Feuille 2:
Champs de vecteurs hamiltoniens.

Exercice 1 :
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ et $H : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction définissant un champs hamiltonien X_H. Montrer que

$$G : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \text{ est une intégrale première de } X_H \text{ ssi } \forall q \in \mathcal{U}\ \omega_0(X_H, X_G) = 0.$$

Exercice 2 : (Kepler)
Soit $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. On considère $H : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définit par $H((x, y, z), (v_1, v_2, v_3)) = \frac{1}{2}(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. On considère aussi f_1, f_2, f_3 les composantes de $m : \mathcal{U}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $m(q, v) = q\times v$ (le moment). Montrer que f_1, f_2 et f_3 sont des intégrales premières de X_H.

Exercice 3 :
Soit X un champs de vecteur sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que le flot $\phi_X^t : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ est défini pour $t \in [0, 1]$. Montrer que le flot $\overline{\phi_X^t} : \mathcal{U} \times (\mathbb{R}^n)^* \to \mathcal{U} \times (\mathbb{R}^n)^*$ est hamiltonien pour la fonction $H(q, \alpha) = \alpha(X(q))$. (Où $\overline{\phi_X^t}$ est la symplectisation de ϕ_t vue en classe, on sait donc déjà que ce flot est symplectique).

Exercice 4 :
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ soit $\alpha : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times (\mathbb{R}^n)^*$ une 1-forme sur $\mathcal{U}$.

1. Montrer l'application $\phi_\alpha(q, \beta) = (q, \beta + \alpha(q))$ est symplectique sur $\mathcal{U} \times (\mathbb{R}^n)^*$ ssi α est fermée.
2. Sous quelle condition le flot $\phi_t(q, \beta) = (q, \beta + t\alpha(q))$ est-il Hamiltonien?

Exercice 5 :
Soit $S^2 = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ munie de la structure symplectique donné par l'atlas d'Archimède vu en classe. (On rappelle par exemple que une carte symplectique est donnée par $(x, y, z) \to (\arccos(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}), z)$ sur un domaine de définition approprié). Calculer le flot hamiltonien associé à la fonction $H(x, y, z) = z$. Que vaut-il au temps 2π?

Exercice 6 :
Soit $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ le tore.

1. Montrer que la structure symplectique sur $\mathbb{R}^2$ descend au quotient et décrire un atlas symplectique explicite sur T^2.
2. On note $[x, y]$ la classe d'équivalence de (x, y) dans T^2. Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$ l'application $[x, y] \to [x + t, y]$ est un symplectomorphisme de T^2. Que vaut-il pour $t = 1$?

Exercice 7 : (Action symplectique)
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ et $H : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien (dépendendant du temps). Pour $x_0 = (q_0, p_0)$ et $y_1 = (q_1, p_1)$ on note $\Omega(\mathcal{U}, x_0, x_1) = \{\gamma : [0,1] \to \mathcal{U} | \gamma \text{ est lisse et } \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}$.
On définit la fonctionnelle $\mathcal{A} : \Omega(\mathcal{U}, x_0, x_1) \to \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^1 \left(\langle p_\gamma(t), \dot{q}_\gamma(t) \rangle - H(t, \gamma(t)) \right) dt,$$

où $\gamma(t) = (q_\gamma(t), p_\gamma(t))$ avec $p_\gamma(t), q_\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit $\gamma_s \in \Omega(\mathcal{U}, x_0, x_1)$ tel que $\frac{d}{ds}_{s=0} \gamma_s(t) = V(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ (entre autre notez que $V(0) = V(1) = 0$). Montrer que
$$\frac{d}{ds} \mathcal{A}(\gamma_s) = \int_0^1 \omega_0 \big(\dot{\gamma}(t) - X_{H_t}(\gamma(t)), V(t) \big) dt.$$

2. En déduire que γ est un point critique de $\mathcal{A}$ ssi γ est une trajectoire de X_{H_t}.