



Le saut en zéro de la fonction de décalage spectral

Gilles Carron

Laboratoire Jean Leray, UMR 6629, Université de Nantes, 44072, Nantes, France

Received 1 June 2003; accepted 17 July 2003

Communicated by Richard B. Melrose

Abstract

We give a formula for the jump at zero of the spectral shift function associated with Schrödinger operator on manifolds with conical ends. We show that, according to its decay, a zero energy resonant state has a non-integer contribution.

Résumé

Nous donnons une formule pour le saut en zéro de la fonction de décalage spectral d'opérateur de type Schrödinger sur une variété à bout conique. Cette formule relie ce saut avec les états résonnants d'énergie nulle.

Mots-clés: fonction de décalage spectral; opérateur de Dirichlet/Neumann; scattering supersymétrique; états résonnants d'énergie nulle

© 2003 Elsevier Inc. All rights reserved.

MSC: 58J50; 58J32; 58J20; 47A40

Keywords: Spectral shift function; Dirichlet-to-Neumann operator; Zero energy resonance

1. Introduction

Nous voulons ici calculer le saut en zéro de la fonction de décalage spectral. Rappelons d'abord brièvement comment elle est définie [B-Y,K1,K2].

Lorsque A et B sont deux opérateurs auto-adjoints, bornés inférieurement, agissant sur un espace de Hilbert H , et tels que pour tout $t > 0$, l'opérateur $e^{-tA} - e^{-tB}$ est un opérateur à trace, alors les travaux de M.G. Krein fournissent

E-mail address: gilles.carron@math.univ-nantes.fr.

une fonction $\check{\xi}(\lambda, A, B) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, appelée fonction de décalage spectral telle que

$$\forall t > 0, \quad \text{Tr}(e^{-tA} - e^{-tB}) = \int_{\mathbb{R}} \check{\xi}(\lambda, A, B) t e^{-t\lambda} d\lambda.$$

Par exemple lorsque les résolvantes de A et de B sont compactes, cette fonction est juste la différence entre les fonctions de comptage des valeurs propres de A et de B :

$$\check{\xi}(\lambda, A, B) = \text{Card}\{\text{Spec } A \cap]-\infty, \lambda]\} - \text{Card}\{\text{Spec } B \cap]-\infty, \lambda]\}.$$

Si le spectre de A et B n'est pas discret, on peut penser à cette fonction comme une régularisation de cette formule.

De plus suivant les travaux de Birman and Krein [BK], cette fonction est reliée à l'opérateur de scattering $S(\lambda, A, B)$, on sait que cet opérateur est de la forme “*Identité + opérateur à trace*”. Son déterminant de Fredholm est donc bien défini et pour presque tout $\lambda \in \text{Spec}_{ac} A$, on a

$$\det_{Fr} S(\lambda, A, B) = e^{-2i\pi\check{\xi}(\lambda, A, B)}.$$

Ici on considère (M^n, g) une variété riemannienne telle qu'un voisinage de l'infini soit isométrique au bout de cône $\Omega_R =]R, \infty[\times \Sigma$ équipé de la métrique $dr^2 + r^2 h$ où h est une métrique riemannienne sur la variété compacte Σ . Et on étudie sur cette variété un opérateur de Schrödinger

$$L = \Delta^g + V$$

et où sur Ω_R , V est homogène de degré -2 :

$$V(r, \theta) = \frac{q(\theta)}{r^2}.$$

L'opérateur $L : C^\infty_0(M) \rightarrow L^2(M)$ est essentiellement auto-adjoint, on note encore L son unique extension auto-adjointe à $L^2(M)$. On note aussi L_{Ω_R} la réalisation de l'opérateur L sur $L^2(\Omega_R)$ pour les conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega_R$. Alors on sait que pour tout $t > 0$, l'opérateur $e^{-tL} - e^{-tL_{\Omega_R}}$ est un opérateur à trace ([B,Ca3]). On a donc une fonction $\check{\xi}(\lambda, L, L_{\Omega_R}) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, telle que pour tout $t > 0$:

$$\text{Tr}(e^{-tL} - e^{-tL_{\Omega_R}}) = \int_{\mathbb{R}} \check{\xi}(\lambda, L, L_{\Omega_R}) t e^{-t\lambda} d\lambda.$$

Il s'avère que sur $]0, \infty[$, la fonction $\check{\xi}(\lambda, L, L_{\Omega_R})$ est en fait C^∞ et même suivant T. Christiansen et L. Parnowski, la fonction de décalage spectral vérifie l'asymptotique de Weyl [Ch,P]:

$$\check{\xi}(\lambda, L, L_{\Omega_R}) \simeq_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(M \setminus \Omega_R)}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\lambda^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

Nous devons alors faire une hypothèse qui assure que l'opérateur L_Ω est positif et que L n'a qu'un nombre fini de valeurs propres négatives. Pour cela, on

suppose que

$$\forall \varphi \in C^\infty(\Sigma), \quad \int_\Sigma |d\varphi|^2 + q|\varphi|^2 \geq -\frac{(n-2)^2}{4} \int_\Sigma |\varphi|^2.$$

C'est à dire on suppose que l'opérateur $\Delta^h + q$ est borné inférieurement par $-(n-2)^2/4$. Sans cette hypothèse la fonction de décalage spectral n'a pas de limite ni à droite ni à gauche de zéro. Et nous avons alors pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(e^{-tL} - e^{-tL_{\Omega_R}}) &= \sum_{\lambda \in \text{Spec } L \cap]-\infty, 0[} e^{-t\lambda} + \xi(0+, L, L_{\Omega_R}) \\ &\quad - \xi(0-, L, L_{\Omega_R}) + \int_0^\infty \xi'(\lambda, L, L_{\Omega_R}) e^{-t\lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

Cette formule est plus pratique parce que la fonction ξ est définie avec un déterminant et sa dérivée s'exprime comme une trace. Il est donc plus aisé d'obtenir des estimées sur ξ' . De plus cette dernière formule permet d'obtenir une formule de Levinson.

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat. Si ϕ est une solution non nulle de l'équation $L\phi = 0$ à croissance lente, alors il y a une fonction non nulle $v \in C^\infty(\Sigma)$ telle que

$$\phi(r, \theta) \simeq_{r \rightarrow \infty} \frac{v(\theta)}{r^{(n-2)/2+v}}. \tag{1.1}$$

De plus $-(n-2)^2/4 + v^2 \in \text{Spec}(\Delta^h + q)$ et $\Delta^h v + qv = (-(n-2)^2/4 + v^2)v$. On note alors h_v la dimension de l'espace engendré par les solutions non nulles à l'équation $L\phi = 0$ qui vérifient l'estimée (1.1). On a aussi

$$\sum_{\mu \geq v} h_\mu = \dim\{\phi, L\phi = 0 \text{ et } \phi = O(r^{-(n-2)/2-v})\}.$$

Théorème 1.1.

$$\xi(0+, L, L_{\Omega_R}) - \xi(0-, L, L_{\Omega_R}) = \sum_{v \in [0,1]} v h_v + \dim \ker_{L^2} L.$$

De plus si $\text{Spec}(\Delta^h + q) \subset]-(n-2)^2/4 + 1, +\infty[$, alors

$$\xi(0+, L, L_{\Omega_R}) - \xi(0-, L, L_{\Omega_R}) = \dim \ker_{L^2} L.$$

Cette dernière formule est aussi valide pour des perturbations de L par des potentiels qui, pour un $\varepsilon > 0$, sont borné à l'infini par $\frac{1}{r^{4+\varepsilon}}$.

On remarque donc qu'une solution de l'équation $L\phi = 0$ contribue d'autant plus à ce saut qu'elle est presque L^2 :

- Une solution L^2 fournit une contribution de 1.
- Une solution ϕ telle que $\forall \varepsilon > 0, r^{v-1-\varepsilon}\phi \in L^2$ et $r^{v-1}\phi \notin L^2$ fournit un saut de v .

En particulier une solution telle que $L\phi = 0$ et $\phi \simeq v/r^{(n-2)/2}$ est invisible dans la formule de trace. Alors qu’une solution telle que $\phi \simeq v/r^{n/2}$ y apparait comme une solution L^2 . Ceci avait déjà été remarqué pour l’espace euclidien \mathbb{R}^4 par Jensen [J2].

D’ordinaire, ces solutions “presque L^2 ” sont appelées “états demi-bornés” (half-bound state en anglais). Cependant cette terminologie provient du fait que pour \mathbb{R} ou \mathbb{R}^3 , il n’apparait que $v = 1/2$ et que $h_{1/2} = 0$ ou $h_{1/2} = 1$. En fait ces solutions contribuent toutes à la singularité en zéro de l’opérateur de scattering:

Théorème 1.2. *Il y a une constante non nulle C telle que lorsque $\lambda \rightarrow 0$*

$$\det_{Fr} S(\lambda, L, L_{\Omega_R}) = (-\log \lambda)^{h_0} \prod_{0 < \nu < 1} \lambda^{-h_\nu} \left(\frac{-\log \lambda}{\lambda} \right)^{h_1} \lambda^{-\dim \ker_{L^2} L} (C + o(1)).$$

Ainsi on voit que des solutions de l’équation $L\phi = 0$ qui étaient invisible dans la formule de trace sont détectées par l’opérateur de scattering. Et une solution de l’équation $L\phi = 0$ qui n’est pas dans L^2 mais presque (au sens où $\forall \varepsilon > 0, r^{-\varepsilon} \phi \in L^2$) si elle contribue à la formule de trace comme une fonction propre L^2 , elle produit sur l’opérateur de scattering une singularité plus faible qu’une valeur propre L^2 .

Ces solutions sont nommées états résonnants d’énergie nulle. En général les états résonnants sont associés aux singularités d’une extension méromorphe de l’opérateur de scattering. Notre analyse donne donc le lien entre les états résonnants d’énergie nulle et le saut en zéro de la fonction de décalage spectral. Ces résonances sont donc absentes lorsque le spectre de l’opérateur transverse $\Delta^h + q$ est dans $]n - n^2/4, \infty[$. Dans un cadre euclidien, ce calcul du saut en zéro de la fonction de décalage spectral est du à de nombreux auteurs [Gu,J1,J2,Mu]. Dans notre cadre, T. Christiansen avait montré qu’en dimension $n \geq 3$ et pour le laplacien Δ^θ , la fonction de décalage spectral était nulle en zéro [Ch].

Dans notre cadre des variétés à bouts coniques, il faudrait être capable de traiter le cas où on perturbe notre modèle en présence de résonances. Suivant les travaux de Murata [Mu], qui concernent le cas euclidien, on peut esperer que notre résultat soit encore valide pour des perturbations du potentiel par des fonctions décroissant comme $r^{-6-\varepsilon}$ pour un $\varepsilon > 0$. Cependant il serait plus intéressant de traiter le cas où on perturbe le potentiel par un terme décroissant comme $r^{-2-\varepsilon}$, voir même pour des perturbations gravitationnelles de la métrique. Nous pensons aussi qu’il doit être possible d’obtenir des estimées du groupe de Schrödinger e^{-itL} lorsque $t \rightarrow \infty$ ou de la résolvante $(L - z)^{-1}$ lorsque $z \rightarrow 0$. En fait un travail récent de X.P. Wang [W] effectue cette analyse.

La méthode employée ici consiste à se ramener à étudier le déterminant d’un opérateur pseudo-différentiel sur $\partial\Omega_R$. Ceci est en effet possible grâce à [Ca3]. Dans ce travail, on relie la fonction de décalage spectral avec le déterminant de l’opérateur de Dirichlet/Neumann. Dans la partie 2 de ce papier, on reliera ces opérateurs de Dirichlet/Neumann aux opérateurs de scattering définis par Melrose [M2]. L’opérateur de Dirichlet/Neumann sur $\partial\Omega_R$ est la somme d’un opérateur

obtenu en résolvant le problème de Dirichlet sur $M \setminus \Omega_R$ et d'un opérateur obtenu en résolvant le problème de Dirichlet sur Ω_R . Le premier a de bonnes propriétés de dépendance par rapport au paramètre spectral et le second peut être explicité en séparant les variables sur Ω_R . Dans les parties 3 et 4, on établira certaines estimées qui nous serviront pour montrer nos résultats.

Nos travaux sont en fait valable pour d'autres opérateurs que des opérateurs agissant sur des fonctions: nos résultats sont vrais pour tout opérateur de type laplacien agissant sur les sections d'un fibré hermitien et compatible avec la géométrie conique (comme le carré de l'opérateur de Dirac, le laplacien de Hodge-DeRham). Et dans une dernière partie, nous donnons des applications de nos résultats au scattering super-symétrique. Concernant un laplacien avec champ magnétique à support compact sur \mathbb{R}^2 , nous donnerons une interprétation de l'écart entre l'indice L^2 et le flux du champ magnétique et nous répondons ainsi à une question soulevée par les auteurs de [B-G-G-S-S].

Remerciement: Je tiens à remercier mes collègues du laboratoire de Mathématiques de Nantes pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Je bénéficie d'un programme "ACI" du ministère de la recherche du gouvernement français.

2. L'opérateur de scattering et l'opérateur de Dirichlet/Neumann

Dans cette partie, nous considérons un opérateur de type Schrödinger $L = \Delta + V$ sur une variété (M, g) à bouts coniques ou équipée d'une "scattering metric" suivant R. Melrose ou encore (M, g) est asymptotiquement euclidienne suivant d'autres auteurs. Ainsi M est diffeomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord \overline{M} de bord $\Sigma = \partial \overline{M}$ et pour une fonction $x: \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définissant le bord de \overline{M} on a

$$g = \frac{(dx)^2}{x^4} + \frac{\tilde{h}(x, y, dx, dy)}{x^2}, \quad \text{près du bord}$$

ou encore si on pose $r = 1/x$

$$g = (dr)^2 + r^2 h(r, y, dr, dy) \quad \text{sur} \quad \{x < \varepsilon\} = \{r > 1/\varepsilon\}.$$

\tilde{h} étant un 2 tenseur symétrique lisse sur \overline{M} . On suppose que la fonction V est telle que $x^{-2}V \in C^\infty(\overline{M})$.

Notation. On définit pour $R > 0$ assez grand $\Omega_R = \{x, r(x) > R\}$, c'est un ouvert à bord lisse et Ω_R est diffeomorphe à $]R, \infty[\times \Sigma$. On identifie donc le bord de Ω_R avec Σ .

