UNE SUITE EXACTE EN L^2–COHOMOLOGIE

Résumé. — Nous établissons ici une suite exacte reliant la L^2-cohomologie (réduite) et la cohomologie à support compact pour des variétés Riemannienne non compacte complète qui vérifie une inégalité de Sobolev et une condition intégrale sur la courbure. Ceci nous permet de donner une formule de Gauss-Bonnet relative.

Abstract. — We exhibit here an exact sequence relating the reduced L^2-cohomology and the cohomology with compact support for non compact complete Riemannian Manifold which satisfy a Sobolev inequality and an integral bound on the curvature. This enables us to give a relative Gauss- Bonnet formula.

0. Introduction

Le but de cet article est d'étudier certains liens entre la cohomologie L^2 (réduite) et la cohomologie à support compact.

Rappelons que si (M^n, g) est une variété riemannienne complète son k-ième espace de L^2-cohomologie (réduite) peut être défini comme l'espace, $\mathcal{H}^k(M)$, des k-formes différentielles $\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ qui sont fermées et cofermées ($d\alpha = 0,\ \delta\alpha = 0$) ou de façon équivalente, qui sont harmoniques pour le Laplacien de Hodge-deRham $\Delta^k = \delta d + d\delta$, (cf 1.a de cet article ou [Do]). Lorsque la variété M est compacte (sans bord), le théorème de Hodge-de Rham dit que ces espaces sont de dimension finie et qu'ils sont isomorphes aux espaces de cohomologie réelle de M ; et nous avons la formule de Gauss-Bonnet :

$$\chi(M) = \int_M \Omega = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M),$$

où Ω est $n-$forme d'Euler ; par exemple en dimension 2, nous avons $\Omega = KdA/2\pi$ K étant la courbure de Gauss de (M, g) et dA la forme d'aire.

Lorsque (M, g) n'est pas compacte, ces espaces ne sont pas, en général, de dimension finie. Cependant nous avions, dans [C], obtenu le résultat suivant

0.1. THÉORÈME. — *Si (M^n, g) est une variété riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M) \left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et dont le tenseur de courbure vérifie

$$\int_M |R|^{\frac{p}{2}}(x)dx < \infty,$$

alors les espaces de L^2-cohomologie de (M^n, g) sont de dimension finie.

Remarquons alors que la $n-$forme d'Euler vérifie la majoration

$$|\Omega|(x) \leq c(n)|R|^{\frac{n}{2}}(x).$$

A la suite de ce théorème et de la formule de Gauss-Bonnet, il apparaît une question naturelle :

lorsque (M^n, g) satisfait aux hypothèses du théorème (pour $p = n$), comment peut-on relier la caractéristique d'Euler L^2 de (M^n, g), définie par $\chi_{L^2}(M) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M)$, et l'intégrale de la $n-$forme d'Euler sur M.

Nous avons rappelé que, dans le cas d'une variété compacte, les espaces de L^2-cohomologie sont isomorphes aux groupes de cohomologie réelle de M, dans le cadre du théorème (0.1), il serait intéressant de relier la L^2- cohomologie réduite de (M, g) à la cohomologie à support compact de M.

Le but de cet article est de répondre, du moins en partie, à ces questions. L'idée est de généraliser les arguments avec lesquels nous avions calculé explicitement la L^2-cohomologie (réduite) des sous-variétés minimales d'un espace euclidien dont la seconde forme fondamentale II vérifie $\int_M |II|^n(x)dx < \infty$ ([C]).

Notre principal résultat (3.1) est une suite exacte reliant, la cohomologie à support compact d'un domaine borné D de M, la L^2-cohomologie (réduite) de M et de $M - D$.

0.2. Théorème. — *Soit (M^n, g) une variété Riemannienne complète, qui pour un $p > 4$, vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

$$\textit{et telle que son tenseur de courbure vérifie } \int_M |R(x)|^{\frac{p}{2}}dx < \infty,$$

alors si D est un ouvert borné (à bord régulier) de M, nous avons la suite exacte

$$.. \longrightarrow H^k(D, \partial D) \xrightarrow{\mathrm{i}} \mathcal{H}^k(M) \xrightarrow{\mathrm{j}^*} H^k_{(2)}(M - D) \xrightarrow{\mathrm{b}} H^{k+1}(D, \partial D) \longrightarrow ..$$

La L^2-cohomologie (réduite) de $M - D$, $H^*_{(2)}(M - D)$, est définie et étudiée dans la deuxième partie ; on y verra notamment comment les résultats obtenus pour la L^2-cohomologie des variétés complètes s'y transposent.

Remarques. —

i) Cette suite exacte est l'analogue le suite exacte de l'homomorphisme cobord en cohomologie classique ([Go]).

ii) Par exemple, une variété riemannienne complète de dimension $n > 4$ à courbure nulle au dehors d'un compact et dont le volume des boules géodésiques a un comportement uniformement équivalent à la fonction $(r \mapsto r^n)$ vérifie nos hypothèses pour $p = n$; en effet pour ces variétés notre hypothèse sur la courbure est bien vérifiée, de plus selon T. Coulhon et L. Saloff-Coste, nous savons que pour les variétés à courbure de Ricci positive ou nulle sur un voisinage de l'infini, ce comportement uniforme du volume des boules géodésiques implique cette inégalité de Sobolev (en fait il y a même une équivalence, cf. [C-S]).

iii) Et suivant la proposition (2.8), une variété connexe, de volume infini, de dimension $n > 4$ isométriquement immergée dans un espace euclidien dont la seconde forme fondamentale de l'immersion est $n-$intégrable vérifie nos hypothèses pour $p = n$.

iv) En fait, lorsqu'on considère la L^2 cohomologie non-réduite, cette suite est toujours exacte. Cependant, la L^2 cohomologie réduite et non-réduite coincident uniquement lorsque 0 n'est pas dans le spectre essentiel du Laplacien de Hodge-de Rham ; or pour les exemples donnés donnés ci-dessus ce n'est pas le cas.

iv) L'hypothèse sur la dimension de l'inégalité de Sobolev $p > 4$ est celle qui permet de savoir que certaines fonctions harmoniques décroissent assez vite à l'infini.

Dans une première partie, on établira l'existence d' opérateurs de Green et on montrera quelques propriétés de ces opérateurs, propriétés qui seront fondamentales pour la preuve de l'exactitude de cette suite. Cette suite sera définie dans la troisième partie.

Certains liens entre L^2-cohomologie, cohomologie classsique, et classe d'homotopie sont déjà connu :

M. Atiyah, V. Patodi et I. Singer avaient montré, dans [A-P-S], que la L^2-cohomologie (réduite) d'une variété Riemannienne à bouts cylindriques était isomorphe à l'image de la cohomologie à support compact dans la cohomologie absolue.

Lorsque la variété est un revêtement galoisien infini d'une variété compacte,

$$\Gamma \longrightarrow M \longrightarrow \overline{M},$$

les espaces de L^2-cohomologie (réduite) ne sont pas de dimension finie (à moins d'être nuls), mais ils peuvent être considérés comme des Γ-modules pour lesquel ont peut définir une dimension de Von-Neuman, $b_k(\Gamma, M) = \dim_\Gamma \mathcal{H}^k(M)$; dans [At], M. Atiyah montrait l'égalité

$$\int_{\overline{M}} \Omega = \chi(\overline{M}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i(\Gamma, M) \ ;$$

J. Dodziuk ([Do]) a ensuite montré que ces nombres de Betti étaient de nouveaux invariants d'homotopie de $(\Gamma \triangleleft \pi_1(\overline{M}), M)$. Dans [C-G], J. Cheeger et M. Gromov avaient établi des suites exactes de Mayer-Vietoris pour la L^2-cohomologie (réduite) d'un revêtement infini d'une variété de volume fini et de géométrie bornée, ceci leur permettaient de généraliser les résultats de M. Atiyah et J. Dodziuk à ces variétés. Enfin récement, J. Lott et W. Lück ont calculé ces nombres de Betti L^2 pour des variétés de dimension trois, ceci grâce notamment à une suite exacte de Mayer-Vietoris ([L-L]).

Dans [E-R], K. Elworthy et S. Rosenberg avaient étudié les effets de la nullité de la L^2-cohomologie de variétés à courbure essentiellement positive sur les groupes de cohomologie et d'homotopie .

En fait cette suite est exacte au premier rang sans hypothése sur la dimension de l'inégalité de Sobolev et nous pouvons en déduire le résultat suivant sur la topologie des variétés que nous considérons (cf 3.3)

0.3. THÉORÈME . — *Si (M^n, g) une variété Riemannienne complète connexe, qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

alors

$$0 \longrightarrow H_c^1(M) \longrightarrow \mathcal{H}^1(M).$$

Si de plus, la plus petite valeur propre négative du tenseur de Ricci, ric_-, *vérifie pour un $\epsilon > 0$*

$$\mathrm{ric}_- \in L^{\frac{p}{2}} \cap L^{\frac{p}{2}+\epsilon}$$

alors on a le majoration

$$\dim H_c^1(M) = \dim H^{(n-1)}(M) \leq C(p)\mu_p(M)^{-1}\int_M |\mathrm{ric}_-(x)|^{\frac{p}{2}}dx.$$

et dans ce cas M^n a un nombre fini de bouts b et on a la majoration

$$b \leq 1 + C(p)\mu_p(M)^{-1}\int_M |\mathrm{ric}_-(x)|^{\frac{p}{2}}dx.$$

De cette suite exacte, nous pouvons en déduire les formules suivantes pour la caractéristique d'Euler L^2 :

0.4. THÉORÈME . — *Soit (M^n, g) une variété Riemannienne complète qui vérifie les mêmes hypothèses qu'au théorème (0.2) alors si D est un ouvert borné de M on a*

$$\chi_{L^2}(M, g) = \chi(D, \partial D) + \chi_{L^2}(M - D, g).$$

Si de plus la dimension n est paire alors

$$\chi_{L^2}(M, g) = \int_D \Omega + \int_{\partial D} P(II) + \chi_{L^2}(M - D),$$

où $P(II)$ est un polynôme en la seconde forme fondamentale de $\partial D \subset M$. En particulier si $p = n$ alors nous avons la formule

$$\chi_{L^2}(M, g) = \int_M \Omega + \lim_{D\to M}\left(\int_{\partial D} P(II) + \chi_{L^2}(M - D)\right).$$

