Approximation legendrienne et stationnement en parallèle..

Baptiste Chantraine

Université de Nantes

20 mars 2019

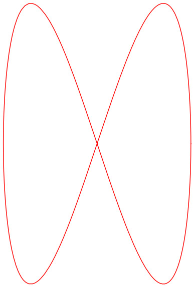
Considérons une courbe

Considérons une courbe paramétrée par

$$\begin{array}{cccc} \gamma : & [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \rightarrow & (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{array}$$

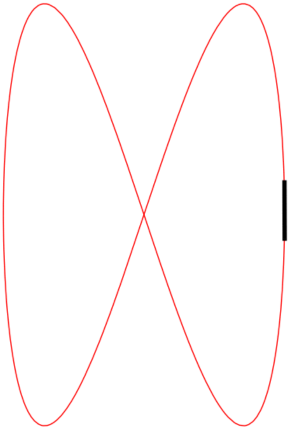
Considérons une courbe paramétrée par

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{array}$$

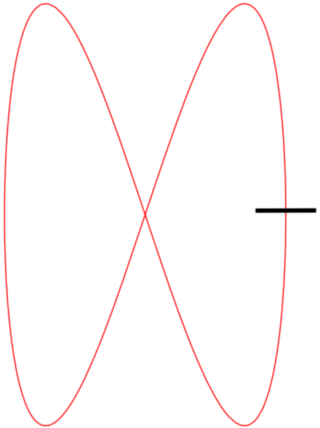


Si cette courbe décrit la trajectoire d'un object muni d'une "direction" (comme une voiture, un patin à glace, ...),

Si cette courbe décrit la trajectoire d'un object muni d'une "direction" (comme une voiture, un patin à glace, ...),



Si cette courbe décrit la trajectoire d'un object muni d'une "direction" (comme une voiture, un patin à glace, ...),



Si cette courbe décrit la trajectoire d'un object muni d'une "direction" (comme une voiture, un patin à glace, ...),

alors cette direction $\theta(t) \in \mathbb{R} \mod 2\pi$ satisfait

Si cette courbe décrit la trajectoire d'un object muni d'une "direction" (comme une voiture, un patin à glace, ...),

alors cette direction $\theta(t) \in \mathbb{R} \bmod 2\pi$ satisfait

$-\sin(\theta(t))\gamma_1'(t) + cos(\theta(t))\gamma_2'(t) = 0.$

Equation de contact.

En chaque point (x, y, θ) de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \bmod 2\pi$, les mouvements de notre objets sont confinés dans le plan d'équation $-\sin(\theta)v + \cos(\theta)w = 0$.

Equation de contact.

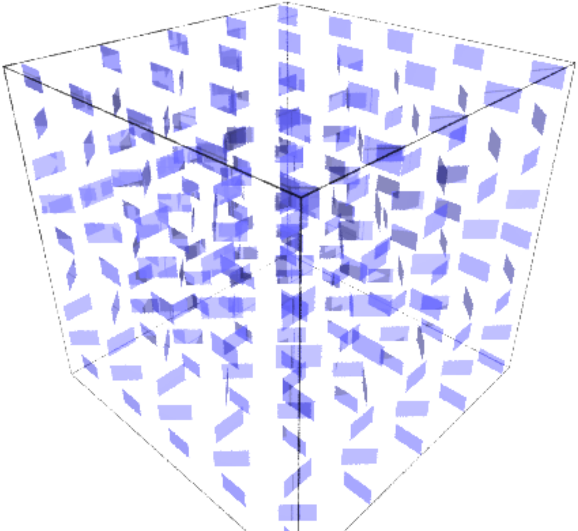
En chaque point (x, y, θ) de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \bmod 2\pi$, les mouvements de notre objets sont confinés dans le plan d'équation $-\sin(\theta)v + \cos(\theta)w = 0$.

Ce plan est appelé le *plan de contact* au point (x, y, θ).

Equation de contact.

En chaque point (x, y, θ) de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mod 2\pi$, les mouvements de notre objets sont confinés dans le plan d'équation $-\sin(\theta)v + \cos(\theta)w = 0$.

Ce plan est appelé le *plan de contact* au point (x, y, θ). L'ensemble de tout ces plans est appelé la *structure de contact* ξ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mod 2\pi$



Théorème

Il n'existe aucune surface S qui soit tangente à ξ en chacun de ses points.