De plus si $\mathcal{O} \subset M$ est un ouvert, on notera $L_{\mathcal{O}}$ la réalisation de L sur $L^2(\mathcal{O}, d\text{vol})$ pour les conditions de Dirichlet sur $\partial \mathcal{O}$.

2.1. L'opérateur de scattering

Dans [M2], Melrose étudie les propriétés fines de la résolvante $R(z)$, $z \in \mathbb{C}$ de l'opérateur $L - z^2$; il montre que pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et $u \in C_0^\infty(M)$, la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} R(\lambda + i\varepsilon)u$$

existe et si $\alpha > 0$, alors cette limite permet de définir un opérateur continu:

$$R(\lambda + i0^+) : L^2(M, x^{1+\alpha} d\text{vol}_g) \rightarrow L^2(M, x^{-(1+\alpha)} d\text{vol}_g).$$

Autrement dit pour tout $\alpha > 0$, l'opérateur $x^{\frac{1+\alpha}{2}} R(\lambda + i0^+) x^{\frac{1+\alpha}{2}}$ agit continument sur $L^2(M, d\text{vol}_g)$. Dans ce papier, R. Melrose montre aussi comment définir un opérateur de scattering:

$$S(\lambda) : C^\infty(\Sigma) \mapsto C^\infty(\Sigma).$$

Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f \in C^\infty(\Sigma)$, alors il y a un unique $u \in C^\infty(M)$ tel que

$$\begin{cases} (L - \lambda^2)u = 0, \\ u(r, \sigma) \simeq_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}} (e^{i\lambda r} f(\sigma) + e^{-i\lambda r} S(\lambda) f(\sigma)). \end{cases}$$

Il est alors évident que $S(-\lambda) = S(\lambda)^{-1}$.

L'opérateur $S(\lambda)$ est en fait un opérateur Fourier-intégral associé au flot géodésique au temps π [M-Z].

On peut aussi définir un opérateur de scattering associé à l'opérateur L sur Ω_R pour les conditions de Dirichlet: si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f \in C^\infty(\Sigma)$, alors il y a un unique $u \in C^\infty(\Omega_R)$ tel que

$$\begin{cases} (L - \lambda^2)u = 0, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_R, \\ u(r, \sigma) \simeq_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}} (e^{i\lambda r} f(\sigma) + e^{-i\lambda r} S_0(\lambda) f(\sigma)). \end{cases}$$

Par exemple, sur \mathbb{R}^n , $S(\lambda)$ est l'opérateur qui à $f \in C^\infty(\mathbf{S}^{n-1})$ associe la fonction $(\sigma \mapsto f(-\sigma))$.

2.2. L'opérateur de Dirichlet/Neumann

Dans [Ca3], nous avons étudié la fonction de décalage spectral en général et nous l'avons relié au déterminant d'un opérateur de type Dirichlet/Neumann, ou (pour être plus cohérent avec la terminologie avec la terminologie) d'un opérateur Dirichlet/transmission.

Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f \in C^\infty(\Sigma)$, alors il existe une unique solution $u = \mathcal{E}(\lambda)f$ aux équations

$$\begin{cases} (L - \lambda^2)u = 0 & \text{sur } \Omega_R, \\ r^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i\lambda r u \right) \rightarrow 0 & \text{lorsque } r \rightarrow \infty, \\ u = f & \text{sur } \partial\Omega_R \simeq \Sigma. \end{cases}$$

Ceci s’obtient grâce aux travaux de Melrose [M2] et de Hassell et Vasy [H-V]: si $z \in \mathbb{C}$ et $\text{Im } z > 0$, il y a une unique solution aux équations

$$\begin{cases} (L - z^2)u = 0, \\ u \in L^2(M, d\text{vol}_g), \\ u = f \text{ sur } \partial\Omega_R. \end{cases} \tag{2.2}$$

Cette solution est donnée par

$$u = \tilde{f} - R_0(z)(L - z^2)\tilde{f}$$

où $\tilde{f} \in C_0^\infty(\overline{\Omega_R})$ est une extension quelconque de f et $R_0(z)$ la résolvante de $(L - z^2)$ sur Ω_R pour les conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega_R$. L’existence d’une solution aux équations (2.2) s’obtient en faisant $z = \lambda + i\varepsilon$ et en faisant tendre ε vers $0+$ (Chapter 14 de [M2]). Puis l’unicité de cette solution provient du théorème 2 de [M2].

De plus lorsque λ^2 n’est pas une valeur propre de L sur $M \setminus \Omega_R$ pour les conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega_R$, on peut alors résoudre uniquement le problème de Dirichlet intérieur:

$$\begin{aligned} (L - \lambda^2)u &= 0 \quad \text{sur } M \setminus \Omega_R, \\ u &= f \quad \text{sur } \partial\Omega_R. \end{aligned}$$

Posons $\sigma = \{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2 \in \text{Spec } L_{M \setminus \Omega_R}\}$; ainsi lorsque $f \in C^\infty(\partial\Omega_R)$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma$, il y a une unique solution du problème

$$\begin{cases} (L - \lambda^2)u = 0 & \text{sur } M \setminus \partial\Omega_R, \\ r^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i\lambda r u \right) \rightarrow 0 & \text{lorsque } r \rightarrow \infty, \\ u = f & \text{sur } \partial\Omega_R. \end{cases}$$

La solution u est continue et ses dérivées présentent un saut le long de $\partial\Omega_R$. L’opérateur de Dirichlet/Neumann est alors défini par

$$\mathcal{N}(\lambda)f = \frac{\partial u|_{\Omega_R}}{\partial \nu_{\Omega_R}} + \frac{\partial u|_{M - \Omega_R}}{\partial \nu_{M - \Omega_R}}.$$

Où on a noté $\nu_{M - \Omega_R}$ (resp. ν_{Ω_R}) la normale unitaire sortante de $M - \Omega_R$ (resp. Ω_R). Les arguments de [Ca3] montre que $\mathcal{N}(\lambda)$ est un opérateur pseudo-différentiel

d'ordre 1 elliptique inversible sur $\partial\Omega_R$; de plus son symbole principal est scalaire positif. En fait, le noyau de Schwarz de $\mathcal{N}(\lambda)^{-1}$ est simplement le noyau de Schwarz de $R(\lambda + i0+)$ restreint à $\partial\Omega_R \times \partial\Omega_R$.

2.3. Quelques identités fonctionnelles

Le résultat de [Ca3] relie directement la phase de la zeta régularisation du déterminant de l'opérateur $\mathcal{N}(\lambda)$ avec la fonction de décalage spectral du couple (L, L_{Ω_R}) . Nous allons relier cette fonction de décalage spectral avec la phase du déterminant de l'opérateur $S_0^{-1}S$. Un corollaire de ce résultat est une formule de trace, formule déjà connue (cf le th 3.1 de [Ch]). Pour prouver ce résultat nous devons relier les opérateurs $S_0(\lambda)$, $S(\lambda)$ $\mathcal{N}(\lambda)$. Pour cela, il faut des opérateurs reliant ce qui se passe à l'infini sur Σ et sur $\partial\Omega_R$.

Les premiers sont les opérateurs de Poisson P et P_0 :

Si $f \in C^\infty(\Sigma)$ alors $P(\lambda)f \in C^\infty(M)$ est la solution de

$$\begin{cases} (L - \lambda^2)P(\lambda)f = 0, \\ P(\lambda)f(r, \sigma) \simeq_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}} (e^{i\lambda r}f(\sigma) + e^{-i\lambda r}S(\lambda)f(\sigma)). \end{cases}$$

De même, $P_0(\lambda)$ est l'opérateur qui à $f \in C^\infty(\Sigma)$ associe $P_0(\lambda)f \in C^\infty(\Omega_R)$ la solution de

$$\begin{cases} (L - \lambda^2)P_0(\lambda)f = 0, \\ P_0(\lambda)f = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_R, \\ P_0(\lambda)f(r, \sigma) \simeq_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}} (e^{i\lambda r}f(\sigma) + e^{-i\lambda r}S_0(\lambda)f(\sigma)). \end{cases}$$

Les seconds sont les opérateurs $T(\lambda)$ qui à $f \in C^\infty(\Sigma)$ associe $T(\lambda)f \in C^\infty(\Sigma)$ tels que si u résoud le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} (L - \lambda^2)u = 0 & \text{sur } \Omega_R, \\ r^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i\lambda ru \right) \rightarrow 0 & \text{lorsque } r \rightarrow \infty, \\ u = f & \text{sur } \partial\Omega_R \simeq \Sigma \end{cases}$$

alors

$$u(r, \theta) \simeq_{r \rightarrow \infty} \frac{e^{i\lambda r}}{r^{\frac{n-1}{2}}} T(\lambda)f(\sigma).$$

T est en fait un opérateur régularisant.

On peut maintenant relier les opérateurs $S_0(\lambda)$, $S(\lambda)$ $\mathcal{N}(\lambda)$, $P(\lambda)$, $P_0(\lambda)$ et $T(\lambda)$.

Tout d’abord, si $f \in C^\infty(\Sigma)$, alors $v = P(\lambda)f - P_0(\lambda)f$ est solution sur Ω_R des équations

$$(L - \lambda^2)v = 0 \quad \text{sur } \Omega_R,$$

$$\frac{n-1}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - i\lambda v \right) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } r \rightarrow \infty.$$

Et lorsque $r \rightarrow \infty$, on a

$$v(r, \theta) \simeq_{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-i\lambda r}}{r^{\frac{n-1}{2}}} (S(\lambda)f(\theta) - S_0(\lambda)f(\theta)).$$

On en déduit donc l’identité suivante

$$T(-\lambda)(P(\lambda)f|_{\partial\Omega_R}) = S(\lambda)f - S_0(\lambda)f. \tag{2.3}$$

Puis si $f \in C^\infty(\Sigma)$, alors $v = \mathcal{E}(\lambda)f - \mathcal{E}(-\lambda)f$ est solution sur Ω_R de l’équation

$$(L - \lambda^2)v = 0$$

et v est nulle sur $\partial\Omega_R$. De plus lorsque $r \rightarrow \infty$, on a l’asymptotique

$$v(r, \theta) \simeq \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}} [e^{i\lambda r} T(\lambda)f(\sigma) - e^{-i\lambda r} T(-\lambda)f(\sigma)].$$

Et on obtient donc l’équation

$$S_0(\lambda)T(\lambda) = -T(-\lambda). \tag{2.4}$$

Enfin si $f \in C^\infty(\Sigma)$, alors posons

$$v = \mathcal{E}(\lambda)\mathcal{N}(\lambda)^{-1}\mathcal{N}(-\lambda)f - \mathcal{E}(-\lambda)f.$$

Alors v est construit de telle façon que v vérifie l’équation $(L - \lambda^2)v = 0$ aux sens des distributions sur M . Donc v vérifie cette équation sur M et de plus lorsque $r \rightarrow \infty$, on a l’asymptotique

$$v(r, \theta) \simeq \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}} [e^{i\lambda r} T(\lambda)\mathcal{N}(\lambda)^{-1}\mathcal{N}(-\lambda)f(\sigma) - e^{-i\lambda r} T(-\lambda)f(\sigma)].$$

Et on obtient la relation suivante

$$S(\lambda)T(\lambda)\mathcal{N}(\lambda)^{-1}\mathcal{N}(-\lambda) = -T(-\lambda) \tag{2.5}$$

Si nous utilisons les relations (2.4) et (2.5), nous obtenons

$$T(\lambda)\mathcal{N}(\lambda)^{-1}\mathcal{N}(-\lambda) = S(\lambda)^{-1}S_0(\lambda)T(\lambda). \tag{2.6}$$

L'opérateur $T(\lambda)$ est un opérateur à noyau lisse. Et les opérateurs $S(\lambda)^{-1}S_0(\lambda)$ et $\mathcal{N}(\lambda)^{-1}\mathcal{N}(-\lambda)$ sont des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0, on a même que les opérateurs $S(\lambda)^{-1}S_0(\lambda) - \text{Id}$ et $\mathcal{N}(\lambda)^{-1}\mathcal{N}(-\lambda) - \text{Id}$ sont des opérateurs régularisants, i.e. des opérateurs à noyaux C^∞ .

Pour le premier cela découle des travaux de Joshi et Sà Baretto [J-S], et pour le second cela découle du fait que si $((x, y) \in M^2 \mapsto G(\lambda, x, y))$ est le noyau de Schwarz de l'opérateur $R(\lambda)$ alors l'opérateur $\mathcal{N}(\lambda)^{-1}$ a pour noyau

$$((x, y) \in \Sigma^2 \mapsto G(\lambda, x, y)).$$

Ainsi le noyau de Schwarz de l'opérateur $\mathcal{N}(\lambda)^{-1} - \mathcal{N}(-\lambda)^{-1}$ est $i\frac{\pi}{2}E(\lambda, x, y)$, où $((x, y) \in M^2 \mapsto E(\lambda, x, y))$ est le noyau de Schwarz du projecteur spectral de L sur l'intervalle $] -\infty, \lambda^2]$, et $E(\lambda, ., .)$ est une fonction C^∞ sur $M \times M$. D'où le résultat sur $\mathcal{N}(\lambda)^{-1}\mathcal{N}(-\lambda) - \text{Id}$.

2.4. Lien entre les opérateurs de Dirichlet/Neumann et la fonction Xi

Remarquons maintenant que suivant le principe d'unique continuation de [M2, Théorème 2], on sait que les opérateurs $T(\lambda)$ sont injectifs, (2.6) montre que si $\mu \in \mathbb{C}$ alors

$$T(\lambda) : \text{Ker} \{ \mathcal{N}(\lambda)^{-1}\mathcal{N}(-\lambda) - \mu\text{Id} \} \rightarrow \text{Ker} \{ S(\lambda)^{-1}S_0(\lambda) - \mu\text{Id} \}$$

est une application injective

Nous allons montrer que si $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, alors cette application est un isomorphisme. Soit donc $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $\phi \in L^2(\Sigma)$ tels que

$$S(\lambda)^{-1}S_0(\lambda)\phi = \mu\phi.$$

Il suffit de montrer que l'on peut trouver $\psi \in L^2(\Sigma)$ tel que $T(\lambda)\psi = \phi$, alors l'identité (2.6) montrera que $\psi \in \text{Ker} \{ \mathcal{N}(\lambda)^{-1}\mathcal{N}(-\lambda) - \mu\text{Id} \}$.

