Chapitre II : Définition de base

① Variétés de contact

Def : · Soit M^{2n+1} une variété. Un atlas de contact est donnée par $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^{2n+1} \simeq J^1(\mathbb{R}^n)$

t.q.

$$\begin{tikzcd} & U_\alpha \cap U_\beta \arrow[dl, "\varphi_\beta"'] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"] & \\ U' \arrow[rr, "\psi_{\alpha\beta}"'] & & U \end{tikzcd} \qquad d(\psi_{\alpha\beta})(\xi_0) = \xi_0$$

· Deux atlas de contact sont compatible si leur réunion est un atlas de contact

Def : · Si M est muni d'un atlas de contact alors M est appelé une variété de contact

· La distribution $\xi := (d\varphi_\alpha)^{-1}_* \xi_0$ (bien définie) est appelée la structure de contact sur M

Rem : · Localement ξ est définie comme le noyau ~~de~~ de $(\varphi_\alpha)^* \alpha_0$.

Si $\xi^\perp$ ~~admet~~ une orientation alors α peut être définie globalement ; α est alors appelée une forme de contact.

Rem : La forme de contact locale satisfait $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$

Thm (Darboux)

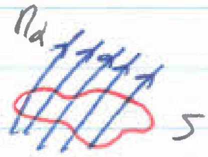
(M, ξ) est une variétés de contact ssi tout forme de contact locales α satisf. $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$

Dem : Soit R_α le champ de vecteur définie localement ~~comme~~ par $\begin{cases} \alpha(R_\alpha)=1 \\ d\alpha(R_\alpha,\cdot)=0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}_{R_\alpha}\alpha = \underbrace{d(\alpha(R_\alpha))}_{=0} + \cancel{d}\, d\alpha$$

$\Rightarrow$ flot de R_α preserve α

Soit S un disque transverse à R_α



alors pour tout coordonnée (q',p') sur S ~ (q',p',z) $\frac{\partial}{\partial z}=R_\alpha$

$$\alpha = dz - \alpha_0 \qquad \alpha_0 = S^*\alpha$$

de plus $d\alpha_0 = S^*(d\alpha)$ symplectique sur S

en choisissant (q,p) t.q. $\alpha_0 = p\,dq$

on a trouvé nos coordonnées $\boxtimes$

Def. Si (M,ξ) est t.q. $\xi = \operatorname{Ker}\alpha$ alors R_α t.q. $\begin{cases} d\alpha(R_\alpha,\cdot)=0 \\ \alpha(R_\alpha)=1 \end{cases}$

est appelé le champs de Reeb de α

⚠ il n'est pas associé à la structure de contact. ⚠

Ex

1. Toute les structure vues precedemment sont de contact
2. (S^{2n-1}, ξ_0) $\qquad \xi_0 = (T_pS^{2n-1}) \cap i(T_pS^{2n-1})$

$$S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$$

$S^{2n-1} = \{ z\bar{z} = 1 \}$ $\qquad z\,d\bar{z} + \bar{z}\,dz = 0$

$\xi_0 = \operatorname{Ker}(z\,d\bar{z} + \bar{z}\,dz)$

Def: Si (M,ξ) est t.q. $\xi = \operatorname{Ker}\alpha$ alors le champs de vecteurs t.q. R_α =

$$\begin{cases} \alpha(R_\alpha)=1 \\ d\alpha(R_\alpha,\cdot)=0 \end{cases}$$

est appelé le champs de Reeb associé à α

⚠ il n'est pas associé à ξ ⚠

Ex :

① Tout les exemples vu la semaine précédente sont contact.

(a) $J^1(\mathbb{R}^{2n+1})$, $\operatorname{Ker}(dz - p\,dq)$

$$d\alpha = dq \wedge dp$$

$$\Rightarrow \quad R_\alpha = \frac{\partial}{\partial z}$$

(b) $(\mathbb{R}^2 \times S^1, \ \operatorname{Ker}(\cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy))$

$$\Rightarrow R_\alpha = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}$$

② $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$

$(x_1 \dots x_{n+1}, y_1 \dots y_{n+1})$

$$\alpha = i^*\left(\frac{4}{2}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\,dy_i - y_i\,dx_i\right)$$

$$d\alpha = i^*\left(2\sum_{i=1}^{n+1} dx_i \wedge dy_i\right) \qquad \alpha \wedge (d\alpha)^n =$$

$\operatorname{Ker} d\alpha$ est $V = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ $\quad \cdot \ \langle (a,b),(x,y)\rangle = 0$

$\cdot \ \sum a_i\,dx_i - \sum b_i\,dx_i = 0$ sur TS^{2n+1}

$\qquad \shortparallel$

$x_i = \pm\lambda a_i \qquad y_i = \pm\lambda a_i \qquad \pm(\sum x_i\,dx_i + \sum y_i\,dy_i)$

$$V = -\sum \lambda y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum \lambda x_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\alpha(V) = \frac{1}{2} \lambda (x_i^2 + y_i^2) \qquad \lambda = 1$$

$$R_\alpha = \sum x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Def : $\varphi : (M, \xi) \xrightarrow{\simeq} (M, \xi')$ est un contactomorphisme si $\varphi_*(\xi) = \xi'$

Ex : $\varphi : S(T^* \mathbb{R}^n) \longrightarrow J^1(S^{n-1})$

$\cancel{(q, (v, z))} \longrightarrow \cancel{(v, \qquad \langle q, v \rangle)}$

$(q, v) \longrightarrow (v, q - \langle q, v \rangle v, \langle q, v \rangle)$

$(v + z \cdot p, v) \longleftarrow (v, p, z)$

$$\varphi^*(dz) = q dv + v dq$$

$$\varphi^*(dv) = dv$$

$$\varphi^*(dz - p dv) = \cancel{q dv} + v dq - \cancel{q dv} + \langle q, v \rangle \underbrace{v dv}_{=0}$$

$$= v dq$$

$$= \iota^*(p dq) \qquad \|v^2\| = 1$$

φ contactomorphism

② Symplectisation

Soit (M, ξ) une variété muni d'une distribution ξ on définit $S(M, \xi) = \{(q, p) \in T^*M \mid \ker p = \xi\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \hookrightarrow & S(M, \xi) \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