En dérivant

$$-\sin(\theta(s,t))\frac{\partial x}{\partial s}(s,t)+\cos(\theta(s,t))\frac{\partial y}{\partial s}=0$$
$$-\sin(\theta(s,t))\frac{\partial x}{\partial t}(s,t)+\cos(\theta(s,t))\frac{\partial y}{\partial t}=0$$

on obtient :

En dérivant

$$
\begin{aligned}
-\sin(\theta(s,t))\frac{\partial x}{\partial s}(s,t)+\cos(\theta(s,t))\frac{\partial y}{\partial s} &= 0\\
-\sin(\theta(s,t))\frac{\partial x}{\partial t}(s,t)+\cos(\theta(s,t))\frac{\partial y}{\partial t} &= 0
\end{aligned}
$$

on obtient :

$$
\begin{aligned}
-\sin(\theta)\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial s}-\cos(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}+\cos(\theta)\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial s}-\sin(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} &= 0\\
-\sin(\theta)\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}-\cos(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}+\cos(\theta)\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t}-\sin(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} &= 0
\end{aligned}
$$

Idée de preuve.

$$-\sin(\theta)\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial s} - \cos(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} + \cos(\theta)\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial s} - \sin(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} = 0$$

$$-\sin(\theta)\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t} - \cos(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} + \cos(\theta)\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t} - \sin(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

$$-\sin(\theta)\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial s} - \cos(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} + \cos(\theta)\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial s} - \sin(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} = 0$$
$$-\sin(\theta)\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t} - \cos(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} + \cos(\theta)\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t} - \sin(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

Et donc

$$-\cos(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} - \sin(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} = 0$$
$$-\cos(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} - \sin(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

$$-\sin(\theta)\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} - \cos(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} + \cos(\theta)\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} - \sin(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} = 0$$
$$-\sin(\theta)\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} - \cos(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} + \cos(\theta)\frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} - \sin(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

Et donc

$$-\cos(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} - \sin(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} = 0$$
$$-\cos(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} - \sin(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

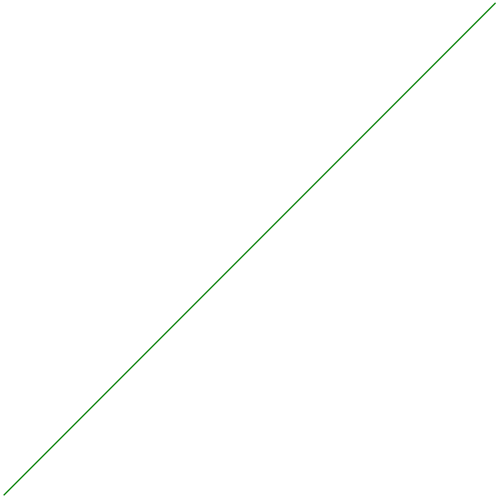
On conclut que S ne peut être une surface.

Une courbe $(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \theta(t))$ est *legendrienne* si elle est tangente à ξ en chacun de ses points.

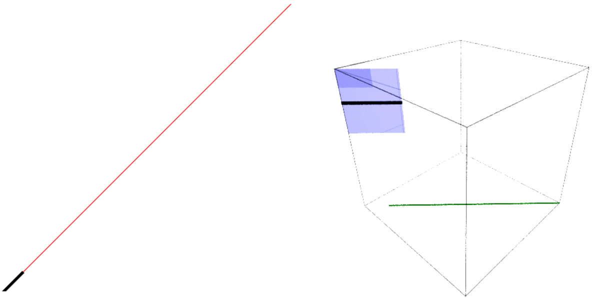
Une courbe $(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \theta(t))$ est *legendrienne* si elle est tangente à ξ en chacun de ses points. Cela se traduit par l'équation

$$-\sin(\theta(t))\gamma_1'(t) + \cos(\theta(t))\gamma_2'(t) = 0.$$

Exemples.



Exemples.



Exemples.

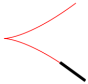
Exemples

Exemples : le point de rebroussement.

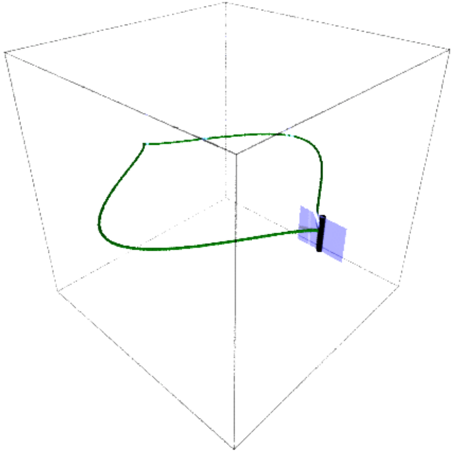
La courbe $t \to (t^2, t^3)$ admet aussi un relevé legendrien.

Exemples : le point de rebroussement.

La courbe $t \to (t^2, t^3)$ admet aussi un relevé legendrien.



Il est paramétrée par $t \to (t^2, t^3, \arctan(\frac{3t}{2}))$.



Remarque

On peut toujours relier n'importe quels deux points par une courbe legendrienne.

Remarque

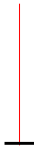
On peut toujours relier n'importe quels deux points par une courbe legendrienne.

Théorème

Toute trajectoire dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ *mod* 2π *peut être approché par une courbe legendrienne.*

Pour comprendre la preuve, il suffit d'approximer la trajectoire la moins legendrienne qu'on puisse imaginer.

Pour comprendre la preuve, il suffit d'approximer la trajectoire la moins legendrienne qu'on puisse imaginer.



Pour comprendre la preuve, il suffit d'approximer la trajectoire la moins legendrienne qu'on puisse imaginer.