Comme $\mu \neq 1$, on sait que ϕ est C^∞ . Si on applique l'identité (2.6) en $-\lambda$ et à $S(\lambda)\phi$ on obtient:

$$T(\lambda)P(-\lambda)S(\lambda)\phi = \phi - S_0(\lambda)^{-1}S(\lambda)\phi = \frac{\mu - 1}{\mu}\phi.$$

Donc $\psi = \frac{\mu}{\mu-1}P(-\lambda)S(\lambda)\phi|_{\partial\Omega_R}$ convient.

On a donc montré que les opérateurs $S(\lambda)^{-1}S_0(\lambda)$ et $\mathcal{N}(\lambda)^{-1}\mathcal{N}(-\lambda)$ ont sauf pour la valeur propre 1 les mêmes valeurs propres comptées avec multiplicités. Ainsi les déterminants de Fredholm de ces opérateurs sont égaux:

$$\det_{Fr} S(\lambda)^{-1}S_0(\lambda) = \det_{Fr} \mathcal{N}(\lambda)^{-1}\mathcal{N}(-\lambda)$$

ou plutôt:

$$\det_{Fr} S_0(\lambda)^{-1} S(\lambda) = \det_{Fr} \mathcal{N}(-\lambda)^{-1} \mathcal{N}(\lambda).$$

Or l'opérateur $\mathcal{N}(-\lambda)^{-1} \mathcal{N}(\lambda) - \text{Id}$ est un opérateur à trace et grâce à une remarque de Kontsevich et Vishik [K-V] on a

$$\det_{Fr} \mathcal{N}(-\lambda)^{-1} \mathcal{N}(\lambda) = \frac{\det_{\zeta} \mathcal{N}(\lambda)}{\det_{\zeta} \mathcal{N}(-\lambda)}.$$

Où $\det_{\zeta} \mathcal{N}(\lambda)$ est le déterminant de l'opérateur $\mathcal{N}(\lambda)$ régularisé grâce à la fonction $\zeta(s) = \text{Tr} \mathcal{N}(\lambda)^{-s}$.

Ceci montre que les arguments de ces déterminants diffèrent sur $\mathbb{R} \setminus \sigma$ d'une fonction localement constante. Or grâce aux travaux de Hassell–Vasy, on sait que les opérateurs S et S_0 dépendent de façon C^∞ de $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ [H-V]. Comme ces opérateurs sont inversibles, on en déduit qu'il existe une détermination C^∞ de $\text{Arg} \det_{Fr} S_0(\lambda)^{-1} S(\lambda)$ sur $]0, \infty[$. De plus, nous savons que $\lambda \in]0, \infty[\mapsto \mathcal{N}(\lambda)$ admet un pôle exactement lorsque $\lambda \in \sigma$ et que la multiplicité de ce pôle est exactement celle de λ^2 comme valeur propre de $L_{M \setminus \Omega_R}$. Donc les fonctions $\text{Arg} \det_{Fr} S_0(\lambda)^{-1} S(\lambda)$ et $2 \text{Arg} \det_{\zeta} \mathcal{N}(\lambda) - 2\pi \text{Card}\{\mu \in \text{Spec} L_{M - \Omega_R}, \mu \leq \lambda^2\}$ sont continues sur $]0, \infty[$ et donc y diffèrent d'une constante que l'on peut supposer nulle. Or le théorème (1.5 de [Ca3]) montre que la fonction de décalage spectral est justement la fonction $-\frac{1}{\pi} \text{Arg} \det_{\zeta} \mathcal{N}(\lambda) + \text{Card}\{\mu \in \text{Spec} L_{M - \Omega_R}, \mu \leq \lambda^2\}$.¹ On a donc

Théorème 2.1. $\forall \lambda > 0$, on a

$$\det_{Fr} S_0(\lambda)^{-1} S(\lambda) = e^{-2i\pi \xi(\lambda^2, L, L_{\Omega_R})}.$$

Et si $\lambda^2 \notin \text{Spec} L_{M - \Omega_R}$, on a aussi

$$\xi(\lambda^2, L, L_{\Omega_R}) = -\frac{1}{\pi} \text{Arg} \det_{\zeta} \mathcal{N}(\lambda) + \text{Card}\{\mu \in \text{Spec} L_{M - \Omega_R}, \mu \leq \lambda^2\}.$$

Remarque 2.2. L'analyse que nous venons de faire n'est pas spéciale à la géométrie considérée ici. Nos résultats sont aussi valide dans bien d'autres cadres dès que l'on sait définir l'opérateur $R(\lambda + i0+)$ et l'opérateur de Scattering et que l'on a montré une propriété d'unique continuation semblable au Théorème 2 de [M2].

¹ On a choisi ici une convention de signe différente pour la fonction ξ .

3. L'opérateur de Dirichlet/Neumann

Notre but est de calculer le saut en zéro de la fonction de décalage spectral $\xi(\lambda)$ i.e. de calculer $\xi(0+) - \xi(0-)$. Nous allons d'abord supposer que l'opérateur L est tel qu'à l'infini nous pouvons séparer les variables. C'est à dire on suppose qu'au dehors d'un compact K , la métrique g est conique

$$(M \setminus K, g) = ([R, \infty[\times \Sigma, dr^2 + r^2 h)$$

où h est une métrique riemannienne sur Σ et que sur $M \setminus K$, le potentiel V est homogène de degré -2 :

$$V(r, \theta) = \frac{q(\theta)}{r^2}.$$

3.1. Une hypothèse

Nous faisons de plus une hypothèse qui vont assurer que les limites à gauche et à droite en zéro de la fonction de décalage spectral existent: on suppose que l'opérateur modèle L_0 sur le cône $(]0, \infty[\times \Sigma, dr^2 + r^2 h)$ est positif:

$$\forall \phi \in C_0^\infty(]0, \infty[\times \Sigma),$$

$$\langle L_0 \phi, \phi \rangle = \int_0^\infty \int_\Sigma \left| \frac{\partial}{\partial r} \phi \right|^2 + \frac{|d_\Sigma \phi|_h^2 + q(\theta) \phi^2}{r^2} r^{n-1} dr d\text{vol}_h(\theta) \geq 0.$$

Ceci équivaut à ce que la plus petite valeur propre de l'opérateur $\Delta^h + q$ sur Σ soit supérieure ou égale à $-(n-2)^2/4$, c'est à dire que

$$\forall \varphi \in C^\infty(\Sigma), \quad \langle \Delta^h \varphi + q\varphi, \varphi \rangle = \int_\Sigma |d\varphi|_h^2 + q(\theta) \varphi^2 d\text{vol}_h \geq -\frac{(n-2)^2}{4} \int_\Sigma \varphi^2 d\text{vol}_h.$$

On déduit ceci facilement de l'inégalité de Hardy:

$$\forall u \in C_0^\infty(]0, \infty[), \quad \int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial r} u \right|^2 r^{n-1} dr \geq \frac{(n-2)^2}{4} \int_0^\infty \frac{u^2}{r^2} r^{n-1} dr.$$

Et du fait que cette inégalité est optimale.

Cette hypothèse implique que l'indice de l'opérateur L est fini, i.e. que sur L^2 , L n'a qu'un nombre fini de valeurs propres négatives; en fait, suivant [F], cette hypothèse est équivalente au fait que cet indice soit fini.

Ceci implique que si R est assez grand alors 0 n'est pas dans le spectre de l'opérateur L sur $M \setminus ([R, \infty[\times \Sigma)$ lorsqu'on a mis sur Σ les conditions de Dirichlet. Si $\Omega_R = [R, \infty[\times \Sigma$, alors l'opérateur L_{Ω_R} est positif, en particulier il n'a pas de valeur propre négative, et donc la fonction de décalage spectral est localement

constante sur $] - \infty, 0[$ et:

$$\zeta(0-, L, L_{\Omega_R}) = \dim \bigoplus_{\lambda < 0} \text{Ker}_{L^2}(L - \lambda \text{Id}).$$

On va maintenant voir dans un cas simple que sans notre hypothèse de positivité à l’infini, la limite à droite de la fonction de décalage spectral n’existe pas forcément. Pour $c > 0$, on considère l’opérateur

$$L = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{c^2}{r^2}$$

sur $L^2([1, \infty[, r dr)$. On note L_D la réalisation de L sur $L^2([1, \infty[, r dr)$ pour les conditions de Dirichlet et L_N la réalisation de L pour les conditions de Neumann. On sait que L_N est une perturbation de rang 1 de L_D et on a pour $\lambda > 0$:

$$\zeta(\sqrt{\lambda}, L_N, L_D) = -\frac{1}{\pi} \text{Arg} \left(-\lambda \frac{H_{ic}^1(\lambda)}{H_{ic}^1(\lambda)} \right).$$

Où H_{ic}^1 est la fonction de Hankel d’indice ic . On connaît le développement asymptotique de la fonction de Hankel lorsque $\lambda \rightarrow 0$ (cf. [Le] page 101), et on obtient ainsi

$$\lambda \frac{H_{ic}^1(\lambda)}{H_{ic}^1(\lambda)} = -ic \frac{1 + a_c(\lambda/2)^{2ic}}{1 - a_c(\lambda/2)^{2ic}} + O(\lambda^2),$$

avec $a_c = e^{\pi c} \Gamma(1 - ic) / \Gamma(1 + ic)$.

Ainsi lorsque $\lambda \rightarrow 0$, l’argument de cette expression est asymptote à une fonction périodique non constante en $\log \lambda$ et donc $\zeta(\sqrt{\lambda}, L_N, L_D)$ oscille près de $0+$ et cette fonction n’a pas de limite en $0+$.

3.2. L’opérateur de Dirichlet/Neumann pour l’énergie nulle

Cette hypothèse de positivité nous assure aussi l’existence d’un opérateur de Dirichlet/Neumann pour $\lambda = 0$.

En effet, nous partons d’un raffinement de l’inégalité de Hardy:

$$\forall u \in C_0^\infty(]1, \infty[),$$

$$\int_1^\infty \left| \frac{\partial}{\partial r} u \right|^2 r^{n-1} dr - \frac{(n-2)^2}{4} \int_1^\infty \frac{u^2}{r^2} r^{n-1} dr \geq \frac{1}{4} \int_1^\infty \frac{u^2}{(\log r)^2 r^2} r^{n-1} dr.$$

Inégalité que l’on obtient en posant $u = r^{(n-2)/2} \sqrt{\log r} v$. On a alors

$$\int_1^\infty \left| \frac{\partial}{\partial r} u \right|^2 r^{n-1} dr = \frac{(n-2)^2}{4} \int_1^\infty \frac{u^2}{r^2} r^{n-1} dr + \int_1^\infty \left(v'^2 \log r + \frac{v^2}{4r^2 \log r} \right) r dr.$$

De cette inégalité et de l’hypothèse que nous faisons sur le spectre de l’opérateur $\Delta^h + q$, nous en déduisons l’inégalité de coercivité faible suivante:

$$\forall \phi \in C_0^\infty(]R, \infty[\times \Sigma), \quad \langle L\phi, \phi \rangle \geq \frac{1}{4} \| (r \log r)^{-1} \phi \|_{L^2}^2.$$

Et ceci nous permet de résoudre le problème de Dirichlet extérieur:

Proposition 3.1. *Si $f \in C^\infty(\Sigma)$, alors il y a un unique*

$$\mathcal{E}(0)f \in L^2\left(]R, \infty[\times \Sigma, \frac{d\text{vol}_g}{(r \log r)^2}\right)$$

tel que

$$\begin{cases} L\mathcal{E}(0)f = 0 & \text{sur }]R, \infty[\times \Sigma, \\ \mathcal{E}(0)f = f & \text{sur } \{R\} \times \Sigma. \end{cases}$$

Bien sur, si on utilise la décomposition spectrale de l’opérateur $\Delta^h + q$, alors $\mathcal{E}(0)f$ est facile à expliciter: soit $\{\varphi_j\}_j$ est une base hilbertienne de $L^2(\Sigma)$ constituée de fonctions propres de l’opérateur $\Delta^h + q$:

$$L^2(\Sigma) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{C}\varphi_j \tag{3.7}$$

avec pour $j \geq 0$, $(\Delta^h + q)\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$. Et posons $v_j = \sqrt{\lambda_j + (n-2)^2/4}$, alors si $f = \sum_j c_j \varphi_j$, on a

$$\mathcal{E}(0)f(r, \theta) = \sum_j \left(\frac{R}{r}\right)^{v_j + (n-2)/2} c_j \varphi_j(\theta).$$

L’opérateur de Dirichlet/Neumann extérieur $f \mapsto -\frac{\partial}{\partial r}|_{r=R} \mathcal{E}(0)f$ est juste l’opérateur

$$\frac{1}{R} \left(\sqrt{\Delta^h + q + (n-2)^2/4} + \frac{n-2}{2} \text{Id} \right), \tag{3.8}$$

c’est bien un opérateur pseudo différentiel elliptique d’ordre 1. De plus l’inégalité de coercivité faible nous permet d’affirmer que si $\mathcal{E}(i\mu)f$ résoud

$$\begin{cases} (L + \mu^2)\mathcal{E}(i\mu)f = 0 & \text{sur }]R, \infty[\times \Sigma, \\ \mathcal{E}(i\mu)f \in L^2, \\ \mathcal{E}(i\mu)f = f & \text{sur } \{R\} \times \Sigma. \end{cases}$$

alors $\mathcal{E}(i\mu)f$ tend vers $\mathcal{E}(0)f$ dans L^2_{loc} lorsque $\mu \rightarrow 0$.

On a déjà dit que pour R assez grand l'opérateur L sur $\{r < R\}$ pour les conditions de Dirichlet est inversible, ce qui permet de résoudre le problème de Dirichlet intérieur et définir ainsi un opérateur $\mathcal{N}(0)$:

si $f \in C^\infty(\Sigma)$ alors il existe une unique $\mathcal{E}(0)f \in C^\infty(M \setminus (\{R\} \times \Sigma))$ et $\mathcal{E}(0)f \in L^2\left(]R, \infty[\times \Sigma, \frac{d\text{vol}_g}{r^2 \log r^2}\right)$ tel que

$$\begin{cases} L\mathcal{E}(0)f = 0 & \text{sur } M \setminus (\{R\} \times \Sigma), \\ \mathcal{E}(0)f = f & \text{sur } \{R\} \times \Sigma. \end{cases}$$

Alors on pose comme précédemment:

$$\mathcal{N}(0)f = \frac{\partial \mathcal{E}(0)f|_{\Omega_R}}{\partial \nu_{\Omega_R}} + \frac{\partial \mathcal{E}(0)f|_{M-\Omega_R}}{\partial \nu_{M-\Omega_R}}.$$

On a déjà vu que pour $\lambda > 0$ assez petit, on a

$$\xi(\lambda^2, L, L_{\Omega_R}) = -\frac{1}{\pi} \text{Arg det}_\zeta \mathcal{N}(\lambda) + \xi(0-).$$

On s'attend donc à ce que le saut en zéro de la fonction de décalage spectral du couple (L, L_{Ω_R}) soit dicté par les éléments du noyau de $\mathcal{N}(0)$. En fait ce noyau est relié à un certain noyau de l'opérateur L .

