Chapitre III : Quelques résultats de flexibilité

① Thm de Gray

Thm : ~~Soit (M, ξ) une~~ Soit M une variété fermée (compacte $\partial M = \phi$) et $\{\xi_t\}$ une fa[mille] lisse de structure de contact alors

$$\exists\, \varphi_t : M \xrightarrow{\simeq} M \qquad (\varphi_t)_* \xi_0 = \xi_t$$

Dem : On travail dans le revêtement d'orientati[on] $\hat{M} \to M$ de $\{\xi_t\}$ (qui est tjs le mê[me])
et $\xi_t = \operatorname{Ker} \alpha_t$ (avec $\iota^* \alpha_t = -\alpha_t$)

On cherche φ_t t.q.

$$\varphi_t^* \alpha_t = e^{g_t} \alpha_0$$

$$\frac{d}{dt} \Downarrow$$

$$\varphi_t^*(\dot{\alpha}_t + \mathcal{L}_{X_t} \alpha_t) = \dot{g}_t e^{g_t} \alpha_0$$
$$= \dot{g}_t\, \varphi_t^* \alpha_t$$
$$= \varphi_t^*(\mu_t \alpha_t) \quad \text{où } \mu_t$$

$X_t =$

$\Leftarrow$

On cherche $X_t \subset \xi_t$

$$\Rightarrow \varphi_t^*(\dot{\alpha}_t + X_t \lrcorner\, d\alpha_t) = \varphi_t^*(\mu_t \alpha_t)$$

$$\dot{\alpha}_t + X_t \lrcorner\, d\alpha_t = \mu_t \alpha_t$$

$R_{\alpha_t} \lrcorner \rightarrow \quad \dot{\alpha}_t(R_{\alpha_t}) = \mu_t \quad \Rightarrow \mu_t$ est déterm[iné]

comme $\hat{M}$ est fermé on peut intégrer X_t
car $d\lambda(X_t) = -X_t$ $\Rightarrow$ descend à M
en fait $\mathrm{cont}(\xi) \hookrightarrow \mathrm{Diff}(M)$ fibrat
$\mathrm{cont}^{b}(M)$

(2) Hamiltonien de contact

<u>Def</u>: Un champ de vecteur X est de contact si son flot (local) préserve ξ
(Si $\xi = \ker\alpha \iff \mathcal{L}_X\alpha = g\cdot\alpha \iff \mathcal{L}_X\alpha|_\xi = 0$

<u>Thm</u>: $\{X \mid \text{champ de contact}\} \to \Gamma(TM/\xi)$
est isomorphism $X \to X \bmod \xi$

<u>Dm</u>: Il suffit de voir $\forall X \in \Gamma(TM)$
$\exists! X_\xi \subset \xi$
$X + X_\xi$ de contact.
on passe à $\hat{M}$ et on suppose $\xi = \ker\alpha$
on cherche
X_ξ $\mathcal{L}_{X+X_\xi}\alpha = g\alpha$
$\cdot\, d(\alpha(X)) + X \lrcorner d\alpha + X_\xi \lrcorner d\alpha = g$
$R_\alpha \lrcorner \Rightarrow d(\alpha(X)) = g$

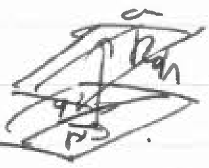
$X_\xi \lrcorner d\alpha = d(\alpha(X))\cdot\alpha - X \lrcorner d\alpha$
détermine X_ξ uniquement

Si on choisit α alors $\Gamma(TM/\xi) \simeq C^\infty$
$X \to \alpha(X)$
$\alpha(X)$ est appelé l'hamiltonien de
c'est un résultat flexible car il permet de modif
localement les contactomorphismes

③ Théorème de Darboux-Weinstein

Thm : Soit $\Lambda \underset{\text{fermé}}{\overset{\text{leg}}{\subset}} (M, \xi = \ker \alpha)$ alors
il existe un voisinage N de Λ ds M et N' de
t.q. $\exists\ \varphi : N \xrightarrow{\text{contact.}} N'$

Dem : $R_\alpha \notin T\Lambda$ car Λ leg



on choisit des coor
(q', p', z) t.q. $\frac{\partial}{\partial z} \leftrightarrow R_\alpha$
et $\Lambda = \{ p' = 0\ z = 0 \}$
Sur $\{(q', p', 0)\}$ $d\alpha$ symplectique et Λ
$\rightarrow$ Darboux lagrangien
$\Rightarrow$ $p' dq' = p dq + df$ avec $df|_\Lambda = 0$
... ex
$\boxed{\,}$

④ Isotopie legendrienne

Déf : ~~Soit~~ Une isotopie legendrienne est
$H : \Lambda \times [0,1] \to (M, \xi)$ lisse t.q.
$\forall\ t \in [0,1]$ $H(\cdot, t) : \Lambda \overset{\text{leg}}{\subset} (M, \xi)$
on dit que $\Lambda_0 = H(\cdot, 0)$ et $\Lambda_1 = H(\cdot, 1)$ sont lege

Ex : $\varphi_t : M \to M$ contactomorphisme
alors $\varphi_t(\Lambda)$ isotopie legendrienne

Thm : Soit ~~$H : A$~~ $H : \Lambda \times [0,1] \to M$ une isoto
et Λ fermée alors $\exists\ \varphi_t : M \xrightarrow{\text{contact}} M$ / à supp
compac
t.q. $\varphi_t(\Lambda) = H(\Lambda, t)$

Dém : On définit ~~H_t sur~~ X_t champs de vecteur sur $H(\Lambda, t)$ par

$$X_t(q) = \frac{d}{dt} H(\Lambda(q), t)$$

et on cherche ~~#~~ à étendre ~~$X_t(q)$~~ X_t à un c de contact à support compact.

$H_t : M \to \mathbb{R}$ t.q. $H_t(\Lambda(q)) = \alpha(X_t(q))$

$H_t \equiv 0$ extérieur compact

$\tilde{X}_t$ champ Hamiltonien de H_t

i.e. $$\begin{cases} \alpha(\tilde{X}_t) = H_t \\ \iota_{\tilde{X}_t} d\alpha = dH_t(R_\alpha)\alpha - dH_t \end{cases}$$

Par déf : $\tilde{X}_t = X_t + Y$ avec $Y \in ?$

$\forall v \in T\Lambda_t \quad d\alpha(X_t + Y, v) = d\cancel{H_t(R_\alpha)}\, dH_t(v)$

mais par déf ~~$d\alpha(\tilde{X}_t, v)$~~

$d\alpha(X_t, v) = dH_t(v)$

$\Rightarrow Y \in T\Lambda$ reparamétrisation E