Chapitre V : Réduction

§1 - Introduction

<u>Rappel</u> : . $T^*Q \times \mathbb{R}$ muni de $\ker(dz - \lambda)$ où λ forme de Liouville standard est une variété
. $\Lambda \subset T^*Q \times \mathbb{R}$ leg $\Leftrightarrow$ $\pi(\Lambda) \looparrowright T^*Q$
. $\Gamma(df)$ est une famille de lagrangiennes
$j^1(f) = (\Gamma(df) \times f(q))$ leg

Dans le chapitre suivant on généralisera c
construction pour construire des lagrangiennes
graphiques, cette construction utilise la réd
symplectique.

Réduction. $(M, \omega_M) \rightsquigarrow (N, \omega_N)$ var symp
de dim inférieure

Dans le cas lisse : 2 méthodes $\to$ pré-image de val
$\hookrightarrow$ image de i
$\to$ quotient par u
$\hookrightarrow$ submersion

Dans le cas symplectique, on mélange les deux

§2 - Réduction des variétés coisotropes

Soit (M, ω) une variété symplectique. Et j
coisotrope (i.e. $(T_qQ)^\omega \subset T_qQ$). On not

<u>Lemme 1</u> : Soit $X \in \Gamma(TQ^\omega)$ alors $\mathcal{L}_X \omega_Q =$

<u>Dém</u> : $\mathcal{L}_X \omega_q = d(X \lrcorner \omega_Q) + X \lrcorner d\omega_Q$
$= \underset{X \in TQ^\omega}{\underline{0}} + \underset{\text{fermé}}{\underline{0}}$ $\square$

Lemme 2 : La distribution $TQ^\omega \subset TQ$ est integ

Dem : Par Fröbenius il faut montrer
$X, Y \in \Gamma(TQ^\omega) \Rightarrow [X,Y] \in \Gamma(TQ^\omega)$

Soit $X, Y \in \Gamma(TQ^\omega)$ et $Z \in \Gamma(TQ)$

$$0 = d\omega(X,Y,Z) = X\cdot\omega(\cancel{Y},Z) - Y\cdot\omega(\cancel{X},Z) + Z\cdot$$
$$- \omega([X,Y],Z) + \omega(\cancel{[X,Z]},Y) - \omega$$

/ $=0$ car $Y \in \Gamma(TQ^\omega)$

/ $=0$ car $X \in \Gamma(TQ^\omega)$

Donc $\forall Z \in \Gamma(TQ)$ $\omega([X,Y],Z) = 0$
$\Rightarrow [X,Y] \in \Gamma(TQ^\omega)$

On note $\mathcal{F}_Q$ le feuilletage induit par TQ^ω
$(X \sim Y$ $\exists\, \gamma : [0,1] \to Q$ $\gamma(0)=X$ $\gamma(1)=Y$

Def : Q est dite <u>reductible</u> si $Q/\mathcal{F}_Q$ est u
variété lisse (appelée la reduction de Q) ave
pour espace tangent $T_{\bar{q}}\, Q/\mathcal{F}_Q = T_qQ/(T_qQ)^\omega$
(c'est donc $\pi : Q \to Q/\mathcal{F}_Q$ est lisse)

Soit Q réductible

Soit $\bar{X}, \bar{Y} \in T_{\bar{q}}\, Q/\mathcal{F}_q = T_qQ/(T_qQ)^\omega$ $\quad \bar{X} = d\pi$
$\bar{Y} = d\pi$

On pose $\bar{\omega}(\bar{X},\bar{Y}) = \omega(X,Y)$

Thm 1 : $\bar{\omega}$ bien définie et symplectique

Dem :

Bien définie :

· Ne dépend pas de $x, y \in T_q Q$ car si $v, w \in$
$\omega(x'+v, y'+w) = \omega(x', y')$ par def

· Soit q' t.q. $\pi(q) = \pi(q')$ et γ t.q. $\dot\gamma \subset T$
$\gamma(0)=q$
$\gamma(1)=q'$