3.3. Le noyau de l'opérateur Dirichlet/Neumann

Proposition 3.2. Si $\phi \in C^\infty(M) \setminus \{0\}$ est telle que $L\phi = 0$ et $\phi \in L^2(M, (r \log r)^{-2} d\text{vol}_g)$ alors il y a $j_0 \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}$ tels que $\Delta^h \varphi + q\varphi = \lambda_{j_0} \varphi$ et

$$\phi(r, \theta) = \frac{\varphi(\theta)}{r^{j_0 + (n-2)/2}} + o(r^{-j_0}).$$

Cette proposition se montre en utilisant la décomposition spectrale de $\Delta^h + q$ et en séparant les variables sur $]R, \infty[\times \Sigma$. Elle implique l'égalité:

$$\{\phi \in C^\infty(M), L\phi = 0, \phi = O(r^{-(n-2)/2})\} = \{\phi \in L^2(M, (r \log r)^{-2} d\text{vol}_g) \mid L\phi = 0\}.$$

Alors si $f \in C^\infty(\Sigma)$ est annulée par $\mathcal{N}(0)$, il est clair que

$$\mathcal{E}(0)f \in L^2(M, (r \log r)^{-2} d\text{vol}_g) \quad \text{et} \quad L\mathcal{E}(0)f = 0.$$

Puis si u est dans $L^2(M, (r \log r)^{-2} d\text{vol}_g)$ et est annulé par L , alors $u|_{\{R\} \times \Sigma}$ est annulé par $\mathcal{N}(0)$. On obtient donc le résultat suivant

Proposition 3.3. *Il y a un isomorphisme entre le noyau de l'opérateur $\mathcal{N}(0)$ et l'espace*

$$\{\phi \in C^\infty(M), L\phi = 0, \phi = O(r^{-(n-2)/2})\}.$$

4. Asymptotique en $\lambda = 0$ de l'opérateur Dirichlet/Neumann

Nous allons maintenant étudier l'asymptotique du déterminant régularisé de l'opérateur $\mathcal{N}(\lambda)$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$. Pour cela on commence par quelques estimations sur l'opérateur modèle. Des estimées similaires ont été obtenues par Christiansen [Ch].

4.1. La résolvante de l'opérateur modèle

On considère donc l'opérateur

$$L_v = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{v^2 - (n-2)^2/4}{r^2}$$

sur $L^2(]0, \infty[, r^{n-1} dr)$. On sait que si $v > 0$ alors cet opérateur initialement défini sur $C_0^\infty(]0, \infty[)$ est essentiellement auto-adjoint, on note encore L_v son unique extension auto-adjointe à $L^2(]0, \infty[, r^{n-1} dr)$.

Proposition 4.1. *Soit $\varepsilon > 0$, si $v > 0$, il existe une constante $c_{v,\varepsilon}$ décroissante avec v , tel que si $z \in \mathbb{C}$, alors l'opérateur $(1+r)^{-1-\varepsilon}(L_v - z)^{-1}(1+r)^{-1-\varepsilon}$ est borné sur $L^2(]0, \infty[, r^{n-1} dr)$ et a une norme d'opérateur borné par $c_{v,\varepsilon}$.*

Preuve. On ne considère que le cas où $\text{Im } z \geq 0$, le cas $\text{Im } z \leq 0$ s'en déduit par dualité. On se sert de la représentation suivante du noyau de l'opérateur e^{-itL_v} :

$$e^{-itL_v}(x, y) = (xy)^{-\frac{n-2}{2}} \frac{1}{2it} e^{-\frac{x^2+y^2}{4it}} e^{-i\frac{\pi}{2}v} J_v\left(\frac{xy}{2t}\right),$$

où J_v est la fonction de Bessel d'indice v (cf. p. 592 de [C] ou la partie 8.8 de [T]). Ainsi lorsque $\text{Im } z \geq 0$, le noyau de Schwarz de l'opérateur $(L_v - z)^{-1}$ est

$$-(xy)^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{4it} + izt} e^{-i\frac{\pi}{2}v} J_v\left(\frac{xy}{2t}\right) \frac{dt}{2t}.$$

Cette intégrale converge absolument car $\int_0^\infty |J_v(\frac{xy}{2t})| \frac{dt}{t} = \int_0^\infty |J_v(\tau)| \frac{d\tau}{\tau}$. On peut de plus majorer cette intégrale car on sait que si $\tau > 0$ et $v > 0$ alors

$$|J_v(\tau)| \leq \frac{(\tau/2)^v}{\Gamma(1/2)\Gamma(v+1/2)}.$$

Et donc

$$\int_0^\infty |J_\nu(\tau)| \frac{d\tau}{\tau} \leq \int_0^1 \frac{(\tau/2)^\nu}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)} \frac{d\tau}{\tau} + \int_1^\infty |J_\nu(\tau)| \frac{d\tau}{\tau}.$$

Maintenant si $\delta \in]0, 1[$, on peut majorer la seconde intégrale par:

$$\left(\int_0^\infty |J_\nu(\tau)|^2 \tau^\delta \frac{d\tau}{\tau} \int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau^{\delta+1}} \right)^{1/2}.$$

Or pour $\delta \in]0, 1[$, on a l'égalité:

$$\int_0^\infty |J_\nu(\tau)|^2 \tau^\delta \frac{d\tau}{\tau} = C(\delta) \frac{\Gamma(\nu + \delta/2)}{\Gamma(\nu + 1 - \delta/2)}.$$

Pour montrer ceci, on utilise les formules (cf. p. 150 et 391 de [Wa]):

$$J_\nu(\tau)^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi J_{2\nu}(2\tau \cos \theta) d\theta$$

et

$$\int_0^\infty J_{2\nu}(\tau) \frac{d\tau}{\tau^\mu} = \frac{\Gamma(\nu + (1 - \mu)/2)}{2^\mu \Gamma(\nu + (1 + \mu)/2)}.$$

On obtient finalement qu'il y a une constante b_ν décroissant avec ν tel que le noyau de Schwarz de l'opérateur $(L_\nu - z)^{-1}$ est majoré par

$$b_\nu(xy)^{-\frac{n-2}{2}}.$$

La proposition découle alors du fait que l'opérateur dont le noyau est

$$(1+x)^{-1-\varepsilon} (xy)^{-\frac{n-2}{2}} (1+y)^{-1-\varepsilon}$$

est borné sur $L^2(]0, \infty[, r^{n-1} dr)$ (c'est un opérateur Hilbert-Schmidt). \square

Proposition 4.2. Soit $\varepsilon > 0$, si $\nu > 1$, il existe une constante $c_{\nu,\varepsilon}$ décroissante avec ν , tel que si $z \in \mathbb{C}$, alors l'opérateur $(1+r)^{-2-\varepsilon} (L_\nu - z)^{-2} (1+r)^{-2-\varepsilon}$ est borné sur $L^2(]0, \infty[, r^{n-1} dr)$ et a une norme d'opérateur borné par $c_{\nu,\varepsilon}$.

Preuve. On procède de la même façon. Si $\text{Im } z \geq 0$, le noyau de Schwarz de l'opérateur $(L_\nu - z)^{-2}$ est

$$(xy)^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{4it} + izt} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} J_\nu\left(\frac{xy}{2t}\right) \frac{dt}{2i}.$$

Il est donc majoré par

$$(xy)^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty \left| J_\nu\left(\frac{xy}{2t}\right) \right| \frac{dt}{2} = (xy)^{-\frac{n}{2}+2} \int_0^\infty |J_\nu(\tau)| \frac{d\tau}{4\tau^2}.$$

Et les mêmes arguments mènent au résultat. \square

En fait, on a même, pour l’opérateur $(1+r)^{-2-\varepsilon}(L_\nu - z)^{-2}(1+r)^{-2-\varepsilon}$, un résultat de continuité par rapport à z , $\text{Im } z \geq 0$.

En effet le noyau de Schwarz de l’opérateur $(L_\nu - z - h)^{-2} - (L_\nu - z)^{-2}$ est borné par

$$(xy)^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty |e^{-ht} - 1| \left| J_\nu\left(\frac{xy}{2t}\right) \right| \frac{dt}{2}$$

Lorsque $|h|xy \geq 1$, on peut donc le majorer par

$$C_\nu(xy)^{-\frac{n}{2}+2}.$$

Puis lorsque $|h|xy \leq 1$, on le majore par

$$(xy)^{-\frac{n}{2}+2} \left[|h|xy \int_1^\infty |J_\nu(\tau)| \frac{d\tau}{8\tau^3} + \int_0^{|h|xy} |J_\nu(\tau)| \frac{d\tau}{4\tau^2} \right].$$

Les mêmes techniques que précédemment mènent à la majoration de cette expression par $C_\nu(xy)^{-\frac{n}{2}+2}(|h|xy + (|h|xy)^{\nu-1})$. Ainsi si $\nu \geq 1 + \delta$ avec $\delta \in]0, 1[$ on obtient que le noyau de Schwarz de l’opérateur $(L_\nu - z - h)^{-2} - (L_\nu - z)^{-2}$ est majoré par

$$C_\nu(xy)^{-\frac{n}{2}+2}(|h|xy)^\delta.$$

Par la loi du “qui peut le plus peut le moins”, on peut supposer que $\delta < \varepsilon$. L’opérateur dont le noyau est $(1+x)^{-2-\varepsilon}(xy)^{-\frac{n}{2}+2}(|h|xy)^\delta(1+y)^{-2-\varepsilon}$ est continue sur $L^2(]0, \infty[, r^{n-1} dr)$. Ainsi si $u \in L^2(]0, \infty[, r^{n-1} dr)$, alors

$$\| (1+x)^{-2-\varepsilon}((L_\nu - z - h)^{-2} - (L_\nu - z)^{-2})(1+y)^{-2-\varepsilon}u \|_{L^2} \leq C_{\nu,\varepsilon} |h|^\delta \|u\|_{L^2}.$$

4.2. L’opérateur sur le cône

Ces résultats impliquent les résultats suivants pour l’opérateur L à l’infini. Soit L_+ la restriction de l’opérateur L_0 à l’espace $\bigoplus_{j,\lambda_j+(n-2)^2/4 > 1} \mathbb{C}\varphi_j$, L_+ est un pseudo-laplacien.

Proposition 4.3. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $z \in \mathbb{C}$, $\text{Im } z \geq 0$ alors l'opérateur

$$(L_+ - z)^{-1} : L^2([0, \infty[\times\Sigma, (1+r)^{4+\varepsilon} d\text{vol}) \rightarrow L^2([0, \infty[\times\Sigma, (1+r)^{-4-\varepsilon} d\text{vol})$$

est un opérateur borné, de plus il dépend de façon C^1 de z dans le domaine $\{\text{Im } z \geq 0\}$.

De ceci et d'estimées elliptiques nous pouvons en déduire:

Corollaire 4.4. Le noyau de Schwarz de l'opérateur $(L_+ - z)^{-1}$ est une fonction C^∞ sur $(]0, \infty[\times\Sigma)^2$ privé de la diagonale Diag . De plus $z \mapsto (L_+ - z)^{-1}(x, y) \in C^\infty((]0, \infty[\times\Sigma)^2 \setminus \text{Diag})$ est C^1 sur $\{\text{Im } z \geq 0\}$.

4.3. Analyse de l'opérateur Dirichlet/Neumann extérieure

Nous pouvons maintenant commencer à étudier comment l'opérateur de Dirichlet/Neumann dépend de λ lorsque λ est voisin de zéro. L'opérateur $\mathcal{N}(\lambda)$ est la somme de deux opérateurs pseudodifférentiels

$$\mathcal{N}(\lambda) = \mathcal{N}_{\text{ext}}(\lambda) + \mathcal{N}_{\text{int}}(\lambda).$$

Où si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \lambda \geq 0$ et $f \in C^\infty(\Sigma)$ alors $\mathcal{E}(\lambda)f \in C^\infty([R, \infty[\times\Sigma)$ est la solution du problème de Dirichlet:

$$\begin{cases} (L - \lambda^2)\mathcal{E}(\lambda)f = 0 & \text{sur }]R, \infty[\times\Sigma, \\ \mathcal{E}(\lambda)f = f & \text{sur } \{R\} \times \Sigma, \\ \mathcal{E}(\lambda)f \in L^2 & \text{si } \text{Im } \lambda > 0, \\ r^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial \mathcal{E}(\lambda)f}{\partial r} - i\lambda r \mathcal{E}(\lambda)f \right) \rightarrow 0, & \text{si } \text{Im } \lambda = 0. \end{cases}$$

Alors on a

$$\mathcal{N}_{\text{ext}}(\lambda)f = - \left. \frac{\partial \mathcal{E}(\lambda)f}{\partial r} \right|_{r=R}.$$

De même, si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda^2 \notin \text{Spec } L_{M \setminus ([R, \infty[\times\Sigma)}$ alors on note $\mathcal{E}(\lambda)f \in C^\infty(M \setminus ([R, \infty[\times\Sigma))$ la solution du problème de Dirichlet:

$$\begin{cases} (L - \lambda^2)\mathcal{E}(\lambda)f = 0 & \text{sur } M \setminus ([R, \infty[\times\Sigma), \\ \mathcal{E}(\lambda)f = f & \text{sur } \{R\} \times \Sigma. \end{cases}$$

Alors on a

$$\mathcal{N}_{\text{int}}(\lambda)f = \left. \frac{\partial \mathcal{E}(\lambda)f}{\partial r} \right|_{r=R}.$$

On sait que si l'on choisit R assez grand alors 0 n'est pas dans le spectre de l'opérateur $L_{M \setminus \Omega_R}$. Dans ce cas, l'opérateur $\mathcal{N}_{int}(\lambda)$ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre 1 qui dépend holomorphiquement de λ^2 . Nos estimées précédentes vont nous permettre d'étudier $\mathcal{N}_{ext}(\lambda)$. Soit H le projecteur spectral de $\mathcal{N}_{ext}(0)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. D'après (3.8), on sait que:

$$\mathcal{N}_{ext}(0) = \frac{1}{R} \left(\sqrt{\Delta^h + q + (n-2)^2/4} + \frac{n-2}{2} \text{Id} \right).$$

Donc dans la décomposition (3.7) de $L^2(\Sigma)$:

$$L^2(\Sigma) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{C} \varphi_j,$$

on a

$$Hf = \sum_{0 \leq \lambda_j + (n-2)^2/4 \leq 1} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

Proposition 4.5.

$$\mathcal{N}_{ext}(\lambda)(\text{Id} - H) = \Psi(\lambda^2) + \mathcal{S}(\lambda^2),$$

où $\Psi(z)$ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre 1 qui dépend holomorphiquement de z dans un voisinage de zéro et $\mathcal{S}(z)$ est un opérateur à noyau C^∞ , qui dépend de façon C^1 de z , dans un voisinage de zéro dans $\text{Im } z \geq 0$. C'est à dire que $\mathcal{S}(z)f(\theta) = \int_\Sigma Q(z, \theta, \sigma) f(\sigma) d\sigma$, où $z \mapsto Q(z, \cdot, \cdot) \in C^\infty(\Sigma \times \Sigma)$ est de classe C^1 dans un voisinage de 0 dans $\{\text{Im } z \geq 0\}$.