Cette formule a de nombreuses conséquences, d'abord elle montre (cf. 3.5)

0.5. COROLLAIRE. — *La caractéristique d'Euler L^2 est un invariant d'homotopie à support compact.*

En fait, selon J. Lott ([L]), c'est un fait général, les espaces de L^2 cohomologie réduite ou non sont des invariants d'homotopies Lipschitz. De plus, nous pouvons en déduire une formule de Gauss-Bonnet relative (cf. 3.7)

0.6. Corollaire. — *Soient* (M_1^n, g_1) *et* (M_2^n, g_2) *deux variétés Riemanniennes complètes qui vérifient les mêmes hypothèses qu'au théorème (0.2) alors s'il existe* D_1 *(resp.* D_2*) un domaine compact de* M_1 *(resp.* M_2*) tel que* $(M - D_1, g_1)$ *soit isométrique à* $(M_2 - D_2, g_2)$ *alors*

$$\chi_{L^2}(M_1, g_1) - \chi_{L^2}(M_2, g_2) = \int_{D_1} \Omega^{g_1} - \int_{D_2} \Omega^{g_2}.$$

M. Gromov et B. Lawson avaient démontré un tel résultat pour des opérateurs de Dirac sur des variétés non-compactes, complètes dont le potentiel courbure, qui apparait dans la formule de Bochner-Weitzenbock, est uniformément strictement positif sur un voisinage de l'infini ([G-L]); en fait comme l'a montré H. Donnely, le fait que le bas du spectre essentiel de l'opérateur de Dirac soit strictement positif suffit pour avoir une formule de l'indice L^2-relatif ([D]). Cependant les variétés que nous considèrons ont, généralement, un bas du spectre essentiel nul. De ce résultat, nous pouvons en déduire la formule de Gauss-Bonnet L^2 suivante qui généralise les travaux de N. Borisov, W. Muller, R. Schrader et J. Brüning sur les variétés asymptotiquement euclidiennes ([B-M-S], [B]) :

0.7. théorème. — *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne de dimension* $n \geq 5$ *dont le tenseur de courbure* R *vérifie*

$$\int_M |R(x)|^{\frac{n}{2}} dx < \infty,$$

et s'il existe un compact D *de* M *tel que chaque composante connexe de* $M - D$ *soient quasi-isométrique au complémentaire d'une boule euclidienne de* $\mathbf{R}^n$ *alors*

$$\chi_{L^2}(M, g) = \int_M \Omega^g.$$

Remarque. — Nous pouvons adpater ces résultats à d'autres opérateurs elliptiques que l'opérateur $d + \delta$ agissant sur les formes différentielles ; de même nous pouvons aussi considérer d'autres inégalités de Sobolev (comme des inégalités de Sobolev-Orlicz). Dans un prochain article, nous montrerons comment certains de ces résultats se généralisent aux opérateurs de Dirac pour des inégalités de Sobolev "très" générales.

Notations et rappel. — Soit E un fibré vectoriel riemannien sur (M, g), on note $< \, , \, >$ (resp. $| \, |$) le produit scalaire (resp. la norme) sur les fibres de E ou d'un fibré naturel associé. Soit D la connexion de E compatible avec ce produit scalaire, on a donc

$$X. \langle \sigma, \tau \rangle = \langle D_X \sigma, \tau \rangle + \langle \sigma, D_X \tau \rangle \,,$$

pour tout champ de vecteur X de M et toutes sections lisses σ, τ de E. A la connexion compatible, on associe un opérateur $\bar{\Delta}$, le Laplacien de Bochner de E (appelé aussi le Laplacien brut de E), qui est défini à partir de la forme quadratique $\sigma \mapsto \int_M |D\sigma|^2$, plus exactement, nous avons l'identité suivante

$$\int_M \langle D\sigma, D\sigma \rangle = \int_M \left\langle \bar{\Delta}\sigma, \sigma \right\rangle, \ \forall \sigma \in C_0^\infty(M).$$

On a $\left(\bar{\Delta}\sigma\right)(x) = -\sum_{i=1}^{n} D_{e_i} D_{e_i}\sigma$, où $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ est un repère orthonormé de T_xM. On définit alors $H_0^1(E)$ qui le complèté de l'espace $C_0^\infty(E)$ muni de la norme préhilbertienne $\|\sigma\|^2_{H_0^1(E)} = \int_M |D\sigma|^2$.

Nous avons le résultat suivant qui est une conséquence des travaux de N. Varopoulos ([Va]) et de l'inégalité de Kato et de ses conséquences (cf. théorème 20 de l'appendice de [B] écrit par G. Besson).

THÉORÈME. — *Si (M^n, g) est une variété riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

alors pour tout $s > 1$, l'opérateur $\bar{\Delta}^{-1/2}$ agit de $L^s(E)$ dans $L^{\frac{ps}{p-s}}(E)$, avec une norme d'opérateur qui vérifie

$$\|\bar{\Delta}^{-1/2}\|_{L^s \to L^{\frac{ps}{p-s}}} \leq C(s,p)\mu_p^{-1/2}.$$

1. Existence d'opérateurs de Green.

Le but de cette partie est de montrer que sous les hypothèses du résultat de finitude (0.1) nous pouvons construire des opérateurs de Green. Pour cela nous commençons par rappeler ce qu'est la L^2-cohomologie.

1.a. La L^2-cohomologie. —

1.a.1. Définition. — Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète de dimension n : l'opérateur de différentiation exterieure agit de

$$d\ :\ C_0^\infty(\Lambda^k T^*M) \longrightarrow C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)$$

et vérifie $d \circ d = 0$; on définit alors les espaces

i) $Z^kL^2(M)$, qui est le noyau de l'opérateur d agissant, de façon non-bornée, sur $L^2(\Lambda^kT^*M)$, ou de façon équivalente

$$Z^kL^2(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^kT^*M),\ d\alpha = 0\},$$

où on entend que $d\alpha$ est une distribution (ou un courant).

ii) $B^kL^2(M)$, qui est l'adhérence dans $L^2(\Lambda^kT^*M)$ de $d\left[C_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)\right]$.

Comme $d \circ d = 0$, nous avons $B^kL^2(M) \subset Z^kL^2(M)$, le k^{ieme} espace de L^2-cohomologie (réduite) est défini par

$$H^k_{(2)}(M) = Z^kL^2(M)/B^kL^2(M).$$

Ainsi deux k-formes L^2, (faiblement) fermées α et β sont L^2-cohomologues si et seulement si il existe une suite de $(k-1)$-formes lisses à support compacts $(\gamma_l)_{l=0}^{\infty}$ telles que $\alpha - \beta = L^2 - \lim_{l\to\infty} d\gamma_l$.

Remarque. — Le k^{ieme} espace de L^2-cohomologie (non-réduite) est défini comme le quotient de $Z^kL^2(M)$ par l'image par d de l'espace des $(k-1)$-formes L^2 dont la différentielle, au sens des distributions, est aussi dans L^2. Sauf mention explicite du contraire, lorsque nous parlerons d'espace de L^2-cohomologie ce sera des espaces de L^2-cohomologie réduite.

Nous pouvons exprimer la L^2-cohomologie en termes de formes harmoniques

1.a.2. L^2-cohomologie et formes harmoniques. — On note δ l'opérateur différentiel adjoint à d, i.e.

$$\int_M d\alpha \wedge *\beta = \int_M \alpha \wedge *\delta\beta \ , \ \forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*M), \ \beta \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M),$$

où $*$ est l'opérateur de Hodge agissant de Λ^kT^*M dans $\Lambda^{n-k}T^*M$; par le théorème de Stokes, on a donc $\delta = (-1)^{nk+n+1} * d*$.

Si $\mathcal{H}^k(M)$ est l'espace des k-formes harmoniques L^2

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^kT^*M), \ d\alpha = \delta\alpha = 0\},$$

alors l'espace $L^2(\Lambda^kT^*M)$ admet la décomposition orthogonale de Hodge-deRham-Kodaira suivante

$$L^2(\Lambda^kT^*M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus B^kL^2(M) \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)},$$

où l'adhérence s'entend pour la topologie de $L^2(\Lambda^kT^*M)$. Nous avons aussi

$$Z^kL^2(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus B^kL^2(M),$$

ce qui signifie que nous avons l'isomorphisme

$$\mathcal{H}^k(M) \simeq H^k_{(2)}(M).$$

1.a.3.Le problème de l'existence d'opérateur de Green. — La décomposition de Kodaira implique que pour toute forme $\alpha \in L^2(\Lambda^kT^*M)$, il existe une unique forme harmonique $\mathcal{H}(\alpha)$ et deux courants S et T tel que $d\,S$ et $\delta\,T$ soient dans L^2 telles que

$$\alpha = \mathcal{H}(\alpha) + d\,S + \delta\,S \ ;$$

de plus par régularité ellipitique de l'opérateur $d + \delta$, nous savons que si de plus α est lisse, alors S et T sont des formes différentielles lisses. Le problème de l'existence d'opérateur de Green est de trouver un opérateur G qui agisse de L^2 dans un “bon” espace fonctionnel telle que l'on puisse écrire

$$\alpha - \mathcal{H}(\alpha) = (d+\delta)G\alpha, \quad \text{pour tout } \alpha \in L^2(\Lambda^kT^*M).$$

En fait, comme (M,g) est supposée complète, si $\Delta^k = d\delta + \delta d$ est le Laplacien de Hodge-deRham agissant sur les formes différentielles alors nous avons

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^kT^*M), \ \Delta^k\alpha = 0\},$$

de plus ce Laplacien admet la décomposition de Bochner-Weitzenbock suivante

$$\Delta^k = \bar{\Delta} + \mathcal{R}^k,$$

où $\mathcal{R}^k$ est un endomorphisme symétrique de $\Lambda^k T^*M$ que l'on peut définir à l'aide de l'opérateur de courbure de (M^n, g) (cf [G-M]) ; par exemple $\mathcal{R}^1$ est l'endomorphisme associé au tenseur de Ricci, et nous avons toujours la majoration $|\mathcal{R}^k|(x) \leq c(n)|R|(x)$ où R est le tenseur de courbure de (M, g).

