Chapitre VII : Cobordisme lagrangiens

§1 - Définition :

Rappel $(M, \xi = \ker\alpha)$ variétés de contact a
$(\mathbb{R}\times M, d(e^t\alpha))$ est symplectique.

De plus $\Lambda \subset M$ leg $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}\times\Lambda \subset \mathbb{R}\times M$

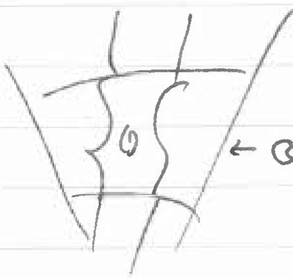
Def : · Un cobordisme lagrangien de Λ^- vers Λ^+ est $\Sigma \subset \mathbb{R}\times M$ lag t.q.

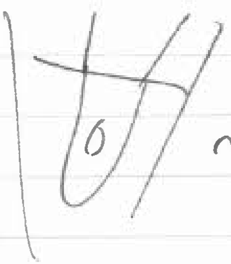
① $p|_\Sigma : \Sigma \to \mathbb{R}$ propre

② $\exists T$ $\Sigma \cap (-\infty,-T)\times M = (-\infty,-T)\times\Lambda^-$
$\Sigma \cap (T,\infty)\times M = (T,\infty)\times\Lambda^+$

· Si $\Sigma^* e^t\alpha = df$ avec $f|_{-\infty} \equiv 0$ alors Σ est appelé un cobordisme lagrangien e

· Si $\Lambda^- = \emptyset$ alors Σ est appelé un remp lagrangien exact de Λ^+.

 ← cobordism

 remplissage

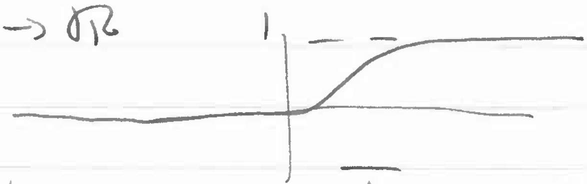
Thm : Si $\Lambda_0 \sim \Lambda_1$ alors $\exists\, C : \mathbb{R}\times\Lambda \to \mathbb{R}\times M$
cobordisme lagrangien de Λ_0 ve

Dem : Soit H_t engendrant ϕ_t $\phi_t(\Lambda_0) = \Lambda_t$

alors $e^t H_t$ engendre $\hat{\phi}_t : \mathbb{R}\times M \to \mathbb{R}\times M$ t.q.

$$\hat{\phi}_t(\mathbb{R}\times\Lambda_0) = \mathbb{R}\times\Lambda_t .$$

Soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

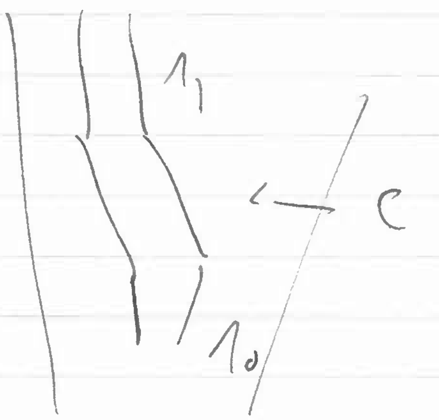


alors $\rho(t) e^t H_t$ engendre $\bar{\phi}_t : \mathbb{R}\times M \to \mathbb{R}\times M$

t.q. $\bar{\phi}_t \big|_{-\infty} \equiv id$

$\bar{\phi}_t \big|_{+\infty} \equiv \phi_t$

$\Rightarrow \bar{\phi}_t(\mathbb{R}\times\Lambda_0) =$



§2 - Cobordismes lagrangien et invariants classiques

On se concentre sur $(\mathbb{R}^3, \mathrm{Ker}(dz - y\,dx))$

$\Lambda : S^1 \xrightarrow{\text{leg}} \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow tb(\Lambda) \in \mathbb{Z} \quad lk(\Lambda, \Lambda + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z})$

$\rightsquigarrow r(\Lambda) \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{2}\mu(\Lambda) \in \pi_1(Gr(\xi$

Note : $i_* \pi_1(Gr(\xi)) \longrightarrow \pi_1(Gr(T(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)))$ ind
par $v \mapsto \langle v, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$ est un iso

(il suffit de prendre $\langle v_0, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$ comme clas

De plus $\pi_1(Gr(W)) \simeq H_1(Gr(W)) \Rightarrow \mu$ inva
homo

$\Lambda^- <_\Sigma \Lambda^+$ alors $T\Sigma \subset Gr(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ est u
homologie entre $T\Lambda^-$ et $T\Lambda^+$

$\Rightarrow r(\Lambda^-) = r(\Lambda^+)$

Qu'en est-il pour tb ?

