Introduction à la géométrie de contact

Chapitre I : Examples

I / Espace des éléments de contact

① Dans $\mathbb{R}^2$

$\gamma : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{lisse}} \mathbb{R}^2$

γ décrit trajectoire d'un patineur alors

$\dot\gamma \perp (\cos\theta, \sin\theta)$ où $\bar\theta \in S^1/_{\pm\pi} \simeq \mathbb{R}P^1$
est la direction $\perp$ au

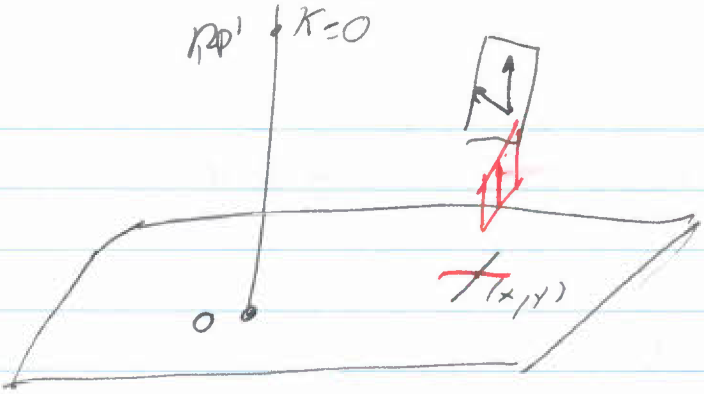
$\Rightarrow \left(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \bar\theta(t)\right)$ annule $\cos\theta \, d\cancel{x} + s$
car $(\gamma_1' \cos\theta + \gamma_2' s$

l'espace $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ est appelé l'espace des élém
de contact de $\mathbb{R}^2$.

~~pour~~ en un pt $q = (x, y, \bar\theta)$ l'hyperplan ~~la distrib~~ $(x;y)$

$$\xi_q = \{ v \in T_{(x,y,\bar\theta)}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1) \mid \cos\theta \, v_1 + \sin\theta \, v_2 = 0 \}$$

est ~~hype~~ appelé l'hyperplan de contact
(il est engendré par $\langle \frac{\partial}{\partial\theta}, -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta$



$\tilde{\gamma} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1$ est legendrienne

$\Leftrightarrow \quad \dot{\tilde{\gamma}}(t) \in T_{\tilde{\gamma}(t)} \xi_{\tilde{\gamma}(t)} \quad \forall t$

$\pi_0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{R}^2$ alors $\pi_0 \circ \tilde{\gamma}$ est appelé le front d'onde de $\tilde{\gamma}$.

$H : \mathbb{R} \times [0,1] \xrightarrow{\text{lisse}} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1$ est appelé une isotopie leg si $\forall s \in [0,1]$ $H(\cdot, s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1$ est legendrienne

⚠ ~~Une isoto~~

~~Ex : $\Phi_t : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1$~~
~~$(x, y, \theta) \to (x, y, \theta)$~~ $x + t$

L'espace des éléments de contact cooriéntés :

En relevant $\bar{\theta}$ à $\theta \in S^1$ on obtient l'espace d de contact cooriénté
$$\left(\mathbb{R}^2 \times S^1, \xi_p = \ker(\cos\theta dx + \sin\theta dy)\right)$$
Une courbe $\gamma : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$ est legendrienne si $\dot{\gamma}(t) \in \xi_{\gamma(t)} \Leftrightarrow \gamma^* \alpha_0 = 0$

Le front d'onde de γ est défini de la m[ême manière]
ils viennent cette fois avec une coorientation

Soit $\phi_t : \mathbb{R}^2 \times S^1 \to \mathbb{R}^2 \times S^1$

$(x, y, \theta) \to (x + t\cos\theta, y + t\sin\theta, \theta)$

(i.e. on pousse le long de $\perp$ au front)

$\cancel{\phi_t^* \alpha_0 =}$ $\quad \phi_t^* dx = dx - t\sin\theta\, d\theta$

$\phi_t^* dy = dy + t\cos\theta\, d\theta$

$\phi_t^* \alpha_0 = \cos\theta\, dx - t\cos\theta\sin\theta\, d\theta + \sin\theta\, dy + t\sin\theta\ldots$

