# Chapitre 2 : Algèbre linéaire symplectique

## §1 - Définition

Soit $V$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Définition : Une forme symplectique $\omega$ sur $V$ est une application bilinéaire
$\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ t.q.

① $\omega(u,v) = -\omega(v,u)$

② $\omega$ est non dégénérée

$(V,\omega)$ est appelé un espace vectoriel symplectique.

$\omega^{\#} : V \to V^*$ est un isomorphisme
$v \mapsto (w \mapsto \omega(v,w))$

on note $\omega^{\flat} : V^* \to V$ son inverse

Si $e_1 \dots e_n$ est une base de $V$ alors la matrice $M_\omega$ de $\omega$ dans la base $\{e_i\}$ est antisymétrique (par ①) et inversible (par ②)

$$\det(M_\omega) = \det(M_\omega^T) = \det(-M_\omega) = (-1)^n \det(M_\omega)$$

et comme $\det M_\omega \neq 0 \Rightarrow n$ est paire

Ex : ① $V = \mathbb{R}^{2n}$ $\omega_0((q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n), (q_1' \dots q_n', p_1' \dots p_n'))$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i' q_i - p_i q_i'$$

② $V = W \oplus W^*$ $\omega_0((v,\alpha),(v',\alpha'))$
$$= \alpha'(v) - \alpha(v')$$

(3) $V$ complexe de dim $n$ (sur $\mathbb{C}$)

$h : V \times V \to \mathbb{C}$ forme hermitienne

$h(\lambda v, \mu w) = \lambda \bar{\mu}\, h(v,w)$, non deg, $h(v,w) = \overline{h(w,v)}$

on écrit $h(v,w) = g(v,w) + i\,\omega(v,w)$

alors $g \to$ structure euclidienne
$\omega \to$ forme symplectique

<u>Définition</u> 2 : Soit $(V, \omega)$ espace symplectique et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel alors

$W^\omega = \{ v \in V \mid \forall w \in W \ \omega(v,w) = 0 \}$

orthogonal de $W$ pour $\omega$

$= \ker \omega^\#_W$ où $\omega^\#_W : V \to W^*$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "\omega^\#"'] & W^* \\ V^* \arrow[ur, "i^*"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Rem</u> : $i^*$ surjective $\to \omega^\#_W$ surjective $\to \dim W^\omega = \dim V - \dim W$

et $(W^\omega)^\omega = W$

<u>Définition</u> 3 :

(1) $W$ est <u>isotrope</u> si $W \subset W^\omega$ ($\Rightarrow \dim W \leq n$)

(2) $W$ est <u>coisotrope</u> si $W^\omega \subset W$ ($\Rightarrow \dim W \geq n$)

(3) $W$ est <u>lagrangien</u> si $W^\omega = W$ ($\Rightarrow \dim W = n$)

<u>Exemple</u> :

(a) Soit $v \in W$ alors $\omega(v,v) = 0$ $\quad \langle v \rangle \subset \langle v \rangle^\omega$
$\Rightarrow \langle v \rangle$ est isotrope

(b) Soit $W \subset V$ de codim 1 alors si $W^\omega \not\subset W$
$\exists\, v \notin W \quad v \in W^\omega$ donc $\begin{matrix} \omega(v,v) = 0 \\ \omega(v,w) = 0 \ \forall w \in W \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \omega(v,u) = 0 \\ \forall u \in V \end{matrix}$

Donc $u \in \ker \omega$ $\rightarrow \leftarrow$

$\Rightarrow W$ co-isotrope

## §2 - Bases symplectique

On montre maintenant un résultat d'existence de sous-espaces lagrangiens

**Thm 4** : Soit $W \subset (V, \omega)$ isotrope alors $\exists L$ lagrangien t.q. $W \subset L$

**Dem** : Soit $W$ isotrope. Si $\dim W = n$ alors $W$ est lagrangien en effet $\dim W^\omega = n$ et $W \subset W^\omega \Rightarrow W = W^\omega$.

Si $\dim W < n$ alors $\dim W^\omega > n$

~~$\omega^\#_W : V \to W^*$ et t.q.~~

$\Rightarrow \exists v \in W^\omega$ $v \notin W$

$\cdot$ $W \oplus \langle v \rangle$ est isotrope :

$$\omega(w + \lambda v, w' + \lambda' v) = \omega(w, w') + \lambda \omega(v, w') + \lambda' \omega(w, v) + \lambda\lambda' \omega(v, v) = 0$$

et dim $W \oplus \langle v \rangle$. On termine par induction $\square$

On peut améliorer la preuve pour obtenir

**Thm 5** : Soit $L \subset V$ un lagrangien alors $\exists L' \subset V$ lagrangien t.q. $V = L \oplus L'$

**Dem** : Soit $L$ lagrangien et $W \subset V$ isotrope t.q. $L \cap W = \{0\}$ alors

si $\dim W = n$ on a $L \oplus W = V$ et $W$ lagrangien sinon $\dim W < n$ et donc

$$\omega_L^\#\big|_W : W \to L^* \text{ n'est pas surjective}$$

~~Soit~~ $\cancel{v \notin \mathrm{im}\, \omega^\#_L|_W}$

Par ailleurs $W \cap L = \{0\} \Rightarrow W^\omega + \underset{(=L^\omega)}{L} = V$