Preuve. Soit $f \in \text{Ker } H$. Sur $]R, 2R[\times \Sigma$, on a

$$\mathcal{E}(\lambda)f = u_\lambda + v_\lambda$$

où u_λ résoud le problème de Dirichlet:

$$\begin{cases} (L - \lambda^2)u_\lambda = 0 & \text{sur }]R, 2R[\times \Sigma, \\ u_\lambda = f & \text{sur } \{R\} \times \Sigma, \\ u_\lambda = 0 & \text{sur } \{2R\} \times \Sigma. \end{cases}$$

et v_λ résoud le problème de Dirichlet:

$$\begin{cases} (L - \lambda^2)v_\lambda = 0 & \text{sur }]R, 2R[\times \Sigma, \\ v_\lambda = 0 & \text{sur } \{R\} \times \Sigma, \\ v_\lambda = \mathcal{E}(\lambda)f & \text{sur } \{2R\} \times \Sigma. \end{cases}$$

On a donc $\mathcal{N}_{ext}(\lambda)f = -\frac{\partial}{\partial r}u_\lambda - \frac{\partial}{\partial r}v_\lambda$. Si on pose $\Psi(\lambda^2)f = -\frac{\partial}{\partial r}u_\lambda$ alors $\Psi(z)$ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre 1 qui dépend holomorphiquement de z dans un voisinage de zéro puisque c'est une partie de l'opérateur de Dirichlet/Neumann sur le compact $]R, 2R[\times \Sigma$. Il faut montrer l'assertion sur $\mathcal{S}(\lambda^2)f = -\frac{\partial}{\partial r}v_\lambda$. Soit $P(z, r, \theta, \sigma)$ le noyau (de Poisson) qui permet de résoudre le problème de Dirichlet:

$$\begin{cases} (L - z)v = 0 & \text{sur }]R, 2R[\times \Sigma, \\ v = 0 & \text{sur } \{R\} \times \Sigma, \\ v = f & \text{sur } \{2R\} \times \Sigma. \end{cases}$$

On a $v(r, \theta) = \int_\Sigma P(z, r, \theta, \sigma)f(\sigma)d\sigma$. Dans un voisinage de zéro $z \mapsto P(z, r, \theta, \sigma) \in C^\infty(]R, 2R[\times \Sigma \times \Sigma)$ est une fonction holomorphe de z . Comme on a

$$v_\lambda(r, \theta) = \int_\Sigma P(\lambda^2, r, \theta, \sigma)(\mathcal{E}(\lambda)f)(2R, \sigma) d\sigma.$$

Il nous suffit donc d'étudier l'opérateur $f \mapsto (\mathcal{E}(\lambda)f)(2R, \cdot)$.

Nous allons maintenant nous servir de notre étude précédente, notamment du corollaire (4.4). Fixons ρ une fonction C^∞ à support compact dans $]0, 2R[\times \Sigma$ et valant 1 dans un voisinage de $\{R\} \times \Sigma$.

Soit $g \in C^\infty(\Sigma)$, on note $\tilde{\mathcal{E}}(z)g$ la solution du problème de Dirichlet:

$$\begin{cases} (L - \lambda^2)\tilde{\mathcal{E}}(z)g = 0 & \text{sur }]R, 2R[\times \Sigma, \\ \tilde{\mathcal{E}}(z)g = f & \text{sur } \{R\} \times \Sigma, \\ \tilde{\mathcal{E}}(z)g = 0 & \text{sur } \{2R\} \times \Sigma. \end{cases}$$

Alors $(L - \lambda^2)\rho\tilde{\mathcal{E}}(z)g$ est une fonction C^∞ à support compact dans $]R, 2R[\times \Sigma$, on appelle abusivement $(L - \lambda^2)\rho\tilde{\mathcal{E}}(z)g$ l'extension de cette fonction au cône $]0, \infty[\times \Sigma$. Alors on cherche $\mathcal{E}(\lambda^2)f$ sous la forme suivante

$$\mathcal{E}(\lambda^2)f = \tilde{\mathcal{E}}(z)g - (L_+ - \lambda^2)^{-1}(L - \lambda^2)\tilde{\mathcal{E}}(z)g. \tag{4.9}$$

Pour $g \in C^\infty(\Sigma)$, le terme de gauche est une solution de l'équation $(L - \lambda^2)v = 0$ sur $]R, \infty[\times \Sigma$ et il satisfait les conditions de radiations. Cette expression nous permettra de résoudre le problème de Dirichlet extérieur si g est solution de l'équation intégrale:

$$f = g - K(\lambda^2)g$$

où $K(\lambda^2)$ est l'opérateur

$$g \mapsto (L_+ - \lambda^2)^{-1}(L - \lambda^2)\tilde{\mathcal{E}}(z)g|_{\{R\} \times \Sigma}.$$

D’après le corollaire (4.4), cet opérateur est un opérateur à noyau C^∞ et son noyau dépend de façon C^1 de $z, \text{Im } z \geq 0$. Si on montre que l’opérateur $\text{Id} - K(\lambda^2)$ est inversible, alors l’opérateur $(1 - K(\lambda^2))^{-1}$ dépendra aussi de façon C^1 de λ^2 et on obtiendra le résultat voulu sur $\mathcal{S}(z)$. Or pour montrer que $\text{Id} - K(\lambda^2)$ est inversible il suffit de montrer qu’il est injectif: si on a $g - K(\lambda^2)g = 0$, alors l’expression (4.9) nous fournit une solution de l’équation $(L - \lambda^2)v = 0$ qui satisfait les conditions de radiations et qui est nulle sur $\{R\} \times \Sigma$. Elle est donc nulle. On aura donc

$$\tilde{\mathcal{E}}(z)g = (L_+ - \lambda^2)^{-1}(L - \lambda^2)\tilde{\mathcal{E}}(z)g.$$

Ceci montre que $\tilde{\mathcal{E}}(z)g$ a une extension à $]0, 2R[\times \Sigma$ qui est solution de l’équation $(L - \lambda^2)v = 0$. Or $\tilde{\mathcal{E}}(z)g$ est nulle sur $\{2R\} \times \Sigma$, si λ est assez petit ceci implique que $\tilde{\mathcal{E}}(z)g$ est nulle donc g aussi. \square

Nous devons maintenant étudier $\mathcal{N}_{\text{ext}}H$, c’est un opérateur de rang fini et on a

$$\mathcal{E}(\lambda)\varphi_j(r, \theta) = \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{H_{\nu_j}^1(\lambda r)}{H_{\nu_j}^1(\lambda R)} \varphi_j(\theta).$$

avec on le rappelle $\Delta^h \varphi_j + q\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$ et $\nu_j = \sqrt{\lambda_j^2 + (n-2)^2/4}$. On en déduit donc

$$R\mathcal{N}_{\text{ext}}\varphi_j = -\lambda R \frac{H_{\nu_j}'(\lambda R)}{H_{\nu_j}^1(\lambda R)} \varphi_j + \frac{n-2}{2} \varphi_j.$$

Or on a les développements suivant (cf [Le, p. 101]):

$$\text{Si } \nu \in]0, 1[, \quad -\lambda \frac{H_{\nu}'(\lambda)}{H_{\nu}^1(\lambda)} = \nu + c_\nu \lambda^{2\nu} + o(\lambda^{2\nu}),$$

où $c_\nu = e^{-i\nu\pi} 2^{-2\nu} 2\nu \Gamma(1-\nu)/\Gamma(1+\nu)$.

$$\text{Si } \nu = 0, \quad -\lambda \frac{H_0'(\lambda)}{H_0^1(\lambda)} = -\frac{1}{\log \lambda} + o(|\log \lambda|^{-1}),$$

$$\text{Et si } \nu = 1, \quad -\lambda \frac{H_1'(\lambda)}{H_1^1(\lambda)} = 1 - \frac{\pi}{2} \lambda^2 \log \lambda + O(\lambda^2).$$

4.4. Le saut en zéro de la fonction Xi

Cette étude nous permet de donner l’allure en zéro du déterminant de $\mathcal{N}(\lambda)$:

Définition 4.6. Pour $v \in [0, 1]$, on note h_v la dimension de l'espace engendrée par les solutions non nulles de l'équation

$$L\phi = 0$$

telle qu'il existe $\varphi \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}$ telle que lorsque $r \rightarrow \infty$:

$$\phi(r, \theta) \simeq \frac{\varphi(\theta)}{r^{(n-2)/2+v}}.$$

On a alors

Théorème 4.7. Pour une constante $C \neq 0$, on a l'asymptotique suivant lorsque $\lambda \rightarrow 0$:

$$\det_\zeta \mathcal{N}(\lambda) = \left(\frac{-1}{\log \lambda} \right)^{h_0} \prod_{0 < v < 1} \lambda^{2vh_v} (\lambda^2 \log(1/\lambda))^{h_1} \lambda^{2\dim \ker_{L^2} L} (C + o(1)).$$

Nous obtenons en corollaire:

Corollaire 4.8.

$$\zeta(0+, L, L_{\Omega_R}) - \zeta(0-, L, L_{\Omega_R}) = \sum_{v \in [0,1]} v h_v + \dim \ker_{L^2} L.$$

Preuve. Soit P le projecteur orthogonal sur $\ker \mathcal{N}(0)$. P est un opérateur autoadjoint car $\mathcal{N}(0)$ est un opérateur symétrique (cela provient de la formule de Green). Dans la décomposition $L^2(\Sigma) = \ker \mathcal{N}(0) \oplus \ker P$, on a

$$\mathcal{N}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{1,1}(\lambda) & A_{1,2}(\lambda) \\ A_{2,1}(\lambda) & A_{2,2}(\lambda) \end{pmatrix},$$

où $A_{i,j}(\lambda) = P_i \mathcal{N}(\lambda) P_j$ et $P_1 = P, P_2 = \text{Id} - P$. Grâce à ce qui a été fait précédemment on sait que $A_{2,2}(\lambda)$ est la somme de trois opérateurs:

- un opérateur de rang fini qui dépend continument de λ
- un opérateur pseudo-différentiel qui dépend de façon holomorphe de λ^2 .
- un opérateur à noyau C^∞ qui est C^1 par rapport à λ^2 lorsque $\text{Re } \lambda \geq 0, \text{Im } \lambda \geq 0$.

De plus l'opérateur

$$\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & A_{2,2}(0) \end{pmatrix}$$

est inversible. Donc

$$\delta = \det_\zeta \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & A_{2,2}(0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ceci permet d’affirmer que lorsque $\lambda \rightarrow 0$, alors

$$\det_{\xi} \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & A_{2,2}(\lambda) \end{pmatrix} = \delta(1 + o(1)).$$

On a donc

$$\det_{\xi} \mathcal{N}(\lambda) = \det_{Fr} \begin{pmatrix} A_{1,1}(\lambda) & A_{1,2}(\lambda)A_{2,2}(\lambda)^{-1} \\ A_{2,1}(\lambda) & \text{Id} \end{pmatrix} \delta(1 + o(1)).$$

Nous savons de plus que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A_{1,2}(\lambda)A_{2,2}(\lambda)^{-1} = 0.$$

Il nous faut maintenant décrire comment $\mathcal{N}(\lambda)$ agit sur le noyau de $\mathcal{N}(0)$. Soit $\varphi \in \ker \mathcal{N}(0) \setminus \{0\}$, alors on sait que si on note $c_j = \langle \varphi, \varphi_j \rangle$ alors

$$\mathcal{E}(0)\varphi(r, \theta) = \sum_j c_j \left(\frac{R}{r}\right)^{v_j + \frac{n-2}{2}} \varphi_j(\theta), \quad \text{sur } r > R.$$

De plus, on a

$$\mathcal{N}(\lambda)\varphi = \mathcal{N}_{ext}(\lambda)H\varphi + \mathcal{N}_{ext}(\lambda)(\text{Id} - H)\varphi + \mathcal{N}_{int}(\lambda)\varphi.$$

L’étude précédente permet d’affirmer que l’on a

$$\mathcal{N}(\lambda)\varphi = \mathcal{N}_{ext}(\lambda)H\varphi + \psi(\lambda^2, \theta)$$

où $z \mapsto \psi(z, \cdot) \in C^\infty(\Sigma)$ est de classe C^1 sur $\{\text{Im } z \geq 0\}$.