1.b. Résultat préliminaire. — Nous commençons par prouver la proposition suivante qui améliore le résultat que nous avions obtenu dans [C].

1.1.PROPOSITION. — *Si (M^n, g) est une variété Riemannienne complète qui pour un $p > 4$ vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),_p\,,$$

et dont le tenseur de courbure R vérifie

$$\int_M |R(x)|^{\frac{p}{2}} dx < \infty,$$

alors nous avons

$$\mathcal{H}^k(M) \subset \mathcal{D}(\sqrt{\bar{\Delta}})$$

et $\sqrt{\bar{\Delta}}$ réalisent un isomorphisme de $\mathcal{H}^k(M)$ sur $\mathrm{Ker}_{L^2}\left(Id_{L^2} + \bar{\Delta}^{-1/2}\,\mathcal{R}^k\bar{\Delta}^{-1/2}\right)$.

Preuve. — Il nous suffit pour complèter la preuve de la proposition 1.4 de [C] de montrer que $\sqrt{\bar{\Delta}}$ est une application surjective de $\mathcal{H}^k(M)$ sur $\mathrm{Ker}_{L^2}\left(Id_{L^2} + \bar{\Delta}^{-1/2}\,\mathcal{R}^k\bar{\Delta}^{-1/2}\right)$. Ceci repose sur le lemme suivant

1.2. LEMME. — *Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente : si $u \in H_0^1(\Lambda^k T^*M)$ vérifie $\left(\bar{\Delta} + \mathbf{R}^k\right)u \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)$ alors $u \in L^2(\Lambda^k T^*M)$.*

Ce lemme nous permet de conclure car si $\alpha \in \mathrm{Ker}_{L^2}\left(Id_{L^2} + \bar{\Delta}^{-1/2}\,\mathcal{R}^k\bar{\Delta}^{-1/2}\right)$, alors $u = \bar{\Delta}^{-1/2}\alpha$ est une forme de $H_0^1(\Lambda^k T^*M)$ qui vérifie $\left(\bar{\Delta} + \mathbf{R}^k\right)u = 0$ donc u est une forme harmonique L^2 et $\sqrt{\bar{\Delta}}u = \alpha$. ■

preuve du lemme 1.2 .— Soit $u \in H_0^1(\Lambda^k T^*M)$ vérifiant $\Delta^k u \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)$, remarquons que par régularité elliptique u est lisse et il suffit donc de montrer que u est de carré intégrable sur un voisinage de l'infini de M.

Choisissons alors ρ une fonction lisse dont le support est inclus dans $M - B_R$ et telle que $\rho = 1$ sur $M - B_{R+1}$, où on note B_R la boule géodésique de centre x_0 fixe et de rayon R ; et R est un réel assez grand que l'on déterminera plus tard.

Nous allons montrer que $\rho u \in L^2(\Lambda^k T^*M)$. La forme ρu vérifie

$$\Delta^k(\rho\, u) = (\Delta\rho)u - 2D_{d\rho}u + \rho\Delta^k u,$$

si nous choisissons R assez grand pour que $\mathrm{support}\,\rho \cap \mathrm{support}\,\Delta^k u = \emptyset$ alors la forme $v = \rho u$ vérifie $v \in H_0^1(\Lambda^k T^*(M - B_R))$ et $\left(\bar{\Delta} + \mathbf{R}^k\right)v = \varphi \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M - B_R))$. On a donc

$$\bar{\Delta}_R^{-1/2}\varphi = \bar{\Delta}_R^{-1/2}\bar{\Delta}v + \bar{\Delta}_R^{-1/2}\,\mathbf{R}^k v,$$

où on note $\bar{\Delta}_R$ l'unique extension autoadjointe du Laplacien brut $\left(\bar{\Delta}, C_0^\infty\left(\Lambda^k T^*(M-B_R)\right)\right)$. On a $\sqrt{\bar{\Delta}}v \in L^2$ puisque v est dans H_0^1. De plus v vérifie

$$\bar{\Delta}_R^{-1/2}\bar{\Delta}v = \sqrt{\bar{\Delta}}v \ ;$$

en effet $\bar{\Delta}_R^{-1/2}\bar{\Delta}v$ est bien défini, car $\bar{\Delta}v = \varphi - \mathbf{R}^k v$, or v est dans H_0^1 donc dans $v \in L^{\frac{2p}{p-2}}$ grâce à l'inégalité de Sobolev, et grâce à l'inégalité de Hölder $\mathbf{R}^k v$ est dans $L^{\frac{2p}{p+2}}$. Mais $\bar{\Delta}_R^{-1/2}$ agit de $L^{\frac{2p}{p+2}}$ dans L^2. Donc $\omega = \bar{\Delta}_R^{-1/2}\bar{\Delta}v - \bar{\Delta}_R^{1/2}v$ est une forme L^2 ; ainsi la forme $h = \bar{\Delta}_R^{-1/2}\omega$ est dans $H_0^1(\Lambda^k T^*(M-B_R))$ et on vérifie facilement que $\bar{\Delta}h = 0$; ainsi

$$\int < h, \bar{\Delta}f >= \int < Dh, Df >= 0,\ \forall f \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M-B_R)),$$

or par définition de $H_0^1(\Lambda^k T^*(M-B_R))$, on peut trouver une suite $(h_l)_{l\in\mathbf{N}}$ d'élements de $C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M-B_R))$ telle que

$$Dh_l \xrightarrow{L^2} Dh,$$

ainsi on obtient $Dh = 0$, mais h est dans H_0^1 sa trace sur $\partial(M-B_R)$ est nulle donc $h = 0$, la nullité de ω provient alors du fait que $\bar{\Delta}_R^{-1/2}$ est une isométrie de L^2 sur H_0^1.

Nous pouvons maintenant montrer que $v \in L^2(\Lambda^k T^*(M-B_R))$; la forme f définie par $f = \sqrt{\bar{\Delta}_R}\, v$ est dans L^2 et de plus elle vérifie

$$\left(Id_{L^2} + \bar{\Delta}_R^{-1/2}\mathcal{R}^k\bar{\Delta}_R^{-1/2}\right) f = \bar{\Delta}_R^{-1/2}\varphi.$$

Nous allons montrer que $f \in L^{\frac{2p}{p+2}}$, ceci impliquera que $v = \bar{\Delta}_R^{-1/2}f$ est dans L^2 car $\bar{\Delta}_R^{-1/2}$ agit de $L^{\frac{2p}{p+2}}$ dans L^2. L'inégalité de Sobolev implique que pour $s \in]1,p[$, l'opérateur $\bar{\Delta}_R^{-1/2}$ agit de L^s dans $L^{\frac{ps}{p-s}}$, avec une norme d'opérateur qui vérifie

$$\|\bar{\Delta}_R^{-1/2}\|_{L^s \to L^{\frac{ps}{p-s}}} \le C(s,p)\mu_p^{-1/2},$$

ainsi grâce à l'inégalité de Hölder, on vérifie facilement que si $s > \frac{p}{p-1}$ alors l'opérateur $A = \bar{\Delta}_R^{-1/2}\mathcal{R}^k\bar{\Delta}_R^{-1/2}$ agit de L^s dans lui-même avec une norme d'opérateur qui vérifie

$$\|\bar{\Delta}_R^{-1/2}\mathcal{R}^k\bar{\Delta}_R^{-1/2}\|_{L^s\to L^s} \le C'(s,p)\frac{1}{\mu_p}\|R\|_{L^{\frac{p}{2}}(M-B_R)} \ ;$$

Em particulier si $p > 4$, alors on peut choisir R assez grand pour que cet opérateur agisse de $L^2 \cap L^{\frac{2p}{p+2}}$ dans lui-même avec une norme d'opérateur qui est inférieur à $\frac{1}{2}$. Ainsi l'opérateur $Id + A$ est un opérateur inversible de $L^2 \cap L^{\frac{2p}{p+2}}$. Or, comme φ est à support compact et que $p > 4$, nous avons $\bar{\Delta}_R^{-1/2}\varphi \in L^2 \cap L^{\frac{2p}{p+2}}$. Mais

$$f = (Id+A)^{-1}_{L^2\to L^2}\,\bar{\Delta}_R^{-1/2}\varphi = (Id+A)^{-1}_{L^2\cap L^{\frac{2p}{p+2}}\to L^2\cap L^{\frac{2p}{p+2}}}\,\bar{\Delta}_R^{-1/2}\varphi,$$

ce qui montre que f est dans $L^{\frac{2p}{p+2}}$. ■

Nous pouvons maintenant obtenir l'existence d'opérateur de Green.

