Département de Mathématiques
Université de Nantes



# Feuille 3:
# Variétés symplectiques.

**Exercice 1 :**
On considère $\mathbb{C}^n$ muni de la forme symplectique standard donné par $\omega_0(X, Y) = \langle iX, Y\rangle$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit sclaire habituel. Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $c$ un valeur régulière de $f$.
Montrer que $(f^{-1}(c), \omega_0)$ est une variété symplectique.

**Exercice 2 :**
Soit $N$ une sous-variété d'une variétés $M$. On note

$$\mathrm{Nil}(N) = \{(q, p)|q \in N\ p(T_qN) = 0\} \subset T^*M.$$

Montrer que $\mathrm{Nil}(N)$ est une sous-variété lagrangienne exacte de $T^*M$ pour sa structure symplectique standard.

**Exercice 3 :**
Soit $(M, d\lambda)$ une variété symplectique exacte. Soit $\{\phi_t\}$ une isotopie Hamiltonienne pour engendré par une fonction $H : [0, 1] \times M \to \mathbb{R}$.

1. Soit $F : M \to \mathbb{R}$ définie par $F(q) = \int_0^1 \left(\lambda(X_t^H(\phi_t(q)) + H(\phi_t(q))\right) dt$. Montrer que $\phi_1^*\lambda = \lambda + dF$.
2. En déduire que si $L$ est une sous-variété lagrangienne exacte de $M$ alors $\phi_1(L)$ est une sous-variété lagrangienne exacte de $M$.

**Exercice 4 :**
Soit $Q$ une variété et $X$ un champs de vecteur sur $Q$. On note $\lambda$ la forme canonique standard sur $T^*Q$ de sorte que la structure symplectique sur $T^*Q$ est $-d\lambda$. Montrer que le flot Hamiltonien de la fonction $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ donnée par $H(p, q) = p(X(q))$ est $\widetilde{\phi_t^X}$ (le relevé du flot de $X$ a une famille de symplectomorphisme de $T^*Q$).

**Exercice 5 :**
On note $S^2 = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et $H : S^2 \to \mathbb{R}$ donné par $H(x, y, z) = z$. Calculer $X_H$ et son flot au temps $2\pi$.