}$ si la restriction de f à $\widehat{A}$ est continue.

Remarques 3.5.3. *i) Il doit être clair que si $f \colon A \to F$ est continue et si $\widehat{A} \subset A$ alors f est continue sur $\widehat{A}$.*

ii) On pourrait définir comme en analyse 1 la notion de limite.

3.5.3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Comme en analyse 1, nous disposons d'un critère commode :

Proposition 3.5.4. *Soient (E, N) et $(F, \|\,.\,\|)$ deux espaces vectoriels normés et $A \subset E$ une partie de E, $a \in A$ et $f \colon A \to F$.*

f est continue en a si et seulement si

"Pour toute suite (u_n) à valeurs dans A qui converge vers a alors la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(a)$".

Démonstration. Le sens direct est laissé en exercice. On démontre le sens réciproque par contraposée. On suppose donc $f\colon A \to F$ non continue en a. Il y a donc un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout réel $\delta > 0$, on trouve $x_\delta \in A$ tel que $N(x_\delta - a) < \delta$ mais $\|f(x_\delta) - f(a)\| \geq \varepsilon$. Posons alors $u_n = x_{2^{-n}}$. Nous avons $N(u_n - a) < 2^{-n}$ et $\|f(u_n) - f(a)\| \geq \varepsilon$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ mais la suite $\big(f(u_n)\big)$ ne converge pas vers $f(a)$. □

3.5.4 Addition et composition

Proposition 3.5.5. *Soient (E, N) et $(F, \|\,.\,\|)$ deux espaces vectoriels normés et $\mathcal{A} \subset E$ une partie de E, $f, g\colon \mathcal{A} \to F$ deux fonctions continues sur A. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f + \lambda g$ est continue sur $\mathcal{A}$.*

Proposition 3.5.6. *Soient (E, N), $(F, \|\,.\,\|)$ et $(G, \mathcal{N})$ trois espaces vectoriels normés et $\mathcal{A} \subset E$ une partie de E et $\mathcal{B} \subset F$ une partie de F. On considère $f\colon \mathcal{A} \to F$ et $g\colon \mathcal{B} \to G$ deux fonctions continues telle que $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$. Alors la fonction $g \circ f\colon \mathcal{A} \to G$ est continue.*

Nous pouvons faire deux preuves : *Démonstration avec les ε :* Soit $a \in \mathcal{A}$. On sait par hypothèse que $f(a) \in \mathcal{B}$. Pour les commodités de notations, nous posons $b = f(a)$ .Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $g\colon \mathcal{B} \to G$ est continue en $b = f(a)$, il y a un réel $\eta > 0$ tel que

$$g\left(B_{\|\,.\,\|}(b, \eta) \cap \mathcal{B}\right) \subset B_{\mathcal{N}}(g(b), \varepsilon).$$

Puis $f\colon \mathcal{A} \to F$ est continue en a. Il y a donc un réel $\delta > 0$ tel que

$$f\left(B_N(a, \delta) \cap \mathcal{A}\right) \subset B_{\|\,.\,\|}(b, \eta) = B_{\|\,.\,\|}(f(a), \eta).$$

Par ailleurs, nous avons supposé que $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ ainsi

$$f\left(B_N(a, \delta) \cap \mathcal{A}\right) \subset B_{\|\,.\,\|}(b, \eta) \cap \mathcal{B}.$$

On en déduit

$$g\left(\, f\left(B_N(a, \delta) \cap \mathcal{A}\right)\right) \subset g\left(B_{\|\,.\,\|}(b, \eta) \cap \mathcal{B}\right) \subset B_{\mathcal{N}}(g(b), \varepsilon).$$

C'est à dire

$$g \circ f\left(B_N(a, \delta) \cap \mathcal{A}\right) \subset B_{\mathcal{N}}(g \circ f(a), \varepsilon).$$

On a bien démontré que $g \circ f$ est continue en a. Et ceci pour tout $a \in \mathcal{A}$. Donc $g \circ f$ est continue sur $\mathcal{A}$. □

Nous vous invitons à comparer la preuve donnée ci dessus avec la preuve du résultat analogue du cours d'analyse 1.

Démonstration avec les suites : On utilise la caractérisation séquentielle de la continuité. Ainsi il suffit de démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathcal{A}$ qui converge vers $a \in \mathcal{A}$ alors la suite $\left(g \circ f(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers

$g \circ f(a) = g(f(a))$. On utilise d'abord la continuité de f en a et on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a).$$

Maintenant la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathcal{B}$ et converge vers $f(a)$. Or g est continue en $f(a)$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} g\big(f(u_n)\big) = \lim_{n\to+\infty} g\circ f(u_n) = g(f(a)) = g\circ f(a).$$

On a bien démontré le résultat voulu. □

3.5.5 Quelques exemples

a) Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $x \in E$, alors la translation de vecteur x est une fonction continue sur E.

b) Soit (E, N) un espace vectoriel normé , $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors l'homothétie de centre x et de rapport λ :

$$z \mapsto \lambda(z - x) + x.$$

est continue.

c) *Soient (E, N) et $(F, \|\,.\,\|)$ deux espaces vectoriels normés , $A \subset E$ une partie de E et $\kappa \geq 0$. On dit qu'une fonction $f\colon A \to F$ est $\kappa-$lipschitzienne ou lipschitzienne si*

$$x, y \in A \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \kappa N(x - y).$$

Il doit être évident qu'une application lipschitzienne est continue [10].

d) Soit (E, N) un espace vectoriel normé alors $N\colon E \to \mathbb{R}$ est continue car 1-lipschitzienne [11].

e) *Soient (E, N) et $(F, \|\,.\,\|)$ deux espaces vectoriels normés , on suppose que E est de dimension finie. Alors toute application linéaire $T\colon E \to F$ est continue. Démonstration :* On considère donc une application linéaire $T\colon E \to F$ et $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$ une base de E. On définit comme précédement la norme $\|\,.\,\|_\infty$ associée à cette base :

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{e}_j \right\|_\infty = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_k|\} = N_\infty(\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\,).$$

10. En voici la vérification : Soit $a \in A$ et $\varepsilon > 0$. Si on pose $\delta = \varepsilon/(\kappa + 1)$, il est évident que l'hypothèse faite sur f entraîne que

$$(N(x - a) < \delta \text{ et } x \in A) \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

11. puisque $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$.

On sait qu'il existe une constante $\gamma \geq 0$ tel que

$$\forall \vec{x} \in E,\ \|\vec{x}\|_\infty \leq \gamma N(\vec{x}).$$

Maintenant si $\vec{z} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \vec{e}_j$, on a

$$\|T(\vec{z})\| = \left\| \sum_{j=1}^k \lambda_j T(\vec{e}_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^k |\lambda_j| \|T(\vec{e}_j)\| \leq C\|\vec{z}\|_\infty \leq C\gamma N(\vec{z}),$$

où $C = \sum_{j=1}^k \|T(\vec{e}_j)\|$. Cette dernière inégalité appliquée à $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$, en utilisant que T est linéaire, montre que T est $C\gamma$-lipschitzienne donc continue. □

f) Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $A \subset E$. Démontrer que $f\colon A \to \mathbb{R}^k$

$$f(x) = (\, f_1(x), \ldots, f_k(x)\,)$$

est continue si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, la fonction $f_i\colon A \to E$ est continue.

3.5.6 Fonctions Polynomiales

Proposition 3.5.7. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie et $f\colon E \to \mathbb{R}$ ou $f\colon E \to \mathbb{R}^p$ une application polynomiale alors f est continue.*

Démonstration. Soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$ une base de E et $\Psi\colon \mathbb{R}^k \to E$ l'isomorphisme

$$\Psi(\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\,) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \vec{e}_j.$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$ et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ nous notons

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$$

et

$$\lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \ldots \lambda_k^{\alpha_k}.$$

Si $f\colon E \to \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale, il y a un entier N, et pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}^k$ tel que $|\alpha| \leq N$ un réel a_α tels que

$$f(\Psi(\lambda)) = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq N} a_\alpha \lambda^\alpha.$$

En utilisant que la somme finie de fonctions continues est continue et que Ψ^{-1} est continue (car c'est une application linéaire entre espaces vectoriels normés de dimension finie), on voit qu'il suffit de démontrer que si $\alpha \in \mathbb{N}^k$ alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &\to \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto \lambda^\alpha \end{aligned}$$

est continue. En utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, on voit que cela est évident [12]. □

Par exemple

$$A \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^2$$

est continue car polynomiale.

De même $\det$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car polynomiale.

3.5.7 Caractérisation de la continuité globale

Théorème 3.5.8. *Soient (E, N) et $(F, \|\,.\,\|)$ deux espaces vectoriels normés .*

- *Si $\mathcal{U} \subset E$ est un ouvert de (E, N) et $f : \mathcal{U} \to F$ une fonction. Alors f est continue si et seulement si*
  "Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $(F, \|\,.\,\|)$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de (E, N).
- *Si $\mathcal{F} \subset E$ est un fermé de (E, N) et $f : \mathcal{F} \to F$ une fonction. Alors f est continue si et seulement si*
  "Pour tout fermé L de $(F, \|\,.\,\|)$, $f^{-1}(L)$ est un fermé de (E, N).

Démonstration. On laisse la preuve de la première assertion en exercice.

Montrons le sens direct de la seconde assertion. On suppose donc que $f : \mathcal{F} \to F$ est continue. On considère un fermé $L \subset F$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $f^{-1}(L)$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans le fermé $\mathcal{F}$ et que cette suite converge, on sait que $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n \in \mathcal{F}$. Maintenant puisque f est continue, nous en déduisons

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Ainsi la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le fermé L et converge vers $f(\ell)$ donc $f(\ell) \in L$. Et donc $\ell \in f^{-1}(L)$. Ainsi $f^{-1}(L)$ est bien un fermé de E.

Montrons maintenant le sens réciproque de la seconde assertion par contraposition :

On suppose que f n'est pas continue. Il y a donc un $\ell \in \mathcal{F}$ et un réel ε tel que pour tout entier n, il existe $u_n \in B(\ell, 2^{-n}) \cap \mathcal{F}$ mais $f(u_n) \notin B(f(\ell), \varepsilon)$ On considère le fermé

$$L = F \setminus B(f(\ell), \varepsilon).$$

12. Mais fastidieux à écrire : soit $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ et (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ convergeant vers a. On a donc $u_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{k,n})$, et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$:

$$\lim_{n\to+\infty} x_{i,n} = a_i.$$

Les règles de multiplications des suites convergentes montrent que

$$\lim_{n\to+\infty} x_{1,n}^{\alpha_1} x_{2,n}^{\alpha_2} \ldots x_{k,n}^{\alpha_k} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_k^{\alpha_k}.$$

C'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \alpha = a^{\alpha}.$$

Par construction, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $f^{-1}(L)$ et elle converge vers ℓ mais $\ell \notin f^{-1}(L)$ car $f(\ell) \notin F \setminus B(f(\ell), \varepsilon)$. Donc $f^{-1}(L)$ n'est pas fermé. □

Des exemples : Ces résultats permettent de démontrer facilement que des ensembles sont ouverts ou fermés.

i) $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$. En effet c'est l'image récioproque de l'ouvert $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par l'application continue $\det$. En particulier, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que si $|a| + |b| + |c| + |d| < \varepsilon$ alors la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{pmatrix}$$

est inversible.

ii) $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $\det$.

iii) Soit $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues alors

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y < f(x) \text{ et } g(y) < x\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car $D = U_1 \cap U_2$ où $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y < f(x)\}$ est l'image réciproque de l'ouvert $]-\infty, 0[$ par l'application continue [13] $(x, y) \mapsto y - f(x)$ et $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(y) < x\}$ est l'image réciproque de l'ouvert $]-\infty, 0[$ par l'application continue $(x, y) \mapsto g(y) - x$. Ainsi U_1 et U_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et D est une intersection finie d'ouverts donc D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

3.6 Fonctions continues sur une partie compactes

3.6.1 Images d'un compact par une application continue

Théorème 3.6.1. *Soient (E, N) et $(F, \|\,.\,\|)$ deux espaces vectoriels normés , $K \subset E$ un compact de (E, N) et $f\colon K \to F$ une fonction continue. Alors $f(K)$ est un compact de $(F, \|\,.\,\|)$.*

Démonstration. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $f(K)$. Pour chaque entier n, on trouve $u_n \in K$ tel que

$$f(u_n) = v_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact K. Il y a donc un application strictement croissante $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\ell \in K$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell.$$

13. Savez démontrer que cette application est continue ?

Puisque f est continue en ℓ, nous en déduisons que

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(u_{\varphi(n)}\right) = f(\ell).$$

C'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} v_{\varphi(n)} = f(\ell),$$

puisque $f(\ell) \in K$, nous avons bien démontré que $f(K)$ est un compact de $(F, \|\,.\,\|)$.
□

3.6.2 Applications

Corollaire 3.6.2. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé , $K \subset E$ un compact de (E, N) et $f\colon K \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f est bornée et atteint ses bornes : il y a $x_-, x_+ \in K$ tels que*

$$\forall x \in K,\ f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+).$$

Démonstration. En effet, $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$ donc l'exercice proposée en page 17 montre qu'il y a $\alpha \leq \omega$ des éléments de $f(K)$ tel que

$$f(K) \subset [\alpha, \omega]$$

Puisque $\alpha, \omega \in f(K)$ il y a $x_-, x_+ \in K$ tels que $\alpha = f(x_-)$ et $\omega = f(x_+)$. Alors

$$\forall x \in K \Rightarrow f(x) \in f(K) \to \alpha = f(x_-) \leq f(x) \leq \omega = f(x_+).$$

□

3.6.3 Exemple :Point de Fermat

Théorème 3.6.3. *Soit A, B, C sont trois points du plan $\mathbb{R}^2$ non alignés alors il existe un unique point F, appelé point de Fermat du triable ABC, tel que*

$$\forall M \in \mathbb{R}^2,\ d(M, A) + d(M, B) + d(M, C) \geq d(F, A) + d(F, B) + d(F, C).$$

Où on rappelle que si $M_0 = (x_0, y_0)$ et $M_1 = (x_1, y_1)$ alors

$$d(M_0, M_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\|.$$

Démonstration. Introduisons la fonction $\Lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Lambda(M) = d(M, A) + d(M, B) + d(M, C).$$

Il s'agit de démontrer qu'il existe un unique point $F \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\inf\left\{\Lambda(M), M \in \mathbb{R}^2\right\} = \Lambda(F)$$

Montrons d'abord l'existence d'un tel point : L'ensemble $\{\Lambda(M), M \in \mathbb{R}^2\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. On peut donc définir

$$\delta = \inf\{\Lambda(M), M \in \mathbb{R}^2\}.$$

Par ailleurs si $M \in \mathbb{R}^2$, nous avons avec l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\Lambda(M) + \Lambda(O) &= d(M,A) + d(O,A) + d(M,B) + d(O,B) + d(M,C) + d(O,C)\\ &\geq 3d(O,M).\end{aligned}$$

Posons

$$R = \Lambda(O) + 10\delta + 1.$$

On a $d(O,M) > R \Rightarrow \Lambda(M) > 2\delta \geq \delta$. Ceci implique que

$$\inf\{\Lambda(M), M \in \mathbb{R}^2\} = \inf\{\Lambda(M), M \in B(O,R]\},$$

où on a noté $B(O,R]$ la boule fermée centrée en l'origine $O = (0,0)$ et de rayon R. Mais $B(O,R]$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$, c'est donc une partie compacte. De plus la fonction Λ est continue comme somme de fonctions continues [14]. Donc $\Lambda\colon B(O,R] \to \mathbb{R}$ est continue et atteint ses bornes, il y a donc un $F \in B(O,R]$ tel que

$$\Lambda(F) = \inf\{\Lambda(M), M \in B(O,R]\} = \inf\{\Lambda(M), M \in \mathbb{R}^2\} = \delta.$$

Montrons d'abord l'unicité d'un tel point : Considérons deux tels points F et F'. On a donc

$$\delta = \Lambda(F) = \Lambda(F').$$

Et considérons I le milieu du segment $[F,F']$. Avec l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$(\heartsuit) \qquad d(A,I) = \|\overrightarrow{AI}\| = \left\|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AF'}\right)\right\| \leq \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AF}\| + \|\overrightarrow{AF'}\|\right),$$

et de même

$$(\diamondsuit) \qquad d(B,I) \leq \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BF}\| + \|\overrightarrow{BF'}\|\right),$$

et

$$(✠) \qquad d(C,I) \leq \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{CF}\| + \|\overrightarrow{CF'}\|\right).$$

En additionnant ces inégalités, nous trouvons

$$\Lambda(I) \leq \frac{1}{2}\left(\Lambda(F) + \Lambda(F')\right) = \delta.$$

Or par définition $\Lambda(I) \geq \delta$. Nous avons donc l'égalité $\Lambda(I) = \delta$ et nous avons égalité dans les inégalités $(\heartsuit)$, $(\diamondsuit)$ et $(✠)$. Or l'égalité $d(A,I) = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AF}\| + \|\overrightarrow{AF'}\|\right)$

14. On peut même vérifier que Λ est 3-lipschitzienne.

ne peut se produire que si les points A, F, F' sont alignés. De même l'égalité $d(B,I) = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BF}\| + \|\overrightarrow{BF'}\|\right)$ ne peut se produire que si les points B, F, F' sont alignés et l'égalité $d(C,I) = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{CF}\| + \|\overrightarrow{CF'}\|\right)$ ne peut se produire que si les points C, F, F' sont alignés. Or les points A, B, C ne sont pas alignés donc nous devons avoir $F = F'$. □

Exercice : En reprenant les arguments de la première partie démontrer les résultats suivants :

a) Si (E, N) est un espace vectoriel normé de dimension finie et que $\Phi : E \Rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que pour des constantes $c > 0$ et C :

$$\forall x \in E, \Phi(x) \geq cN(x) - C$$

alors Φ est minorée et atteint sa borne inférieure : il existe un $x_0 \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \Phi(x) \geq \Phi(x_0).$$

b) Démontrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

alors f est minorée et atteint sa borne inférieure [15] : il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(x_0).$$

c) Si (E, N) est un espace vectoriel normé de dimension finie et que $\Phi : E \Rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle qu'il y a une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in E, \Phi(x) \geq f\left(N(x)\right)$$

et que

$$\lim_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$$

alors Φ est minorée et atteint sa borne inférieure : il existe un $x_0 \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \Phi(x) \geq \Phi(x_0).$$

Ce qu'on attend que les étudiants sachent faire et ce qu'on attend que les étudiants fassent

— Connaître les définitions du cours !