Rappel : pour le calculer Σ orientée $\partial\Sigma = \Lambda$
$tb(\Lambda) = (\Lambda + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z}) \cdot \Sigma$

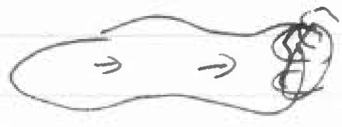
Prop : Soit Σ_0, Σ_1 orientées ds $(-\infty, 1] \times \mathbb{R}^3$ t
$\partial \Sigma_0 = \Sigma_0 \cap \{1\} \times \mathbb{R}^3 = \{1\} \times \Lambda$
$\partial \Sigma_1 = \Sigma_1 \cap \{1\} \times \mathbb{R}^3 = \{1\} \times (\Lambda + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z})$

alors $tb(\Lambda) = \Sigma_0 \cdot \Sigma_1$.

Dem : Soit $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ t.q. $\partial\Sigma = \Lambda$

soit $\gamma : [0,1] \hookrightarrow \Sigma$ t.q. $\gamma(1) \in \partial\Sigma$

et $(\Lambda + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z}) \cap \Sigma \subset \gamma((\varepsilon,1])$ pour ε



On étend γ à un collier

$u : [0,1]\times S^1 \hookrightarrow \Sigma$ de $\partial\Sigma$

$t,\theta \to u(t,\theta)$ $\quad u(1,\theta)$

Soit $\chi : \Sigma \to \mathbb{R}$ $\quad \chi \equiv 1$ sur $u((\varepsilon,1]\times S^1)$

$\chi \equiv 0$ sur $\Sigma \setminus \mathrm{Im}\, u((\frac{\varepsilon}{2},1)\times$

$\Sigma_0^\# : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$

$q \to (\chi(q)\cdot t, \Sigma(q))$ où $q = u(t,\theta)$

$\Sigma_1^\# : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$

$q \to (t, \Lambda(\theta)+\varepsilon)$ si $q = u(t,\theta)$

$\Sigma''(q)$ $\quad \Sigma'' : \Sigma\setminus \mathrm{Im}\, u \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ $\partial\Sigma$

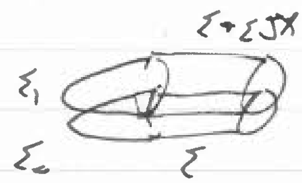
$\Sigma_0\cdot\Sigma_1 = \Sigma\cdot\Lambda+\varepsilon\frac{\partial}{\partial z}$ $\square$

Soit $\Lambda^- \prec_\Sigma \Lambda^+$ $\quad \Sigma$ lagrangie

$\Rightarrow JX$ où X tangent à Σ

$\Lambda\Sigma$ $\quad$ t.q. $X = \frac{\partial}{\partial t}$ proche

$(\Sigma + \varepsilon JX) \cancel{\pitchfork \Sigma} \Rightarrow (\Sigma+\varepsilon JX)\cdot\Sigma = 2g(\Sigma)$



$tb(\Lambda^+) = (\Sigma+\varepsilon JX)\cdot\Sigma + \Sigma$

$tb(\Lambda^-) = \Sigma_1\cdot\Sigma_0$

$\Rightarrow tb(\Lambda^+) - tb(\Lambda^-) = 2g(\Sigma)$

Le thm de Bennequin $tb(\Lambda) + |r(\Lambda)| < -\chi(S$
a été étudié par Rudolph à $S \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$

Supposons ~~Et~~ $\emptyset \prec_\Sigma \Lambda \iff \Lambda_0 \prec_\Sigma \Lambda$

alors $tb(\Lambda) = 2g(\Sigma) - 1$
$r(\Lambda) = 0$

$$\Rightarrow tb(\Lambda) + |r(\Lambda)| = 2g(\Sigma) - 1 \leq 2g(S) - 1$$
$$\Rightarrow g(\Sigma) = \min\{g(S) \mid \partial S = \Lambda\}$$

$\Rightarrow$ · topologie Σ t.q. $\Lambda^- \prec_\Sigma \Lambda^+$ est déterminé
· $0 \prec_\Sigma \Lambda^+ \Rightarrow \Sigma$ a topologie minimal

~~Ex :~~  ~~remplissable par D^2~~ ?

§3- Front d'un cobordisme Lagrangien exact

$$\phi : \mathbb{R}\times J^1(Q) \simeq T^*(\mathbb{R}_+^* \times Q)$$
$$(t, q, p, z) \to (e^t, q, z, e^t p)$$
est un symplectomorphisme

car ($d(e^t(dz - pdq)) = d(e^t)\wedge dz + dq \wedge d($

$\Sigma \subset \mathbb{R}\times J^1(Q)$ cobordisme lagrangien exa

$\Sigma^* e^t\alpha = df \qquad e^t dz - e^t p dq = df$
$e^t p dq = e^t dz - df$

$\Rightarrow$ sur $\phi(\Sigma)$

$$z\,dn + e^t p\,dq = z\,dn + n\,dz - df$$
$$= d(zn - f)$$

$\Rightarrow \Phi(\Sigma)$ se relève à

$(\Sigma(q), e^t z - f)$ legendrien

~~L'ap la sous-variété~~

l'application $\Sigma \longrightarrow \cancel{Q \times}\ \mathbb{R}_+^* \times Q \times \mathbb{R}$