1.c. Opérateur de Green. —

1.3. THÉORÈME. — *Si (M^n, g) est une variété Riemannienne complète qui pour un $p > 4$ vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M) \left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx, \ \forall u \in C_0^\infty(M)_{,p} \,,$$

et dont le tenseur de courbure R vérifie

$$\int_M |R(x)|^{\frac{p}{2}} dx < \infty,$$

alors il existe un opérateur de Green

$$G = G_- \oplus G_+ \ : \ L^2(\Lambda^k T^* M) \longrightarrow H_0^1(\Lambda^{k-1} T^* M) \oplus H_0^1(\Lambda^{k+1} T^* M),$$

telle que pour tout $\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M)$ alors

$$\alpha = \mathcal{H}(\alpha) + (d + \delta)\, G\alpha = \mathcal{H}(\alpha) + d\, G_- \alpha + \delta\, G_+ \alpha.$$

Preuve. — Nous avons la décomposition orthogonale suivante

$$L^2(\Lambda^k T^* M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \overline{\Delta^k C_0^\infty(\Lambda^k T^* M)},$$

ainsi pour tout $\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M)$ nous avons l'existence d'une suite $(\psi_l)_{l \in \mathbf{N}} \in C_0^\infty(\Lambda^k T^* M)$ telle que

$$\alpha - \mathcal{H}(\alpha) = L^2 - \lim_{l \to \infty} \Delta^k \psi_l.$$

Donc en posant $\varphi_l = (d + \delta)\psi_l \in C_0^\infty \left(\Lambda^{k-1} T^* M \oplus \Lambda^{k+1} T^* M \right)$, nous avons

$$\alpha - \mathcal{H}(\alpha) = L^2 - \lim_{l \to \infty} (d + \delta)\varphi_l.$$

Or si $\varphi = \varphi_- + \varphi_+ \in C_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M \oplus \Lambda^{k+1} T^* M)$, alors

$$\|(d + \delta)\varphi\|_{L^2}^2 = \|(d + \delta)\varphi_-\|_{L^2}^2 + \|(d + \delta)\varphi_+\|_{L^2}^2.$$

Nous allons montrer qu'à toute forme $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda^k T^* M)$, nous pouvons associer une k-forme $\Gamma\varphi$ qui vérifie

$$\|(d + \delta)\varphi\|_{L^2} = \|(d + \delta)\Gamma\varphi\|_{L^2} \geq \varepsilon \|D(\Gamma\varphi)\|_{L^2}, \tag{1.4}$$

où ε est indépendant de φ. Ce qui montrera que l'application définie par

$$\begin{aligned} (d + \delta) \left(C_0^\infty(\Lambda^k T^* M) \right) &\longrightarrow H_0^1(\Lambda^k T^* M) \\ (d + \delta)\varphi &\mapsto \Gamma\varphi \end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une application

$$G_k \ : \ \overline{(d + \delta)\, C_0^\infty(\Lambda^k T^* M)}^{L^2} \longrightarrow H_0^1(\Lambda^k T^* M).$$

L'opérateur de Green est alors $G = G_{k-1} + G_{k+1}$. Pour construire Γ, on remarque que si $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)$, alors

$$\|(d+\delta)\varphi\|_{L^2}^2 =< (\bar{\Delta} + \mathbf{R}^k)\varphi, \varphi >= \left\langle \left(Id_{L^2} + \bar{\Delta}^{-1/2}\,\mathcal{R}^k \bar{\Delta}^{-1/2} \right) \sqrt{\bar{\Delta}}\varphi, \sqrt{\bar{\Delta}}\varphi \right\rangle .$$

Or nous avions démontré dans [C], que l'opérateur $A = \bar{\Delta}^{-1/2}\,\mathcal{R}^k \bar{\Delta}^{-1/2}$ était un opérateur compact autoadjoint de L^2, de plus son spectre est contenu dans $[-1, +\infty[$, car $Id + A$ est un opérateur positif. La théorie spectrale des opérateurs compacts autoadjoints nous montre qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall u \in L^2,\ u \perp \mathrm{Ker}_{L^2}\left(Id_{L^2} + A\right),$$
$$\langle (Id_{L^2} + A)\, u, u \rangle \geq \varepsilon \|u\|_{L^2}^2 .$$

De plus la proposition 1.1, nous dit que $\mathrm{Ker}_{L^2}\left(Id_{L^2} + A\right) = \sqrt{\bar{\Delta}}\mathcal{H}^k(M)$. Soit donc $\{h_1, .., h_b\}$ une base de $\mathcal{H}^k(M)$ qui est orthonormale pour le produit scalaire de $H_0^1(\Lambda^k T^*M)$, (i.e. $\{\sqrt{\bar{\Delta}}h_1, .., \sqrt{\bar{\Delta}}h_b\}$ est une base orthonormée de $\mathrm{Ker}_{L^2}\left(Id_{L^2} + A\right)$) alors on pose

$$\Gamma\varphi = \varphi - \sum_{i=1}^{b} < \sqrt{\bar{\Delta}}h_i, \sqrt{\bar{\Delta}}\varphi > h_i .$$

Ainsi $\Gamma\varphi$ est dans $H_0^1(\Lambda^k T^*M)$ et $\sqrt{\bar{\Delta}}\Gamma\varphi$ est L^2-orthogonale à $\mathrm{Ker}_{L^2}\left(Id_{L^2} + A\right)$ donc $\Gamma\varphi$ vérifie bien (1.4). ∎

1.d. Propriétés des opérateurs de Green construits. — La construction précédente nous montre que l'opérateur de Green satisfait aux identités suivantes

1.5. PROPRIÉTÉS. —

$$(d+\delta)G = Id_{L^2} - \mathcal{H}^k$$
$$G(d+\delta) = Id_{H_0^1} - \mathcal{H}^{k,1}$$

où $\mathcal{H}^k$ est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}^k(M)$ et où $\mathcal{H}^{k,1}$ est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}^k(M)$ pour le produit scalaire de l'espace H_0^1.

Et nous avons les propriétés suivantes

1.6. PROPRIÉTÉS COMPLÉMENTAIRES. —

i) Si $\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ est lisse alors $G\alpha$ est aussi lisse.

ii) G est un opérateur à noyau lisse au dehors de la diagonale.

iii) si $\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ alors $dG_+(\alpha) = 0$ et de même $\delta G_-(\alpha) = 0$.

iv) Si $\alpha \in Z^k L^2(M)$ alors

$$\alpha - \mathcal{H}^k(\alpha) = dG_-(\alpha),$$

c'est à dire que la composante sur $\Lambda^{k+1}T^*M$ de $G\alpha$ est cofermée, en fait harmonique selon iii).

Et enfin le lemme 1.1, nous montre la

1.7. PROPOSITION . — *Si* $\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ *est telle que* $\left(\bar\Delta + \mathbf{R}^k\right) G\alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)$ *alors* $G\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)$.

2. L^2–cohomologie des variétés à bord.

Le but de cette partie est de présenter la L^2-cohomologie de variétés à bord, puis de montrer quel espace de formes harmoniques est isomorphe à ces espaces de L^2-cohomologie, et d'en déduire des résultats de finitude similaire à ceux que nous avions précedement obtenu pour les variétés complètes. Dans tout ce paragraphe (M^n, g) est une variété riemannienne non-compacte, à bord compact, qui est métriquement complète, i.e. dont la variété double $M\#M$ porte une métrique riemannienne complète isométrique à g sur le complémentaire d'un voisinage de ∂M.

L'identification entre les espaces de L^2-cohomologie et des espaces de formes harmoniques est due dans le cas des variétés compactes à bord à G. Duff, D.C. Spencer [D-F], et à P.E. Connor [Co], nous montrons ici que les arguments de G. Duff, D.C. Spencer se généralisent aisement à notre cadre ; ces résultats sont bien connus et ils sont, par exemple, assez explicites dans les articles de M. Lesch et J. Brüning ([B-L]) et de J. Lott ([L]).

2.a. La L^2-cohomologie. — On note

- $C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)$ l'espace des k–formes différentielles lisses qui sont à support compacte dans l'intérieur de M ;
- $C_c^\infty(\Lambda^k T^*M)$ l'espace des k–formes différentielles lisses qui sont à support bornés.

L'opérateur de différentiation exterieure agit de

$$d \ : \ C_c^\infty(\Lambda^k T^*M) \longrightarrow C_c^\infty(\Lambda^{k+1} T^*M)$$

et vérifie $d \circ d = 0$; on définit alors les espaces

i) $Z^k L^2(M)$, qui est le noyau de l'opérateur d agissant, de façon non-bornée, sur $L^2(\Lambda^k T^*M)$, ou de façon équivalente

$$Z^k L^2(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M), \ d\alpha = 0\},$$

où on entend que $d\alpha$ est une distribution (ou un courant).

ii) $B^k L^2(M)$, qui est l'adhérence dans $L^2(\Lambda^k T^*M)$ de $d\left[C_c^\infty(\Lambda^{k-1} T^*M)\right]$.

Comme $d \circ d = 0$, nous avons $B^k L^2(M) \subset Z^k L^2(M)$, le k^{ieme} espace de L^2-cohomologie est défini par

$$H^k_{(2)}(M) = Z^k L^2(M)/B^k L^2(M).$$

2.1. Remarque. — Cette définition montre que les espaces de L^2-cohomologie ne dépendent que de la classe de quasi-isométrie de la métrique ; i.e. si $g, \ g'$ sont deux métriques sur M telle que $\frac{1}{C}g \leq g' \leq Cg$, alors

$$H^k_{(2)}(M,g) \simeq H^k_{(2)}(M,g').$$

En particulier, si M est compacte ces espaces ne dépendent pas de la métrique, en fait ils sont isomorphes aux groupes de cohomologie réelle (absolu) de M. Et selon [D-S] (voir aussi [Co]), les espaces de L^2-cohomologie sont isomorphes à un sous-espace des formes harmoniques

$$H^k_{(2)}(M) \simeq \{h \in C^\infty(\Lambda^k T^*M),\ dh = \delta h = 0 \text{ et } \mathrm{int}_\nu h = 0\},$$

où $\mathrm{int}_\nu h$ est la partie normale de h c'est à dire le produit intérieur de h par la normale intérieur ν de $\partial M \subset M$. Nous allons voir que dans notre cas, ce résultat reste vrai.