$$\Rightarrow \omega_L^\#\big|_{W^\omega} : W^\omega \to L^* \text{ est surjective}$$
$$(\text{car } \omega_L^\#\big|_L \equiv 0)$$

donc $\exists\, v \in W^\omega$ t.q. $v \notin \mathrm{im}\, \omega_L^\#\big|_W$

et donc $\to$ $W \oplus \langle v \rangle$ isotrope

$\to (W \oplus \langle v \rangle) \cap L = 0$

car si $w + \lambda v \in L$ avec $w \in W$

$$\omega(w,u) = -\lambda\, \omega(v,u) \quad \forall\, u \in L \Rightarrow \omega_L^\#(w) = -\lambda\, \omega_L^\#(v)$$

on termine par induction $\square$

Soit $L, L'$ t.q. $V = L \oplus L'$

alors $\omega((u_0+u_1),(v_0+v_1)) = \omega(u_0,v_1) + \omega(u_1,v_0)$

$= \omega(u_0,v_1) - \omega(v_0,u_1)$

par ailleurs $f : \begin{cases} L' \to L^* \\ u \mapsto \omega^\#(u)\big|_{L} \end{cases}$ est un isomorphisme

et avec cet identification

$$\omega((u_0,\alpha_0),(u_1,\alpha_1)) = \alpha_0(u_1) - \alpha_1(u_0)$$

$$\Rightarrow (V,\omega) \simeq (L \oplus L^*, \omega_0)$$

en choisissant $e_1 \dots e_n$ base de $L$ et $(e_1' \dots e_n')$ où $e_i' = f^{-1}(e_i^*)$ on trouve

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(e_i', e_j') = 0 \quad (L, L' \text{ lag})$$

$$\omega(e_i, e_j') = e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$$

Et donc $(V,\omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.
On a donc démontré

<u>Thm 6</u> : Si $(V,\omega)$ est symplectique alors $\exists (e_1 \cdots e_n, e_1' \cdots e_n')$ base de $V$ t.q.

$$M_\omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = J_0$$

une telle base est appelée <u>base symplectique</u>

<u>Definit 7</u>. Un symplectomorphisme de $(V,\omega)$ est

$$f : V \to V \quad \text{t.q.} \quad f^*\omega = \omega$$

On note $\mathrm{Symp}(V,\omega) = \{f \text{ symplectomorphism}\}$

<u>Rm</u> : $f$ est forcément inversible

et $\mathrm{Symp}(V,\omega)$ est un groupe.

<u>Ex</u> : $\mathrm{Symp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \hat{=} \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J_0 A = J_0\}$

## §3 - <u>Reduction symplectique</u>

Soit $(V,\omega)$ un espace vectoriel symplectique.

Soit $W \subset V$ un sous-espace co-isotrope

Alors

<u>Théorème 7</u> : ① $\bar{\omega}$ : $W/W^\omega \times W/W^\omega \to \mathbb{R}$ est
$[v], [v'] \to \omega(v,v')$
bien défini

② $\bar{\omega}$ est symplectique

**Dem :** $[v_0] = [v_1]$ i.e. $v_0 - v_1 \in W^\omega$

alors $\omega(v_0, u) = \omega(v_1, u)$ $\forall u \in W$ $\Rightarrow$ (1)

Soit $[u] \in W/_{W^\omega}$ $\forall [v] \in W/_{W^\omega}$

$\bar{\omega}([u],[v]) = 0 \Rightarrow \omega(u, v) = 0 \; \forall v \in W$

$\Rightarrow u \in W^\omega \Rightarrow [u] = 0$ ☒

On note $\pi : W \to W/_{W^\omega}$

**Thm 8 :** Soit $L \subset (V, \omega)$ lagrangien
alors $\pi(L \cap W)$ est lagrangien dans $(W/_{W^\omega}, [\omega])$

**Dem :** On remarque que
$(L \cap W) + W^\omega$ est lagrangien :

$$((L \cap W) + W^\omega)^\omega = (L^\omega + W^\omega) \cap W$$

$$= (L + W^\omega) \cap W = (L \cap W) + (W^\omega \cap W)$$

$$= L \cap W + W^\omega \quad (\text{car } W^\omega \subset W)$$

et ~~donc~~ $\forall [w], [v] \in \pi(L \cap W)$

$$\bar{\omega}([v], [w]) = \omega(v, w) = 0$$

Soit $[v] \in \pi(L \cap W)^{\bar{\omega}}$

$\Rightarrow \forall [w] \in \pi(L \cap W)$ $\bar{\omega}([v], [w]) = 0$

$\Rightarrow \forall w \in (L \cap W) + W^\omega$ $\omega(v, w) = 0$

$\Rightarrow v \in ((L \cap W) + W^\omega)^\omega \Rightarrow v \in (L \cap W + W^\omega)$

$\Rightarrow [v] \in \pi(L \cap W)$ $\quad \pi(L \cap W)^\omega \subset \pi(L \cap W)$

$\Rightarrow \pi(L \cap W) = \pi(L \cap W)^\omega \Rightarrow \pi(L \cap W)$ lagrangien ☒

Au chapitre 4 on utilisera une version lisse de ce résultat pour construire des sous variétés lagrangiennes