$x \longrightarrow (e^{t(x)}, q(x), e^{t(x)} z(x) - f($

est de front du cobordisme lagrangien

Réciproquement si $\cancel{\Sigma}\ \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times Q \times \mathbb{R}$

est le front d'un legendrien ds $J^1($

il correspond à un cobordisme ssi

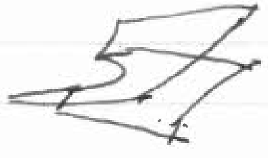
- Il n'a pas de corde de Reeb
- Près de $-\infty$ il est de la forme $(e^{t(x)}, q(x), e^{t(x)}$

$-\infty$ ——— $(e^{t(x)}, q(x), c + e$

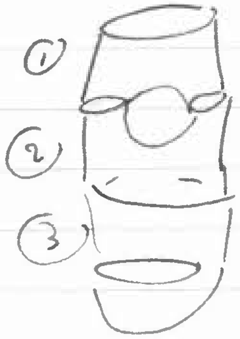
On utilise $r = e^t$ pour changer

Ex:

 cobordisme de $\emptyset$ vers

 cobordisme de $><$ vers $=$

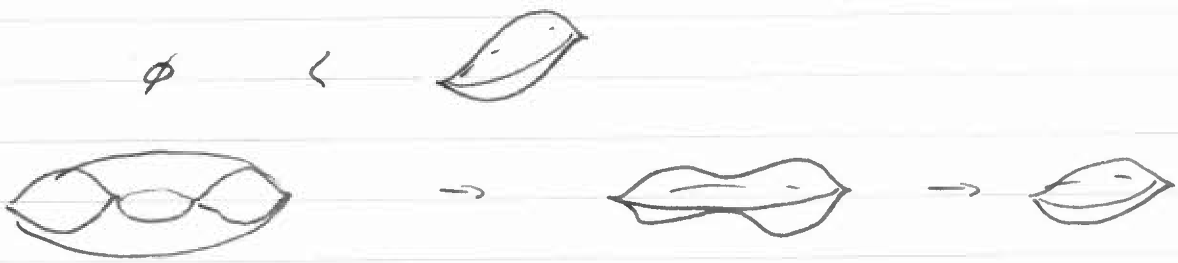
Ex : en $+\infty$



$$\begin{cases} tb(\Lambda) = 1 \\ r(\Lambda) = 0 \end{cases}$$

§3- Chirurgie

Les exemple $\emptyset \to$ ◯ $\succ \to =$ se généra
à d'autre chirurgie.



)

$h \in \{0, \dots n\}$

Soit $0 < \varepsilon < 1$ $\quad \rho_\varepsilon : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$\rho_\varepsilon(0) = 1$$
$$\rho_\varepsilon'(x) \geq 0 \quad x \geq 0$$
$$\rho_\varepsilon(x^2) = 0 \quad x^2 \geq 1 + \frac{2}{3}\varepsilon$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 + \rho_\varepsilon(x^2)(1+\varepsilon/2)\right) > 0$$

$\hookrightarrow$ $x^2 + C\rho_\varepsilon(x^2)$ convex $\quad = C$ en 0

$\quad = x^2 \quad x^2 > 1 + 2/3\,\varepsilon$

$$\sigma_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$
$$0 \leq \sigma_\varepsilon'(x) \leq (1+\varepsilon)\varepsilon^{-\frac{1}{3}}$$
$$\sigma_\varepsilon(x) = 0 \quad x \leq 1 - \varepsilon^{1/3}$$
$$\sigma_\varepsilon(x) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad x > 1 + \varepsilon^{\frac{1}{3}}$$
$$\sigma_\varepsilon(1) = 1 \quad \sigma_\varepsilon'(1) > 0 \quad \sigma_\varepsilon''(1) > 0$$
$$f_\varepsilon(x_1 \dots x_n, x_{n+1}) = \rho_\varepsilon(x_1^2 + \dots x_{h+1}^2)\,\sigma_\varepsilon(x_{n+1})$$

Soit $W_{\varepsilon,h}$ le ~~fam~~ legendrienne de $J^1(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n)$ dont le front est donné par a réunion des graph

$$\pm f_\varepsilon(x_1 \dots x_n, x_{n+1}) = ((x_1^2 + \dots x_{h+1}^2) - (x_{h+2}^2 + \dots$$
$$+ \rho_\varepsilon(x_1$$

$\to$ cobordisme entre $\quad (x_1^2 + \dots + x_h^2) - (x_{h+2}^2 + \dots x_n^2) \geq$

$$\pm(\cancel{2}(x_1)^2 + \dots - (1 \times 1$$