2.b. L^2-cohomologie et formes harmoniques. — L'espace $L^2(\Lambda^k T^*M)$ admet aussi la décomposition orthogonale

$$L^2(\Lambda^k T^*M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)} \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)},$$

où l'adhérence s'entend pour la topologie de $L^2(\Lambda^k T^*M)$ et où on a noté

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M),\ d\alpha = \delta\alpha = 0\}.$$

Nous avons aussi

$$Z^k L^2(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)},$$

comme $\overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)} \subset B^k L^2(M)$, toute forme fermée L^2 est L^2-cohomologue à une forme harmonique, mais cette forme n'est forcement pas unique ; on a cependant

$$H^k_{(2)}(M) = \mathcal{H}^k(M) / \left(\mathcal{H}^k(M) \cap \overline{dC_c^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}\right) \simeq \mathcal{H}^k(M) \cap \left(dC_c^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)\right)^\perp.$$

Nous avons la

2.2. Proposition. —

$$H^k_{(2)}(M) \simeq \{h \in L^2(\Lambda^k T^*M),\ dh = \delta h = 0 \text{ et } \mathrm{int}_\nu h = 0\}.$$

Preuve. — Il nous suffit donc de montrer que

$$\mathcal{H}^k(M) \cap \left(dC_c^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)\right)^\perp = \{h \in L^2(\Lambda^k T^*M),\ dh = \delta h = 0 \text{ et } \mathrm{int}_\nu h = 0\}.$$

Ceci est une simple conséquence de la formule d'intégration par partie : si h est une forme harmonique, i.e. $dh = \delta h = 0$ et si $\varphi \in C_c^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$ alors on a

$$\langle h, d\varphi\rangle = \langle \delta h, \varphi\rangle - \int_{\partial M} (\mathrm{int}_\nu h, \varphi) = -\int_{\partial M} (\mathrm{int}_\nu h, \varphi),$$

car on peut trouver une $(k-1)$-forme lisse à support borné telle que $\varphi = \mathrm{int}_\nu h$ sur ∂M. ■

Cette preuve est simple, mais pour pouvoir retrouver nos résultats de finitude, nous allons introduire la variété double.

2.c. L^2-cohomologie et variété double. — Nous modifions la métrique sur un voisinage borné de ∂M de façon à ce qu'un voisinage de ∂M devienne isométrique au produit riemannien $[0,\varepsilon[\times\partial M$, où ∂M est muni de la métrique induite par g. On note encore g la métrique obtenu. Alors la variété double

$$X = M\#M$$

est naturellement muni d'une métrique riemannienne lisse complète qui coincide avec g sur chaque copie de M, nous la notons encore g. Et grâce à la remarque 2.1, nous savons que les espaces de L^2- cohomologie ne sont pas modifiés.

La symétrie σ par rapport à ∂M est une isométrie de (X,g) qui vérifie $\sigma\circ\sigma = Id_X$, donc σ induit une isométrie

$$\sigma^* : L^2(\Lambda^k T^*X) \longrightarrow L^2(\Lambda^k T^*X).$$

Cette application vérifie $\sigma^*\circ\sigma^* = Id$ et $d\circ\sigma^* = \sigma^*\circ d$. On peut donc décomposer $L^2(\Lambda^k T^*X)$ en espace de formes paires et impaires par rapport à σ

$$L^2(\Lambda^k T^*X) = L^2_+(\Lambda^k T^*X) \oplus L^2_-(\Lambda^k T^*X),$$

où on note $L^2_{\substack{+\\-}}(\Lambda^k T^*X) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*X),\, \sigma^*\alpha = {}^+_-\alpha\}$. Il est évident que $L^2_+(\Lambda^k T^*X)$ est naturellement isométrique à $L^2(\Lambda^k T^*M)$, nous noterons ι cette isométrie. On peut aussi définir la L^2-cohomologie σ-invariante de X et on a la décomposition orthogonale

$$L^2(\Lambda^k T^*X)_+ = \mathcal{H}^k_+(X) \oplus \overline{dC^\infty_{0+}(\Lambda^{k-1}T^*X)} \oplus \overline{\delta C^\infty_{0+}(\Lambda^{k+1}T^*X)},$$

où $\mathcal{H}^k_+(X)$ est l' espace des $k-$formes harmoniques L^2 qui sont σ-invariante. On a alors le

2.3. Théorème. — *L'isométrie naturelle ι entre $L^2_+(\Lambda^k T^*X)$ et $L^2(\Lambda^k T^*M)$ fournit une isométrie entre la L^2-cohomologie σ-invariante de X et la L^2-cohomologie de M.*

Preuve. — Notons $\mathcal{H}^k_n(M)$ l'espace des k-formes harmoniques L^2 dont la composante normale est nulle, montrons d'abord que

$$\iota(\mathcal{H}^k_+(X)) = \mathcal{H}^k_n(M) \ :$$

si $h \in \mathcal{H}^k_+(X)$ alors évidement $\iota h = 2j^*h$ est une forme harmonique (où $j : M \longrightarrow X$ est une copie de M dans X). Mais comme $h = \sigma^* h$, on a bien sur $\mathrm{int}_\nu h = 0$, i.e. $\iota h \in \mathcal{H}^k_n(M)$.

Puis soit $h \in H^k_n(M)$, pour voir que $\iota^{-1}h \in \mathcal{H}^k_+(M)$, il suffit de montrer que $\iota^{-1}h$ est harmonique. Or si $\varphi \in C^\infty_0(\Lambda^{k-1}T^*X)$ alors

$$\begin{aligned}\left\langle \iota^{-1}h, d\varphi\right\rangle = &\int_{M_+} <\delta h,\varphi> + \int_{\partial M_+} <\varphi, \mathrm{int}_{\nu_+}h> \\ &+ \int_{M_-} <\delta h,\varphi> + \int_{\partial M_-} <\varphi, \mathrm{int}_{\nu_-}h> = 0,\end{aligned}$$

où on a noté $M_{\substack{+\\-}}$ les deux copies de M dans X. Et si $\psi \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*X)$ alors

$$\begin{aligned}\left\langle \iota^{-1}h, \delta\psi \right\rangle &= \int_{M_+} < dh, \psi > + \int_{\partial M_+} < h, \mathrm{int}_{\nu_+}\psi > \\ &+ \int_{M_-} < \delta h, \psi > + \int_{\partial M_-} < h, \mathrm{int}_{\nu_-}\psi > \\ &= \int_{\partial M_+} < h, \mathrm{int}_{(\nu_+ + \nu_-)}\psi >= 0,\end{aligned}$$

car les normales intérieures à M_+ et M_- sont opposées. Ceci montre que h est harmonique.

Puis montrons que

$$\iota(\overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}) = \overline{dC_c^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}\ :$$

on a évidement $\iota(dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)) \subset dC_c^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$ et donc par continuité

$$\iota(\overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}) \subset \overline{dC_c^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}.$$

Soit maintenant $\alpha \in \overline{dC_c^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)} \cap \left(\iota(dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M))\right)^\perp$ il est facile de vérifier que α est harmonique. Donc cette forme est lisse ; choisissons alors une $(k-1)$-forme ϕ , σ-invariante, lisse à support compact sur X vérifiant $\phi = \mathrm{int}_\nu\alpha$ le long de ∂M on a alors

$$0 = \frac{1}{2}\int_M < \alpha, \iota(d\phi) >= \int_M < \alpha, d\phi >= \int_{\partial M} < \phi, \mathrm{int}_\nu\alpha >= \int_{\partial M} |\mathrm{int}_\nu\alpha|^2,$$

donc on a $\mathrm{int}_\nu\alpha = 0$ ce qui signifie que $\alpha \in \mathcal{H}_n^k(M)$ mais cet espace est orthogonal à $dC_c^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$ donc $\alpha = 0$ et on a montré ce qu'on voulait. Comme ι est une isométrie, on conclut que ι respecte la décomposition de Kodaira

(2.4)

$$\begin{array}{ccccccc} L^2(\Lambda^kT^*X)_+ & = & \mathcal{H}_+^k(X) & \oplus & \overline{dC_{0+}^\infty(\Lambda^{k-1}T^*X)} & \oplus & \overline{\delta C_{0+}^\infty(\Lambda^{k+1}T^*X)} \\ \iota\big\downarrow & & \iota\big\downarrow & & \iota\big\downarrow & & \iota\big\downarrow \\ L^2(\Lambda^kT^*M) & = & \mathcal{H}_n^k(M) & \oplus & \overline{dC_c^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)} & \oplus & \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)} \end{array}$$

■

2.d. Finitude de la L^2-cohomologie pour les variétés à bord. Nous allons montrer qu'une inégalité de Sobolev sur (M, g) implique une inégalité de Sobolev sur le double $X = M\#M$; on pourra alors énoncer des résultats de finitude grâce au résultat du paragraphe précédent.

2.5.Proposition . — *Si (M^n, g) est une variété riemannienne connexe, de volume infini, à bord compact, métriquement complète qui vérifie l'inégalité de*

Sobolev

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \le \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u\in C_0^\infty(M),$$

alors $X = M\#M$ vérifie la même inégalité de Sobolev

$$\mu_p(X)\left(\int_X |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \le \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u\in C_0^\infty(X).$$

Preuve. — La propriété de vérifier une inégalité de Sobolev est invariante par quasi-isométrie, on peut donc supposer qu'un voisinage de ∂M dans M est isométrique à $[0,\varepsilon[\times\partial M$. Ainsi la métrique obtenue sur X est lisse. Soit donc $\tilde K\subset K$ deux voisinages compacts (à bord régulier) de ∂M dans X et soit θ une fonction lisse à support dans K et valant 1 sur $\tilde K$ et telle que $0\le\theta\le 1$. Soit $u\in C_0^\infty(X)$, on a

$$u = (1-\theta)u+\theta u = (1-\theta)u+\theta\left(u-\frac{\int_K u}{\operatorname{vol} K}\right)+\theta\left(\frac{\int_K u}{\operatorname{vol} K}\right).$$

Or comme K est à bord régulier, nous avons l'inégalité de Sobolev

$$\left\|v-\left(\frac{\int_K v}{\operatorname{vol} K}\right)\right\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}(K)} \le S_K\|dv\|_{L^2}, \forall v\in C^\infty(K).$$

donc

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}} &\le \left\|u-\left(\frac{\int_K u}{\operatorname{vol} K}\right)\right\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}(K)} + \left|\frac{\int_K u}{(\operatorname{vol} K)^{1/2+1/p}}\right| + \|(1-\theta)u\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}}\\ &\le S_K\|du\|_{L^2(K)} + \left|\frac{\int_K u}{(\operatorname{vol} K)^{1/2+1/p}}\right| + \|(1-\theta)u\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}(M-\tilde K)}.\end{aligned}$$

