Département de Mathématiques
Université de Nantes

Feuille 3:
Algèbre linéaire symplectique.

Exercice 1 :
Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Soit U_0, U_1 deux sous-espaces vectoriels de V. Montrer:

- $({U_0}^\omega)^\omega = U_0$.
- $(U_0 + U_1)^\omega = U_0^\omega \cap U_1^\omega$.
- $(U_0 \cap U_1)^\omega = U_0^\omega + U_1^\omega$.

Exercice 2 :
Soit (V_0, ω_0) et (V_1, ω_1) deux espaces vectoriels de dimension $2n$. symplectiques.

1. Montrer que $V_0 \oplus V_1$ muni de la forme $\omega := -\omega_0 \oplus \omega_1$ défini par $\omega((u_0, u_1), (v_0, v_1)) = -\omega_0(u_0, v_0) + \omega_1(u_1, v_1)$ est symplectique.
2. Soit $\phi : V_0 \to V_1$ un symplectomorphisme. Montrer $\Gamma(\phi) = \{(v, \phi(v)) | v \in V_0\}$ est un sous-espace lagrangien de $V_0 \oplus V_1$.

Exercice 3 :
Soit E un espace vectoriel. On rappelle que $E \oplus E^*$ est muni d'une structure symplectique naturelle définie par $\omega_0(v_0, \alpha_0), (v_1, \alpha_1)) = \alpha_1(v_0) - \alpha_0(v_1)$. Soit U un sous-espace vectoriel de E. On définit $Nil(U) = \{\alpha \in E^* | \alpha|_U = 0\}$. Montrer que $U \oplus Nil(U)$ est lagrangien dans $E \oplus E^*$.

Exercice 4 :
On considère $\mathbb{R}^{2n}$ muni de sa structure symplectique standard. On rappelle que $U(n)$ est un sous-groupe de $Sp(n)$. Soit $L_0 = \{(q, 0) | q \in \mathbb{R}^n\}$ un espace lagrangien. On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ l'ensemble de tout les sous-espaces lagrangiens.

1. Montrer que $U(n)$ agit sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ de manière transitive.
2. Montrer que $Stab(L_0) = O(n)$.
3. En déduire que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}) = U(n)/O(n)$ (cela muni donc l'espace des lagrangien d'une structure de variété lisse).

Exercice 5 :
Soit (V_0, ω_0), $(V_1, \omega_1$ et (V_2, ω_2) trois espace vectoriel symplectique. On considère $V_0 \oplus V_1$ et $V_1 \oplus V_2$ munis des structures symplectiques de l'exercice 2.

1. Montrer que $\Delta = \{(v_0, v_1, v_1, v_2) || v_0 \in V_0, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ est co-isotrope dans $V_0 \oplus V_1 \oplus V_1 \oplus V_2$ muni la forme ω de l'exercice 2.
2. Montrer que la réduction Δ / Δ^ω est symplectomorphe à $V_0 \oplus V_2$.
3. Soit $\phi_1 : V_0 \to V_1$ et $\phi_2 : V_1 \to V_2$ deux symplectomorphismes. Montrer que $\Gamma(\phi_1) \oplus \Gamma(\phi_2)$ est lagrangien dans $V_0 \oplus V_1 \oplus V_1 \oplus V_2$. Identifier $\pi(\Gamma(\phi_1) \oplus \Gamma(\phi_2))$ en tant que sous-espace lagrangien de $V_0 \oplus V_2$.

Exercice 6 :
Soit ω_0 la forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$ et on note $\{e_1, \cdots, e_n, e'_1, \cdots, e'_n\}$ sa base canonique.

1. Montrer que en tant qu'élément de $\Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})^*$, $\omega_0 = \sum_{i=1}^n (e_i)^* \wedge (e'_i)^*$.
2. En déduire que $\omega_0^n = n!(e_1)^* \wedge (e'_1)^* \wedge \cdots \wedge (e_n)^* \wedge (e'_n)^*$.
3. Soit $\phi \in Sp(n)$ une matrice symplectique, montrer que $\det \phi = 1$.

Exercice 7 : Tassement lagrangien.
Soit ω_0 la forme symplectique standard sur $E \oplus E^*$.

1. Soit $f : E \to E$ un isomorphisme. Relever, en vous inspirant du chapitre précédent, f à un symplectomorphisme de $E \oplus E^*$.
2. En déduire pour tout $r, R \in \mathbb{R}$ il existe un symplectomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $B^{2n}(R) \subset C^{2n}_{\mathsf{lag}}(r)$ où $C^{2n}_{\mathsf{lag}}(r) = \{q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots p_n | q_1^2 + q_2^2 < r^2\}$.