15. Démontrer qu'il y a un $r > 0$ tel que $|x| > r \Rightarrow f(x) \geq |f(0)| + 50$. Puis vérifier que $\inf\{f(x), x \in [-r, r]\} = \inf\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ et en déduire le résultat.

— Travailler les preuves des théorèmes et avoir fait les exercices du poly. Cela a aussi pour but de vous familiariser avec des raisonnements logiques qui seront indispensables en L3 et fondamentaux en Master.
— Savoir démontrer qu'une certaine fonction est une norme.
— Savoir expliquer qu'une fonction donnée est continue (composition, caractérisation séquentielle, reconnaitre qu'elle est éventuellement linéaire ou polynomiale en dimension finie)
— Montrer qu'un ensemble est fermé ou ouvert car c'est l'image réciproque d'un tel ensemble par une fonction continue.
— Savoir démontrer de façon guidée qu'un ensemble est fermé avec la caractérisation séquentielle.
— Savoir démontrer de façon guidée qu'un ensemble est fermé borné (donc compact en dimension finie)
— Savoir utiliser dans des exemples plans ou dans l'espace qu'une fonction continue sur un compact atteint ces bornes pour des problèmes d'optimisation élémentaires.

Chapitre 4

Calcul Différentiel

Avant propos

Nous allons ici introduire les outils qui permettent de généraliser aux fonctions de plusieurs variables les résultats suivants que vous avez vu en d'Analyse 1 :

— Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in]a, b[$. Si f présente un minimum local en x_0 alors

$$f'(x_0) = 0.$$

— Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $x_0 \in]a, b[$. Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$ alors f présente un minimum local en x_0.

Ces outils de calcul différentiel sont par ailleurs fondamentaux non seulement pour étudier les équations de la physique : équation de la chaleur, thermodynamique, relativité générale, mécannique quantique, mécannique des fluides... mais aussi en mathématiques où ils sont indispensables par exemple en géométrie.

4.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

On reprend ici l'exposé fait dans le livre de Liret-Martinais. On équipe donc l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de la norme infinie que nous notons

$$\| (x_1, \ldots, x_n) \| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Ainsi si $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$ alors

$$B(p, \varepsilon) =]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times]x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon[\times \ldots]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[$$

On notera aussi $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ la base cannonique de $\mathbb{R}^n$.

4.1.1 Dérivées partielles

Soit $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in U$, nous savons qu'il y a $\varepsilon > 0$ tel que

$$B(p, \varepsilon) \subset U.$$

Ainsi la courbe $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto \gamma_i(t) = p + t\vec{e}_i$ est à valeurs dans U. On dit que f admet une dérivée partielle dans la direction de $\vec{e}_i$ en p si la fonction $t \mapsto f(p+t\vec{e}_i)$ est dérivable en $t = 0$. Dans ce cas et si on note $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i$ les coordonnées sur U, on définit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(p + t\vec{e}_i) = (f \circ \gamma_i)'(0).$$

4.1.2 Exemples de calculs

1) La fonction $f(x, y) = x$ a des derivées partielles en tout point de plus

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 1 \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0.$$

2) Si $A \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ alors la fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(M) = \overrightarrow{AM}.\vec{u}$ admet des dérivées partielles. En effet [1]

$$g(M + t\vec{i}) = \left(\overrightarrow{AM} + t\vec{i}\right).\vec{u} = \overrightarrow{AM}.\vec{u} + t\vec{i}.\vec{u}$$

ainsi

$$\frac{\partial}{\partial x} g(M) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g(M + t\vec{i}) = \vec{i}.\vec{u}$$

de même $\dfrac{\partial}{\partial y} g(M) = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} g(M + t\vec{j}) = \vec{j}.\vec{u}.$

3) **Fonctions linéaires :** Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est une application linéaire alors T a des dérivées partielles en tout point $p \in \mathbb{R}^n$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T(p) = T(\vec{e}_i)$$

en effet par linéarité nous avons

$$T(p + t\vec{e}_i) = T(p) + tT(\vec{e}_i).$$

4) La fonction $h(x, y, z) = xyz$ admet des dérivées partielles en tout point et

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z) = yz, \ \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z) = xz, \ \frac{\partial}{\partial z} h(x, y, z) = xy.$$

1. On note ici comme au lycée $(\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de R^2 et (x, y) les coordonnées associées.

5) La fonction $\ell(x,y,z) = e^{xyz}$ admet aussi des dérivées partielles en tout point. Pour calculer la dérivée partielle de cette fonction par rapport x en $p = (x_0, y_0, z_0)$ on étudie la fonction $x \mapsto \ell(x, y_0, z_0) = e^{xy_0z_0}$. Cette fonction est dérivable et sa dérivée en $x = x_0$ vaut

$$\frac{\partial}{\partial x}\ell(x_0,y_0,z_0) = y_0z_0\, e^{x_0y_0z_0}.$$

Un calcul identique fournira

$$\frac{\partial}{\partial y}\ell(x_0,y_0,z_0) = x_0z_0\, e^{x_0y_0z_0}\ ,\ \frac{\partial}{\partial z}\ell(x_0,y_0,z_0) = y_0x_0\, e^{x_0y_0z_0}.$$

6) La fonction $k(x,y) = x^2 + y^2$ admet des dérivées partielles en tout point et

$$\frac{\partial}{\partial x}k(x,y) = 2x,\ \frac{\partial}{\partial y}k(x,y) = 2y.$$

7) Si $A \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ alors la fonction $\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\lambda(M) = \|\overrightarrow{AM}\|^2$$

admet des dérivées partielles en tout point. En effet si $A = (a,b)$ et $M = (x,y)$ alors $\lambda(M) = (x-a)^2 + (y-b)^2$. Ainsi

$$\frac{\partial}{\partial x}\lambda(x,y) = 2(x-a),\ \frac{\partial}{\partial y}\lambda(x,y) = 2(y-b).$$

On peut aussi faire ce calcul de façon plus géométrique. Car

$$\lambda(M + t\vec{i}) = \|\overrightarrow{AM} + t\vec{i}\|^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 + 2t\overrightarrow{AM}.\vec{i} + t^2$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\lambda(M) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \lambda(M + t\vec{i}) = 2\overrightarrow{AM}.\vec{i}.$$

Le même calcul conduira à $\frac{\partial}{\partial y}\lambda(M) = 2\overrightarrow{AM}.\vec{j}$.

8) **Fonctions composées I** La fonction $q(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ admet des dérivées partielles[2] en tout point $(x,y) \neq (0,0)$. En effet concernant la dérivée partielle par rapport à x, nous devons étudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \sqrt{u_y(x)}$ où $u_y(x) = x^2 + y^2$. Or u_y est dérivable par rapport à x et la fonction $x \mapsto \sqrt{u_y(x)}$ est dérivable par rapport à x pourvu que $u_y(x) \neq 0$ et alors $\dfrac{\partial}{\partial x}q(x,y) = \dfrac{u_y'(x)}{2\sqrt{u_y(x)}}$ où on a noté $'$ la dérivée par rapport à x : Et on trouve donc

$$\frac{\partial}{\partial x}q(x,y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

2. On remarquera que $q(x,0) = |x|$ n'est pas dérivable en $x = 0$, ainsi la fonction q n'admet pas de dérivée partielle dans la direction de $\vec{i}$ en $(0,0)$. De même la fonction q n'admet pas de dérivée partielle dans la direction de $\vec{j}$ en $(0,0)$.

Une argumentation identique montre que si $x^2+y^2 \neq 0$ alors

$$\frac{\partial}{\partial y} q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ce calcul est un cas particulier d'un calcul plus général :

Proposition 4.1.1. *Soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et $p \in U$. On suppose que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ existe. Soit $\Theta\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. On suppose que $f(p \in I$. Alors il y a un ouvert $\mathcal{O} \subset U$ contenant p, sur lequel la fonction $\Theta \circ f$ est bien définie, de plus cette fonction admet une dérivée partielle dans la direction de $\vec{e}_i$ en p et*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Theta \circ f(p) = \Theta'(f(p)) \, \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Démonstration : D'abord $\mathcal{O} = f^{-1}(I) = \{q \in U, f(q) \in I\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$: en effet f est continue, U est ouvert et I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $\mathcal{O}$ est l'image réciproque de I par f donc est ouvert. Par définition, $\Theta \circ f$ est bien définie sur $\mathcal{O}$. On sait que la fonction $g(t) = f(p + t\vec{e}_i)$ est dérivable et $t = 0$ et que la fonction $\Theta \circ g$ est bien définie. De plus nos hypothèses et le théorème de dérivation des fonctions composées montrent que la fonction $t \mapsto \Theta(g(t))$ est dérivable en $t = 0$ et

$$(\Theta \circ g)'(t) = \Theta'(g(0))\, g'(0)\ ,$$

ainsi la fonction $t \mapsto \Theta \circ f(p + t\vec{e}_i)$ est est dérivable en $t = 0$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Theta \circ f(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Theta \circ g(t) = \Theta'(g(0))\, g'(0) = \Theta'(f(p)) \, \frac{\partial}{\partial x_i} f(p).$$

□

9) **Dérivée du déterminant** On étudie les dérivées partielles de la fonction déterminant 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ r & s & t \end{pmatrix} \mapsto \det A$$

Cette fonction déterminant est polynomiale donc ses dérivées partielles existent en tous points et en toutes directions. En développant par rapport à la dernière colonne, nous avons

$$(\star) \qquad \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ r & s & t \end{pmatrix} = z \begin{vmatrix} u & v \\ r & s \end{vmatrix} - w \begin{vmatrix} x & y \\ r & s \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix}.$$

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial z} \det A = \begin{vmatrix} u & v \\ r & s \end{vmatrix}, \ \frac{\partial}{\partial w} \det A = - \begin{vmatrix} x & y \\ r & s \end{vmatrix}, \ \frac{\partial}{\partial t} \det A = \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix}.$$

Ces expressions peuvent évoquer le produit vectoriel et cela n'est pas surprenant. En effet, si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ alors, nous avons l'identité

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right).\vec{c}$$

On peut vérifier cela avec la formule $(\star)$ ci dessus mais aussi avec l'interprétation géométrique du déterminant et du produit vectoriel. En effet, $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une mesure du volume-algébrique- du parallélépipède formé par les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Par ailleurs ce volume est aussi le produit de l'aire de la base par la longueur de la hauteur. Or la longueur du vecteur $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est l'aire-algébrique- du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et sa direction est la normale $\vec{n}$ au plan défini par $\vec{a}$ et $\vec{b}$, donc la longueur de la hauteur est le produit scalaire $\vec{n}.\vec{c}$. Si $\vec{c} = z\vec{i} + w\vec{j} + t\vec{k}$, on a donc

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right).\vec{c} = z\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right).\vec{i} + w\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right).\vec{j} + t\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right).\vec{k}.$$

Lorsque $\vec{a} = x\vec{i} + u\vec{j} + r\vec{k}$ et $\vec{b} = y\vec{i} + v\vec{j} + s\vec{k}$, la formule $(\star)$ fournit

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} u & v \\ r & s \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & y \\ r & s \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix} \vec{k}.$$

4.1.3 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

On remarque d'abord qu'il existe des fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui admettent en chaque point des dérivées partielles par rapport à x et y mais qui ne sont pas continue sur $\mathbb{R}^2$. Par exemple, prenons la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Il est facile de montrer que si $p = (x,y) \neq (0,0)$ alors les dérivées partielles de f en p existent et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

En $(0,0)$: si $t \in \mathbb{R}$ nous avons $f(t,0) = 0$ et $f(0,t) = 0$ donc f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

Par ailleurs si $t > 0$ alors

$$f(t,t) = \frac{1}{2}$$

Ainsi la suite $(u_n = (2^{-n}, 2^{-n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(0,0)$ mais la suite $\left(f(u_n) = \frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$. Donc f n'est pas continu en $(0,0)$.

Définition 4.1.2. *On dit qu'une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si les dérivées partielles de f existent en tout point de U et si les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_i} f\colon U \to \mathbb{R}^k$ sont des fonctions continues sur U.*

Remarque 4.1.3. *Il faut noter que si $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ est $\mathcal{C}^1$ alors $a = (a_1, a_2, \dots a_n) \in U$ alors la fonction $x \mapsto f(x, a_2, \dots, a_n)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition :*

$$\mathcal{D}_{(a_2,\dots,a_n)} = \{x \in \mathbb{R}, (x, a_2, \dots, a_n) \in U\}$$

qui est un ouvert de $\mathbb{R}$ car c'est l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. Le même constat vaut pour les restrictions de f le long d'autres axes de coordonnées.

En revanche les fonctions $\mathcal{C}^1$ admettent un développement limité à l'ordre 1 et sont donc continues :

Théorème 4.1.4. *Soit $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in U$ alors il y a une fonction $\eta\colon B(0,\delta) \to \mathbb{R}^k$ continue en $0_{\mathbb{R}^n}$ et vérifiant $\eta(0) = 0$ tel que si $\vec{h} = \sum_{i=1}^n h_i \vec{e}_i$ alors*

$$f(p+h) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(p) \quad + \|\vec{h}\| \eta(\vec{h}).$$

Démonstration. On ne fait la preuve que pour $n = 2$ et $p = (0,0)$. Le cas général se montre avec des arguments identiques, c'est uniquement plus pénible à écrire. La fonction $t \mapsto f(t,0)$ est dérivable et sa dérivée est la fonction $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(t,0)$ qui est par hypothèse continue. Le théorème fondamental de l'analyse nous apprend que

$$f(t,0) - f(0,0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, 0) d\tau.$$

De même la fonction $s \mapsto f(t,s)$ est dérivable et sa dérivée est la fonction $s \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(t,s)$ qui est de même continue. Le théorème fondamental de l'analyse nous apprend que

$$f(t,s) - f(t,0) = \int_0^s \frac{\partial f}{\partial x}(t, \sigma) d\sigma.$$

Finallement

$$f(t,s) - f(0,0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, 0) d\tau + \int_0^s \frac{\partial f}{\partial x}(t, \sigma) d\sigma.$$

Nous avons aussi

$$f(t,s) - f(0,0) - t\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - s\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right) d\tau + \int_0^s \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, \sigma) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) d\sigma.$$

Soit $\varepsilon > 0$, par continuité des dérivées partielles, nous savons qu'il y a un réel $\delta > 0$ tel que

$$(t,s) \in B(0,\delta) \Rightarrow (t,x) \in U \text{ et } \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t,s) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right\| < \frac{\varepsilon}{100}$$

$$\text{et } \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t,s) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right\| < \frac{\varepsilon}{100}$$

On considère maintenant $(t,s) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|t| < \delta$ et $|s| < \delta$ alors pour tout τ dans l'intervalle délimité par t et 0, on a $|\tau| \leq |t| < \delta$ donc

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(\tau,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right\| < \frac{\varepsilon}{100}$$

Et pour tout σ dans l'intervalle délimité par s et 0, on a $|\sigma| \leq |s| < \delta$ donc

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t,\sigma) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right\| < \frac{\varepsilon}{100}$$

On en déduit [3] que

$$\left\| \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right) d\tau \right\| \leq \left| \int_0^t \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(\tau,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right\| d\tau \right| \leq |t| \frac{\varepsilon}{100}.$$

Et de même

$$\left\| \int_0^s \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,\sigma) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) d\tau \right\| \leq \left| \int_0^s \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t,\sigma) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right\| d\tau \right| \leq |s| \frac{\varepsilon}{100}.$$

On obtient donc que si $(t,s) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $|t| < \delta$ et $|s| < \delta$ alors

$$\begin{aligned} \left\| f(t,s) - f(0,0) - t\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - s\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right\| &\leq |t| \frac{\varepsilon}{100} + |s| \frac{\varepsilon}{100} \\ &\leq \max\{|t|,|s|\} \frac{\varepsilon}{50} \\ &< \max\{|t|,|s|\} \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que

$$\lim_{(t,s)\to(0,0)} \frac{f((t,s)) - f((0,0)) - -t\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - s\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\max\{|t|,|s|\}} = 0.$$

□

3. Avec le fait que la norme d'une intégrale est inférieure à l'intégrale de la norme ; ce qui est une conséquence de l'inégalité triangulaire appliquée -à des sommes de Riemann et à un passage à la limite dans des inégalités larges -voir plus loin au lemme (4.1.12).