Rem : ce fibré est trivial

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{R} \subset TM/\xi$ est trivial $\Leftrightarrow$ $w_1(TM/\xi) = 0$

$\quad\quad\downarrow$

$\quad\quad M$ (et si M orientable $w_1(\xi) = 0$)

$\Leftrightarrow$ ξ coorientée

Dans ce cas $S(M,\xi) = S_+(M,\xi) \cup S_-(M,\xi)$

coor > 0 $\quad \mathbb{R}_+^* \subset S_\pm(M,\xi)$ $\quad$ coor < 0

$\quad\quad\quad\quad\downarrow$

$\quad\quad\quad\quad M$

Prop : ξ est de contact $\Leftrightarrow$ $(S(M,\xi), d\theta)$ symplectique

où θ est la restriction de pdq

Dem : une forme locale α est une section locale

$$\begin{array}{c} (SM,\xi) \\ \downarrow \uparrow \alpha \\ M \end{array}$$

$\alpha^*(\theta) = \alpha$ localement

~~$\alpha^* (d\theta)$~~ $\quad pdq = t\alpha \Rightarrow (dt\wedge\alpha + t\wedge d\alpha)^n$

$\Rightarrow dt\wedge\alpha\wedge(d\alpha)^{n-1} \neq 0$

$\square$

Def : · Si (M,ξ) est de contact, $S(M,\xi)$ est appelé la symplectisation de M

· Si $\xi = \operatorname{Ker}\alpha$ on appelle $S_+(M,\xi)$ la symplectisation générale de M

$\quad\quad \cong_\alpha$

$(M\times\mathbb{R}_+^*, d(t\alpha))$

$\quad\quad \cong$

$M\times\mathbb{R}, d(e^s\alpha)$

③ Sous variétés

(M, ξ) de contact de dim $2n+1$

Déf : $N \subset (M, \xi)$ est de contact si $(N, TN \cap \xi)$ est de contact

Ex : (M, ξ) ~~de contact~~ muni d'une distributi[on]

alors ξ définit

$$s_\xi : M \hookrightarrow P(T^*M)$$
$$q \to (q, \xi_q)$$

$s_\xi(M) \subset (P(T^*M), \xi_0)$ est de contact $\Leftrightarrow \xi$ est de contact

Déf : (i) $\Lambda \subset M$ est dit isotrope si $T_q\Lambda \subset \xi_q \quad \forall q \in \Lambda$ $\quad (\Rightarrow \dim \Lambda \leq n)$

(ii) Λ est legendrien si Λ est isotrope de dim n

Ex : $Q_0 \subset J^1(Q)$ $\quad$ au encore $f : Q \to \mathbb{R}$

$(q \to (q, 0, 0)$

$$j^1(f) : Q \to J^1(Q)$$
$$q \to (q, df_q, f(q))$$

$$j^1(f)(dz - pdq) = df - df = 0$$

Si $\xi = \operatorname{Ker} \alpha$ alors α définit et Λ orienté

$\Lambda \subset (M, \xi = \operatorname{Ker}\alpha)$ $\quad T\Lambda \subset \xi$ est une lagrangien[ne] orienté

on définit $\quad m : H_2(M, \Lambda) \to \mathbb{Z}$

$$[\Sigma] \to \hat{\mu}(\partial\Sigma, \xi|_\Sigma) \quad \hat{\mu} \text{ classe de Maslov des } \widetilde{Gr}(\Lambda) \downarrow Gr(\Lambda)$$

Classe de rotation de Λ.

Rem : $\xi|_\Sigma \simeq \Sigma \times \mathbb{C}^n$ mais l'identification n'est pas unique

mais $[\partial\Sigma] = \Pi[a_i, b_i] \Rightarrow \hat{\mu}$ bien défini

Si Λ est null-homologue

$$tb(\Lambda) = lk(\Lambda, \Lambda') \quad \Lambda' = \Lambda + \varepsilon R_\alpha$$

$\cancel{\Sigma}$ $[\Sigma]$ $\quad \partial[\Sigma] = \Lambda$

$$[\Sigma] \cdot \Lambda'$$

$$([\Sigma] - [\Sigma']) \cdot \Lambda' = 0 \text{ car } [\Sigma] - [\Sigma'] \in H_{n+1}(M)$$

$$\Lambda' = 0 \quad H_n(M)$$

⚠ tb intéressant uniquement quand n impair ⚠
(ds $\mathbb{R}^{2n+1}$)

(4) Revêtement d'orientation

Si $w_1(TM/\xi) \neq 0$ alors $p: \hat{M} \to M$ revêtement associé à $w_1(TM/\xi)$

est t.q. $\hat{\xi} = p^*(\xi) = \operatorname{Ker} \alpha$

de plus on peut choisir α t.q.

$$\iota^* \alpha = -\alpha$$

car $\iota^* \alpha = g \cdot \alpha \quad g < 0$

$\tilde{\alpha}_q = (q - g(\iota(q)))\, \alpha$ satisfait prop.

$(\hat{M}, \hat{\xi})$ est le revêtement de coorientation de (M, ξ)

<u>Prop</u>: $\quad S_+(\hat{M}, \hat{\xi}) \simeq S(M, \xi)$

<u>Exercice</u>