$= \alpha_0$

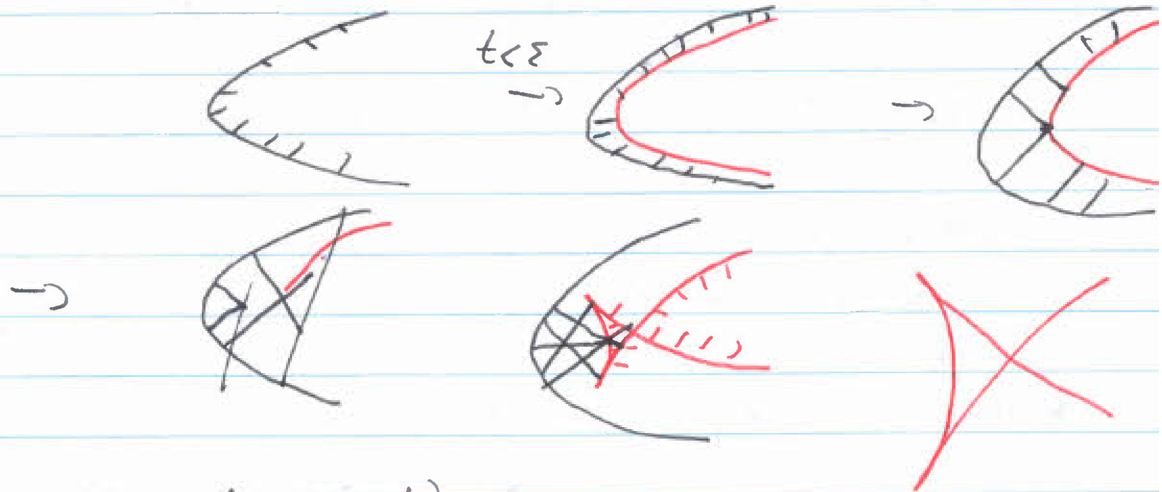
$\Rightarrow (\phi_t)_* (\xi_0) = \xi_0$

Donc $\gamma : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$ leg $\Rightarrow \phi_t(\gamma)$: leg $\forall$

$\Rightarrow H : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \times S^1$

$t, s \to \phi_s(\gamma(t))$ est une is

<u>Ex</u> :



Th : Un front d'onde générique n'a que singularité cuspidales + pt doubles

$(x,y) \xrightarrow{L} (x^2, y^3)$

$\gamma(t) \to (t^2, t^3)$

Dem

$(x(t), y(t), \theta(t))$ $\qquad \dot x(0) = \dot y(0) = 0$ (pt sing)

⇝ défin $y(t)$ ~~Morse~~ (i.e. $\ddot y(0) \neq 0$)

Comme $\gamma \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$ $\quad \dot\theta(0) \neq 0$

$\Rightarrow$ θ peut être choisi c p

$\Rightarrow$ $\tan\theta$ ou $\cot\theta$

$\tan\theta$

$(x(t), y(t), \operatorname{arctan} t)$

$\ddot y(0) \neq 0 \Rightarrow \quad y(t) = y(0) + \ddot y(0) t^2 g(t)$

$$g(t) \rightsquigarrow \quad h(t) = \begin{cases} 0 & |t| < \varepsilon \\ g(t) & |t| > 2\varepsilon \end{cases}$$

$\tilde y(t) = y(0) + \ddot y(0) t^2 h(t)$ $\qquad C^?$ perturbation

$\tilde x(t)$? t.q. $(\tilde x(t), \tilde y(t), \operatorname{arctan} t)$ leg

$$\cos\theta\, \tilde x'(t) + \sin\theta\, \tilde y'(t) = 0$$

$$\tilde x'(t) = - t\, y'(t)$$

proche de 0 $\qquad \tilde x'(t) = -2t^2$

$\Rightarrow \quad \tilde x(t) = \tilde x(0) - \frac{2}{3} t^3$

Choisi $\tilde x(0)$ de sorte que $\tilde x(2\varepsilon) = x(2\varepsilon)$

$\boxtimes$

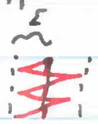
Rem: $\nexists\, \varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ ou $\mathbb{RP}^1$

$d\varphi(T\mathcal{U}) \subset \xi$ si $\pi \circ \varphi$ [illegible]

Thm (Approximation legendrienne)

Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \underset{S^1}{\overset{\mathbb{RP}^1}{\text{ou}}}$ alors $\forall \varepsilon \ \exists \tilde{\gamma} : [0,1) \to$
leg t.q. $d_{C^0}(\gamma, \tilde{\gamma}) < \varepsilon$

Dem : " Il suffit d'approximer $\gamma(t) = (t, 0, \bar{0})$)



② Espace des éléments de contact de Q

Q une variétés de dimension n.
Un éléments de contact en $q \in Q$ est hyperplan $H \subset T_q$
H est caractérisé par $\alpha : T_q Q \xrightarrow{\neq 0} \mathbb{R}$ ($H = \ker \alpha$)
α et α' déterminent le même H ssi $\exists\, t \neq 0$ α

$\Rightarrow$ Espace des éléments de contact est

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{RP}^{n-1} & \hookleftarrow & \mathbb{P}(T^*Q) := T^*Q \setminus Q_0 / \mathbb{R}^* \\ & & \downarrow \pi \\ & & Q \end{array}$$