4.1.4 Différentielle et dérivée le long d'une courbe

Définition 4.1.5. *Soit $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Si $p \in U$, on appelle différentielle de f en p, l'application linéaire $Df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ définie par*

$$\text{pour } \vec{h} = \sum_{i=1}^{n} h_i \vec{e}_i,\ Df(p)(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(p).$$

Il faut remarquer que le développement limité à l'ordre 1 ci dessus donne une définition géométrique qui ne repose pas sur le choix de la base canonique :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(p+t\vec{h}) - f(p)}{t} = Df(p)(\vec{h}).$$

Un exemple de calcul : On considère la fonction $C\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $C(A) = A^2$. C est une fonction polynomiale. Or il est facile de démontrer que

Proposition 4.1.6. *Une fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^1$.*

Démonstration. En effet, si nous reprenons la preuve de la continuité des fonctions polynomiales, nous voyons qu'il suffit de démontrer que si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$ alors la fonction

$$\begin{aligned} M_\alpha\colon \mathbb{R}^k &\to \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto \lambda^\alpha \end{aligned}$$

est $\mathcal{C}^1$. On rappelle que si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$, nous avons noté

$$\lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\ldots\lambda_k^{\alpha_k}.$$

Il est évident que les dérivées partielles de M_α existent en tout point et dans toutes les directions :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} M_\alpha(\lambda) = \alpha_i\, \lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\ldots.\lambda_{i-1}^{\alpha_{i-1}}\lambda_i^{\alpha_i - 1}\lambda_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\ldots\lambda_k^{\alpha_k}.$$

Ainsi $\frac{\partial}{\partial \lambda_i} M_\alpha$ est une fonction polynomiale donc continue. □

Donc C est bien de classe $\mathcal{C}^1$. On se propose de calculer la différentielle de C. Soit $\vec{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous avons

$$\begin{aligned} C(A+t\vec{H}) &= (A+t\vec{H}).(A+t\vec{H}) \\ &= A^2 + At\vec{H} + t\vec{H}A + t^2(\vec{H})^2 \\ &= A^2 + t(A\vec{H} + \vec{H}A) + t^2(\vec{H})^2. \end{aligned}$$

Et donc

$$DC(A)(\vec{H}) = A\vec{H} + \vec{H}A.$$

Nous pouvons aussi effectuer le calcul des dérivées partielles de C. Pour $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$, nous avons

$$C(A) = (C_{i,j}(A))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$$

avec

$$C_{i,j}(A) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} a_{\ell,j}$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial a_{\alpha,\beta}} C_{i,j}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq i \text{ et } \beta \neq j \\ a_{\beta,j} & \text{si } \alpha = i \text{ et } \beta \neq j \\ a_{i,\alpha} & \text{si } \alpha \neq i \text{ et } \beta = j \\ a_{i,i} + a_{j,j} & \text{si } \alpha = i \text{ et } \beta = j. \end{cases}$$

Étude d'une équation aux dérivées partielles :

Soit $U =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$. On cherche les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ qui sont solution de

$$(\heartsuit) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x}.$$

On commence par remarquer que U est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Car c'est l'image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ par l'application continue $(x, y) \mapsto x$:

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in]0, +\infty[\,\}.$$

Puis on remarque que si $f : U \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ alors

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Df\,(\,(x,y)\,)\,(\,(x,y)\,)$$

Soit $(x, y) \in U$. On introduit la fonction $\varphi(t) = f(tx, ty)$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$ et

$$\varphi'(t) = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} f(tx + \tau x, ty + \tau y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)$$

Ainsi lorsque $f : U \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ et vérifie $(\heartsuit)$ alors

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t}\left(tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\right) = \frac{1}{t}\frac{ty}{tx} = \frac{1}{t}\frac{y}{x}.$$

Ceci montre donc que si $t > 0$ alors

$$\varphi(t) = f(tx,ty) = \varphi(1) + \ln(t)\frac{y}{x} = f(x,y) + \ln(t)\frac{y}{x}.$$

En particulier, cette identité pour $t = 1/x$, nous fournit l'égalité

$$f(x,y) = \ln(x)\frac{y}{x} + f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

En posant $u(\xi) = f(1,\xi)$, nous obtenons qu'il existe une fonction $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$f(x,y) = \ln(x)\frac{y}{x} + u\left(\frac{y}{x}\right).$$

Vice versa, il est facile de vérifier que si $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ alors la fonction $f_u\colon U \to \mathbb{R}$ définie par $f_u(x,y) = \ln(x)\frac{y}{x} + u\left(\frac{y}{x}\right)$ vérifie ($\heartsuit$).

Dérivée le long d'une courbe (fonctions composées II)

Proposition 4.1.7. *Soient $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et $\gamma\colon I \to U$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors $f \circ \gamma\colon I \to \mathbb{R}^k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et*

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(\gamma(t))(\gamma'(t)).$$

Autrement dit si $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ alors

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)).$$

Démonstration. Soit $t \in I$ et notons $p = \gamma(t)$ et $\vec{v} = \gamma'(t)$. On doit démontrer que

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{f(\gamma(t+\tau)) - f(p)}{\tau} = Df(p)(\vec{v}).$$

Soit $\tau \neq 0$ un réel assez petit, pour simplifier l'écriture, nous posons $\vec{h}(\tau) = \overrightarrow{\gamma(t)\gamma(t+\tau)}$ ainsi $p + \vec{h}(\tau) = \gamma(t+\tau)$. Le développement limité de f à l'ordre 1 en p fournit l'existence d'une fonction $\eta\colon B(0,\delta) \to \mathbb{R}^k$ tel que

$$\lim_{\vec{h} \to 0} \eta(\vec{h}) = 0$$

tel que

$$f(p + \vec{h}) = f(p) + Df(p)(\vec{h}) + \|\vec{h}\|\,\eta(\vec{h}).$$

En particulier

$$f(\gamma(t+\tau)) - f(\gamma(t)) = f(p + \vec{h}(\tau)) - f(p) = Df(p)(\vec{h}(\tau)) + \|\vec{h}(\tau)\|\,\eta(\vec{h}(\tau)).$$

Puisque γ est $\mathcal{C}^1$, nous avons

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\gamma(t+\tau)) - \gamma(t)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\vec{h}(\tau)}{\tau} = \gamma'(t) = \vec{v}.$$

Donc par continuité de l'application linéaire $Df(p)$ (nous sommes en dimension finie), nous savons

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{Df(p)(\vec{h}(\tau))}{\tau}=\lim_{\tau\to 0}Df(p)\left(\frac{\vec{h}(\tau)}{\tau}\right)=Df(p)(\vec{v}).$$

Par ailleurs

$$\left\|\frac{\|\vec{h}(\tau)\|}{\tau}\,\eta(\vec{h}(\tau))\right\|=\left\|\frac{\vec{h}(\tau)}{\tau}\right\|\,\left\|\eta(\vec{h}(\tau))\right\|$$

Puisque $\lim_{\tau\to 0}\left\|\eta(\vec{h}(\tau))\right\|=0$ et que $\lim_{\tau\to 0}\left\|\frac{\vec{h}(\tau)}{\tau}\right\|=\|\vec{v}\|$, nous en déduisons que

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\|\vec{h}(\tau)\|}{\tau}\,\eta(\vec{h}(\tau))=0,$$

Puisque

$$\frac{f(p+\vec{h}(\tau))-f(p)}{\tau}=\frac{Df(p)(\vec{h}(\tau))}{\tau}+\frac{\|\vec{h}(\tau)\|}{\tau}\,\eta(\vec{h}(\tau))$$

et que lorsque $\tau\to 0$: le premier terme du membre de gauche converge vers $Df(p)(\vec{v})$ et que le second terme tend vers 0, nous obtenons bien le résultat voulu

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{f(p+\vec{h}(\tau))-f(p)}{\tau}=Df(p)(\vec{v}).$$

□

Fonctions de différentielle nulle

Définition 4.1.8. *On dit qu'une partie $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^n$ est* **convexe** *si pour tout $M_0,M_1\in\mathcal{O}$ alors*

$$[M_0,M_1]=\{M_0+t\overrightarrow{M_0M_1}\,;\,t\in[0,1]\}\subset\mathcal{O}.$$

Proposition 4.1.9. *Soit $f\colon U\to\mathbb{R}^k$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ que l'on suppose convexe. Si pour tout $p\in U$: $Df(p)=0$, c'est à dire que pour tout $p\in U$ et tout $i\in\{1,\dots,n\}$:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)=0,$$

alors f est une fonction constante.

Démonstration. Soit $A\in U$ et $M\in U$. On considère la fonction $\varphi\colon[0,1]\to\mathbb{R}^k$ définie par

$$\varphi(t)=f\left(A+t\overrightarrow{AM}\right).$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a

$$\varphi'(t) = Df\left(A + t\overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{AM}\right) = 0$$

Ceci implique que φ est une fonction constante et en particulier :

$$f(A) = \varphi(0) = \varphi(1) = f(M).$$

On a bien démontré que f est constante égale à sa valeur en A. □

Remarque 4.1.10. *Une inspection rapide de la preuve montre que celle ci est valide dès que l'ouvert U est* **étoilé** *en un point A; c'est à dire que pour tout $M \in U$, on a*

$$[A, M] \subset U.$$

En fait, on peut remplacer l'hypothèse de convexité par le fait que pour tout $A, B \in U$, il y ait une courbe continue affine par morceaux joignant A à B : i.e. il y a $M_1, \ldots, M_{\ell-1}, M_\ell \in U$ tels que

$$[A, M_1] \cup [M_1, M_2] \cup \cdots \cup [M_{\ell-1}, M_\ell] \cup [M_\ell, B] \subset U.$$

4.1.5 Inégalités des accroissements finis

Proposition 4.1.11. *On équipe $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\,.\,\|_\star$ et $\mathbb{R}^k$ d'une norme $\|\,.\,\|_\bullet$. Et on considère une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ que l'on suppose convexe. On suppose qu'il y a $\kappa \geq 0$ tel que pour tout $p \in U$:*

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ \|Df(p)(\vec{v})\|_\bullet \leq \kappa \|\,\vec{v}\,\|_\star$$

alors f est $\kappa-$lipschitzienne :

$$\forall p, q \in U,\ \|f(p) - f(q)\|_\bullet \leq \kappa \|\,p - q\,\|_\star.$$

Démonstration. Ce résultat repose sur le lemme suivant :

Lemme 4.1.12. *Soit $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^k$ une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$ alors*

$$\left\| \int_a^b \gamma(t) \| dt \right\|_\bullet \leq \int_a^b \|\gamma(t)\|_\bullet dt.$$

Démonstration du lemme : Posons

$$I_N^+(\gamma, a, b) = \frac{b-a}{N} \sum_{\ell=1}^{n} \gamma\left(a + \frac{b-a}{N}\right).$$

On sait que

$$\lim_{N \to +\infty} I_N^+(\gamma, a, b) = \int_a^b \gamma(t) dt.$$

et que (par continuité de la norme) :

$$\lim_{N\to+\infty} \left\|I_N^+(\gamma,a,b)\right\|_\bullet = \left\|\int_a^b \gamma(t)\|dt\right\|_\bullet .$$

Par ailleurs l'inégalité triangulaire implique que

$$(\heartsuit) \qquad \left\|I_N^+(\gamma,a,b)\right\|_\bullet \leq \frac{b-a}{N}\sum_{\ell=1}^{n}\left\|\gamma\left(a+\frac{b-a}{N}\right)\right\|_\bullet .$$

Et puisque $t\mapsto\|\gamma(t)\|_\bullet$ est une fonction continue, nous savons que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{b-a}{N}\sum_{\ell=1}^{n}\left\|\gamma\left(a+\frac{b-a}{N}\right)\right\|_\bullet = \int_a^b \|\gamma(t)\|_\bullet dt.$$

L'inégalité des accroissements finis est alors une conséquence du passage à la limite dans les inégalités larges $(\heartsuit)$. □

Revenons maintenant à la preuve de l'inégalité des accroissements finis. On se place dans les hypothèses et notations de la proposition et on considère $p,q\in U$ alors, puisque U est convexe, le segment $[p,q]$ est inclus dans l'ouvert U. Ainsi la fonction $\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{R}^k$ définie par

$$\gamma(t) = f\left(p+t\overrightarrow{pq}\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus

$$\gamma'(t) = Df\left(p+t\overrightarrow{pq}\right)\left(\overrightarrow{pq}\right)$$

donc par hypothèse

$$\|\gamma'(t)\|_\bullet \leq \kappa\left\|\overrightarrow{pq}\right\|_\star = \kappa\|p-q\|_\star$$

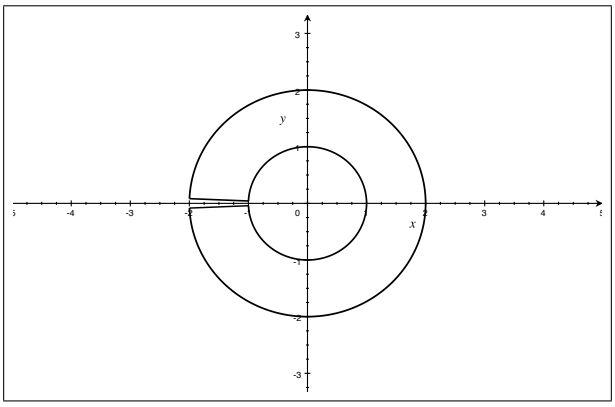
et on conclut avec le lemme que

$$\|f(p)-f(q)\|_\bullet = \|\gamma(1)-\gamma(0)\|_\bullet = \left\|\int_0^1 \gamma'(t)\,dt\right\|_\bullet \leq \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_\bullet dt \leq \kappa\left\|\overrightarrow{pq}\right\|_\star .$$

□

Remarque 4.1.13. *Il est ici fondamental que l'ouvert U soit convexe. Par exemple considérons l'ouvert $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$\mathcal{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 1<x^2+y^2<4 \text{ et } (x,y)\notin]-\infty,0]\times\{0\}\}.$$



C'est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$ *car c'est l'intersection* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ *où*

$$\mathcal{A}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 < x^2 + y^2 < 4\ \}$$

$$\text{et } \mathcal{A}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \notin]-\infty, 0] \times \{0\}\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times]-\infty, 0])\,.$$

$\mathcal{A}_1$ *est l'image réciproque de l'intervalle ouvert* $]1,4[$ *par la fonction continue* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ *donc* $\mathcal{A}_1$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$. *De plus* $\mathcal{A}_2$ *est le complémentaire de l'ensemble* $]-\infty, 0] \times \{0\}$ *qui est un fermé de* $\mathbb{R}^2$ *par c'est intersection* $D \cap H$ *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$ *et* $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \leq 0\}$ *qui sont des images réciproques de fermés de* $\mathbb{R}$ *par des fonctions continues*[4] *donc* $\mathcal{A}_2$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.

On définit $\Theta \colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *par*

$$\Theta(M) = \text{angle}\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}\right) \in]-\pi, \pi[.$$

Ainsi si $M = (x,y) \in \mathcal{A}$ *alors*

— *Si* $y \geq 0$ *alors* $\Theta(M) = \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

— *Si* $y \leq 0$ *alors* $\Theta(M) = -\arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

— *Si* $x \geq 0$ *alors* $\Theta(M) = \arcsin\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Nous pouvons calculer les dérivées partielles de Θ *en* M *: On a pour* $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 1$, *c'est à dire* $y \neq 0$ *:*

$$\frac{\partial}{\partial x} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

4. Si $\text{abs} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction abscisse $\text{abs}(x,y) = x$ et $\text{ord} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction ordonnée $\text{ord}(x,y) = y$ alors $D = \text{abs}^{-1}(\{0\})$ et $H = \text{ord}^{-1}(]-\infty, 0])$.

