Feuille 4:
Variétés symplectiques et réduction.

Exercice 1 :
On considère le cotagent d'une variété M, T^*M muni de sa forme canonique λ.

1. Soit α une 1-forme (vue comme section $\alpha : M \to T^*M$). Montrer $\alpha^*\lambda = \alpha$.

2. En déduire que α est un plongement lagrangien ssi α est fermée.

Exercice 2 :
On considère $\mathbb{C}^n$ muni de la forme symplectique standard donné par $\omega_0(X,Y) = \langle iX, Y\rangle$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit sclaire habituel. Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et c un valeur régulière de f.
Montrer que $(f^{-1}(c), \omega_0)$ est une variété symplectique.

Exercice 3 :
Soit N une sous-variété d'une variétés M. On note

$$\mathrm{Nil}(N) = \{(q,p) | q \in N \; p(T_q N) = 0\} \subset T^*M.$$

Montrer que $\mathrm{Nil}(N)$ est une sous-variété de T^*M pour sa structure symplectique standard.

Exercice 4 :
Soit $(M, d\lambda)$ une variété symplectique exacte. Soit $\{\phi_t\}$ une isotopie Hamiltonienne pour engendré par une fonction $H : [0,1] \times M \to \mathbb{R}$.

1. Soit $F : M \to \mathbb{R}$ définie par $F(q) = \int_0^1 \left(\lambda(X_t^H(\phi_t(q)) + H(\phi_t(q))\right) dt$. Montrer que $\phi_1^*\lambda = \lambda + dF$.

2. En déduire que si L est une sous-variété lagrangienne exacte de M alors $\phi_1(L)$ est une sous-variété lagrangienne exacte de M.

Exercice 5 :
Soit (M,ω) et (M',ω') deux variétés symplectique. On note $\omega \ominus \omega'$ la forme sur $M \times M'$ définie par

$$\omega \ominus \omega'((X,Y),(X'Y')) = \omega(X,X') - \omega'(Y,Y').$$

1. Montrer que $\omega \ominus \omega'$ est une forme symplectique.

2. Montrer que si L est une lagrangienne de M est L' une lagrangienne de M' alors $L \times L'$ est une lagrangienne de $M \times M'$.

3. Montrer que si $\phi : (M,\omega) \to (M',\omega')$ est un symplectomorphisme alors $\Gamma(\phi) = \{(q, \phi(q)\}$ est une lagrangienne de $(M \times M', \omega \ominus \omega')$.

4. Déduire du théorème de Weintein que si M est compacte un difféomorphisme Hamiltonien de (M,ω) est petit en norme C^2 alors il a au moins autant de point fixe que le nombre minimum de points critiques d'une fonction sur M.

Exercice 6 :
Soit (M, ω), (M', ω') et (M'', ω'') trois variétés symplectiques. L'exercice précédent donne ne structure symplectique sur $(M \times M' \times M' \times M'', \Omega \ominus \Omega')$ où $\Omega = \omega \ominus \omega'$ et $\Omega' = \omega' \ominus \omega''$.

1. Montrer que $Q = \{(q, q', q', q'') | q \in M, q' \in M',\ q'' \in M''\}$ est co-isotrope.
2. Montrer que sa réduction est $(M \times M'', \omega \ominus \omega'')$.
3. Montrer que si $\phi : M \to M'$ et $\phi' : M' \to M''$ sont des symplectomorphisme alors la pair $(Q, \Gamma(\phi) \times \Gamma(\phi'))$ est reductible.
4. Décrire la réduction de $\Gamma(\phi) \times \Gamma(\phi')$ dans $(M \times M'', \omega \ominus \omega'')$.