On définit $\xi_{(q,H)} \subset T_{(q,H)} \mathbb{P}(T^*Q)$ par $V \in \xi_{(q,}$
$\iff d\pi(V) \in$

Rem : $Q = \mathbb{R}^2$ $\quad \mathbb{P}(T^*Q) \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1$ $\quad \xi$ est ξ_0

Un élément de contact est coorienté si ~~il est~~ $H^\perp$ e
d'une classe d'identification avec $\mathbb{R}$ $\quad H^\perp \overset{\circ}{\simeq} \mathbb{R}$

$\{$ Espace des éléments de contact coorienté $\} = S(T^*Q) :$

$$\{(q,p) \in T^*Q \mid$$

Rem : ce fibré est trivial

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{R} \subset TM/\xi$ est trivial $\Leftrightarrow$ $w_1(TM/\xi) =$

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \subset TM/\xi \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

(et si M orientable $w_1(\xi) =$

$\Leftrightarrow$ ξ coorientée

Dans ce cas $S(M,\xi) = S_+(M,\xi) \cup S_-(M,\xi)$

conn ≥ 0 $\quad \mathbb{R}_+^* \subset S_\pm(M,\xi)$

$$\begin{array}{c} S_\pm(M,\xi) \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

Prop : ξ est de contact $\Leftrightarrow$ $(S(M,\xi), d\theta$ symplectiq

où θ est la restriction de pdq

Dem : une forme locale α est une section locale

$$\begin{array}{c} (SM,\xi) \\ \downarrow \uparrow \alpha \\ M \end{array}$$

$\alpha^*(\theta) = \alpha$ localement

$\cancel{\alpha^*(d\theta)}$ $\quad pdq = t\alpha \Rightarrow (dt\wedge\alpha +$

$\Rightarrow dt\wedge\alpha\wedge(d\alpha)^{n-1}$

Def : $\cdot$ Si (M,ξ) est de contact, $S(M,\xi)$ est appelé symplectisation de M

$\cdot$ Si $\xi = \operatorname{Ker}\alpha$ on appelle $S_+(M,\xi)$ la symplectisation générale

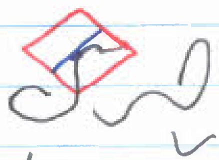
$$S_+(M,\xi) \underset{\alpha}{\simeq} (M\times\mathbb{R}_+^*, d(t\alpha)) \simeq M\times\mathbb{R}, d(e^s\alpha)$$

Ex : (Construction canonique)

· Soit $\iota : N \hookrightarrow Q$ sous variétés

· On définit

$$Nil(N) = \left\{ (q, H) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists x \text{ t.q. } q \in N \\ d(T_x N) \subset H \end{array} \right\}$$



$V \in T_{(q,H)} Nil(N)$ $\quad V = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma$ où $\gamma(t) = (q(t), H$
$\gamma(0) = (q, H)$

$(q(t), H(t)) \in Nil(N) \Rightarrow d\{T_{q(t)} N\} \subset H(t) \quad \forall t$

$\Rightarrow d\{\dot{q}(t)\} \in H(t) \quad \forall t$

$\Rightarrow d\{\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} q(t)\} \in H(0)$

$\Rightarrow d\pi(V) \in H \Rightarrow V \in \xi$

$\Rightarrow$ $Nil(N)$ isotrope

$\dim Nil(N) = \dim N + n - \dim N - 1 = n-1$

$\Rightarrow$ $Nil(N)$ legendrienne

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}P^{n-k-1} & \hookrightarrow & Nil(N) \quad \dim \\ S^{n-k-1} & & \downarrow \\ & & N \end{array}$$

II - Espace de Jets

Soit $f(t, u, u') = 0$ une eq. diff.

$u : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ est solution si $f(t, u$

i.e. $\gamma : t \to (t, u(t), u'(t)) \subset \mathbb{R}^3$ est t.q. $\gamma \subset S = f$
(t, z, p) supposée

Réciproquement $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, qui provient e

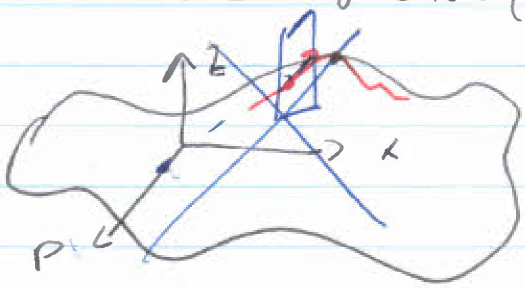
$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$

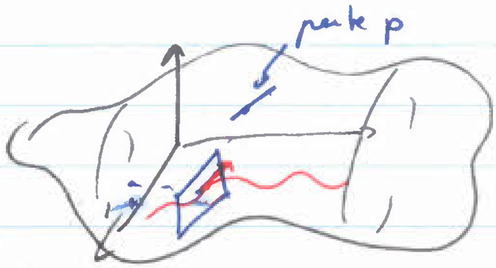
① γ_1 peut être choisi comme paramètre i.e. γ_1'