Or nous pouvons appliquer l'inégalité de Sobolev à $(1-\theta)u$ pour obtenir

$$\|(1-\theta)u\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}(M-\tilde K)} \le (\mu_p(M))^{(-1/2)}\left(\|du\|_{L^2(M-\tilde K)}+\|d\theta\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2(K)}\right).$$

On obtient donc

$$\|u\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}} \le C(\mu_p(M),K)\left(\|du\|_{L^2(X)}+\|u\|_{L^2(K)}+|\int_K u|\right)\ ;$$

L'inégalité de Poincaré nous donne ensuite la majoration

$$\|u\|_{L^2(K)} \le \left(\lambda_1^N(K)^{(-1/2)}\right)\|du\|_{L^2(K)} + \frac{1}{(\operatorname{vol} K)^{1/2}}|\int_K u|,$$

où $\lambda_1^N(K)$ est la première valeur propre non-nulle de Laplacien sur K pour le problème de Neumann. Ainsi on obtient

$$\|u\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}} \le C'\left(\|du\|_{L^2(X)}+|\int_K u|\right). \tag{2.6}$$

Or si nous montrons que X est non-parabolique, nous aurons, selon le critère établi par Ancona ([A]), que pour tout ouvert borné U de X il existe une constante C telle que

$$|\int_U v| \leq C \, \|dv\|_{L^2(X)}, \; \forall v \in C_0^\infty(X),$$

ceci nous permettra de conclure.

Mais selon A. Grigor'yan ([G]), pour que (X, g) soit non-parabolique, il suffit de trouver un domaine borné Ω de X telle que sa capacité soit non-nulle. Rappellons que

$$\mathrm{cap}(\Omega) = \inf\{\|du\|_{L^2}^2, \; u \in C_0^\infty(X), \, u = 1 \text{ sur } \Omega\} \;;$$

choisissons alors Ω telle que $K \subset \Omega$ et $\mathrm{vol}\,\Omega > (2C' \; \mathrm{vol}\,K)^{\frac{2p}{p-2}}$ alors en appliquant l'inégalité (2.6) on obtient

$$(\mathrm{vol}\,\Omega)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \leq C' \left((\mathrm{cap}\,\Omega)^{1/2} + \mathrm{vol}\,K \right),$$

ce qui implique, par notre choix, de Ω que $(\mathrm{cap}\,\Omega)^{1/2} > \mathrm{vol}\,K > 0$. ■

Remarquons que la preuve de cette proposition , nous permet d'énoncer les deux propositions suivantes :

2.7. Proposition. — *Si (M^n, g) est une variété Riemannienne complète connexe, de volume infini et si K est un compact de M tel que l'on ait l'inégalité de Sobolev*

$$\left(\int_{M-K} |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \mathrm{C^{te}} \int_{M-K} |du|^2(x)dx, \; \forall u \in C_0^\infty(M-K),$$

alors (M^n, g) vérifie la même inégalité de Sobolev

$$\mu_n(M) \left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \mathrm{C^{te}} \int_M |du|^2(x)dx, \; \forall u \in C_0^\infty(M).$$

2.8. Corollaire. — *Si (M^n, g) est une variété connexe, de volume infini, de dimension $n > 2$ isométriquement immergée dans un espace euclidien $\mathbf{R}^N$ telle que le vecteur courbure moyenne k de l'immersion satisfait à*

$$\int_M |k|^n(x)dx < \infty,$$

alors (M^n, g) vérifie l'inégalité de Sobolev

$$\mu_n(M) \left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |du|^2(x)dx, \; \forall u \in C_0^\infty(M).$$

preuve du corollaire.— Ceci repose sur l'inégalité de Sobolev obtenue par Hoffman-Spruck [H-S]

$$c_n \left(\int_M |u|^{\frac{n}{n-1}}(x)dx \right)^{1-\frac{1}{n}} \leq \int_M |du| + |k||u|, \; \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Si $n > 2$ et si on applique cette inégalité à $u = v^{2\frac{n-1}{n-2}}$, en appliquant l'inégalité de Cauchy -Schwarz, on obtient l'inégalité suivante

$$\tilde{c}_n \left(\int_M |v|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |dv|^2(x) + |k|^2|v|^2(x)dx,\ \forall v \in C_0^\infty(M),$$

où $\tilde{c}_n = c_n^2 \frac{n-2}{4(n-1)}$. Le corollaire se déduit de la proposition 2.7 en choisissant K compact de M telle que

$$\int_{M-K} |k|^n(x)dx \leq \left(\frac{1}{2\tilde{c}_n}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

■

Notons qu'il serait intéressant de connaitre une constante de Sobolev explicite pour ces variétés. Maintenant, nous savons que si les espaces de L^2-cohomologie de la variété double $M\#M$ sont de dimension finie alors ceux de M sont aussi de dimension finie, ceci nous permet d'énoncer le

2.9. Théorème. — *Si (M^n, g) est une variété Riemannienne, à bord compact, métriquement complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M) \left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et telle que son tenseur de courbure vérifie

$$\int_M |R(x)|^{\frac{p}{2}} dx < \infty,$$

alors les espaces de L^2-cohomologie de (M^n, g) sont de dimension finie.

2.e. Opérateur de Green pour les variétés à bord. — L'isométrie ι et le diagramme 2.4. nous permettent d'adapter le théorème 1.3 au cas des variétés à bord

2.10. Théorème. — *Soit (M^n, g) est une variété Riemannienne à bord compact, métriquement complète, dont un voisinage du bord est isométrique au produit riemannien $[0, \varepsilon[\times\partial M$. Si pour un $p > 4$, (M, g) vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M) \left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et si son tenseur de courbure vérifie

$$\int_M |R(x)|^{\frac{p}{2}} dx < \infty,$$

alors il existe un opérateur de Green

$$G = G_- \oplus G_+ \,:\, L^2(\Lambda^k T^*M) \longrightarrow L^{\frac{2p}{p-2}}(\Lambda^{k-1}T^*M) \oplus L^{\frac{2p}{p-2}}(\Lambda^{k+1}T^*M),$$

telle que pour tout $\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ alors

$$\alpha = \mathcal{H}(\alpha) + (d+\delta)\, G\alpha = \mathcal{H}(\alpha) + d\, G_-\alpha + \delta\, G_+\alpha.$$

De plus l'opérateur de Green vérifie les propriétés suivantes

i) si $\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ alors $dG_+(\alpha) = 0$ et de même $\delta G_-(\alpha) = 0$.

ii) Si $\alpha \in Z^k L^2(M)$ alors

$$\alpha - \mathcal{H}^k(\alpha) = dG_-(\alpha),$$

c'est à dire que la composante sur $\Lambda^{k+1}T^*M$ de $G\alpha$ est cofermée, en fait harmonique selon i).

iii) Si $\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)$ est telle que $\left(\bar{\Delta} + \mathbf{R}^k\right) G\alpha \in C_c^\infty(\Lambda^k T^*M)$ alors $G\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)$.

Remarque. — En toute rigueur, nous n'avons montré ce théorème que dans le cas où toutes les composantes connexes de M sont non-compactes ; en fait ce théorème reste encore vrai si certaines composantes connexes sont compactes, en effet, selon [D-S], sur ces composantes connexes, il existe des opérateurs de Green satisfaisant au théorème.

3. Suite exacte en L^2-cohomologie pour l'homomorphisme cobord

Le but de cette partie est de systématiser la méthode avec laquelle nous avions, dans [C], calculé la L^2-cohomologie (réduite) des sous-variétés minimales d'un espace euclidien dont la seconde forme fondamentale II vérifie $\int_M |II|^n(x)dx < \infty$. Le théorème suivant est une conséquence (presque) directe des résultats démontrés dans les deux parties précédentes.

3.1. Théorème. — *Soit (M^n, g) une variété Riemannienne complète, qui pour un $p > 4$ vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M) \left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et telle que son tenseur de courbure vérifie

$$\int_M |R(x)|^{\frac{p}{2}} dx < \infty,$$

alors si D est un ouvert borné (à bord régulier) de M, nous avons la suite exacte

$$.. \longrightarrow H^k(D, \partial D) \xrightarrow{\mathrm{i}} H^k_{(2)}(M) \xrightarrow{\mathrm{j}^*} H^k_{(2)}(M - D) \xrightarrow{\mathrm{b}} H^{k+1}(D, \partial D) \longrightarrow ..$$

Preuve. — Rappelons que d'après le lemme d'excision forte, la cohomologie relative de $(D, \partial D)$ est isomorphe à la cohomologie à support compact de l'intérieur de D ([Go]), par la suite nous identifierons ces deux notions. Nous pouvons supposer qu'un voisinage borné de ∂M dans M est isométrique à $[0, \varepsilon[\times \partial M$. Commençons d'abord par définir les homomorphismes i, j*, b : i est l'application naturelle qui à une forme fermée lisse à support compact dans D associe sa classe de L^2-cohomologie, si $[\alpha] \in H^k(D, \partial D)$ alors

$$\mathrm{i}[\alpha] = \alpha \text{ modulo } \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}.$$

Puis j^* est l'homomorphisme de L^2-cohomologie induit par l'application

$$\mathrm{j} : M - D \longrightarrow M.$$

L'homorphisme cobord L^2 est plus "compliqué" à définir : soit $\alpha \in Z^kL^2(M - D) \cap C_c^\infty(\Lambda^k T^*(M-D)$, il existe alors une k-forme lisse sur M , $\bar{\alpha}$, telle que $\bar{\alpha} = \alpha$ sur $M - D$ et telle que $d\bar{\alpha} = 0$ sur un voisinage de $M - D$. Alors $d\bar{\alpha}$ est une forme fermé à support compact dans D et la classe de $d\bar{\alpha}$ dans $H^{k+1}(D, \partial D) \simeq H_c^{k+1}(D)$ ne dépend que de la classe de L^2 cohomologie de α. Ensuite si $\beta \in Z^kL^2(M - D)$, alors on définit $\mathrm{b}[\beta] = [d\bar{\alpha}]$ où α est n'importe quel représentant lisse de la classe de L^2-cohomologie de β.