Or

$$1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2=\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=-\frac{y}{|y|}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

On peut faire le calcul des dérivées partielles des autres expressions et dans tout les cas, nous trouverons :

$$\frac{\partial}{\partial x}\Theta(x,y)=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Un calcul similaire montre que

$$\frac{\partial}{\partial y}\Theta(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ainsi Θ admet des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y sur $\mathcal{A}$ et ces dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{A}$. De plus si $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}$ alors grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous avons :

$$|D\Theta(M)(a,b)|=\left|\frac{-ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\sqrt{a^2+b^2}=\|\vec{v}\|_2$$

Mais si $p_\varepsilon=(-\frac{3}{2},\varepsilon)\in\mathcal{A}$, alors nous avons

$$\|p_\varepsilon-p_{-\varepsilon}\|_2=2\varepsilon$$

mais

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\Theta(p_\varepsilon)-\Theta(p_{-\varepsilon})|=2\pi.$$

Donc pour $\varepsilon>0$ assez petit, l'inégalité

$$|\Theta(p_\varepsilon)-\Theta(p_{-\varepsilon})|\leq 1\times\|p_\varepsilon-p_{-\varepsilon}\|_2$$

n'est pas valide.

4.1.6 Quelques outils de calcul supplémentaires

Somme et produit

On dispose bien évidement des règles de calcul héritées des règles de calcul des dérivées d'une fonction d'une variable.

Proposition 4.1.14. *Soient $f, g\colon U \to \mathbb{R}^k$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ alors la fonction $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f+g)(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}f(p) + \frac{\partial}{\partial x_i}g(p) \text{ et } D(f+g)(p) = Df(p) + Dg(p).$$

Soient $u, v\colon U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ alors la fonction $u.v$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)(p) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(p)v(p)+u(p)\frac{\partial v}{\partial x_i}(p) \text{ et } D(uv)(p) = v(p)Du(p)+u(p)Dv(p).$$

Fonctions composées III

Proposition 4.1.15. *Soient $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ et $g\colon V \to \mathbb{R}^\ell$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et V de $\mathbb{R}^k$ alors $\mathcal{O} = f^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ et de plus*

$$D(g \circ f)(p) = Dg\,(\,f(p)\,) \circ Df(p).$$

De plus si $f = (f_1, \ldots, f_k)$ et si on note $(y_1, \ldots, y_k)$ des coordonnées sur $\mathbb{R}^k$ alors

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(p) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial y_i} g\,(\,f(p)\,)\,\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(p).$$

Démonstration. On sait que $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ car c'est l'image réciproque de l'ouvert V par l'application continue f. Soit maintenant $p \in \mathcal{O}$. On étudie la fonction

$$t \mapsto g \circ f\,(p + t\vec{e}_i) = g(\gamma(t))$$

où

$$\gamma(t) = f\,(p + t\vec{e}_i) = (f_1\,(p + t\vec{e}_i)\,, \ldots, f_k\,(p + t\vec{e}_i)\,)$$

On sait que g et γ sont $\mathcal{C}^1$ et que

$$\frac{d}{dt}g(\gamma(t)) = Dg(\gamma(t))(\gamma'(t)).$$

En $t = 0$, on a $\gamma'(0) = Df(p)(\vec{e}_i)$ et $\gamma(0) = f(p)$ ainsi

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g(\gamma(t)) = Dg\,(\,f(p)\,)\,(Df(p)(\vec{e}_i)) = (Dg\,(\,f(p)\,) \circ Df(p))\,(\vec{e}_i)$$

et donc

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g(\gamma(t)) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial y_i} g\left(f(p)\right) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(p).$$

Donc $g \circ f$ admet des dérivées partielles dans toutes les directions et en tout point $o \in \mathcal{O}$. De plus la formule

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(p) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial y_i} g\left(f(p)\right) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(p)$$

montre que ces dérivées partielles sont continues [5] donc $g \circ f$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$. □

Applications

On re-démontre la formule pour le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: On considère donc $u, v \colon U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et on leurs associe la fonction $F \colon U \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(p) = (u(p), v(p))$$

c'est également une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(p) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(p)\,,\, \frac{\partial v}{\partial x_i}(p) \right).$$

Par ailleurs la fonction $\mathrm{Prod} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{Prod}(x, y) = xy$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ donc la fonction $uv = \mathrm{Prod} \circ F \colon U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de plus

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Prod}(x, y) = y \text{ et } \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Prod}(x, y) = x.$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)(p) = \frac{\partial \mathrm{Prod}}{\partial x}\left(u(p), v(p)\right) \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial \mathrm{Prod}}{\partial y}\left(u(p), v(p)\right) \frac{\partial v}{\partial x_i}(p),$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)(p) = v(p)\frac{\partial u}{\partial x_i}(p) + u(p)\frac{\partial v}{\partial x_i}(p).$$

Exercice :

Définition 4.1.16. *On dit qu'une application $B \colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ est bilinéaire si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

— $\left(\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^k, \vec{w} \in \mathbb{R}^\ell, \lambda \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow B\left(\vec{u} + \lambda\vec{v}, \vec{w}\right) = B\left(\vec{u}, \vec{w}\right) + \lambda B\left(\vec{v}, \vec{w}\right)$,

5. Les fonctions $p \mapsto \frac{\partial}{\partial y_i} g\left(f(p)\right)$ sont continues par composition de fonctions continues et donc $\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)$ est une somme de produit de fonctions continues donc est continue.

— $\left(\vec{u},\vec{w}\in\mathbb{R}^\ell,\vec{z}\in\mathbb{R}^\ell,\lambda\in\mathbb{R}\right)\ \Rightarrow\ B\left(\vec{u},\vec{w}+\lambda\vec{z}\right)=B\left(\vec{u},\vec{w}\right)+\lambda B\left(\vec{u},\vec{z}\right).$

Autrement dit $B\colon\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^\ell\to\mathbb{R}^m$ est bilinéaire si et seulement si

— *pour tout $\vec{w}\in\mathbb{R}^\ell$, l'application $\vec{u}\mapsto B\left(\vec{u},\vec{w}\right)$ est linéaire,*

— *et pour tout $\vec{u}\in\mathbb{R}^k$, l'application $\vec{w}\mapsto B\left(\vec{u},\vec{w}\right)$ est linéaire.*

1. Montrer qu'une application bilinéaire est polynomiale.
2. Soit $B\colon\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^\ell\to\mathbb{R}^m$ une application bilinéaire et $u\colon U\to\mathbb{R}^k$ et $v\colon U\to\mathbb{R}^\ell$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $p\mapsto B\left(u(p),v(p)\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et que
$$\frac{\partial}{\partial x_i}B\left(u(p),v(p)\right)=B\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(p),v(p)\right)+B\left(u(p),\frac{\partial v}{\partial x_i}(p)\right).$$
3. Appliquer ce résultat à l'application produit de matrice $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto AB\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

4.2.1 Définition

Définition 4.2.1. *Soit $f\colon U\to\mathbb{R}^k$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et si ses dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^1$.*

Exercice : Reprendre les formules de dérivation des sommes et produits et composition de fonctions $\mathcal{C}^1$ et montrer qu'une somme, qu'un produit ou qu'une composition de fonctions $\mathcal{C}^2$ est $\mathcal{C}^2$.

4.2.2 Dérivées croisées

Lemme 4.2.2. ***(de Schwartz)*** *Soit $f\colon U\to\mathbb{R}^k$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Si $p\in U$ et $i,j\in\{1,\dots,n\}$ alors*
$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}f(p)=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}f(p)$$

On notera alors
$$\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}f(p)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(p)=\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}f(p),$$
et aussi
$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}f(p)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_j}(p).$$

Démonstration. On ne montre ce résultat que pour $n = 2$ et $p = (0,0)$; en fait le cas général s'en déduit aisément en considérant, pour $i \neq j$ la fonction

$$\varphi(x,y) = f\left(p + x\vec{e}_i + y\vec{e}_j\right).$$

En effet on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}f(p) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(0,0)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}f(p) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\varphi(0,0).$$

Soit donc U un ouvert du plan contenant $(0,0)$ et $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Nous avons

$$f(t,s) = f(t,0) + \int_0^s \frac{\partial f}{\partial y}(t,\sigma)d\sigma$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,\sigma) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,\sigma) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(\tau,\sigma)d\tau.$$

D'où

$$f(t,s) = f(t,0) + \int_0^s \frac{\partial f}{\partial y}(0,\sigma)d\sigma + \int_0^s \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(\tau,\sigma)d\tau\right)d\sigma$$

mais

$$\int_0^s \frac{\partial f}{\partial y}(0,\sigma)d\sigma = f(0,s) - f(0,0).$$

Au final, nous aboutissons à la formule :

$$(\star) \qquad f(t,s) - f(t,0) - f(0,s) + f(0,0) = \int_0^s \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(\tau,\sigma)d\tau\right)d\sigma.$$

Nous pouvons recommencer en inversant l'ordre des variables :

$$f(t,s) = f(0,s) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\tau,s)d\tau$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,s) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tau,0) + \int_0^s \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial s}(\tau,\sigma)d\sigma.$$

D'où

$$f(t,s) = f(0,s) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\tau,0)d\tau + \int_0^t \left(\int_0^s \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,\sigma)d\sigma\right)d\tau$$

mais

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\tau,0)d\tau = f(t,0) - f(0,0).$$

Au final, nous aboutissons à la formule :

$$(\star\star) \qquad f(t,s) - f(t,0) - f(0,s) + f(0,0) = \int_0^t \left(\int_0^s \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,\sigma) d\sigma \right) d\tau.$$

En comparant les identités $(\star)$ et $(\star\star)$, nous obtenons :

$$\int_0^t \left(\int_0^s \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,\sigma) d\sigma \right) d\tau = \int_0^s \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(\tau,\sigma) d\tau \right) d\sigma.$$

donc

$$\begin{aligned} ts\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) &= \int_0^s \left(\int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(\tau,\sigma) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right] d\tau \right) d\sigma \\ &\quad - \int_0^t \left(\int_0^s \left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,\sigma) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right] d\sigma \right) d\tau. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On se sert de la continuité en $(0,0)$ des fonctions $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$. Nous avons donc qu'il y a $\delta > 0$ tel que

$$\|(t,s)\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(t,s) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right\| < \frac{\varepsilon}{7}$$

et

$$\|(t,s)\| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(t,s) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right\| < \frac{\varepsilon}{7}$$

Posons $\eta = \delta/2$, nous avons alors

$$\eta^2 \left\| \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right\| \leq 2\eta^2 \frac{\varepsilon}{7}.$$

Soit

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right\| \leq \varepsilon$$

Ceci étant valide pour tout $\varepsilon > 0$, nous en déduisons que

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

□

4.2.3 Développement limité à l'ordre 2

En utilisant les mêmes arguments que ceux employés pour établir qu'une fonction $\mathcal{C}^1$ admet un D.L. à l'ordre 1 en chaque point, nous pouvons démontrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ admet un D.L. à l'ordre 2 en chaque point :

Théorème 4.2.3. *Soit $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in U$ alors il y a une fonction $\eta\colon B(0,\delta) \to \mathbb{R}^k$ continue en $0_{\mathbb{R}^n}$ et vérifiant $\eta(0) = 0$ tel que si $\vec{h} = \sum_{i=1}^n h_i\vec{e}_i$ alors*

$$f(p+\vec{h}) = f(p) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(p) \ + \frac{1}{2} \sum_{1\leq i,j\leq n} h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(p) + \|\vec{h}\|^2 \eta(\vec{h}).$$

Démonstration. Il y a donc $\delta > 0$ tel que $B(p,\delta) \subset U$ et alors si $\vec{h} = \sum_{i=1}^n h_i\vec{e}_i \in B(0,\delta)$, nous définissons

$$\gamma(t) = f(p + t\vec{h})$$

Il s'agit d'une courbe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0,1]$ et nous pouvons calculer

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p+t\vec{h}) h_i$$

et

$$\gamma''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p+t\vec{h}) h_i h_j.$$

Nous avons, en conséquence de la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 2 :

$$\gamma(1) = \gamma(0) + \gamma'(0) + \frac{1}{2}\gamma''(0) + \int_0^1 (1-t)\left(\gamma''(t) - \gamma''(0)\right) dt.$$

C'est à dire

$$f(p+\vec{h}) = f(p) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(p) \ + \frac{1}{2} \sum_{1\leq i,j\leq n} h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(p) + \|\vec{h}\|^2 \eta(\vec{h})$$

Où

$$\begin{aligned}\eta(\vec{h}) &= \frac{1}{\|\vec{h}\|^2} \int_0^1 (1-t)\left(\gamma''(t) - \gamma''(0)\right) dt \\ &= \frac{1}{\|\vec{h}\|^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \int_0^1 (1-t)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p+t\vec{h}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)\right) dt.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité des dérivées partielles secondes, nous savons qu'il existe un $\xi > 0$, que l'on peut supposer plus petit que δ, tel que pour tout $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ et $\vec{k} \in B(0,\xi)$:

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p+\vec{k}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) \right\| < \frac{\varepsilon}{n^2 + 30^n}.$$

Alors si $\vec{h} \in B(0,\xi)$, nous savons que pour tout $t \in [0,1]$ alors $t\vec{h} \in B(0,\xi)$ et nous en déduisons [6]

$$\|\eta(\vec{h})\| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{|h_i h_j|}{\|\vec{h}\|^2} \int_0^1 (1-t)\frac{\varepsilon}{n^2+30^n}dt < \varepsilon.$$

On a bien démontré que

$$\lim_{\vec{h}\to 0} \eta(\vec{h}) = 0.$$

□

4.2.4 Différentielle seconde

Définition 4.2.4. *Soit $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in U$. On appelle différentielle seconde de f en p l'application bilinéaire : $D^2f(p)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ définie par*

$$D^2f(p)(\vec{h},\vec{k}) = \left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\right|_{(t,s)=(0,0)} f(p + t\vec{h} + s\vec{k}).$$

Si $\vec{h} = \sum_{i=1}^n h_i\vec{e}_i$ et $\vec{k} = \sum_{i=1}^n k_i\vec{e}_i$ alors

$$D^2f(p)(\vec{h},\vec{k}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} k_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(p).$$

Nous avons donc une expression concise pour le Développement limité à l'ordre 2 :

$$f(p+\vec{h}) = f(p) + Df(p)(\vec{h}) + \frac{1}{2}D^2f(p)(\vec{h},\vec{h}) + \|\vec{h}\|^2\eta(\vec{h}).$$

où $\lim_{\vec{h}\to 0}\eta(\vec{h}) = 0$.

Exercice : *Soit $t \mapsto (x(t),y(t))$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ et $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ calculer*

$$\frac{d^2}{dt^2} f\left(x(t),y(t)\right).$$

Solution : On sait que

$$\frac{d}{dt} f\left(x(t),y(t)\right) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t),y(t)\right) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t),y(t)\right)$$

et redérivant encore cette identité, nous aboutissons à :

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} f\left(x(t),y(t)\right) &= x''(t)\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t),y(t)\right)\\ &+ (x'(t))^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x(t),y(t)\right) + x'(t)y'(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(x(t),y(t)\right)\\ &+ y''(t)\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t),y(t)\right)\\ &+ y'(t)x'(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(x(t),y(t)\right) + (y'(t))^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x(t),y(t)\right).\end{aligned}$$

6. Notez bien que $|h_i| \leq \|\vec{h}\|$.

Et re groupant les termes, nous avons

$$\frac{d^2}{dt^2} f(x(t), y(t)) = x''(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y''(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + (x'(t))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(t), y(t)) + 2x'(t)y'(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x(t), y(t)) + (y'(t))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x(t), y(t)).$$

Avec $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ on peut condenser cette expression :

$$\frac{d^2}{dt^2} f \circ \gamma(t) = Df(\gamma(t)))\left(\gamma''(t)\right)) + D^2 f(\gamma(t)))\left(\gamma'(t), \gamma'(t)\right)).$$

.

4.2.5 Cas particuliers des fonctions à valeurs réelles

Si $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et $p \in U$. On introduit la matrice hessiennne de f en p définie par

$$A = \mathrm{Hess} f(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Le lemme de Schwartz nous apprend que $\mathrm{Hess} f(p)$ est une matrice symétrique. De plus lorsque $\vec{h} = \sum_{j=1}^n h_j \vec{e}_j$ et $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors

$$D^2 f(p)(\vec{h}, \vec{h}) = {}^t HAH = \begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

Dans le cours d'algèbre, vous venez d'apprendre qu'une matrice réelle symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée : il y a donc $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ et $(\vec{\epsilon}_1, \dots, \vec{\epsilon}_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $(\vec{\epsilon}_1, \dots, \vec{\epsilon}_n)$ [7] alors

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

En particulier, si $\vec{h} = \sum_{i=1}^n a_i \epsilon_i$ alors

$$\|\vec{h}\|_2 = \sqrt{\vec{h}.\vec{h}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

7. C'est à dire que les vecteurs colonnes de P expriment les coordonnées des vecteurs $\vec{\epsilon}_1, \dots, \vec{\epsilon}_n$ dans la base canonique

et

$$\lambda_1 \|\vec{h}\|_2^2 \leq D^2 f(p)(\vec{h},\vec{h}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^2 \leq \lambda_n \|\vec{h}\|_2^2.$$

Définition 4.2.5. *On dira que*
— $D^2 f(p)$ *est définie positive si* $\lambda_1 > 0$.
— $D^2 f(p)$ *est définie négative si* $\lambda_n < 0$.