Soit $v \in \Gamma(TQ^\omega)$ qui étend $\dot\gamma$ et φ_v le flot

. $\pi \circ \varphi_v = \pi$ $\quad (v \in \Gamma(TQ^\omega))$

. $\varphi_v^* \omega_Q = \omega_Q$ (Lemme 1)

$\Rightarrow$ $d\pi \circ d\varphi_v(x) = d\pi(x)$

$d\pi \circ d\varphi_v(y) = d\pi(y)$

$\omega_{q'}(d\varphi_v(x), d\varphi(y)) = \omega(x, y)$

Non dégénérée

$\bar{x} \in T_{\bar q} Q/_{\mathcal{F}_Q}$ $\quad \forall \bar{y} \quad \bar{\omega}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

$\Rightarrow \omega(x, y) = 0 \quad \forall y \in T_q Q \Rightarrow x \in T_q Q^\omega =$

Fermée

Par construction $\omega_Q = \pi^* \bar{\omega}$

$0 = d\omega_Q = \pi^* d\bar{\omega}$ or $d\pi$

$\Rightarrow d\bar{\omega} = 0$

§3 - Exemples

Tout hypersurface est coisotropes ⇒ préimage de H : val reg

$\boxed{A}$ Soit $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$

Soit $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$

$(\underline{q}, \underline{p}) \to |q|^2 + |p|^2$

$H^{-1}(1) = S^{2n-1}$ coisotrope

$$\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{C}^n$$

$$\omega_0(\underbrace{v_0 + i w_0}_{x}, \underbrace{v_1 + i w_1}_{y}) = \langle i x, y \rangle$$

$$x \in T_z S^{2n-1} \iff \langle x, z \rangle = 0$$

$$x \in (T_z S^{2n-1})^{\omega} \iff \langle i x, y \rangle = 0 \quad \forall y \perp z$$

$$\iff ix \parallel z$$

$\Rightarrow$ $S^{2n-1}/\mathcal{F} \simeq \mathbb{CP}^{n-1}$ ← la forme symplectique

$\boxed{B}$ $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$

$p, q \to \frac{1}{2}|p|^2$

$$Q = H^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$$

$Q/\mathcal{F} = T^* S^{n-1}$ muni de $-d\lambda$

↳ corollaire du contacto Hodographe !

$\boxed{C}$ Action hamiltonienne

$G \circlearrowright (M, \omega)$ $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ $X_\xi \in \Gamma(TM)$

t.q. $\exists \mu : M \to \mathfrak{g}^*$

· μ G-équivariante $\mu(g \cdot q) = g \cdot \mu(q$

· $\forall \xi$ H : $M \to \mathbb{R}$ ...

(Ex : $S^1 \times \cdots \times S^1 \circlearrowright \mathbb{C}^n$
$\mu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$
$z_1 \cdots z_n \to |z_1|^2, \cdots |z_n|^2$)

G prism $\mu^{-1}(0)$ supposons · 0 val reg de M
· G agit libre sur

$\mu^{-1}(0)$ est coisotrope, le feuilletage sont les orbites

$\left((T_q\ \mu^{-1}(0)) \right)^{\omega} = \{ x_\xi(q) \mid \xi \in \mathfrak{g} \}$

$\omega_q(x_\xi(q), V) = dH_\xi(q)(V) = \langle d\mu_q(V), \xi$

$\dim (T_q \mu^{-1}(0))^{\omega} = \dim M - (\dim M - \dim$
$= \dim \mathfrak{g}$

$\boxed{D}$ (M, ω_M) (N, ω_N) variétés symplectiques
$L \subset N$ lagrangienne abs
$M \times L \subset (M \times N, \omega_M \oplus \omega_N)$ coisotrope

$(T_{(x,y)}\ M \times L)^{\omega} = \{0\} \times T_y L$

$M \times L / \mathcal{F} \simeq M$
symplecto.