On a évidement les relations

$$\mathrm{j}^* \circ \mathrm{i} = 0,\ \mathrm{b} \circ \mathrm{j}^* = 0 \text{ et } \mathrm{i} \circ \mathrm{b} = 0\ ;$$

et on a donc les inclusions

$$\mathrm{Im\ i} \subset \mathrm{Ker\ j}^*,\ \mathrm{Im\ j}^* \subset \mathrm{Ker\ b} \text{ et } \mathrm{Im\ b} \subset \mathrm{Ker\ i}.$$

Il nous reste donc à montrer les inclusions inverses.

Commençons donc par montrer que Ker $\mathrm{j}^* \subset$ Im i, soit $h \in \mathcal{H}^k(M)$ telle que $j^*h = 0$ en L^2-cohomologie, alors selon le théorème (2.10) il existe une forme $\beta = G^{(M-D)}h \in L^{\frac{2p}{p-2}}(\Lambda^{k-1}T^*(M-D))$ telle que $h = d\beta$ sur $M - D$, de plus β vérifie $\delta d\beta = 0$ sur $M - D$ et $\delta\beta = 0$, ce qui signifie que $\Delta^{(k-1)}\beta = 0$ et donc suivant (2.10. iii), $\beta \in L^2$; alors soit $\tilde{D}$ un ouvert borné qui est un rétract de D telle que $\bar{D} \subset \tilde{D}$, choisissons une fonction lisse à support compact ρ telle que support $\rho \in M - \bar{D}$ et telle que $\rho = 1$ sur un voisinage de $M - \tilde{D}$, alors la forme $h - d(\rho\beta)$ est L^2-cohomologue à h, puisque $\rho\beta$ est L^2 ; et cette forme est lisse fermé à support compact dans $\tilde{D}$. mais comme $\tilde{D}$ est un rétract de D, il existe une $(k-1)$-forme γ lisse à support compact dans $\tilde{D}$ telle que $h - d(\rho\beta) - d\gamma$ soit lisse à support compact dans D, la classe de L^2-cohomologie de $h - d(\rho\beta) - d\gamma$ est bien h, i.e. $[h] \in$ Im i.

Montrons maintenant Ker b $\subset$ Im j^* : soit $h \in \mathcal{H}_n^k(M)$ telle que $\mathrm{b}[h] = 0$ en cohomologie à support compact de D alors il existe une forme $\bar{h}$ prolongeant h et φ une k-forme lisse à support compact dans D telle que $d\bar{h} = d\varphi$, ceci signifie que la forme différentielle $\bar{h} - \varphi$ est fermé sur M, c'est de plus une forme L^2 qui vaut h sur $M - D$, ainsi $h = \mathrm{j}^*(\bar{h} - \varphi) \in$ Im j^*.

Remarquons que l'on a toujours Ker b $=$ Im j^*, ceci sans aucune hypothèse sur M, ceci provient de la suite exacte associée à l'homorphisme cobord ordinaire.

Et enfin montrons que Ker i $\subset$ Im b : si α est une k-forme fermée lisse à support compact dans D qui est nulle en L^2 -cohomologie alors selon (1.3) il existe une $(k-1)$-forme $\beta \in H_0^1(\Lambda^{k-1}T^*M)$ telle que $\alpha = d\beta$ de plus $\delta\beta = 0$, mais comme α

est à support compact, nous avons selon $\Delta^{(k-1)}\beta \in C_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$ et donc selon (1.7) β est de carré intégrable. Mais sur $M-D$, β est fermé, donc b $\mathrm{j}^*[\beta]=[\alpha]$. ■

3.b. Applications de cette suite exacte. — Cette suite exacte relie la topologie (plus exactement la cohomologie) d'une partie compacte, D, de (M^n,g) et la L^2-cohomologie (réduite) de M et de $M-D$. En fait, nous pouvons prendre les limites inductives

$$\lim_{D\to M} H^k(D) = H_c^k(M),$$

qui est le k^{ieme}-groupe de cohomologie à support compact de M. Et par les inclusions

$$M-D \overset{\mathrm{j}_{D,D'}}{\longrightarrow} M-D', \text{ si } D\subset D',$$

nous pouvons définir

$$\mathrm{j}^*_{D,D'} \;:\; H^k_{(2)}(M-D) \longrightarrow H^k_{(2)}(M-D'),$$

et la limite inductive

$$H^k_{(2)}(\infty) = \lim_{D\to M} H^k_{(2)}(M-D).$$

Alors nous avons la

3.2. Proposition. — *Soit (M^n,g) une variété Riemannienne complète qui vérifie les mêmes hypothèses que précedement, alors nous avons la suite exacte*

$$.. \longrightarrow H_c^k(M) \overset{\mathrm{i}}{\longrightarrow} H^k_{(2)}(M) \overset{\mathrm{j}^*}{\longrightarrow} H^k_{(2)}(\infty) \overset{\mathrm{b}}{\longrightarrow} H_c^{k+1}(M) \longrightarrow ..$$

En fait cette suite est exacte au premier rang sans hypothèse sur la dimension (p) de l'inégalité de Sobolev et nous avons

3.3. Théorème. — *Si (M^n,g) une variété Riemannienne complète connexe, qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

alors

$$0 \longrightarrow H_c^1(M) \longrightarrow H^1_{(2)}(M).$$

Si de plus, la plus petite valeur propre du tenseur de Ricci, ric_- *vérifie pour un* $\epsilon>0$

$$\mathrm{ric}_- \in L^{\frac{p}{2}} \cap L^{\frac{p}{2}+\epsilon}$$

alors on a le majoration

$$\dim H_c^1(M) = \dim H^{(n-1)}(M) \leq C(p)\mu_p(M)^{-1}\int_M |\mathrm{ric}_-(x)|^{\frac{p}{2}}dx.$$

et dans ce cas M^n a un nombre fini de bouts b et on a la majoration

$$b \leq 1 + C(p)\mu_p(M)^{-1}\int_M |\mathrm{ric}_-(x)|^{\frac{p}{2}}dx.$$

Preuve. — Soit D un domaine compact de M telle que les composantes connexes de $M-D$ soient toutes non-compactes. Alors la cohomologie à support compact de D s'injecte dans la cohomologie L^2 car si α est une 1-forme fermée à support compact dans D qui est nulle en cohomologie L^2 alors il existe une suite de fonctions $u_l \in C_0^\infty(M)$ telle que $\lim_{l\to\infty} \|\alpha - du_l\|_{L^2} = 0$, l'inégalité de Sobolev

$$\mu_p \left(\int_M |u|^{\frac{2p}{p-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{p}} \leq \int_M |du|^2(x)dx, \ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

implique que la suite u_l est de Cauchy dans $L^{\frac{2p}{p-2}}$ et donc converge vers une fonction u, mais cette fonction u doit vérifier $du = \alpha$. Comme α est à support compact, u est localement constante sur le complémentaire de D donc nulle puisque $u \in L^{\frac{2p}{p-2}}$. Et donc α est cohomologue à 0 pour la cohomologie à support compacte.

Il nous faut maintenant montrer l'affirmation sur les bouts de M^n. Nous venons de voir que le premier groupe de cohomologie à support compact de D s'injectait dans le premier espace de L^2-cohomologie ; et selon (2.5) de [C], on a la majoration

$$\dim H_c^1(D) = \dim \mathcal{H}^1(M) \leq C(p)\mu_p(M)^{-1} \int_M |\mathrm{ric}_-(x)|^{\frac{p}{2}} dx \ ;$$

nous concluons alors grâce à la suite exacte

$$H_c^0(D) = \{0\} \longrightarrow H^0(D) = \mathbf{R} \longrightarrow H^0(\partial D) = \mathbf{R}^{b'} \longrightarrow H_c^1(D),$$

où b' est le nombre de composante connexe de ∂D. ■

3.c. Conséquence sur la caractéristique d'Euler L^2. —

Définition. — Si (M^n, g) est une variété Riemannienne dont les espaces de L^2- cohomologie réduite sont de dimension finie, alors la la caractéristique d'Euler L^2 de (M,g) est

$$\chi_{L^2}(M,g) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k_{(2)}(M).$$

Une conséquence de la suite exacte du théorème (3.1) est la suivante

3.4. Théorème . — *Soit (M^n, g) une variété Riemannienne complète qui vérifie les mêmes hypothèses qu'au théorème (3.1) alors si D est un ouvert borné de M on a*

$$\chi_{L^2}(M,g) = \chi(D, \partial D) + \chi_{L^2}(M-D, g).$$

Nous avons rappelé dans l'introduction que lorsque (M,g) était compacte, alors la caractéristique d'Euler L^2 était égale à la caractéristique d'Euler de M, c'est donc dans ce cas un invariant d'homotopie. Lorsque (M,g) n'est plus compacte la seule invariance qui reste est par quasi-isométrie, cependant la formule ci-dessus montre que, dans notre cas, la caractéristique d'Euler L^2 est un invariant d'homotopie à support compact

3.5. Corollaire. — *Soit* (M_0^n, g_0) *une variété Riemannienne complète qui vérifie les mêmes hypothèses qu'au théorème (3.1) alors si* (M, g) *est une variété Riemannienne telle qu'il existe* $\varphi : M_0 \longrightarrow M$ *qui soit une isométrie hors d'un domaine compact* D *de* M_0*, et qui soit une équivalence d'homotopie de* D *sur* $\varphi(D)$ *alors*

$$\chi_{L^2}(M_0, g_0) = \chi_{L^2}(M, g).$$

C'est une conséquence de la formule (3.4), car grâce à (2.7), nous savons que (M, g) vérifie la même inégalité de Sobolev que (M_0, g_0), et il est évident que le tenseur de courbure de (M, g) est aussi dans $L^{\frac{p}{2}}$. En fait suivant J. Lott ([L]) ce fait est général : les espaces de L^2 cohomologie réduite ou non sont des invariants d'homotopies Lipschitz.