Exercices

1. Si $n = 2$ montrer que $D^2 f(p)$ est définie positive si et seulement si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)\right)^2 > 0,$$

   Pour cela il est agréable de remarquer que

$$\mathrm{Hess} f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que $D^2 f(p)$ est définie positive si et seulement si il y a $\gamma > 0$ tel que :

$$\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n,\ D^2 f(p)(\vec{h},\vec{h}) \geq \gamma \|h\|_2^2.$$

3. Montrer que $D^2 f(p)$ est définie négative si et seulement si il y a $\gamma > 0$ tel que :

$$\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n,\ D^2 f(p)(\vec{h},\vec{h}) \leq -\gamma \|h\|_2^2.$$

4. Montrer que $D^2 f(p)$ est définie positive si et seulement si

$$\left(\vec{h} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|h\|_2 = 1\right) \Rightarrow D^2 f(p)(\vec{h},\vec{h}) > 0.$$

   Indication :

   i) Montrer que

$$\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n,\ D^2 f(p)(\vec{h},\vec{h}) \geq \gamma \|h\|_2^2$$

   si et seulement si

$$\left(\vec{h} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|h\|_2 = 1\right) \Rightarrow D^2 f(p)(\vec{h},\vec{h}) \geq \gamma.$$

   ii) On introduit $\mathbb{S}^n = \{\vec{h} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|h\|_2 = 1\}$ la sphère unité. Montrer qu'il existe $\vec{h}_0 \in \mathbb{S}^n$ tel que

$$\vec{h} \in \mathbb{S}^n \Rightarrow D^2 f(p)(\vec{h},\vec{h}) \geq D^2 f(p)(\vec{h}_0,\vec{h}_0).$$

   On montrera pour cela que $\mathbb{S}^n$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ et que $\vec{h} \mapsto D^2 f(p)(\vec{h},\vec{h})$ est continue.

4.3 Extrema d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$.

4.3.1 Minimum et maximum

Définition 4.3.1. *Soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in U$. On dit que f a*

- *un minimum local en p s'il existe un $\delta > 0$ tel que $q \in B(p,\delta) \Rightarrow f(q) \geq f(p)$. Autrement dit $\inf\{f(q), q \in B(p,\delta)\} = f(p)$.*
- *un minimum local strict en p s'il existe un $\delta > 0$ tel que $q \in B(p,\delta)\backslash\{p\} \Rightarrow f(q) > f(p)$. Autrement dit*

  $$\inf\{f(q), q \in B(p,\delta)\} = f(p) \text{ et } (q \in B(p,\delta) \text{ et } f(q) = f(p)) \Rightarrow q = p.$$

- *un minimum global en p si $q \in U \Rightarrow f(q) \geq f(p)$. Autrement dit $\inf\{f(q), q \in U\} = f(p)$.*
- *un minimum global strict en p si $q \in U \setminus \{p\} \Rightarrow f(q) > f(p)$. Autrement dit*

  $$\inf\{f(q), q \in U\} = f(p)) \text{ et } (q \in U \text{ et } f(q) = f(p)) \Rightarrow q = p.$$

- *un maximum local en p s'il existe un $\delta > 0$ tel que $q \in B(p,\delta) \Rightarrow f(q) \leq f(p)$. Autrement dit $\sup\{f(q), q \in B(p,\delta)\} = f(p)$.*
- *un maximum local strict en p s'il existe un $\delta > 0$ tel que $q \in B(p,\delta) \setminus \{p\} \Rightarrow f(q) < f(p)$. Autrement dit*

  $$\sup\{f(q), q \in B(p,\delta)\} = f(p) \text{ et } (q \in B(p,\delta) \text{ et } f(q) = f(p)) \Rightarrow q = p.$$

- *un maximum global en p si $q \in U \Rightarrow f(q) \leq f(p)$. Autrement dit $\sup\{f(q), q \in U\} = f(p)$.*
- *un maximum global strict en p si $q \in U \setminus \{p\} \Rightarrow f(q) < f(p)$. Autrement dit*

  $$\sup\{f(q), q \in U\} = f(p)) \text{ et } (q \in U \text{ et } f(q) = f(p)) \Rightarrow q = p.$$

4.3.2 Condition nécessaire

Proposition 4.3.2. *Soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in U$. Si f a un minimum (ou maximum) local en p alors*

$$Df(p) = 0.$$

Démonstration. En effet dans ces conditions, pour tout $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto f(p + t\vec{h})$ est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 [8] et elle admet en $t = 0$ un minimum local et donc

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(p + t\vec{h}) = Df(p)(\vec{h}) = 0.$$

8. En effet, puisque U est ouvert, il y a un réel $\delta > 0$ tel que $B(p,\delta) \subset U$. Et alors $t \mapsto f(p+t\vec{h})$ est définie lorsque $|t| < \frac{\delta}{\|\vec{h}\|+1}$, car $|t| < \frac{\delta}{\|\vec{h}\|+1} \Rightarrow \|t\vec{h}\| < \delta$.

Ceci étant valide pour tout $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, nous en déduisons que $Df(p) = 0$. □

Un exemple : On étudie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{2 - x + y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

On sait que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Solution astucieuse : Il existe une remarque astucieuse qui permet de localiser le maximum de la fonction f : En introduisant les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, nous avons, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$2 - x + y = \vec{u}.\vec{v} \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\sqrt{6}.$$

avec égalité si et seulement si il y a $\lambda > 0$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. C'est à dire si et seulement si $(1, x, y) = \frac{1}{2}\vec{v}$ c'est à dire $x = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$. C'est à dire que f admet un maximum global en $p = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et

$$\sup\{f(p), p \in \mathbb{R}^2\} = \sqrt{6}.$$

Solution classique : On a $f(0,0) = 2$ et si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ alors

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \frac{-x + y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Où dans la dernière inégalité, nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwartz [9] :

$$|x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Posons $R_0 = 2.10^{10}$. Nous avons alors

$$x^2 + y^2 > R_0 \Rightarrow f(x,y) \leq 10^{-10} + \sqrt{2} < 2 \leq f(0)$$

Si $D(0, R_0]$ est le disque euclidien fermé centrée en l'origine et de rayon R_0 alors on sait que $f : D(0, R_0] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue définie sur un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ donc compact ; donc $f : D(0, R_0] \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes. Il y a donc $p_0 = (x_0, y_0) \in D(0, R_0]$ tel que $f(p_0) = \sup\{f(p), p \in D(0, R_0]\}$. Par ailleurs, nous avons

$$\sup\{f(p), p \notin D(0, R_0]\} \leq f(0) \leq \sup\{f(p), p \in D(0, R_0]\}.$$

9. On peut aussi le démontrer comme dans les TD de mathématiques 1 :

$$(|x| + |y|)^2 - 2(x^2 + y^2) = 2|x||y| - x^2 - y^2 = -(|x| - |y|)^2 \leq 0.$$

On en déduit que

$$\sup\{f(p), p \in \mathbb{R}^2\} = \sup\{f(p), p \in D(0, R_0]\} = f(p_0).$$

Donc f a un maximum global en p_0.

On calcule maintenant les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - (2-x+y)\frac{x}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - (2-x+y)\frac{y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Donc on a

$$Df(x,y) = 0 \Leftrightarrow -(2-x+y)x = (2-x+y)y = 1+x^2+y^2.$$

Or la condition $-(2-x+y)x = (2-x+y)y = 1+x^2+y^2$ implique que $(2-x+y) \neq 0$ et donc nous avons

$$-(2-x+y)x = (2-x+y)y = 1+x^2+y^2 \Leftrightarrow \left(x = -y \text{ et } (2+2y)y = 1+2y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -y = -\frac{1}{2}\right)$$

Donc

$$Df(p) = 0 \Leftrightarrow p = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

On a donc démontré

— que f atteint sa borne supérieure en au moins un point $p_0 \in \mathbb{R}^2$ et donc que $Df(p_0) = 0$.

— Que si $Df(p) = 0$ alors $p = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Donc f atteint sa borne supérieur uniquement en $P_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Et donc

$$\sup\{f(p), p \in \mathbb{R}^2\} = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{6}.$$

4.3.3 Condition suffisante

Théorème 4.3.3. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in U$. Si $Df(p) = 0$ et si $D^2f(p)$ est définie positif alors f a un minimum local strict en p.*

Remarque 4.3.4. *Nous avons aussi le résultat suivant :Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in U$. Si $Df(p) = 0$ et si $D^2f(p)$ est définie negatif alors f a un maximum local strict en p.*

Démonstration. Dans ce cas, on sait qu'il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n,\ D^2 f(p)(\vec{h}, \vec{h}) \geq \gamma \|h\|_2^2.$$

Puisque toutes les normes sont équivalentes, nous en déduisons le développement limité à l'ordre 2 :

$$f(p+\vec{h}) = f(p) + \frac{1}{2} D^2 f(p)(\vec{h}, \vec{h}) + \|\vec{h}\|_2^2 \eta(\vec{h}) \text{ avec } \lim_{\vec{h} \to 0} \eta(\vec{h}) = 0.$$

En particulier, il y a un $\xi > 0$ tel que

$$\|\vec{h}\|_2 < \xi \Rightarrow \left|\eta(\vec{h})\right| < \frac{\gamma}{77}.$$

Alors lorsque $\vec{h} \in B(0, \xi)$ (où ici $B(O, \xi)$ est la boule pour la norme euclidienne $\| \, . \, \|_2$), nous avons

$$f(p+\vec{h}) \geq f(p) + \frac{1}{2} D^2 f(p)(\vec{h}, \vec{h}) - \frac{\gamma}{77} \|\vec{h}\|_2^2 \geq f(p) + \frac{\gamma}{2} \|\vec{h}\|_2^2 - \frac{\gamma}{77} \|\vec{h}\|_2^2.$$

Et donc

$$f(p+\vec{h}) \geq f(p) + \frac{\gamma}{33} \|\vec{h}\|_2^2.$$

Et l'égalité $f(p+\vec{h}) = f(p)$ n'a lieu [10] que lorsque $\vec{h} = 0$. □

Un autre exemple : On étudie la fonction

$$f(x, y) = x(x+1)^2 - y^2.$$

C'est une fonction polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$. On calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (x+1)^2 + 2(x+1)x = (x+1)(3x+1)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2y$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x + 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

Nous avons donc

$$Df(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (-1, 0) \text{ ou} (x, y) = (-1/3, 0).$$

10. toujours lorsque $\|\vec{h}\|_2 < \xi$.

De plus

$$\mathrm{Hess} f(-1,0) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et

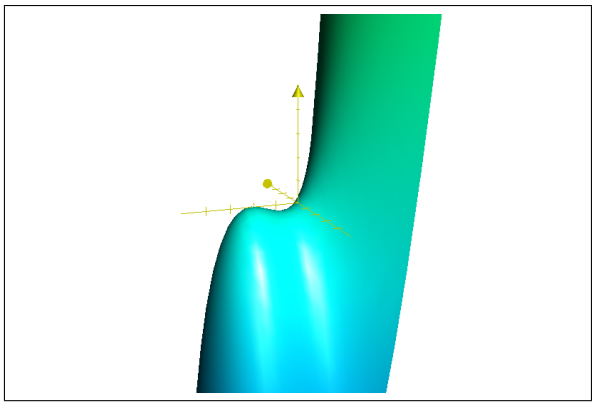
$$\mathrm{Hess} f(-1/3,0) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi $D^2 f(-1,0)$ est définie négatif donc f a en $(-1,0)$ un maximum local strict. Remarquons que $f(-1,0) = 0$. Mais que f s'annulle aussi le long des courbes

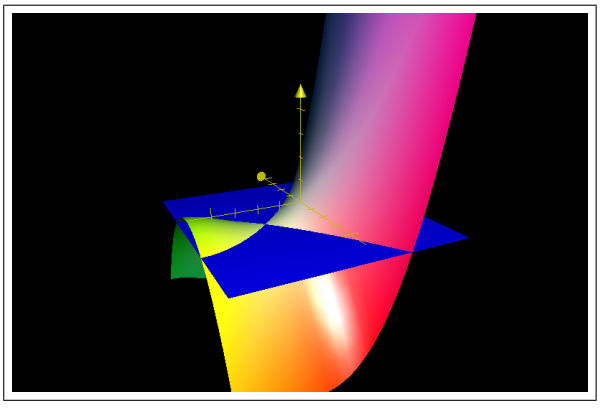
$$t \in \mathbb{R}^+ \mapsto (t, \pm(t+1)\sqrt{t})$$

et que $f(0,y) = -y^2$ ainsi $(-1,0)$ n'est pas un maximum global.

Par ailleurs en $(-1/3,0)$, f n'a pas de minimum local ni de maximum local : car $x \mapsto f(x,0)$ a en $x = -1/3$ un minimum local et $y \mapsto f(-1/3,y)$ a en $y = 0$ un minimum local. On dit que f a en $(-1/3,0)$ un point selle. On a dessiné la surface $z = x(x+1)^2 - y^2$:



Et ici on a rajouté le plan $z = f(-1/3,0) = -4/27$:



4.4 Intégrales multiples

Avant-propos

Vous verrez en L3 une théorie-due à Henri Lebesgue- de l'intégration beaucoup plus satisfaisante concernant la définition de l'intégrale. Aussi, cette section est avant tout une section d'introduction aux calculs d'intégrales.

4.4.1 Approche intuitive

Possible définition de l'aire

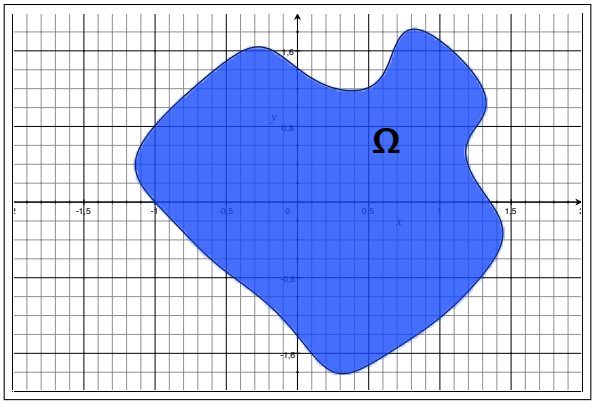
Si $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $C_{k,N}$ le carré

$$C_{k,N} = \left[\frac{k_1}{N}, \frac{k_1+1}{N}\right] \times \left[\frac{k_2}{N}, \frac{k_2+1}{N}\right].$$

Le plan $\mathbb{R}^2$ est pavé par ces carrés. Si Ω est un ouvert, on pose

$$\mathcal{A}_N(\Omega) = \frac{1}{N^2} \operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z}^2, C_{k,N} \subset \Omega\}.$$

C'est l'aire du sous domaine de Ω formé par les carrés situés dans Ω.



Lorsque la suite $(\mathcal{A}_N(\Omega))_N$ converge, on peut appeler

$$\text{Aire}(\Omega) = \lim_{N \to +\infty} \mathcal{A}_N(\Omega).$$

Lorsque Ω est un domaine délimité par deux graphes de fonctions continues : c'est à dire on dispose de deux fonctions continues $\alpha, \omega \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$x \in [a,b] \ \Rightarrow \alpha(x) \leq \omega(x).$$

et on considère :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a < x < b,\ \alpha(x) < y < \omega(x)\}.$$

L'ensemble Ω est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque de l'ouvert $]0,+\infty[$ par la fonction définie sur l'ouvert [11] $U=]a,b[\times\mathbb{R}$ par

$$(x,y)\mapsto \omega(x)-\alpha(x).$$

On peut démontrer que

$$\text{Aire}(\Omega)=\int_a^b (\omega(x)-\alpha(x))\,dx.$$

Remarque 4.4.1. *Lorsque $F\subset\mathbb{R}^2$ est une partie quelconque du plan, on pourrait définir son aire avec une définition analogue. Cependant cette définition aura l'inconvenient de donner une aire nulle à un domaine qui ne contient aucun carré. Nous conviendrons que dans le cadre précédent, les parties*

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } a\le x\le b,\ \alpha(x)<y<\omega(x)\},$$
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } a< x< b,\ \alpha(x)\le y\le\omega(x)\}$$
$$\text{et } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } a\le x< b,\ \alpha(x)< y\le\omega(x)\}....$$

ont la même aire.