On sait que lorsque $r \rightarrow \infty$,

$$\mathcal{E}(0)\varphi(r, \theta) \simeq \frac{\psi(\theta)}{r^{(n-2)/2+v}}.$$

Si $v > 1$, i.e. si $\mathcal{E}(0)\varphi \in L^2$, on doit avoir $H\varphi = 0$, donc $\mathcal{N}(\lambda)\varphi$ est une fonction C^1 de λ^2 . Comme $\mathcal{N}(0)\varphi = 0$, on a

$$\mathcal{N}(\lambda)\varphi(\theta) = \lambda^2 c(\theta) + o(\lambda^2).$$

On peut vérifier que $c(\theta)$ ne peut pas être la fonction nulle: en effet si $\mathcal{E}(i\mu)\varphi$ résoud

$$\begin{cases} (L + \mu^2)\mathcal{E}(i\mu)\varphi = 0 & \text{sur } M \setminus (\{R\} \times \Sigma), \\ \mathcal{E}(i\mu)\varphi \in L^2, \\ \mathcal{E}(i\mu)\varphi = \varphi & \text{sur } \{R\} \times \Sigma. \end{cases}$$

alors $\mathcal{E}(i\mu)\varphi$ tend vers $\mathcal{E}(0)\varphi$ dans L^2_{loc} lorsque $\mu \rightarrow 0$. Grâce à la formule de Green, on a

$$\mu^2 \langle \mathcal{E}(i\mu)\varphi, \mathcal{E}(0)\varphi \rangle_M = \langle -L\mathcal{E}(i\mu)\varphi, \mathcal{E}(0)\varphi \rangle_{M \setminus (\{R\} \times \Sigma)} = \langle \mathcal{N}(i\mu)\varphi, \varphi \rangle_{\{R\} \times \Sigma}.$$

Comme $\mathcal{E}(0)\varphi \in L^2$, on a

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu^{-2} \langle \mathcal{N}(i\mu)\varphi, \varphi \rangle_{\{R\} \times \Sigma} = \|\mathcal{E}(0)\varphi\|_{L^2(M)}^2 \neq 0$$

et donc

$$\langle c, \varphi \rangle_{\{R\} \times \Sigma} \neq 0.$$

Si on suppose que $v \in [0, 1]$, alors on a sur $\{R\} \times \Sigma$,

$$\varphi = R^{v+\frac{n-2}{2}} \psi + v$$

où

$$v \in \bigoplus_{\lambda_j + (n-2)^2/4 > v} \mathbb{C}\varphi_j.$$

Notre étude précédente fournit un développement limité de $\lambda \mapsto \mathcal{N}(\lambda)\varphi$ près de $\lambda = 0$; comme $\mathcal{N}(0)\varphi = 0$, on obtient

$$\mathcal{N}(\lambda)\varphi = \varepsilon_v(\lambda)\psi + o(\varepsilon_v(\lambda)).$$

où

$$\varepsilon_v(\lambda) = \begin{cases} c_v \lambda^{2v} & \text{si } v \in]0, 1[, \\ -\frac{1}{\log \lambda} & \text{si } v = 0, \\ -\frac{\pi}{2} \lambda^2 \log \lambda & \text{si } v = 1. \end{cases}$$

On décompose alors le noyau de $\mathcal{N}(0)$ en une somme orthogonale:

$$\ker \mathcal{N}(0) = H_e \oplus H_2$$

où

$$H_2 = \{f \in \ker \mathcal{N}(0), \mathcal{E}(0)f \in L^2\} = \{u|_{\{R\} \times \Sigma}, Lu = 0, u \in L^2(M)\}.$$

Et on notera Q_e le projecteur orthogonal sur H_e et Q_2 celui sur H_2 . On vient de voir qu'il existe un opérateur $T : H_2 \rightarrow L^2(\Sigma)$ tel que si $f \in H_2$ alors

$$\mathcal{N}(\lambda)f = \lambda^2 T(f) + o(\lambda^2).$$

Et on a de plus

$$\langle T(f), g \rangle = \int_M \mathcal{E}(0)f \overline{\mathcal{E}(0)g} d\text{vol}_g.$$

Ainsi T est injectif et l'opérateur $Q_2T : H_2 \rightarrow H_2$ est un opérateur autoadjoint défini positif.

Et si $f \in E_e \setminus \{0\}$, alors il existe $v \in [0, 1]$ avec $-(n-2)^2/4 + v \in \text{Spec}(\Delta^h + q)$ et $v \in \ker(\Delta^h + q + (n-2)^2/4 - v\text{Id}) \setminus \{0\}$ tels que lorsque $r \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{E}(0)f(r, \theta) = \frac{v(\theta)}{r^{(n-2)/2+v}} + o\left(\frac{1}{r^{(n-2)/2+v}}\right).$$

Et on a aussi

$$\mathcal{N}(\lambda)f = \varepsilon_v(\lambda)v(\theta) + o(\varepsilon_v(\lambda)).$$

On choisit alors une base de E_e f_1, f_2, \dots, f_l telle que

$$\mathcal{E}(0)f_j(r, \theta) \simeq_{r \rightarrow \infty} \frac{v_j(\theta)}{r^{(n-2)/2+v_j}}.$$

et que $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_l$. De plus lorsque $v_i = v_{i+1} = \dots = v_{i+j}$, alors on choisit $f_i, f_{i+1}, \dots, f_{i+j}$ de façon à ce que $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+j}$ forment une base orthogonale. Et on note $\varepsilon_{v_i}(\lambda) = \varepsilon_i(\lambda)$. On a alors pour $i \in \{1, \dots, l\}$:

$$\langle \mathcal{N}(\lambda)f_i, f_j \rangle = \varepsilon_i(\lambda) \langle v_i, f_j \rangle + o(\varepsilon_i(\lambda)).$$

On a donc les asymptotiques suivants lorsque $\lambda \rightarrow 0$:

$$\langle \mathcal{N}(\lambda)f_i, f_i \rangle = \varepsilon_i(\lambda) \|v_i\|^2 + o(\varepsilon_i(\lambda)),$$

$$\langle \mathcal{N}(\lambda)f_i, f_j \rangle = \langle f_i, \mathcal{N}(-\bar{\lambda})f_j \rangle = O(\varepsilon_i(\lambda)) = O(\varepsilon_j(\lambda)).$$

Mais par construction on a $\langle v_i, f_j \rangle = 0$ si $j > i$ et donc pour $j > i$ on a

$$\langle \mathcal{N}(\lambda)f_i, f_j \rangle = o(\varepsilon_i(\lambda)).$$

Soit $D(\lambda)$ l'endomorphisme diagonale sur H_e qui à f_i associe $\varepsilon_i(\lambda)f_i$. On a donc

$$\begin{pmatrix} A_{1,1}(\lambda) & A_{1,2}(\lambda)A_{2,2}(\lambda)^{-1} \\ A_{2,1}(\lambda) & \text{Id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(\lambda) & Q_eT + O(1) & Q_eA_{1,2}(\lambda)A_{2,2}(\lambda)^{-1} \\ o(1) & Q_2T + o(1) & Q_2A_{1,2}(\lambda)A_{2,2}(\lambda)^{-1} \\ o(1) & O(1) & \text{Id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2\text{Id} & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix}.$$

Où dans la base $\{f_1, f_2, \dots, f_l\}$, $S(\lambda)$ est une matrice avec les propriétés suivantes lorsque $\lambda \rightarrow 0$:

- le $i^{\text{ème}}$ coefficient de la diagonale est $\|v_i\|^2 + o(1)$.
- les coefficients au dessus de la diagonale sont bornés.
- les coefficients au dessous de la diagonale tendent vers zéro avec λ .

On obtient ainsi facilement que

$$\det_{Fr} \begin{pmatrix} S(\lambda) & Q_e T + O(1) & Q_e A_{1,2}(\lambda) A_{2,2}(\lambda)^{-1} \\ o(1) & Q_2 T + o(1) & Q_2 A_{1,2}(\lambda) A_{2,2}(\lambda)^{-1} \\ o(1) & O(1) & \text{Id} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^l \|v_i\|^2 \det(Q_2 T)(1 + o(1))$$

Ce qui implique bien le résultat. \square

4.5. Le cas non-exact

En fait, on remarque que lorsque

$$\inf \text{Spec}(\Delta^h + q) > - (n - 2)^2/4 + 1$$

alors il n’y a pas de résonances d’énergie nulle. Et dans ce cas la preuve que nous venons de faire est beaucoup plus simple. En effet si l’opérateur L est isométrique au dehors d’un compact avec un opérateur L_0 tel que pour z , $\text{Im } z \geq 0$ dans un voisinage de 0, $z \mapsto (L_0 - z)^{-1}$ est une fonction C^1 à valeurs dans les opérateurs bornés d’un espace de L^2 à poids dans un autre alors le saut de la fonction de décalage spectral en zéro est la dimension du noyau L^2 de l’opérateur. Et nous pouvons en l’absence de petites valeurs propre pour l’opérateur $\Delta^h + q$ établir que ce calcul du saut en zéro de la fonction de décalage spectral est encore vrai pour des perturbations:

Théorème 4.9. *Supposons que (M, g) est une variété à bouts coniques exacte et que V est une fonction réelle sur M et qu’à l’infini on ait pour un $\varepsilon > 0$:*

$$V(r, \theta) = \frac{q(\theta)}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^{4+\varepsilon}}\right).$$

On suppose de plus que

$$\inf \text{Spec}(\Delta^h + q) > - (n - 2)^2/4 + 1,$$

alors pour tout compact K assez grand,

$$\xi(0+, L, L_{M \setminus K}) - \xi(0-, L, L_{M \setminus K}) = \dim \ker_{L^2} L.$$

Preuve. Soit χ_R la fonction caractéristique de $[R, \infty[\times \Sigma$, et notons M_w l'opérateur de multiplication par $(1+r)^{-w}$. On va montrer que si $w > 2 + \varepsilon$ et si R est assez grand alors l'opérateur

$$L_R = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Delta^h + q}{r^2} + \chi_R(V - q/r^2)$$

est tel que $z \in \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z \geq 0\} \mapsto M_w(L_R - z)^{-1}M_w$ est une fonction C^1 à valeurs dans les opérateurs bornés de $L^2(]0, \infty[\times \Sigma)$. Notons L_∞ l'opérateur

$$-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Delta^h + q}{r^2}$$

et $W_R = \chi_R(V - q/r^2)$. On a l'équation

$$(L_\infty - z)^{-1} - (L_R - z)^{-1} = -(L_R - z)^{-1}W_R(L_\infty - z)^{-1}.$$

Donc

$$M_w(L_\infty - z)^{-1}M_w = M_w(L_R - z)^{-1}M_w(\text{Id} - M_{-w}W_RM_{-w}M_w(L_\infty - z)^{-1}M_w).$$

Nos hypothèses et la proposition (4.3) assurent que si alors $M_w(L_\infty - z)^{-1}M_wM_{-w}W_RM_{-w}$ est un opérateur borné de $L^2(]0, \infty[\times \Sigma)$, de norme inférieure à 1/2 et que cet opérateur dépend de façon C^1 de z . Donc pour R est assez grand,

$$M_w(L_R - z)^{-1}M_w = M_w(L_\infty - z)^{-1}M_w(\text{Id} - M_w(L_\infty - z)^{-1}M_wM_w^{-1}W_RM_w^{-1})^{-1}$$

est une fonction C^1 à valeurs dans les opérateurs bornés de $L^2(]0, \infty[\times \Sigma)$. Ceci est suffisant pour montrer le théorème. \square

Remarque 4.10. En fait à l'aide de l'identité $L_\infty(L_\infty - z)^{-1} = \text{Id} + z(L_\infty - z)^{-1}$, on peut montrer que pour $w > 2$, l'opérateur $M_w(L_\infty - z)^{-1}M_w$ est continu de L^2 sur le domaine de l'opérateur L_∞ . Et ceci permet de traiter des opérateurs L qui sur un voisinage de l'infini sont tels que de $L - L_\infty = A$ et $(1+r)^{4+\varepsilon}A$ est un opérateur différentiel d'ordre 2 dont les coefficients sont bornées par rapport à la métrique du cône. Par exemple ceci permet une perturbation de la métrique exacte $dr^2 + r^2h = g_\infty$ par un 2-tenseur symétrique h tel que la norme C^2 de $(1+r)^{4+\varepsilon}h$ mesurée avec g_∞ est bornée.

5. Applications au scattering super-symétrique

5.1. Opérateur de type Dirac

L'étude précédente est valide pour une classe plus vaste d'opérateur de type laplacien agissant non plus sur les fonctions mais sur les sections d'un fibré hermitien: comme le

laplacien de Hodge–DeRham sur les formes différentielles, le carré de l’opérateur de Dirac si la variété est spin... L’unique condition est que l’opérateur considéré soit isométrique à une somme d’opérateurs modèles sur la demi-droite. Nous allons rapidement décrire à quel type de “laplacien” s’appliquent nos résultats.

Soit $L : C_0^\infty(M, E) \rightarrow C_0^\infty(M, E)$ un opérateur de type laplacien agissant sur les sections d’un fibré hermitien E sur une variété riemannienne à bouts coniques (M, g) . Ainsi L est un opérateur différentiel symétrique dont le symbole principal est la métrique

$$\text{pour } x \in M, \quad \zeta \in T_x^*M, \quad \sigma(L)(x, \zeta) = -g_x(\zeta, \zeta)\text{Id}_{E_x}.$$

Selon Gilkey [Gi] il existe une unique connexion orthogonale sur E ,

$$\nabla^L : C_0^\infty(M, E) \rightarrow C_0^\infty(M, T^*M \otimes E)$$

et $\mathcal{R} \in C^\infty(\text{Sym}(E))$, un champ d’endomorphisme symétrique de E , tel que

$$L = (\nabla^L)^* \nabla^L + \mathcal{R}.$$

On veut que à l’infini, L soit isométrique à un opérateur L_0 agissant sur un fibré hermitien $\widehat{E} \rightarrow]0, \infty[\times \Sigma, dr^2 + r^2h$. On veut de plus pouvoir séparer les variables de l’opérateur modèle. Pour cela, on note $U_\lambda : \widehat{E}_{(r,\theta)} \rightarrow \widehat{E}_{(\lambda r,\theta)}$ le transport ∇^L -parallèle le long du chemin $\lambda \rightarrow (\lambda r, \theta)$. Lorsque L_0 vérifie la relation

$$L_0 \circ U_\lambda = \lambda^2 U_\lambda \circ L_0.$$

et si l’opérateur L_0 est positif alors nos résultats sont encore valide pour L .