3.e. Formules de Gauss-Bonnet. — Une conséquence de la suite exacte du théorème (3.1) est que nous pouvons obtenir des expressions de l'intégrale de la $n-$forme d'Euler en fonction de la caractéristique d'Euler L^2. Supposons M de dimension paire alors si D est un domaine (régulier) compact de M alors nous avons

$$\chi(D, \partial D) = \chi(D) - \chi(\partial D) = \chi(D),$$

alors la formule de Gauss-Bonnet pour les variétés à bord donne (cf. [Sp])

$$\chi(D) = \int_D \Omega + \int_{\partial D} P(II),$$

où Ω est la n-forme d'Euler et où $P(II)$ est un polynôme en la seconde forme fondamentale de $\partial D \subset D$, ainsi nous pouvons énoncer la

3.6. Proposition. — *Soit* (M^n, g) *une variété Riemannienne complète, de dimension paire, qui vérifie les mêmes hypothèses qu'au théorème (3.1) alors si* D *est un ouvert borné de* M *on a*

$$\chi_{L^2}(M, g) = \int_D \Omega + \int_{\partial D} P(II) + \chi_{L^2}(M - D).$$

Un corollaire simple de ces formules est une formule de Gauss-Bonnet relative

3.7. Corollaire. — *Soient* (M_1^n, g_1) *et* (M_2^n, g_2) *deux variété Riemannienne complète, de dimension paire qui vérifient les mêmes hypothèses qu'au théorème (3.1) alors s'il existe* D_1 *(resp.* D_2*) un domaine compact de* M_1 *(resp.* M_2*) tel que* $(M - D_1, g_1)$ *soit isométrique à* $(M_2 - D_2, g_2)$ *alors*

$$\chi_{L^2}(M_1, g_1) - \chi_{L^2}(M_2, g_2) = \int_{D_1} \Omega^{g_1} - \int_{D_2} \Omega^{g_2}.$$

Nous pouvons en déduire le théorème suivant

3.8. THÉORÈME. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 5$ dont le tenseur de courbure R vérifie*

$$\int_M |R(x)|^{\frac{n}{2}} dx < \infty,$$

et s'il existe un compact D de M tel que chaque composante connexe de $M - D$ soient quasi-isométrique au complémentaire d'une boule euclidienne de $\mathbf{R}^n$ alors

$$\chi_{L^2}(M, g) = \int_M \Omega^g.$$

Ce ci raffine les résultats obtenus auparavant par N. Borisov, W. Muller, R. Schrader et J. Brüning. Dans [B-M-S], les auteurs montraient cette formule de Gauss-Bonnet L^2 pour des variétés riemanniennes isométriques dans un voisinage de l'infini au complémentaire d'une boule euclidienne. Puis dans [B], J. Brüning avait étendu cette formule pour des variétés riemanniennes asymptotiquement euclidiennes.

Preuve. — Pour montrer ce résultat, on va appliquer le formule de Gauss-Bonnet L^2 relative entre (M, g) et une union disjointe d'espace euclidien chaqu'un munit d'une métrique quasi-isométrique à la métrique euclidienne et telle que (M, g) et cette union disjointe soient isométrique sur un voisinage de l'infini. Il suffit donc pour montrer ce théorème de montrer que si $\bar{g}$ est une métrique riemannienne sur $\mathbf{R}^n$ quasi-isométrique à la métrique euclidienne et dont la courbure $\bar{R}$ vérifie

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\bar{R}(x)|^{\frac{n}{2}} dx < \infty,$$

alors

$$\chi_{L^2}(\mathbf{R}^n, \bar{g}) = \int_{\mathbf{R}^n} \Omega^{\bar{g}}.$$

Or les espaces de L^2-cohomologie (réduite ou non) sont des invariants de quasi-isométries, et l'espace euclidien n'a pas de formes harmonique L^2 non-nulles, donc $\chi_{L^2}(\mathbf{R}^n, \bar{g}) = 0$. Ensuite le résultat de K. Ulhenbeck ([U]) montre que $\int_{\mathbf{R}^n} \Omega^{\bar{g}} = 0$; en effet notons $\bar{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de $(\mathbf{R}^n, \bar{g})$, puisque $\bar{g}$ est quasi-isométrique à la métrique euclidienne standart g_0, la courbure $F(\bar{\nabla})$ de cette connexion est $\frac{n}{2}$-intégrable par rapport à la métrique euclidienne

$$\int_{\mathbf{R}^n} |F(\bar{\nabla})|_{g_0}^{\frac{n}{2}} dx < \infty,$$

alors suivant K. Ulhenbeck il existe un changement de jauge $s : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathrm{SO}(n)$ tel que

$$s\bar{\nabla}s^{-1} = \nabla^0 + A$$

où ∇^0 est la connexion de Levi-Civita de g_0 et où A est une matrice anti-symétrique de 1-formes différentielles qui sont dans L^n et dont les dérivées sont dans $L^{n/2}$, comme on a l'inclusion de Sobolev $L_1^{\frac{n}{2}} \longrightarrow L^n$, on résume ceci par

$$A \in L_1^{\frac{n}{2}}(so(n) \otimes T^*\mathbf{R}^n).$$

Puis grâce au résultat de K. Uhlenbeck nous savons que si ∇ est une connexion qui est locallement dans $L_1^{\frac{n}{2}}$ telle que $\int_{\mathbf{R}^n} |F(\nabla)|_{g_0}^{\frac{n}{2}} dx < \infty$ alors l'intégrale du Pfaffien de la courbure de ∇ est un entier, i.e. $\int_{\mathbf{R}^n} \Omega(\nabla) \in \mathbf{Z}$. Or nous avons $\Omega^{\bar{g}} = \Omega(\bar{\nabla}) = \Omega(s\bar{\nabla}s^{-1})$, donc

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Omega^{\bar{g}} = \int_{\mathbf{R}^n} \Omega(\nabla^0 + A).$$

Mais si on définit la connexion $\nabla^t = \nabla^0 + tA$ alors puisque $F(\nabla^t) = t\nabla^0 A + t^2[A, A] \in L^{\frac{n}{2}}$, l'application $t \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} \Omega(\nabla^t)$ est continue donc constante puisqu'à valeurs entières. On a donc

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Omega^{\bar{g}} = \int_{\mathbf{R}^n} \Omega(\nabla^0) = 0.$$

■

4. Bibliographie

[A] A. Ancona. — *Théorie du potentiel sur des graphes et des variétés*, Lectures Notes n°1427, 1990.

[At] M.F. Atiyah. — *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, Soc. Math. France, Astérisque, **32,33** (1976), 43–72.

[A-P-S] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer. — *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **77** (1975), 43–69.

[B-M-S] N.V. Borisov, W. Müller, R. Schrader. — *Relative index theorems and supersymmetric scattering theory*, Comm. math. Phys., **114** (1988), 475–513.

[B] J. Brüning. — *L^2-index theorems on a certain complete manifold*, J. Differential Geometry , **32** (1990), 491–532.

[C] G. Carron. — *L^2-cohomologie et inégalités de Sobolev*, prébublication n°306 de l'institut J. Fourier, 1994.

[C-G] J. Cheeger, M.Gromov. — *Bounds of the Von Neumann dimension of L^2-cohomology and the Gauss-Bonnet theorem for open manifolds*, J. Differential Geometry, **21** (1985), 1–34.

[Co] P.E. Connor. — *The Neumann problem for differential forms on Riemannian manifold*, Mem. Amer. Math. Soc. n°20, 1956.

[C-S] T. Coulhon, L. Saloff-Coste. — *Isopérimétrie pour les groupes et les variétés*, Rev. Mat. Iberoamericana, **9** (1993), n°2, 293–314.

[dR] G.de Rham. — *Variétés différentiables*, Herman, Paris, 1960.

[Do] J.Dodziuk. — *De Rham-Hodge theory for L^2cohomology of infinite covering*, Topology, **16** (1977), 157–165.

[D] H. Donnely. — *Essential spectrum and heat kernel*, J. Funct. Anal., **75** (1987), 362–381.

[D-S] G. Duff, D.C. Spencer. — *Harmonic Tensors on Riemannian Manifolds with boundary*, Ann. of Math. Stud., **56, n°1** (1952), 115–127.

[E-R] K. D. Elworthy, S. Rosenberg. — *Manifolds with wells of negative curvature*, Invent. Math., **103** (1991), 471–495.

[G-M] S. Gallot, D. Meyer. — *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J. Math. Pures Appli., **54** (1975), 259–284.

[Go] C.Godbillon. — *Eléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, collection Méthodes, 1971.

[G] A.A.Grigor'yan. — *On the existence of positive fundamental solutions of the Laplace equation on Riemannian Manifold*, Math. USSR Sbornik, **56** (1987), n°2, 349–357.

[G-L] M. Gromov, H.B. Lawson. Jr. — *Positive scalar curvature and the Dirac operator on a complete Riemannian manifold*, Publ. Math. I.H.E.S., **58** (1983), 83–196.

[H-S] D. Hoffman, J.Spruck. — *Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds*, Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974), 715–727.

[L-L] J. Lott, W. Lück. — *L^2-topological invariant of 3-manifolds*, Invent. Math., **120** (1995), 15–60.

[L] J. Lott . — *L^2-cohomologie of geometrically infinite hyperbolic 3-manifold*, GAFA, **7,n°1** (1997), 81–119.

[Sp] M.Spivak. — *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish Inc., tome 3, 1973.

[U] K. Uhlenbeck. — *The Chern-Classes of Sobolev connections*, Comm. math. Phys., **101** (1985), 449–457.

[Va] N.Varopoulos. — *Hardy-Littlewood theory for semigroups*, J. Funct. Anal., **63, n°2** (1985), 240–260.

le 23 Mai 1997

CARRON Gilles
Département de Mathématiques U.M.R.
Université de Nantes
2 rue de la Houssinière
F-44322 Nantes cedex 03
email : Gilles.Carron@math.univ-nantes.fr