Possible définition de l'intégrale double

Si on dispose d'une fonction continue $f\colon K\to\mathbb{R}$ définie sur une partie compacte K du plan contenant Ω alors on peut définir

$$I_N(f,\Omega)=\frac{1}{N^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2, C_{k,N}\subset\Omega} f\left(\frac{k}{N}\right).$$

Et lorsque la suite $(I_N(f,\Omega))_N$ converge, on pourrait appeler

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy=\lim_{N\to+\infty} I_N(f,\Omega).$$

Dans le cas où comme précédemment Ω est définie par

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } a<x<b,\ \alpha(x)<y<\omega(x)\}$$

alors

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left(\int_{\alpha(x)}^{\omega(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

Notons qu'il n'est pas évident ici que la fonction $x\mapsto\int_{\alpha(x)}^{\omega(x)} f(x,y)dy$ soit continue [12]. De même on considérera que la formule suivante est encore valide si on intègre f sur les parties définies par des inégalités larges ou strictes.

11. U est bien un ouvert, c'est l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]a,b[$ par la fonction continue $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x$.

12. Vous verrez cela dans le cours d'analyse 3.

Dans les cas qui nous concerne

Lorsqu'on aura à calculer une intégrale double

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$$

on commencera par découper le domaine Ω en une réunion de domaines délimités par deux graphes de fonctions continues :

$$\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \dots \Gamma_k) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_\ell$$

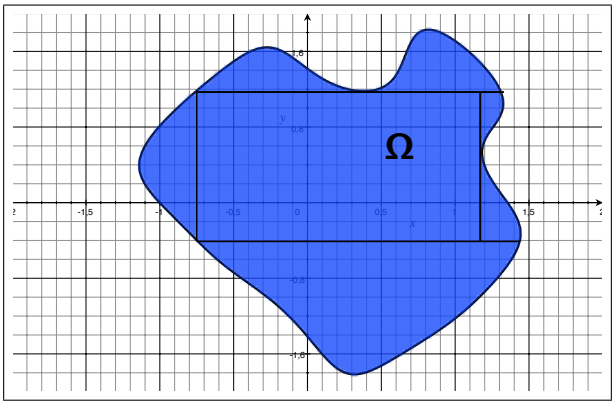
où pour chaque $i = 1, \dots, k$, il y a $\gamma_i \colon I_i \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un intervalle fermé borné I_i telle que $\Gamma_i = \gamma_i(I_i)$ [13]. Et il y a pour chaque $j = 1, \dots, \ell$, des fonctions continues $\alpha_j, \omega_j \colon [a_j, b_j] \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$t \in [a_j, b_j] \ \Rightarrow \alpha_j(t) \leq \omega_j(t).$$

tel que

$$\Omega_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a_j < x < b_j,\ \alpha_j(x) < y < \omega_j(x)\}$$

$$\text{ou } \Omega_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a_j < y < b_j,\ \alpha_j(y) < x < \omega_j(y)\}.$$



Et on posera

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \sum_{j=1}^{\ell} \iint_{\Omega_j} f(x,y)\,dxdy.$$

Il se trouve que ceci est bien défini et en particulier : cela ne dépend pas du découpage fait et si on dispose d'un domaine

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a < x < b,\ \alpha(x) < y < \omega(x)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } c < y < d,\ u(y) < x < v(y)\} \end{aligned}$$

13. Dans la pratique Γ_i sera souvent un intervalle $[A_i, B_i] \subset \mathbb{R}^2$.

et que si $f\colon K \to \mathbb{R}$ est une fonction continue définie sur un compact K contenant D alors on a l'égalité

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\omega(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx \right) dy\,;$$

il s'agit du théorème de Fubini.

Cas des intégrales triples

Lorsque Ω sera une partie de l'espace $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } (x,y) \in D \text{ et } \alpha(x,y) < z < \omega(x,y)\}$$

où $D \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert de la forme précédente et où $\alpha, \omega\colon K \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues définies sur un compact K contenant D. Alors on pourra définir

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \iint_D (\omega(x,y) - \alpha(x,y))\,dxdy.$$

Lorsque $f\colon L \to \mathbb{R}$ sera une fonction continue définie sur un compact L contenant Ω, on définira

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\omega(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

S'il s'avère que de plus

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a < x < b,\ u(x) < y < v(x)\}$$

alors pour chaque $x \in [a,b]$ on peut définir le domaine $U_x \subset \mathbb{R}^2$ par

$$\{x\} \times U_x = \big(\{x\} \times \mathbb{R}^2\big) \cap \Omega$$

c'est à dire

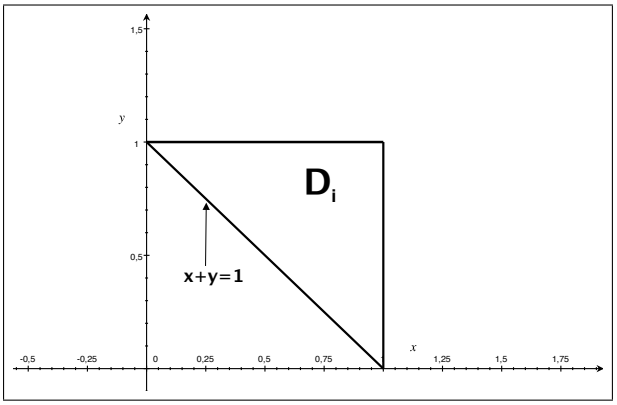
$$U_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } u(x) < y < v(x) \text{ et } \alpha(x,y) < z < \omega(x,y)\}.$$

Et on aura-c'est une version 3D du théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz &= \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\omega(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\iint_{U_x} f(x,y,z)\,dydz \right) dx\end{aligned}$$

4.4.2 Quelques calculs

i) $D_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq 1, y \leq 1, x+y \geq 1\}$, *on veut calculer* $\text{Aire}(D_i)$ *et* $\int_{D_i}(x+y)dxdy$.
On commence par dessiner D_i :



Et $D_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [0,1], 1-x \leq y \leq 1\}$, on en déduit le calcul de l'aire

$$\text{Aire}(D_i) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

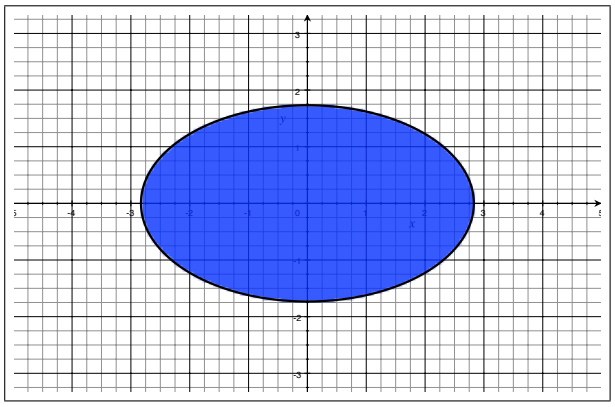
et

$$\begin{aligned}\iint_{D_i}(x+y)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 (x+y)dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + x\right) dx \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

ii) *Pour* $a, b > 0$*, on considère l'intérieur de l'ellipse* $D_{a,b} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}$, *on veut calculer*

$$\text{Aire}(D_{a,b}) \text{ et } \iint_{D_{a,b}} (x^2 - y^2)dxdy.$$

On commence par dessiner $D_{a,b}$:



Nous avons

$$D_{a,b} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -a < x < a \text{ et } -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} < y < b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \right\}.$$

Donc avec le changement de variables $x = a\xi$:

$$\text{Aire}(D_{a,b}) = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx = 2ba\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\xi^2}d\xi = ab\,\text{Aire}(D_{1,1}).$$

On sait que [14] $\text{Aire}(D_{1,1}) = \pi$ donc

$$\text{Aire}(D_{a,b}) = ab\pi.$$

Puis avec les mêmes changements de variables $x = a\xi$ puis $\xi = \sin(\theta)$:

$$\begin{aligned}\iint_{D_{a,b}} x^2 dxdy &= 2\int_{-a}^{a} x^2 b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx \\ &= 2ba^3\int_{-1}^{1}\xi^2\sqrt{1-\xi^2}d\xi \\ &= ba^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, nous utilisons les relations trigonométriques

$$2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t) \text{ et } \sin^2(x) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)$$

14. Le calcul donnerait ici :

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\xi^2}d\xi = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\theta)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sin(2\theta)\right)d\theta = \left[\theta - \frac{1}{2}\cos(2\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

ainsi

$$\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) = \frac{1}{4}\sin^2(2\theta) = \frac{1}{8}\left(1-\cos(4\theta)\right).$$

Or

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(4\theta)d\theta = 0$$

ainsi

$$\iint_{D_{a,b}} x^2 dxdy = 2ba^3\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}ba^3.$$

Le même calcul donne

$$\iint_{D_{a,b}} y^2 dxdy = \frac{\pi}{4}b^3a.$$

Ainsi

$$\iint_{D_{a,b}} \left(x^2-y^2\right)dxdy = \frac{\pi}{4}ba\left(a^2-b^2\right).$$

iii) *On considère* $D_{iii} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0<x<1\,,\ 0<y<1\right\}$ *et on veut calculer*

$$\iint_{D_{iii}} \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}dxdy.$$

On peut procéder de deux façons :

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{iii}} \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}dxdy &= \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}dx\right)dy \\
&= \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{1}{1-y^2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{y^2}{1+xy^2}\right)dx\right)dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2}\left[\ln(1+x)-\ln\left(1+xy^2\right)\right]_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2}\left(\ln(2)-\ln\left(1+y^2\right)\right)dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2}\ln\left(\frac{2}{1+y^2}\right)dy
\end{aligned}$$

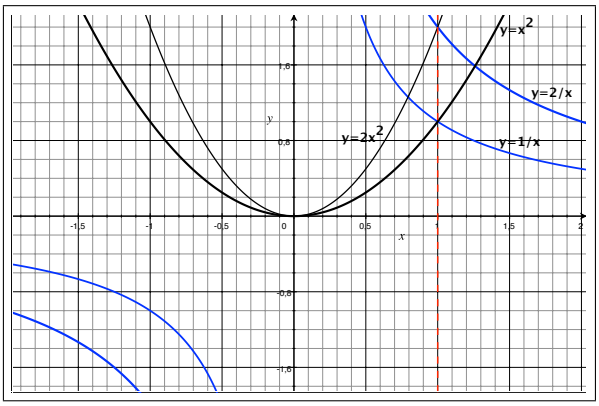
Ou en intégrant d'abord par rapport à y

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{iii}} \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \left[\frac{\arctan(\sqrt{x}y)}{\sqrt{x}} \right]_0^1 dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} \arctan(u)\, 2du \qquad \text{avec } x = u^2 \\
&= \int_0^1 2\arctan'(u)\arctan(u)\, du \\
&= \left[\arctan^2(u) \right]_0^1 \\
&= \frac{\pi^2}{16}.
\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini fournit donc

$$\int_0^1 \frac{1}{1-y^2} \ln\left(\frac{2}{1+y^2} \right) dy = \frac{\pi^2}{16}.$$

iv) *On considère* $D_{iv} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 < xy < 2\,,\; x^2 < y < 2x^2 \right\}$ *et on veut calculer* $\text{Aire}(D_{iv})$.
On commence par dessiner D_{iv} :



Une petite étude montre que si on coupe D_{iv} à l'aide de la droite $x = 1$ alors

$$D_{iv} = \left\{ (x,y) \in \left] \sqrt[3]{\frac{1}{2}}, 1 \right] \times \mathbb{R}\,,\; \frac{1}{x} < y < 2x^2 \right\} \cup \left\{ (x,y) \in \left] 1, \sqrt[3]{2} \right] \times \mathbb{R}\,,\; x^2 < y < \frac{2}{x} \right\}.$$

Ainsi

$$\text{Aire}(D_{iv}) = \int_{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}^1 \left(2x^2 - \frac{1}{x} \right) dx + \int_1^{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{2}{x} - x^2 \right) dx.$$

Ce qui après un peu d'arithmétique, fournit :

$$\text{Aire}(D_{iv}) = \frac{1}{3}\ln(2).$$

v) *On introduit la boule unité de* $\mathbb{R}^3$ *:* $\mathbb{B}^3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x^2+y^2+z^2 < 1,\right\}$ *et on veut calculer son volume.* On a

$$\mathbb{B}^3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x \in]-1,1[\text{ et } y^2+z^2 < 1-x^2,\right\}$$

Donc si $D_x = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2\,,\ y^2+z^2 < 1-x^2,\right\}$ alors

$$\text{vol}\,\mathbb{B}^3 = \int_{-1}^{1}\left(\iint_{D_x} dydz\right)dx = \int_{-1}^{1}\text{Aire}\,(D_x)\ dx = \int_{-1}^{1}\pi(1-x^2)dx = \frac{4}{3}\pi.$$

4.4.3 Le changement de variable

Ici on travaille dans le plan ou dans l'espace $n = 2$ ou $n = 3$.

Théorème 4.4.2. *Soit* $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ *une fonction* $\mathcal{C}^1$ *définie sur un ouvert borné* U *de* $\mathbb{R}^n$*. On suppose*

- Φ *est injective.*
- *Pour tout* $p \in U$*,* $D\Phi(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est une application linéaire bijective : i.e.* $j_\Phi(p) := \det D\Phi(p) \neq 0$*.*
- $V = \Phi(U)$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ [15]*.*

Si $f\colon K \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue définie sur un compact* K *contenant* V *alors*

$$\text{si } n=2 : \iint_V f(x,y)\,dxdy = \iint_U f\circ\Phi(x,y)\,|\det D\Phi(x,y)|\ dxdy.$$

$$\text{si } n=3 : \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_U f\circ\Phi(x,y,z)\,|\det D\Phi(x,y,z)|\ dxdydz.$$

4.4.4 Exemples de calculs

i) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice 2×2 inversible ($\det A \neq 0$) alors L'application

$$\Phi(x,y) = (ax+by\,,\ bx+dy)$$

vérifie bien les propriétés précédentes et puisqu'alors $D\phi(p)$ s'identifie à l'application linéaire associé à A :

$$\det D\Phi(p) = \det A.$$

15. Vous verrez en L3 que ce sera une conséquence des deux premières propositions

Si U est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ alors en application la formule de changement de variable à

$$\Phi\colon U \to A(U)$$

nous obtenons

$$\mathrm{Aire}(\Phi(U)) = |\det A|\,\mathrm{Aire}(U).$$

En effet

$$\mathrm{Aire}(\phi(U)) = \iint_{\Phi(U)} 1\,dxdy = \iint_U 1\,|\det A|\,dxdy = |\det A|\,\mathrm{Aire}(U).$$

On peut démontrer cette formule dans le cas où $U =]0,1[\times]0,1[$ et où A est triangulaire supérieur :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

U est l'intérieur du parallélogramme délimité par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ donc $A(U)$ est l'intérieur du parallélogramme délimité par les vecteurs $A(\vec{i}) = a\vec{i}$ et $A(\vec{j}) = b\vec{i} + d\vec{j}$. L'aire de ce parallélogramme est égale au produit de la longueur de la base (c'est à dire $|al$) par la hauteur (c'est à dire $|dl$) :

$$\mathrm{Aire}(\Phi(U)) = |ad|\,\mathrm{Aire}(U).$$

On aurait pu aussi démontrer que (pour $a, d > 0$)

$$\Phi(U) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}\; y \in]0,d[,\, \frac{b}{d} < x < \frac{b}{d} + a\right\}$$

et donc

$$\mathrm{Aire}(\Phi(U)) = \int_0^d \left(\frac{b}{d} + a - \frac{b}{d}\right) dy = da.$$

ii) On considère $\Phi(x,y) = (ax, by)$ où $a, b > 0$. Démontrer, qu'en notant $\mathbb{D}$ le disque Euclidien unité, nous avons :

$$\Phi(\mathbb{D}) = D_{a,b}.$$

Redémontrer ainsi la formule

$$\mathrm{Aire}(D_{a,b}) = \pi ab.$$

iii) **Les coordonnées polaires :** On considère l'application

$$P(r,\theta) = r\vec{u}_\theta$$

où

$$\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} = (\,\cos(\theta)\,,\,\sin(\theta)\,).$$

On note $\vec{v}_\theta = \frac{d}{d\theta}\vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$, on sait que $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. On vérifie sans trop de peine [16] que l'application P réalise une bijection entre $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ et $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$. De plus P est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial P}{\partial r}(r,\theta) = \vec{u}_\theta \text{ et } \frac{\partial P}{\partial \theta}(r,\theta) = r\vec{v}_\theta.$$

Ainsi

$$\det DP(r,\theta) = r.$$

Donc si $U \subset]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et si $V = P(U)$ alors pour toute fonction $f\colon K \to \mathbb{R}$ continue sur un compact K contenant V, nous avons

$$\iint_U f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right) r dr d\theta = \iint_V f(x,y) dx dy.$$

Calculons par exemple $\int_{\mathbb{D}} x^2y^2 dxdy$ où $\mathbb{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\, x^2+y^2 < 1\right\}$ est le disque euclidien unité. On a

$$\iint_{\mathbb{D}} x^2y^2 dxdy = \int_{\mathbb{D}\setminus(\mathbb{R}_+\times\{0\})} x^2y^2 dxdy$$

et

$$P\left(]0,1[\times]0,2\pi[\right) = \mathbb{D} \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$$

donc

$$\iint_{\mathbb{D}} x^2y^2 dxdy = \iint_{]0,1[\times]0,2\pi[} r^4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) r dr d\theta = \left(\int_0^1 r^5 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\sin^2(\theta) d\theta\right).$$

On calcule la dernière intégrale avec la formules de trigonométrie [17] et on obtient donc

$$\iint_{\mathbb{D}} x^2y^2 dxdy = \frac{1}{6}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{24}.$$

iv) **Les coordonnées cylindriques :** Ces coordonnées sont une extension des coordonnées polaires à la dimension 3, on convient de noter encore $\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} = (\cos(\theta)\,,\,\sin(\theta)\,,\,0)$ et $\vec{v}_\theta = \frac{d}{d\theta}\vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$. On note $\varepsilon k = (0,0,1)$ et de même $\left(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta, \vec{k}\right)$ forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. On introduit

$$C(r,\theta,z) = r\vec{u}_\theta + z\vec{k}.$$

16. cela veut dire que vous devez le vérifier !