On va maintenant s’intéresser au cas d’un opérateur de type Dirac $D : C_0^\infty(M, E) \rightarrow C_0^\infty(M, E)$. Ce qui veut dire que D est un opérateur différentiel symétrique d’ordre 1 et que D^2 est un opérateur de type laplacien. Pour pouvoir séparer les variables, on suppose que à l’infini D est isométrique à un opérateur D_0 agissant sur les sections d’un fibré hermitien \widehat{E} au dessus du cône $]0, \infty[\times \Sigma, dr^2 + r^2h$. Et nous supposons que

$$D_0 \circ U_\lambda = \lambda U_\lambda \circ D_0. \tag{5.10}$$

En fait le symbole principal de D induit sur E une action de $Cl(M)$ le fibré de Clifford de M . Grâce au transport parallèle, on peut identifier les sections L^2 de E au dessus du cône et l’espace

$$L^2\left(]0, \infty[, L^2(\Sigma, E)|_{\{1\} \times \Sigma}, r^{n-1} dr\right).$$

Avec cette identification, notre hypothèse équivaut à ce que D_0 ait la forme suivante

$$D_0 = T \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{A}{r} \right). \tag{5.11}$$

où on a noté T . la multiplication de Clifford par le champ de vecteur $T = \frac{\partial}{\partial r}$ et où $A \in C^\infty(\Sigma, \widehat{E}) \rightarrow C^\infty(\Sigma, \widehat{E})$ est un opérateur de type Dirac sur $\widehat{E} \rightarrow \Sigma$. Le fait que l'on suppose les opérateurs D et A symétrique implique que

$$T.A + AT. = (n - 1)T. \tag{5.12}$$

Cette équation implique que le spectre de A est symétrique par rapport à $(n - 1)/2$. On supposera aussi que E est muni d'une involution $\alpha : E \rightarrow E$ anticommutable avec D de telle sorte que si $E_x^\pm = \{v \in E_x, \alpha(v) = \pm v\}$, alors dans la décomposition $E = E^+ \oplus E^-$, on a

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}.$$

On dira alors que D est super-symétrique. La condition de positivité pour D_0^2 est toujours vérifiée et donc nos résultats sont toujours valables pour les opérateurs D^2, D^+D^-, D^-D^+ .

5.2. Un théorème de l'indice relatif

Lorsque M est une variété compacte sans bord, le théorème de l'indice de Atiyah-Singer calcule l'indice de l'opérateur D^+ à l'aide d'une classe de cohomologie associée à l'opérateur D^+ .

$$\text{ind } D^+ = \dim \ker_{L^2} D^+ - \dim \ker_{L^2} D^- = \int_M \omega_{D^+}.$$

Concernant les variétés complètes non compactes, ce résultat a été généralisé de nombreuses façons et dans différents contextes géométriques. Une de ces généralisations est le théorème de l'indice relatif:

Si $D_1 : C_0^\infty(M_1, E_1) \rightarrow C_0^\infty(M_1, E_1)$ et $D_2 : C_0^\infty(M_2, E_2) \rightarrow C_0^\infty(M_2, E_2)$ sont deux opérateurs de type Dirac et isométriques hors de compacts $K_i \subset M_i$, et si 0 n'est pas dans le spectre essentiel de D_1 (ou de D_2) alors nous avons la formule de l'indice relatif:

$$\text{ind}_{L^2} D_1^+ - \text{ind}_{L^2} D_2^+ = \int_{K_1} \omega_{D_1^+} - \int_{K_2} \omega_{D_2^+},$$

où on a noté $\omega_{D_i^+}$ est la forme caractéristique construite à l'aide du symbole principale de D_i^+ . Ce théorème avait été montré par Gromov et Lawson ainsi que par Donnelly et Anghel [G-L,Do,An2].

Dans notre cadre, le spectre des opérateurs de type Dirac, qui vérifie les hypothèses (5.10/5.11), est \mathbb{R} . En particulier 0 est dans le spectre essentiel cependant ces opérateurs de type Dirac ont un noyau de dimension finie. Mais ce théorème de l'indice relatif n'est pas vrai.

On décrit brièvement l'exemple suivant [Ca1]: soit (M_1, g_1) la surface qui est l'union disjointe de deux plans euclidiens, et (M_2, g_2) la surface obtenue en recollant deux plans euclidiens suivant un disque. Ces deux surfaces sont clairement isométriques au dehors d'un compact. On considère sur ces surfaces l'opérateur de Gauss–Bonnet

$$(d + \delta) : C^\infty(M_i) \oplus C^\infty(\Lambda^2 T^* M_i) \rightarrow C^\infty(T^* M_i).$$

Alors ces opérateurs ont un noyau L^2 triviaux. Cependant on a

$$\int_{M_1} \frac{K_{g_1} dA_{g_1}}{2\pi} = 0, \quad \text{mais} \quad \int_{M_2} \frac{K_{g_2} dA_{g_2}}{2\pi} = -2.$$

Le théorème de l'indice relatif n'est donc pas vrai. Afin d'expliquer ce qui se passe dans cet exemple, nous esquissons rapidement la preuve du théorème de l'indice relatif: considérons deux opérateurs de type Dirac $D_1 : C^\infty(M_1, E_1) \rightarrow C^\infty(M_1, E_1)$ et $D_2 : C^\infty(M_2, E_2) \rightarrow C^\infty(M_2, E_2)$ supersymétrique et isométriques au dehors de compacts $K_i \subset M_i$. Soit \mathcal{H} l'espace de Hilbert

$$\begin{aligned} L^2(M_1, E_1) \oplus L^2(M_2, E_2) &= L^2(K_1, E_1) \oplus L^2(M_2, E_2) \\ &= L^2(K_1, E_1) \oplus L^2(M_2 \setminus K_2, E_2) \oplus L^2(K_2, E_2). \end{aligned}$$

Alors les opérateurs $e^{-tD_i^\pm}$ agissent sur \mathcal{H} et selon [B,Ca3] les opérateurs $e^{-tD_1^\pm} - e^{-tD_2^\pm}$ sont à trace. On obtient donc deux fonctions de décalage spectral ζ^\pm telles que

$$\forall t > 0, \quad \text{Tr}(e^{-tD_1^- D_1^+} - e^{-tD_2^- D_2^+}) = \int_0^\infty \zeta^+(\lambda) t e^{-t\lambda} d\lambda.$$

et de même pour ζ^- .

Si on note α_i les involutions associées aux opérateurs D_i , on sait alors que

$$\text{Tr}(\alpha_1 e^{-tD_1^- D_1^+} - \alpha_2 e^{-tD_2^- D_2^+}) = \int_0^\infty (\zeta^+(\lambda) - \zeta^-(\lambda)) t e^{-t\lambda} d\lambda.$$

D'après Donnelly et Bunke, cette quantité est indépendante de t [Do,B]. De ceci nous pouvons en déduire le résultat suivant:

Proposition 5.1. *La fonction $\zeta^+(\lambda) - \zeta^-(\lambda)$ est constante.*

Ceci répond à une question posée par Gesztesy et Simon dans [G-S] et généralise la Proposition 2.9 de [B-M-S].

Preuve. En effet, selon Müller [M], on peut définir des déterminants relatifs $\Delta^\pm(z)$ à l'aide de la fonction

$$\zeta^\pm(s, z) = \int_0^\infty \text{Tr}(e^{-tD_1^\mp D_1^\pm} - e^{-tD_2^\mp D_2^\pm}) t^{s-1} e^{tz} \frac{dt}{\Gamma(s)}.$$

Cette fonction $s \mapsto \zeta^\pm(s, z)$ admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} . Et

$$\Delta^\pm(z) = e^{-\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} \zeta^\pm(s, z)}$$

est bien défini. Un des résultat de [Ca3] est que ces déterminants relatifs sont reliés à la fonction de décalage spectral. Pour presque tout $\mu > \lambda$, on a

$$\zeta^\pm(\mu) - \zeta^\pm(\lambda) = -\frac{1}{\pi} (\text{Arg } \Delta^\pm(\mu + i0+) - \text{Arg } \Delta^\pm(\lambda + i0+)).$$

Or justement les résultats de U. Bunke et H. Donnelly impliquent que la fonction $\Delta^+(z)/\Delta^-(z)$ vaut z^k où

$$k = \text{Tr}(\alpha_1 e^{-tD_1^- D_1^+} - \alpha_2 e^{-tD_2^- D_2^+}).$$

Donc la fonction $\zeta^+(\lambda) - \zeta^-(\lambda)$ vaut presque partout k . \square

Lorsque $t \rightarrow 0+$, on sait que

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \text{Tr}(\alpha_1 e^{-tD_1^2} - \alpha_2 e^{-tD_2^2}) = \int_{K_1} \omega_{D_1^+} - \int_{K_2} \omega_{D_2^+}.$$

Et lorsque 0 n'est pas dans le spectre essentiel de D_1 (donc aussi de D_2), alors les fonctions de décalage spectral ζ^\pm sont constantes dans un voisinage de 0 et y valent $\dim \text{Ker}_{L^2} D_1^\pm - \dim \text{Ker}_{L^2} D_2^\pm$. Le théorème de l'indice relatif est alors vrai. Par contre lorsque 0 est dans le spectre essentiel de D_1 , alors les états résonnants d'énergie nulle contribuent aussi à la limite lorsque $\lambda \rightarrow 0+$ de $\zeta^+(\lambda) - \zeta^-(\lambda)$; c'est à dire qu'ils contribuent dans la limite lorsque $t \rightarrow +\infty$ de $\text{Tr}(\alpha_1 e^{-tD_1^2} - \alpha_2 e^{-tD_2^2})$.

Revenons à notre exemple, sur la surface M_1 , les états résonnants de l'opérateur de Gauss–Bonnet forment un espace vectoriel de dimension 8 formé des formes différentielles parallèles. Ces états résonnants sont bornés et d'après nos calculs ils ne contribuent pas au saut en zéro de la fonction de décalage spectral. Par contre sur la surface M_2 , les états résonnants forment aussi un espace vectoriel de dimension 8, mais il y en a un seul de degré 0 correspondant aux fonctions constantes et un seul de degré 2 correspondant aux multiples constant de la forme d'aire. En degré 1, il y en a un espace de dimension 4 de degré 1, constituées de formes bornées et un de dimension 2 formés de formes décroissant comme $1/r$. Ces dernières contribuent au saut en zéro de la fonction de décalage spectral comme si elles étaient L^2 . On retrouve donc bien que $-2 = \zeta^+(0+) - \zeta^-(0-)$.

C'est pourquoi dans notre cadre on introduit un indice de scattering:

$$\text{ind}_{sc} D^+ = \text{ind}_{L^2} D^+ + \sum_v (h_v^+ - h_v^-).$$

où comme précédemment on a noté:

$$h_v = \dim \left\{ \phi \in \text{Ker } L, \phi(r, \theta) \simeq \frac{\varphi(\theta)}{r^{(n-2)/2+v}} \right\}.$$

Cette définition diffèrent quelque peu de celle donné par Bunke dans [B]. La définition de Bunke compterait uniquement les résonances. Cette quantité vérifie bien le théorème de l'indice relatif:

Proposition 5.2. *Si $D_1 : C_0^\infty(M_1, E_1) \rightarrow C_0^\infty(M_1, E_1)$ et $D_2 : C_0^\infty(M_2, E_2) \rightarrow C_0^\infty(M_2, E_2)$ sont deux opérateurs de type Dirac sur des variétés à bout coniques et qui vérifie les hypothèses de compatibilité géométrique (5.10/5.11). On suppose que ces opérateurs sont isométriques hors de compacts $K_i \subset M_i$, alors*

$$\text{ind}_{sc} D_1^+ - \text{ind}_{sc} D_2^+ = \int_{K_1} \omega_{D_1^+} - \int_{K_2} \omega_{D_2^+},$$

où on a noté $\omega_{D_i^+}$ est la forme caractéristique construite à l'aide du symbole principale de D_i^+ .

Preuve. Ceci provient de notre calcul du saut de la fonction ξ en zéro. On peut supposer que les compacts K_1 et K_2 sont à bord C^∞ . On note alors L_0 la réalisation de D_1^2 sur $M_1 \setminus K_1$ pour les conditions de Dirichlet sur ∂K_1 . L_0 est évidemment aussi la réalisation de D_2^2 sur $M_2 \setminus K_2$ pour les conditions de Dirichlet sur ∂K_2 . On a

$$L_0 = \begin{pmatrix} L_0^+ & 0 \\ 0 & L_0^- \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\xi(\lambda, D_1^\pm D_1^\mp, D_2^\pm D_2^\mp) = \xi(\lambda, D_1^\pm D_1^\mp, L_0^\mp) - \xi(\lambda, D_2^\pm D_2^\mp, L_0^\mp).$$

Or notre étude précédente montre que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \xi(\lambda, D_i^- D_i^+, L_0^+) - \xi(\lambda, D_i^+ D_i^-, L_0^-) = \text{ind}_{sc} D_i^+.$$

Ceci permet donc d'affirmer que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Tr } \alpha(e^{-tD_1^2} - e^{-tD_2^2}) = \text{ind}_{sc} D_1^+ - \text{ind}_{sc} D_2^+.$$

Or cette quantité est indépendante de t et en prenant sa limite en $t \rightarrow 0$, on en déduit le résultat. \square

5.3. Lien avec l'indice étendu

En ce sc-indice est obtenu en comparant l'opérateur de Dirac D super-symétrique à un opérateur qui n'est pas super-symétrique: le laplacien D_1^2 au dehors d'un compact pour les conditions de Dirichlet. Ceci peut sembler navrant, mais pour évaluer correctement l'allure de la fonction de décalage spectral en zéro, il faut comparer l'opérateur D ou D^2 à un opérateur sans résonances d'énergie nulle. Or ces résonances d'énergie nulle sont assez stables: elles persistent lorsque l'on perturbe l'opérateur et la topologie sur un compact. Ainsi dès que ces résonances d'énergie nulle existent, il est impossible de comparer l'opérateur D avec un opérateur de type Dirac super-symétrique qui lui serait isométrique au dehors d'un compact et qui n'aurait pas de résonance d'énergie nulle. Nous allons expliquer ceci dans un instant.

En fait, le sc-indice n'est pas l'indice d'un opérateur agissant entre deux espaces de Hilbert ad hoc, il n'est pas forcément un entier!

Dans [Ca1,Ca2], on montre que si on considère

$$W(E) = \{\sigma \in W_{loc}^{1,2}(E), D\sigma \in L^2 \text{ et } (r \log r)^{-1}\sigma \in L^2\}.$$

Alors l'opérateur $D^+ : W(E^+) \rightarrow L^2(E^-)$ est Fredholm et son indice est appelé indice étendu

$$\text{ind}_e D^+ = \sum_{0 \leq v \leq 1} h_v^+ + \dim \ker_{L^2} D^+ - \dim \ker_{L^2} D^- = \sum_{0 \leq v \leq 1} h_v^+ + \text{ind}_{L^2} D^+.$$

Nous avons montré dans ces papiers que cette quantité vérifiait le théorème de l'indice relatif.