② $\gamma \subset S$ $\quad (f \circ \gamma = 0)$

③ on reparamétrise γ ~ $u = (s, u_2, u_3)$

$$u_2' = u_3$$
$$\Leftrightarrow \gamma_3'(t) = \gamma_2(t)\,\gamma_1'(t)$$
$$\Leftrightarrow \dot\gamma \in \operatorname{Ker}(dz - p\,dt)$$





<u>Rem</u> : $\{(x, y, \theta) \mid \theta \neq \frac{\pi}{2}\}$ $\qquad \cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy = 0$

$\{(x,y,\theta) \mid \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ $\qquad dx + \tan\theta\, dy = 0$

$\downarrow \varphi$

$\cancel{\{x, y, \tan\theta\}} \subset \mathbb{R}^3$

$\cancel{\{(\tan\theta, x, y)\}}$ $\qquad \varphi^*(d\cancel{z} - p\,d\cancel{t})$

$\{(y, x, \tan\theta)\} \subset \mathbb{R}^3$ $\qquad = dx - \tan\theta\, dy$

Def : $\gamma : [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ leg

$\Leftrightarrow \gamma^*(dz - p\,dt) = 0$

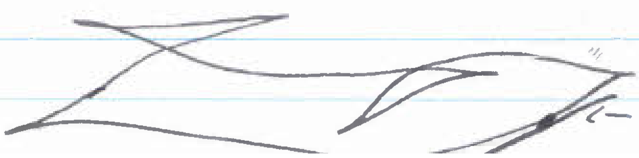
Ex : ~~Ex~~ . $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad \gamma(t) = (t, f(t), f'(t))$ leg

Def : $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2_{(t,z)}$ est appelé la projec

. $\gamma \overset{\text{leg}}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^3$ $\quad \Pi \circ \gamma$ est appelé le front d'on

il a les même singularité que precé

mais pas de tangent ver



② <u>Espace des Jets de Q</u>

Q variété de dim n

$f : Q \to \mathbb{R}$ $\quad g : Q \to \mathbb{R}$ ont le m (1)-j

si $f(q) = g(q)$ $\quad f \sim_q g$

$df_q = dg_q$

$$C^\infty(Q)/_{\sim q} \text{ est e.v. (quel dim?)}$$

$$J^1(Q) = \bigcup_{q \in Q} C^\infty(Q)/_{\sim q}$$

$$C^\infty(Q)/_{\sim q} \simeq T_q^* Q \times \mathbb{R}_z$$

$$\bar{f}^q \longrightarrow (df_q, f(q))$$

$$J^1(Q) \simeq T^*Q \times \mathbb{R}$$

On défini ξ_0 distribution d'hyperplan sur

par $V \in (\xi_0)_{(q, \bar{f}^q)} \subset T_{(q, \bar{f}^q)} J^1(Q)$

$$V = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (q(t), \bar{f}^{q(t)}) \in (\xi_0)_{(q, \bar{f}^q)}$$

ssi $\left(df^{q(0)}\right)\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} q(t)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f^{q(t)}(q(t))$

$\quad \|$

$\cancel{d} \, df(\pi(V)) = dz(V) \Rightarrow \theta(V) = dz$

$V \in \mathrm{Ker}(dz -$

<u>Rem</u>: $d\theta$ symp $\Rightarrow \alpha_0 = dz - \theta \quad \alpha_0 \wedge (d\alpha_0)$

Def : · $M \subset J^1(Q)$ <u>isotrope</u> $TM \subset \xi$
· $\dim M = n$ et isotrope $\Rightarrow M$ legendrien

$$f : M \to \mathbb{R} \quad \leadsto \quad j^1(f) = \bigcup_q \bar{f}^q = \{(q, df_q, f(q))\}$$

$$j^1(f)^*(dz - \theta) = df - df = 0$$

Def : $M \subset J^1(Q)$
$\Pi_0(M) \subset Q \times \mathbb{R}$ est appelée sa projection fr[ont]
($j^1(f)$ projette sur $\Gamma(f)$)
$\pi(M) \subset T^*Q$ est appelée projection lagrangien[ne]

<u>Cor</u> : $\iota : M \subset J^1(Q)$
$q \to (f(q), u(q))$ $\quad f(q) : M \to T^*Q$
$u(q) : M \to \mathbb{R}$

$\iota^*(dz - \theta) = 0 \Rightarrow du = f^*\theta$
$f^*\theta$ exact $\Rightarrow f$ lagrangien ex[acte]

<u>Rem</u> : f est une immersion car $\frac{\partial}{\partial z} \notin \xi \Rightarrow$ ker ...
si ...