§4- Réduction et sous variétés lagrangiennes

$Q \subset M$

$i : L \to M$ immersion

Déf: i intersecte Q de manière <u>nette</u> si

- $i^{-1}(Q)$ sous variété de L
- $T_{i(x)}(i(L)\cap Q) = di(T_xL)\cap T_{i(x)}Q$

Ex: (1) $i \pitchfork Q \Rightarrow$ nette

(2)  pas nette

Déf: Soit $Q \subset (M,\omega)$ coisotrope et $i: L$ une immersion lagrangienne. (Q,L) est dite r

si
- Q est réductible
- i et Q s'intersectent de manière nette

Lemme 3: Soit (Q,L) réductible alors $\tilde{\pi} : i(L)\cap$
a rang constant

Dém: i et Q nette $\Rightarrow T_{i(x)}(i(L)\cap Q) = di_x($

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} d\tilde{\pi}_{i(x)} &= di_x(TL)\cap T_{i(x)}Q \cap T_{i(x)}Q^{\omega} \\ &= di_x(TL)\cap T_{i(x)}Q^{\omega} \quad (Q \text{ cois} \\ &= di_x(TL)^{\omega}\cap T_{i(x)}Q^{\omega} \quad (L \text{ lag}) \\ &= (di_x TL + T_{i(x)}Q)^{\omega}\end{aligned}$$

Or $\dim(di_x(TL) + T_{i(x)}Q) = \underbrace{\dim L + \dim Q - d}_{cst}$

$\dim \operatorname{Ker} d\tilde{\pi} = n - \dim Q + \dim(i(L)\cap Q)$

~~Lemme 3 : Soit Q~~

Soit (Q, L) une paire reductible, on définit

$L_Q = \pi(i(L) \cap Q) \subset Q/_F$ sous

$L^Q = \pi^{-1}(L_Q) \subset Q \subset M$

Thm 2 : L_Q ~~?~~ $Q/_F$ lagrangien

L^Q ~~?~~ M lagrangien

Dm :

· $\bar{q} \in L_Q$ $\quad \bar{x}, \bar{y} \in T_{\bar{q}} L_Q$

Soient $x, y \in (T_q L \cap T_q Q) + T_q Q^\omega$ $\quad d\pi(x) = \bar{x}$

$d\pi(y) = \bar{y}$

$\bar{\omega}_{\bar{q}}(\bar{x}, \bar{y}) = \omega(x, y) = 0$ $\quad T_q L$ lag

$T_q Q^\omega = \ker ($

L_Q isotrope

$\dim L_Q = \dim(i(L) \cap Q) - n + \dim Q - \dim$

$= \dim Q - n$

$\dim Q/_F = \dim Q - 2n + \dim Q = 2(\dim Q$

$\Rightarrow L_Q$ lagrangien

· Soit $q \in L^Q \rightarrow \exists q'$ sur la m feuille que q

$q' \in i(L) \cap Q$

$\exists v \subset \Gamma(TQ^\omega)$ $\quad d\varphi_v$ $\varphi_v(q) = q'$

$x, y \in T_q L^Q$ $\quad d\varphi_v(x), d\varphi_v(y) \in T_{q'}(i(L) \cap Q)$

$\Rightarrow \omega_{q'}(d\varphi_v(x), d\varphi_v(y)) = 0$

$\omega_q''(x, y)$ $\quad L^Q$ i

$\dim L^Q = \dim L_Q + 2n - \dim Q = n$ $\quad \rightarrow L^Q$ l

Exemples

$\boxed{A}$ ① $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ lag

$\rightsquigarrow \mathbb{R}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$ lag

$\rightsquigarrow S^{n-1} \times S^1$ lag

② $T^n = S^1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \cdots S^1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \overset{lag}{\subset} S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$

$\downarrow$

$T^{n-1} \overset{lag}{\subset} \mathbb{C}P^{n-1}$ Tore de Clifford

$\boxed{D}$ $\phi : M \to M'$ $\psi : M' \to M''$ symplectomorphism

$\Gamma(\phi) \times \Gamma(\psi)$ lag $M \times \overline{M'} \times M' \times \overline{M''}$

$Q = M \times \Delta \times \overline{M''}$ coisotrope (de reduc

Rem : $\Gamma(\phi) \times \Gamma(\psi)$ tjs $\pitchfork$ à Q

$\Gamma(\phi) \times \Gamma(\psi)_Q \subset M \times \overline{M''}$

$\shortparallel$

$\{(q, \psi \circ \phi(q))\} = \Gamma(\psi \circ \phi)$