Nous allons maintenant comparer cet indice étendu et l'indice de scattering.

Nous commençons par comparer cet indice étendu avec celui de l'opérateur D_0 sur le cône $[1, \infty[\times \Sigma$ pour des conditions de type Atiyah–Patodi–Singer en $r = 1$: On note $P_{>\alpha}(A^\pm)$ le projecteur spectral de A^\pm sur l'intervalle $]\alpha, \infty[$ et on définit de la même façon $P_{\leq\alpha}(A^\pm)$, $P_{<\alpha}(A^\pm)$. On considère en $r = 1$ les conditions au bord suivantes

$$P_{>n/2-1}(A^+) \sigma^+ = 0,$$

$$P_{\geq n/2}(A^-) \sigma^- = 0.$$

Ce sont bien des conditions qui font de D_0 un opérateur auto-adjoint super-symétrique que l'on note encore D_0 .

On peut facilement résoudre l'équation $D_0\sigma = 0$ en séparant les variables et en diagonalisant l'opérateur A . On obtient alors

$$\text{ind}_e D_0^+ = \dim \ker(A^+ - (n/2 - 1)\text{Id}).$$

Soit ρ une fonction C^∞ sur M qui est positive partout et qui vaut r sur le bout conique alors on peut considérer les opérateurs

$$D_s = D + \alpha s \frac{d\rho}{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & D^- + s \frac{d\rho}{\rho} \\ D^+ - s \frac{d\rho}{\rho} & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est encore un opérateur satisfaisant à nos hypothèses, on peut aussi considérer l'opérateur $D_{0,s} = D_0 + \alpha s \frac{d\rho}{\rho}$; il est isométrique à l'opérateur D_s sur un voisinage de l'infini. Le théorème de l'indice relatif nous apprend que la différence

$$\text{ind}_e D_s^+ - \text{ind}_e D_{0,s}^+$$

ne dépend pas de s . Or on peut calculer de même l'indice étendu de $D_{0,s}$:

$$\text{ind}_e D_{0,s} = \sum_{n/2-1+s \leq \mu \leq n/2-1} \dim \ker(A^+ - \mu \text{Id}) - \sum_{n/2-s < \mu < n/2} \dim \ker(A^- - \mu \text{Id}).$$

Et comme l'équation $D_s^\pm \sigma = 0$ se réduit à l'équation $D^\pm \psi = 0$ lorsqu'on a posé $\psi = \rho^{\pm s} \sigma$. On en déduit que

$$\text{ind}_e D_s^+ = \sum_{v \geq s} h_v^+ - \sum_{v > 1-s} h_v^-.$$

Comme la différence de ces deux quantités ne dépend pas de s , on obtient donc la formule

Proposition 5.3. *Si $v \geq 0$ alors*

$$h_v^+ + h_{1-v}^- = \dim \ker(A^+ - (n/2 - 1 + v)\text{Id}).$$

Cette formule nous permet donc de prédire des résonances d'énergie nulle et leur nombre lorsque $A^+ - (n/2 - 1)\text{Id}$ a des valeurs propres dans l'intervalle $[0, 1]$.

On aurait pu retrouver ce résultat à l'aide du théorème de l'indice relatif de Melrose (Théorème 6.5 de [M1]).

On a donc le lien suivant entre le sc-indice et l'indice étendu:

Corollaire 5.4.

$$\text{ind}_{sc} D^+ = \text{ind}_e D^+ - \sum_{0 \leq v \leq 1} v \dim \text{Ker}(A^+ - (n/2 - v)\text{Id}).$$

Dans nos travaux [Ca1,Ca2]), on a donné une preuve analytique du fait que l'indice étendu vérifiait le théorème de l'indice relatif. Cette formule en donne une explication spectrale.

5.4. Applications

Nous commençons par l’opérateur de Gauss-Bonnet. Nous avons déjà expliqué ce qui se passe sur le plan euclidien \mathbb{R}^2 ou sur deux copies de \mathbb{R}^2 recollées suivant un disque. On considère maintenant la plan \mathbb{R}^2 équipé d’une métrique g_α qui au dehors d’un compact est celle d’un cône d’ouverture α , on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{K_{g_\alpha} dA_{g_\alpha}}{2\pi} = 1 - \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Cette quantité tend vers $-\infty$ lorsque l’angle α tend vers $+\infty$. Sur (\mathbb{R}^2, g_α) , il n’y a pas de formes harmoniques L^2 . Et de même une fonction (ou une 2 forme) harmonique bornée est constante. On a donc $h_0^+ = 2$ et $h_v^+ = 0$ si $v > 0$. Au dehors d’un compact la métrique g_α est la métrique $dr^2 + r^2(d\theta)^2$ où $(d\theta)^2$ est la métrique d’un cercle de longueur α . On a donc

$$\text{Spec } A^+ = \frac{2\pi}{\alpha} \mathbb{Z} \text{ avec une multiplicité } 2.$$

La formule (5.3) nous dit donc que

$$h_{1-k\frac{2\pi}{\alpha}}^- = 2$$

et donc

$$\text{ind}_{sc} (d + \delta)^+ = -2 \sum_{0 \leq k < \alpha/(2\pi)} \left(1 - k\frac{2\pi}{\alpha} \right);$$

Cette quantité croit bien comme $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{K_{g_\alpha} dA_{g_\alpha}}{2\pi}$.

La dernière application concerne le théorème de Aharomonov-Casher: on étudie le laplacien avec champ magnétique sur \mathbb{R}^2 , tel que le champ magnétique soit à support compact. Où de façon équivalente on considère l’opérateur $\bar{\partial}$ agissant sur un fibré holomorphe en droite complexe sur \mathbb{C} qui est plat au dehors d’un compact. On a

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \Phi - i \frac{\partial}{\partial y} \Phi = e^\Phi \bar{\partial} e^{-\Phi}$$

et

$$D^* = -\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \Phi + i \frac{\partial}{\partial y} \Phi = e^{-\Phi} \bar{\partial}^* e^\Phi.$$

Avec $B = \Delta \Phi = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ le champ magnétique, c’est aussi la courbure du fibré en droite complexe. On note

$$F = \int_{\mathbb{R}^2} B \frac{dx dy}{2\pi}$$

le flux du champ magnétique. Quite à faire un changement de jauge convenable, on peut toujours supposer que

$$\Phi = -F \log r$$

au dehors d'un compact. On a donc $e^\Phi = r^{-F}$ au dehors d'un compact. Ainsi $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ vérifie l'équation $D\sigma = 0$ si et seulement si $e^{-\Phi}\sigma$ est une fonction holomorphe. Si de plus σ est L^2 alors $e^{-\Phi}\sigma$ doit être un polynôme en z . La condition L^2 implique que l'on doit avoir

$$\deg e^{-\Phi}\sigma < F - 1.$$

De même, $\sigma \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ est dans le noyau de D^* si et seulement si $e^\Phi\sigma$ est un polynôme en \bar{z} de degré strictement inférieur à $-F - 1$. Supposons que $F > 0$, et notons $]F[= \sup\{k \in \mathbb{N}, k < F\}$. On a donc

$$\text{ind}_{L^2} D =]F[.$$

Or les opérateurs D^*D et DD^* sont isométriques au dehors d'un compact. Et les calculs de [B-G-G-S-S] montrent que

$$\text{Tr}(e^{-tD^*D} - e^{-tDD^*}) = F.$$

Il y a donc toujours un écart entre cette trace et l'indice L^2 ; dans [B-G-G-S-S], les auteurs demandent d'où vient cette différence. Dans [Wi], l'auteur observe qu'une résonance d'énergie nulle contribue exactement à cette différence. Dans [An1], Anghel interprète cette différence comme l'invariant η de l'opérateur transverse à l'infini. Cependant il utilise l'invariance conforme de cet opérateur et transforme l'opérateur en un opérateur équivalent sur une surface à bout cylindrique, l'invariant η apparaît alors grâce à la formule de l'indice de Atiyah et al. [A-P-S]; ce résultat s'il fournit une interprétation élégante de cet écart n'est pas une interprétation spectrale.

Et notre travail donne cette interprétation spectrale: ici l'opérateur D^*D présente une résonance d'énergie nulle associée à l'état non borné $z \mapsto e^\Phi z^{]F[}$. Et on obtient ainsi que cette résonance contribue pour $F -]F[$ dans la formule de trace et on a

$$\text{ind}_{sc} D = F = \int_{\mathbb{R}^2} B \frac{dx dy}{2\pi}.$$

Evidement cette formule est valide dès que l'on considère des opérateurs de type Dirac D tels que D^-D^+ et D^+D^- sont isométriques au dehors d'un compact.

References

[An1] N. Anghel, The two-dimensional magnetic field problem revisited, J. Math. Phys. 31 (9) (1990) 2091–2093.
 [An2] N. Anghel, An abstract index theorem on non-compact Riemannian manifolds, Houston J. Math. 19 (2) (1993) 223–237.

- [A-P-S] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, Spectral asymmetry and Riemannian geometry I, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 77 (1975) 43–69.
- [BK] M.Sh Birman, M.G. Krein, On the theory of wave operators and scattering operators, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 144 (1962) 475–478 (traduction anglaise in *Soviet. Math. Dokl.* 3 (1962)).
- [B-Y] M.Sh Birman, D.R. Yafaev, The spectral shift function, the work of M.G. Krein and its further development, *St. Petersburg Math. J.* 4 (5) (1993) 833–870.
- [B-G-G-S-S] D. Bollé, F. Gesztesy, H. Grosse, W. Schweiger, B. Simon, Witten index, axial anomaly, and Krein’s spectral shift function in supersymmetric quantum mechanics, *J. Math. Phys.* 28 (7) (1987) 1512–1525.
- [B-M-S] N.V. Borisov, W. Müller, R. Schrader, Relative index theorems and supersymmetric scattering theory, *Comm. Math. Phys.* 114 (1988) 475–513.
- [B] U. Bunke, Relative index theory, *J. Funct. Anal.* 105 (1992) 63–76.
- [Ca1] G. Carron, Un théorème de l’indice relatif, *Pacific J. Math.* 198 (1) (2001) 81–107.
- [Ca2] G. Carron, Théorèmes de l’indice sur les variétés non-compactes, *J. Reine Angew. Math.* 541 (2001) 81–115.
- [Ca3] G. Carron, Déterminant relatif et la fonction Ξ , *Amer. J. Math.* 124 (2002) 307–352.
- [C] J. Cheeger, Spectral geometry of singular Riemannian spaces, *J. Differential Geom.* 18 (1983) 575–657.
- [Ch] T. Christiansen, Weyl asymptotics for the laplacian on asymptotically euclidean spaces, *Amer. J. Math.* 121 (1999) 1–22.
- [Do] H. Donnelly, Essential spectrum and heat kernel, *J. Funct. Anal.* 75 (1987) 362–381.
- [F] D. Fischer-Colbrie, On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds, *Invent. Math.* 82 (1985) 121–132.
- [G-S] F. Gesztesy, B. Simon, Topological invariance of the Witten index, *J. Funct. Anal.* 79 (1) (1988) 91–102.
- [Gi] P. Gilkey, The spectral geometry of a riemannian manifold, *J. Differential Geom.* 10 (1975) 601–618.
- [G-L] M. Gromov, H.B. Lawson Jr., Positive scalar curvature and the Dirac operator on a complete Riemannian manifold, *Publ. Math. I.H.E.S.* 58 (1983) 83–196.
- [Gu] L. Guillopé, Une formule de trace pour l’opérateur de Schrödinger dans \mathbb{R}^n , Thèse, Université de Grenoble, 1981.
- [H-V] A. Hassell, A. Vasy, The resolvent for Laplace-type operators on asymptotically conic spaces, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 51 (2001) 1299–1346.
- [J1] A. Jensen, Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions, $m \geq 5$, *Duke Math. J.* 47 (1980) 57–80.
- [J2] A. Jensen, Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions, $m = 4$, *J. Math. Anal. Appl.* 101 (1984) 397–422.
- [J-S] M.S. Joshi, A. Sá Barreto, Recovering asymptotics of short range potentials, *Comm. Math. Phys.* 193 (1998) 197–208.
- [K-V] M. Kontsevich, S. Vishik, Geometry of determinants of elliptic operators, *Functional Analysis on the Eve of the 21st Century*, Vol. 1, New Brunswick, NJ, 1993, pp. 173–197; *Progr. Math.* 131 Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.
- [K1] M.G. Krein, On the trace formula in perturbation theory, *Math. Sb.* 75 (1953) 597–626.
- [K2] M.G. Krein, On perturbation determinants and the trace formula for unitary and selfadjoint operators, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 144 (1962) 268–271 (traduction anglaise in *Soviet. Math. Dokl.* 3 (1962)).
- [Le] N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover, New York, 1974.
- [M1] R. Melrose, The Atiyah–Patodi–Singer index theorem, in: A.K. Peters (Ed.), *Research Notes in Mathematics*, Vol. 4, Boston, Wellesley, MA, 1993, p. 2.
- [M2] R. Melrose, Spectral and scattering theory for the Laplacian on asymptotically Euclidean spaces, in: M. Ikawa (Ed.), *Spectral and Scattering Theory*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 161, Marcel Dekker, NY, 1994, pp. 85–130.

- [M-Z] R. Melrose, M. Zworski, Scattering metrics and the geodesic flow at infinity, *Invent. Math.* 124 (1996) 389–436.
- [M] W. Müller, Relative zeta functions, relative determinants and scattering theory, *Comm. Math. Phys.* 192 (2) (1998) 309–347.
- [Mu] M. Murata, Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger type equation, *J. Funct. Anal.* 49 (1982) 10–56.
- [P] L.B. Parnowski, Scattering matrix for manifolds with conical ends, *J. London Math. Soc.* 61 (2) (2000) 555–567.
- [T] M. Taylor, *Partial Differential Operators II, Qualitative Studies of Linear Equations*, Springer, Berlin, 1996.
- [W] X.P. Wang, Asymptotics expansions in time of wave functions for perturbation of metrics, prépublication 2003.
- [Wa] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Wi] A. Wipf, The $U(1)$ -anomaly, phase shifts and the η -invariant, in: *Nonperturbative Methods in Quantum Field Theory, Proceedings of the Workshop Conference Sifok/Hung, 1986*, 1987, pp. 131–142.