17.
$$\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = \frac{1}{4}\sin^2(2\theta) = \frac{1}{8}\left(1-\cos\left(4\theta\right)\right).$$

De même C est une bijection entre $]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^3\backslash(\mathbb{R}_+\times\{0\}\times\mathbb{R})$. Et C est de classe $\mathcal{C}^1$. On peut calculer

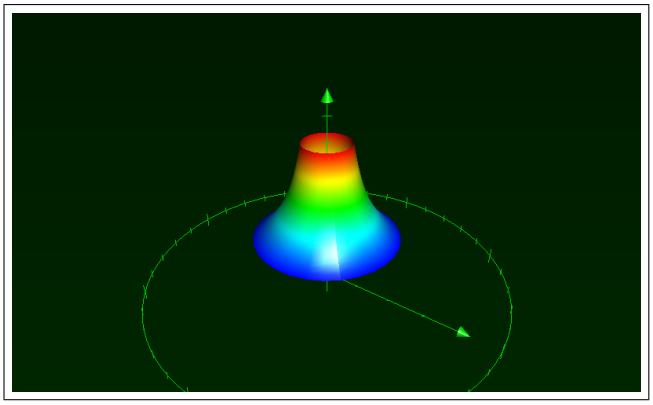
$$\frac{\partial C}{\partial r}(r,\theta,z)=\vec{u}_\theta\,,\ \frac{\partial C}{\partial\theta}(r,\theta,z)=r\vec{v}_\theta \text{ et } \frac{\partial C}{\partial z}(r,\theta,z)=\vec{k}.$$

Ainsi

$$\det DC(r,\theta,z)=r.$$

On peut se servir des coordonnées cylindriques pour calculer le volume du domaine Ω_a défini, pour $a>1$, par :

$$\Omega_a=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,,\ z\sqrt{x^2+y^2}<1 \text{ et } 1<z<a\right\}.$$



On a

$$\operatorname{vol}\Omega_a=\operatorname{vol}\left(\Omega_a\setminus(\mathbb{R}_+\times\{0\}\times\mathbb{R})\right)$$

et si pour

$$H_a=\{(r,\theta,z)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}\,,\ 1<z<a \text{ et } zr<1\}$$

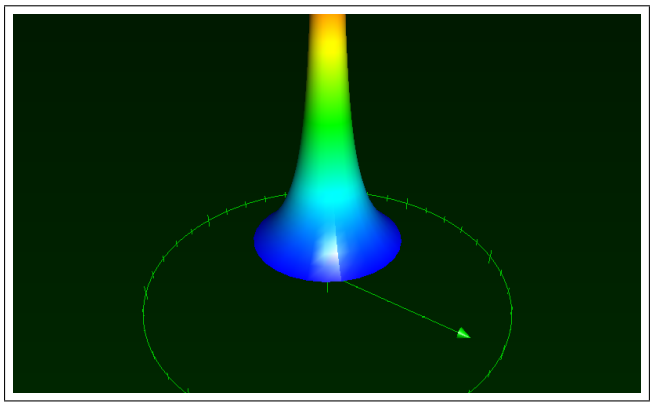
alors $C(H_a)=\Omega_a\setminus(\mathbb{R}_+\times\{0\}\times\mathbb{R})$ donc

$$\operatorname{vol}\Omega_a=\iiint_{H_a}r\,dr\,d\theta\,dz=\int_1^a\left(\int_0^{\frac{1}{z}}r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)dz=\int_1^a\frac{\pi}{z^2}dz=\pi-\frac{\pi}{a}.$$

On remarque que lorsque a tend vers l'infini le volume de Ω_a reste borné et donc le volume du domaine infini

$$\Omega_\infty=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,,\ z\sqrt{x^2+y^2}<1 \text{ et } 1<z\right\}$$

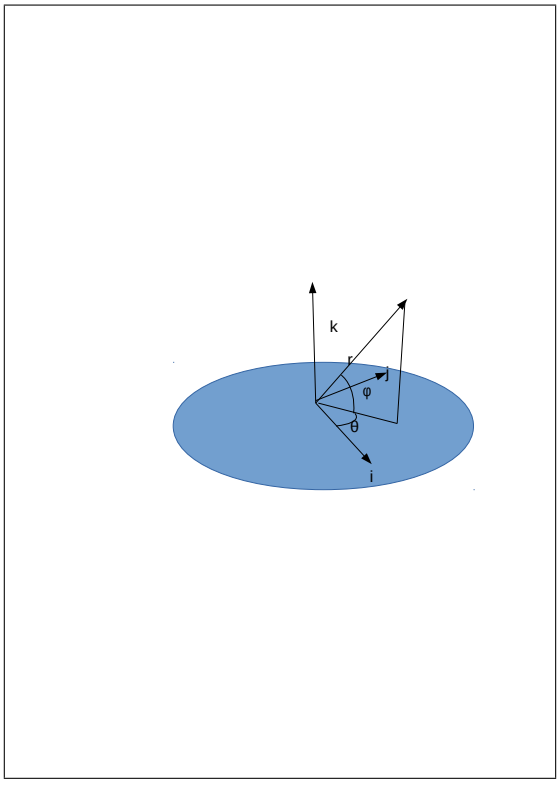
est fini.



v) **Les coordonnées sphériques :** Il s'agit de se repérer dans l'espace $\mathbb{R}^3$ avec la distance à l'origine $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, la longitude $\theta \in]0, 2\pi[$ et la latitude $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$. Pour cela on introduit donc

$$S(r,\theta,\varphi) = r\left(\cos(\varphi)\vec{u}_\theta + \sin(\varphi)\vec{k}\right).$$

Si $M = S(r,\theta,\varphi)$ alors $r = d(O,M)$, φ est l'angle entre le plan Oxy d'équation $z = 0$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et θ est l'angle les vecteurs $\vec{i}$ et le projeté orthogonal de vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur le plan Oxy.



Une argumentation basée sur ces observations montre que S réalise une bijection entre $]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[$ et l'espace $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe des z :$\mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$. On calcule également

$$\frac{\partial S}{\partial r}(r,\theta,\varphi) = \cos(\varphi)\vec{u}_\theta + \sin(\varphi)\vec{k},$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) = r\cos(\varphi)\vec{v}_\theta$$

$$\text{et } \frac{\partial S}{\partial \varphi}(r,\theta,z) = r\left(-\sin(\varphi)\vec{u}_\theta + \cos(\varphi)\vec{k}\right).$$

Ainsi un petit calcul mène sans peine à

$$\det DS(r,\theta,\varphi) = r^2\cos(\varphi).$$

Ceci nous permet de re-calculer le volume de la boule unité de l'espace :

$$\operatorname{vol}\mathbb{B}^3 = \iiint_{]0,1[\times]0,2\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[} r^2\cos(\varphi)drd\theta d\varphi = \frac{1}{3}\times(2\pi)\times[\sin(\varphi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi.$$

4.5 Courbes planes

Avant propos

On veut ici introduire l'étude des parties du plan $\mathbb{R}^2$ qui sont définies par une équation du type

$$f(x,y) = 0$$

où $f\colon U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

4.5.1 Un cas bien connu

Lorsque $\varphi\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ alors le graphe de φ est l'ensemble du plan défini par l'équation

$$\varphi(x) - y = 0.$$

Si on introduit l'ouvert [18] $U =]a,b[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et $f\colon U \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \varphi(x) - y$ alors

$$\Gamma = \{(x,y) \in U,\ f(x,y) = 0\} = \{(x,\varphi(x)), x \in]\,a\,,\,b\,[\}$$

et si $p_0 = (x_0,y_0) \in \Gamma$ alors la droite tangente à Γ en p_0 a pour équation

$$y - y_0 = \varphi'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

18. savez vous pouquoi c'est un ouvert ?

4.5.2 cas général

On dispose du théorème des fonctions implicites dont la version plane est la suivante :

Théorème 4.5.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\colon U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ (où $k = 1$ ou $k = 2$). Soit $p_0 = (x_0, y_0) \in U$ vérifiant les conditions :*

$$f(p_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \neq 0$$

alors il y a $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ et $\varphi\colon]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ tel que l'on ait l'équivalence

$$\left(\begin{array}{c} p = (x, y) \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\times]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\\ f(x, y) = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\\ y = \varphi(x) \end{array} \right).$$

Autrement dit si nous notons $\Gamma = \{(x, y) \in U,\ f(x, y) = 0\}$ et si on introduit le rectangle

$$R_{p_0}(\varepsilon, \delta) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\times]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$$

alors $R_{p_0}(\varepsilon, \delta) \cap \Gamma$ est le graphe de la fonction φ.

Quite à réduire [19] ε et δ, nous pouvons supposer, par continuité de la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$, que sur $R_{p_0}(\varepsilon, \delta)$ la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$ ne s'annule pas. Nous avons alors pour tout $x \in \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$:

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

et si nous dérivons par rapport à x cette formule, nous obtenons [20]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0$$

Et ainsi nous obtenons la formule

19. Cela provient du fait que si $g\colon \Omega \to \mathbb{R}^\ell$ est une fonction continue définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et que $g(p_0) \neq 0$ alors il y a $\eta > 0$ tel que

$$p \in B(p_0, \eta) \Rightarrow g(p) \neq 0.$$

Il suffit alors de réduire ε et δ pour assurer que $\varepsilon \leq \eta$ et $\delta \leq \eta$. Pour démontrer ce fait on peut procéder de deux façons

— La première preuve consiste à reprendre les arguments utilisés pour le même résultat en Analyse 1 : on utilise la définition de la continuité avec $\varepsilon = \|g(p_0)\|/2$ et alors il y a $\eta > 0$ tel que

$$p \in B(p_0, \eta) \Rightarrow \|g(p) - g(p_0)\| < \|g(p_0)\|/2 \Rightarrow |\|g(p)\| - \|g(p_0)\|| < \|g(p_0)\|/2$$
$$\Rightarrow -\|g(p_0)\|/2 < \|g(p)\| - \|g(p_0)\| < \|g(p_0)\|/2 \Rightarrow \|g(p_0)\|/2 < \|g(p)\|.$$

— La seconde est de remarquer que $\mathcal{O} = \{p \in \Omega, g(p) \neq 0\}$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}$ par la fonction continue g c'est donc un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Ensuite puisque $p_0 \in \mathcal{O}$,il y a $\eta > 0$ tel que $B(p_0, \eta) \subset \mathcal{O}$ et on a bien $p \in B(p_0, \eta) \Rightarrow g(p) \neq 0$.

20. si $\gamma(x) = (x, \varphi(x))$ alors $Df(\gamma(x))(\gamma'(x)) = 0$ or $\gamma'(x) = (1, \varphi'(x))$, d'où le résultat.

$$\boxed{\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}}$$

Ainsi si $P_0 = (X_0, Y_0) \in \Gamma \cap B(p_0, \varepsilon)$ alors la droite tangente à Γ en P_0 est la droite d'équation

$$y - Y_0 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)}(x - X_0)$$

ou encore la droite d'équation :

$$(x - X_0)\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + (y - Y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0.$$

Par ailleurs, en inversant le rôle des coordonnées (x, y), nous obtenons un résultat similaire lorsque la dérivée par rapport à la première variable n'est pas nul : *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\colon U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ (où $k = 1$ ou $k = 2$). Soit $p_0 = (x_0, y_0) \in U$ vérifiant les conditions :*

$$f(p_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \neq 0$$

alors il y a $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ et $\psi\colon]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ tel que l'on ait l'équivalence

$$\begin{pmatrix} p = (x, y) \in R_{p_0}(\varepsilon, \delta)) \\ f(x, y) = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\\ x = \psi(y) \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, on montre aussi que la droite tangente à Γ en p_0 a pour équation :

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0.$$

Définition 4.5.2. *Lorsque $\Phi\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ et que $p \in \mathcal{O}$, nous notons*

$$\overrightarrow{grad}\,\Phi(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(p)\vec{e}_i$$

le gradient de Φ en p. C'est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n,\ \left(\overrightarrow{grad}\,\Phi(p)\right).\vec{h} = D\Phi(p)(\vec{h}).$$

Ceci définit aussi une fonction $\overrightarrow{grad}\,\Phi\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$.

Lorsque $f\colon U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, nous avons

$$\overrightarrow{grad}\,f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right).$$

La conclusion de cette discussion est la suivante

Théorème 4.5.3. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ($k = 1$ ou $k = 2$) sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, on définit :*

$$\Gamma = \{(x, y) \in U \ , \ f(x, y) = 0\}$$

et on suppose que

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{grad}\, f(x, y) \neq 0,$$

alors Γ est localement le graphe d'une fonction de l'abscisse ou de l'ordonnée et si $p_0 = (x_0, y_0) \in \Gamma$ alors la droite D_0 tangente à Γ en p_0 a pour équation :

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{grad}\, f(x_0, y_0)$ est donc perpendiculaire à la courbe Γ en (x_0, y_0). Si D_0 n'est pas vertical alors il y a $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que

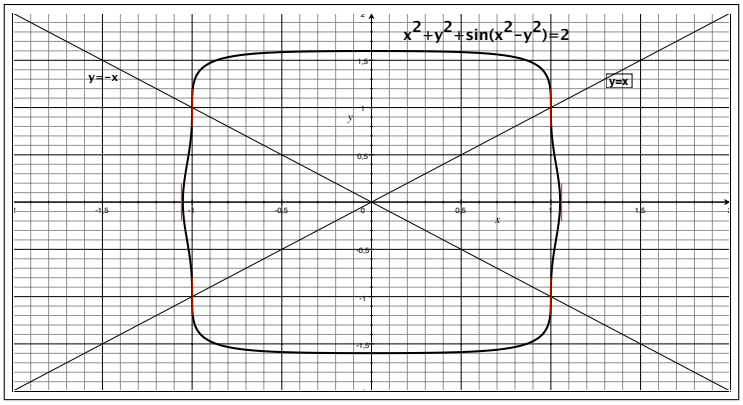
$$\Gamma \cap R_{p_0}(\varepsilon, \delta) = \{\, (x, \varphi(x)), x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\,\}$$

où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

4.5.3 Un exemple

On étudie

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x^2 + y^2 + \sin\left(x^2 - y^2\right) = 2\right\}.$$



La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \sin\left(x^2 - y^2\right) - 2$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ et nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2x\cos\left(x^2 - y^2\right) = 2x\left(1 + \cos\left(x^2 - y^2\right)\right)$$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y - 2y\cos\left(x^2-y^2\right) = 2y\left(1-\cos\left(x^2-y^2\right)\right).$$

Nous étudions les points critiques de f sur Γ, c'est à dire les points (x,y) du plan tel que $f(x,y)=0$ et $\overrightarrow{grad}\, f(x,y)=0$. Considérons un tel point (x,y).

Premier cas : si $\cos\left(x^2-y^2\right) \neq \pm 1$ alors [21] nous avons $x=y=0$. Mais $f(0,0)=-2\neq 0$. Donc ce cas ne se produit pas.

Deuxième cas : si $\cos\left(x^2-y^2\right)=1$ alors $\sin\left(x^2-y^2\right)=0$ et donc $x^2+y^2=2$. Par ailleurs dans ce cas : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x$. Donc dans ce cas on a $x=0$ et $y=\pm\sqrt{2}$, mais ceci est incompatible avec l'équation $\sin\left(x^2-y^2\right)=0$. Donc ce cas ne se produit pas non plus.

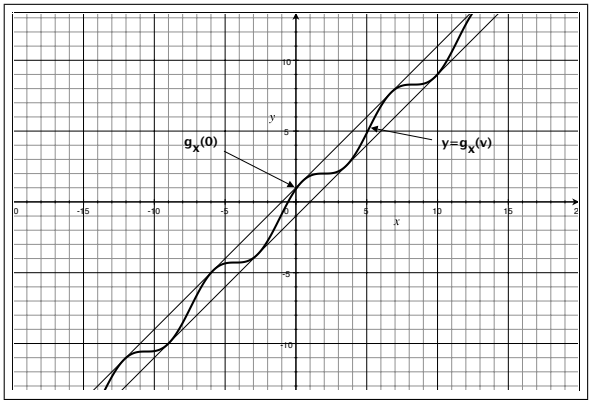
Troisième cas : si $\cos\left(x^2-y^2\right)=-1$ alors $\sin\left(x^2-y^2\right)=0$ et donc $x^2+y^2=2$. Par ailleurs dans ce cas : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-4y$. Donc dans ce cas on a $y=0$ et $x=\pm\sqrt{2}$ mais ceci est incompatible avec l'équation $\sin\left(x^2-y^2\right)=0$. Donc ce cas ne se produit également pas.

En conclusion, Γ est localement le graphe d'une fonction de l'abscisse ou de l'ordonnée .

Nous pouvons décrire de façon plus précise Γ :

Sout $x\in\mathbb{R}$, on étudie les points de Γ situé sur la droite verticale des points du plan d'abcisse x : C'est à dire qu'on cherche les $y\in\mathbb{R}$ tels que $f(x,y)=0$. Pour cela on étudie la fonction

$$v \mapsto g_x(v) = x^2+v+\sin\left(x^2-v\right)-2.$$



Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$g_x'(v) = 1-\cos(x^2-v) \geq 0$$

De plus g_x' ne s'annule qu'aux points $v=x^2+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Ceci garantit que g_x est une fonction strictement croissante. Par ailleurs, nous avons

$$|g_x(v)-v| \leq x^2+|2-\sin\left(x^2-v\right)| \leq x^2+3.$$

21. Puisque on a supposé $x\left(1+\cos\left(x^2-y^2\right)\right)=y\left(1-\cos\left(x^2-y^2\right)\right)=0$.

Donc $\lim_{v\to\pm\infty} g_x(v) = \pm\infty$ et g_x a un unique zero v_x. De plus nous avons

$$v_x \geq 0 \Leftrightarrow g_x(0) \leq 0.$$

Or $g_x(0) = x^2 + \sin\left(x^2\right) - 2$. Et pour les mêmes raisons la fonction $u \mapsto u + \sin(u) - 2$ est une fonction continue, strictement croissante et

$$\lim_{u\to\pm\infty} u + \sin(u) - 2 = \pm\infty$$

donc cette fonction a une unique zéro et puisque pour $u = 0$, nous avons $u + \sin(u) - 2 = -2 < 0$, ce zéro est strictement positif [22], nous le notons a^2. On aura donc

$$u + \sin(u) - 2 \leq 0 \Leftrightarrow u \leq a^2.$$

Ainsi

$$g_x(0) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

En conclusion notons $D_x = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}\}$ la droite verticale des points du plan d'abcisse x :

— Si $|x| > a$ alors nous avons $D_x \cap \Gamma = \emptyset$. Car l'équation $g_x(v) = 0$ n'a pas de solution positive ou nulle.

— Si $x = \pm a$ alors $D_x \cap \Gamma = \{(\pm a, 0)\}$ car l'équation $g_{\pm a}(v) = 0$ a une unique solution $v = 0$.

— Si $-a < x < a$ alors $D_x \cap \Gamma = \{(x, Y(x)), (x, -Y(x))\}$ car l'équation, en y,

$$f(x,y) = 0$$

a alors deux solutions qui sont les racines carrées de la solution de l'équation $g_x(v) = 0$. De plus puisque $g_x(0) < 0$, on a $Y(x) > 0$.

Le théorème des fonctions implicites, nous dit que si en $p = (x, Y(x))$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$$

alors Y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert centré autour de x. Or

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\left(1 - \cos\left(x^2 - y^2\right)\right).$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left(y = 0 \text{ ou } x^2 - y^2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right).$$

On en déduit que

22. Puisqu'en $u = 1$, nous avons $u + \sin(u) - 2 = \sin(1) - 1 < 0$ nous savons également que $a^2 > 1$.

— si p est l'un des 6 points $(\pm a, 0)$, $(\pm 1, \pm 1)$ alors au voisinage de p,Γ est le graphe d'une fonction $x = \psi(y)$ et la tangente à Γ en ces points est verticale.
— Si $x \in]-a, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, a[$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, Y(x)) \neq 0 .$$

Et donc la restriction de Y à la réunion d'intervalles $]-a, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, a[$ est de classe $\mathcal{C}^2$. De plus si $x \in]-a, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, a[$ alors

$$Y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, Y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, Y(x))} = -\frac{x\left(1 + \cos\left(x^2 - Y^2(x)\right)\right)}{Y(x)\left(1 - \cos\left(x^2 - Y^2(x)\right)\right)}.$$

Ceci assure que $Y'(x)$ est du signe de $-x$. Ceci permet d'en déduire les variations de la fonction Y [23] Nous en déduisons que Γ est la réunion de deux graphes de

$$\Gamma = \{\, (x, Y(x))\ x \in [-a, a] \,\} \cup \{\, (x, -Y(x))\ x \in [-a, a] \,\}$$

où $Y : [-a, a] \to \mathbb{R}$ est une fonction positive (paire) strictement décroissante sur $[0, a]$ et $Y(a) = 0$. De plus Y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-a, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, a[$.

Appendice : Preuve du théorème des fonctions implicites dans le plan

Démontration : On se place dans le cas où $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et où $f(0, 0) = 0$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$$

et on expliquera à la fin de la preuve comment le résultat général s'en déduit. Ainsi nous avons

$$f(x, y) = y + v(x, y)$$

où

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

et le développement limité de f à l'ordre 1 en $(0, 0)$ nous apprend que

$$v(x, y) = \| (x, y) \| \eta(x, y)$$

23. Nous aurions pu les déduire de l'étude de l'équation $g_x(v) = 0$. En effet on a $g_x\left(Y^2(x)\right) = 0$ et la fonction $\xi \in \mathbb{R}_+ \mapsto g_\xi\left(Y^2(x)\right)$ est strictement croissante. Donc si $0 \leq \xi < x$ alors $g_\xi(Y(x)) < 0$ ceci assure que l'unique zéro de la fonctioncg_ξ est strictement supérieur à $Y^2(x)$, donc

$$0 < \xi < x \Leftrightarrow Y^2(x) < Y^2(\xi).$$

Et puisque $Y(x) > 0$ et $Y(\xi) > 0$, nous avons en fait $0 < \xi < x \Rightarrow Y(x) < Y(\xi)$.

avec

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \eta(x,y) = 0.$$

Il y a donc $\varepsilon > 0$ tel que si $(x,y) \in B\left((0,0),\ 2\varepsilon\right)$ alors

$$|v(x,y)| \leq \frac{1}{100}\| (x,y) \| \text{ et } \left|\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)\right| < \frac{1}{100}.$$

Remarquons que $B\left((0,0),\ \varepsilon\right) =]-2\varepsilon, 2\varepsilon[\times]-2\varepsilon, 2\varepsilon[$.

Fixons $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ et on montre qu'il y a un unique $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ tel que $f(x,t) = 0$.

Nous étudions la fonction $u_x \colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_x(t) = f(x,t)$$

Nous avons

$$|u_x(t) - t| = |v(x,t) \leq \frac{1}{100}\| (x,t) \| = \frac{1}{100}\| \max\{|x|, |t|\} \leq \frac{\varepsilon}{100}.$$

En particulier $u_x(\varepsilon) - \varepsilon \geq -\frac{\varepsilon}{100}$ et donc

$$u_x(\varepsilon) \geq \frac{99\varepsilon}{100} > 0$$

et de même $u_x(-\varepsilon) + \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{100}$ et donc

$$u_x(-\varepsilon) \leq -\frac{99\varepsilon}{100} < 0.$$

Puisque u_x est continue le théorème des valeurs intermédiaires, nous informe qu'il y a un réel $t_x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tel que $u_x(t_x) = 0$. On démontre maintenant que u_x s'annule en une seule valeur. On calcule

$$(\heartsuit) \qquad u_x'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 1 + \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) \geq 1 - \frac{1}{100} \geq \frac{99}{100}.$$

Donc $u_x \colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ est une fonction strictement croissante. Et nous avons l'existence d'un unique $t_x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ tel que $u_x(t_x) = 0$.

On définit alors une fonction $\varphi \colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = t_x$.

Donc $\varphi(x)$ est l'unique zéro de la fonction $t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \mapsto f(x,t)$.

On montre que φ est lipschitzienne donc continue.

Soit $x, \xi \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ on suppose que $x < \xi$. On sait que

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \text{ et } f(\xi, \varphi(\xi)) = 0.$$

Puisque la fonction $s \mapsto f(s, \varphi(x))$ est dérivable et que sa dérivée est inférieure à $\frac{1}{100}$ en valeur absolue, nous en déduisons :

$$(\star) \qquad |f\,(x, \varphi(\xi))| = |f\,(x, \varphi(\xi)) - f\,(\xi, \varphi(\xi))| \leq \frac{\xi - x}{100}$$

Maintenant $(\heartsuit)$ nous apprend que la fonction $t \mapsto u_x(t) - \frac{99}{100}t$ est croissante donc si $t > s$ alors

$$u_x(t) - u_x(s) \geq \frac{99}{100}(t - s)$$

et général si $t, s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ alors

$$|u_x(t) - u_x(s)| \geq \frac{99}{100}|t - s|.$$

On en déduit

$$|f\,(x, \varphi(\xi)) - f\,(x, \varphi(x))| \geq \frac{99}{100}\,|\varphi(\xi) - \varphi(x)|\,.$$

Et avec l'inégalité $(\star)$, nous en déduisons

$$\frac{\xi - x}{100} \geq \frac{99}{100}\,|\varphi(\xi) - \varphi(x)|\,.$$

Donc

$$|\varphi(\xi) - \varphi(x)| \leq \frac{\xi - x}{99}.$$

On montre maintenant que φ est dérivable .

On écrit le développement limité de f en $p = (x, \varphi(x)$ à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} f\,(x + h, \varphi(x) + k) &= f\,(x, \varphi(x)) + ah + bk + \|\,(h, k)\,\|\eta_p(h, k) \\ &= ah + bk + \|\,(h, k)\,\|\eta_p(h, k) \end{aligned}$$

où

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \eta_p(h, k) = 0,$$

$a = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x, \varphi(x))$ et $b = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x, \varphi(x))$. Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, on applique cette égalité à $k(h) = \varphi(x + h) - \varphi(x)$, on sait que φ est une fonction continue donc

$$\lim_{h\to 0} k(h) = 0.$$

$$\begin{aligned} 0 = f\,(x + h, \varphi(x + h)) &= ah + bk(h) + \|\,(h, k(h))\,\|\eta_p(h, k(h)) \\ &= ah + b\,(\,\varphi(x + h) - \varphi(x)\,) + \|\,(h, k(h))\,\|\eta_p(h, k(h)). \end{aligned}$$

Notons que d'après ce qui précede

$$|k(h)| \leq \frac{1}{100}|h|$$

et donc

$$\| (h, k(h)) \| = \max\{|h|, |k(h)|\} = |h|.$$

Par ailleurs $b \geq \frac{99}{100}$. On a donc

$$b\,(\,\varphi(x+h) - \varphi(x)\,) = -ah - \| (h, k(h)) \|\eta_p(h, k(h))$$

soit encore

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = -\frac{a}{b}h - \frac{1}{b}\| (h, k(h)) \|\eta_p(h, k(h)).$$

et donc

$$\left|\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \frac{a}{b}\right| \leq \frac{1}{b}\frac{\| (h, k(h)) \|}{|h|}\,|\eta_p(h, k(h))| \leq \frac{1}{b}\frac{|hl|}{|h|}\,|\eta_p(h, k(h))| \leq \frac{1}{b}\,|\eta_p(h, k(h))|.$$

Puisque $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$ et que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \eta_p(h, k) = 0$, nous en déduisons

$$\lim_{h\to 0} \eta_p(h, k(h)) = 0,$$

et donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = -\frac{a}{b}.$$

Ainsi φ est dérivable en x et

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial v}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

Cette formule montre par ailleurs que φ' est continue si f est $\mathcal{C}^1$. Puis si f est $\mathcal{C}^2$ alors on sait que φ est $\mathcal{C}^1$ et que les dérivées partielles de f sont $\mathcal{C}^1$ et cette même formule montre que φ' est $\mathcal{C}^1$ donc φ est $\mathcal{C}^2$. Nous avons donc démontré que si $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ alors l'équation

$$f(x, y) = 0 \text{ et } y \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

a une unique solution $y = \varphi(x)$. Nous avons donc démontré l'équivalence

$$\left(\begin{array}{c} p = (x, y) \in B\,(\,(0, 0), \varepsilon) \\ f(x, y) = 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} x \in]-\varepsilon, +\varepsilon[\\ y = \varphi(x) \end{array}\right).$$

Si nous revenons au cas général : plaçons nous dans le cas où $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. En écrivant le développement limité à l'ordre 1 de f en (x_0, y_0), nous avons

$$f(x_0 + t, y_0 + s) = at + bs + u(t, s)$$

où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b\,;$$

$$\text{et } \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0.$$

On définit alors

$$g(\tau,\sigma) = f\left(x_0 + \tau, y_0 + \frac{1}{b}\sigma - \frac{a}{b}\tau\right)$$

nous avons alors

$$g(\tau,\sigma) = \sigma + v(\tau,\sigma)$$

où

$$v(\tau,\sigma) = \frac{1}{b}u\left(\tau, \frac{1}{b}\sigma - \frac{a}{b}\tau\right).$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial \sigma}(0,0) = 0.$$

Par ailleurs

$$g(\tau,\sigma) = 0 \Leftrightarrow f\left(x_0 + \tau, y_0 + \frac{1}{b}\sigma - \frac{a}{b}\tau\right) = 0$$

donc

$$f(x_0 + t, y_0 + s) = 0 \Leftrightarrow g\left(t, bs + at\right) = 0.$$

En appliquant le résultat que l'on vient de démontrer, nous savons qu'il y a $\varepsilon > 0$ et une fonction $\varphi\colon]\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$, telle que

$$\left(\begin{array}{c}(\tau,\sigma) \in B(0,\varepsilon)\\ g(\tau,\sigma) = 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\tau \in]-\varepsilon,\varepsilon[\\ \sigma = \varphi(\tau)\end{array}\right).$$

C'est à dire

$$\left(\begin{array}{c}|t| < \varepsilon \text{ et } |at + bs| < \varepsilon\\ f(x_0 + t, y_0 + s) = 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}t \in]-\varepsilon,\varepsilon[\\ s = \frac{1}{b}\varphi(t) - \frac{a}{b}t\end{array}\right).$$

Posons alors

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{10 + |a| + |b|}.$$

On a alors

$$(|s| < \bar{\varepsilon} \text{ et } |t| < \bar{\varepsilon}) \Rightarrow (|t| < \varepsilon \text{ et } |as + bt| < \varepsilon).$$

Donc si $(t,s) \in B\left((0,0), \bar{\varepsilon}\right)$ vérifie $f(x_0 + t, y_0 + s) = 0$ alors $t \in]-\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}[$ et $bs + at = \varphi(t)$, c'est à dire

$$s = \frac{1}{b}\varphi(t) - \frac{a}{b}t.$$

Or φ est une fonction continue et $\varphi(0) = 0$ ainsi nous pouvons trouver $\hat{\varepsilon} \in]0,\bar{\varepsilon}[$ tel que

$$|t| < \hat{\varepsilon} \Rightarrow |\frac{1}{b}\varphi(t) - \frac{a}{b}t| < \bar{\varepsilon}.$$

Alors si $t \in]-\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}[$ alors $s = \frac{1}{b}\varphi(t) - \frac{a}{b}t$ vérifie $|s| < \bar{\varepsilon}$.

Donc $t \in]-\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}[\Rightarrow (t, \frac{1}{b}\varphi(t) - \frac{a}{b}t) \in B\,((0,0),\varepsilon\,)$ et $f(t,s) = 0$. Puisque $\hat{\varepsilon} < \bar{\varepsilon} < \varepsilon$, nous avons bien :

$$\left(\begin{array}{c} (t,s) \in]-\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}[\times]-\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}[\\ f(x_0+t, y_0+s) = 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} t \in]-\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}[\\ s = \frac{1}{b}\varphi(t) - \frac{a}{b}t \end{array} \right).$$

□