# La perspective
# de Brunellesci à Desargues

Référence :

Didier Bessot & Jean-Pierre Le Goff
<u>Mais où est donc passée la troisième dimension</u>

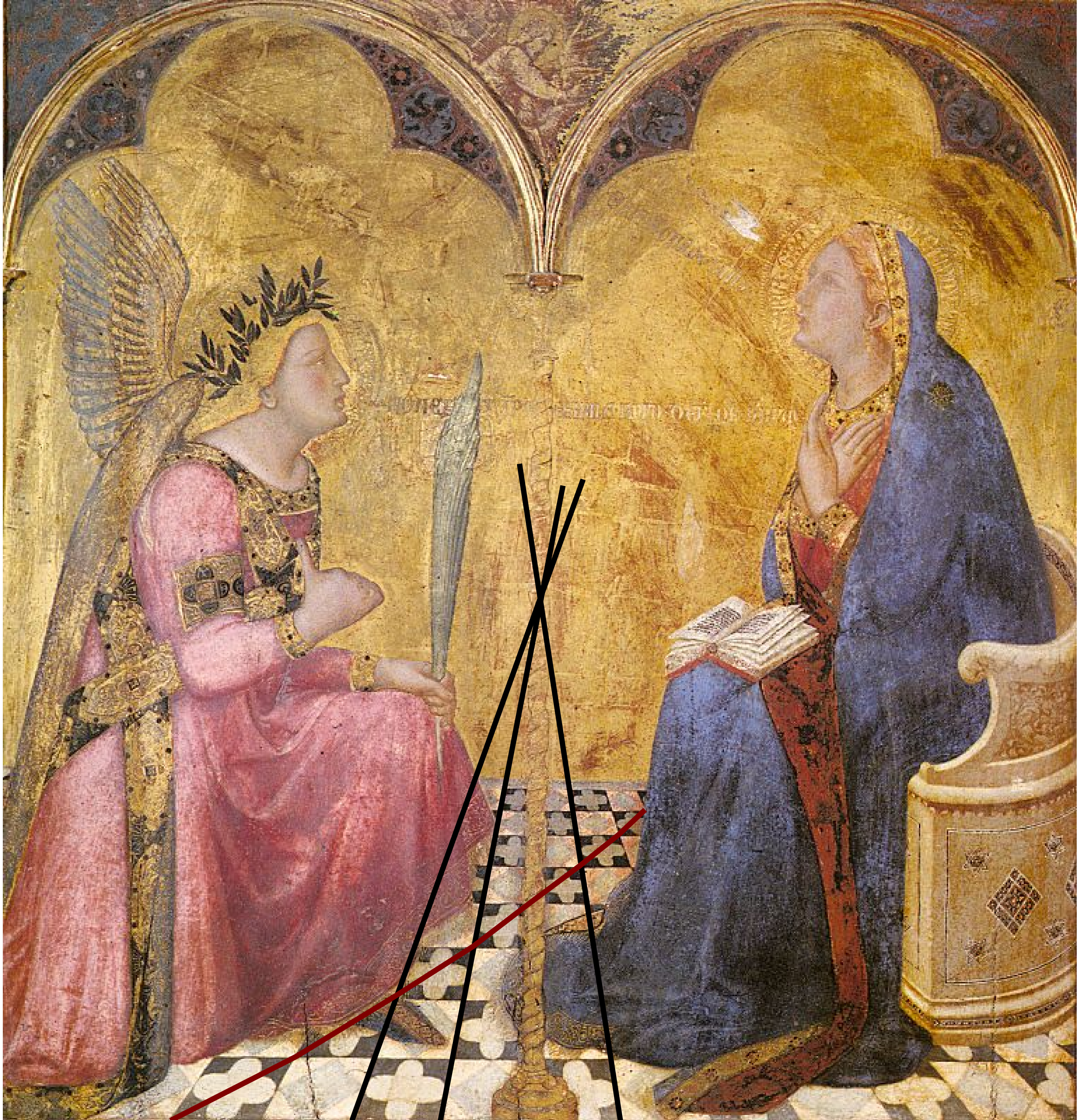
*in* Commission inter-IREM d'Épistémologie et d'Histoire des Mathématiques. Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques. Paris, Ellipses, 1993

L'optique d'Euclide décrit des rayons visuels formant un faisceau de lignes concourant en un point (l'oeil).

L'image plane vient de la peinture, fresques sur des murs (et pas sur des parois de grottes comme à Lascaux), puis sur des tableaux de bois.

Au XIVe siècle, en Italie, en Europe du Nord, la peinture s'oriente vers plus de réalisme, suite à une demande laïque, et traite des scènes dans des paysages.

Comment donner l'illusion de la profondeur ?

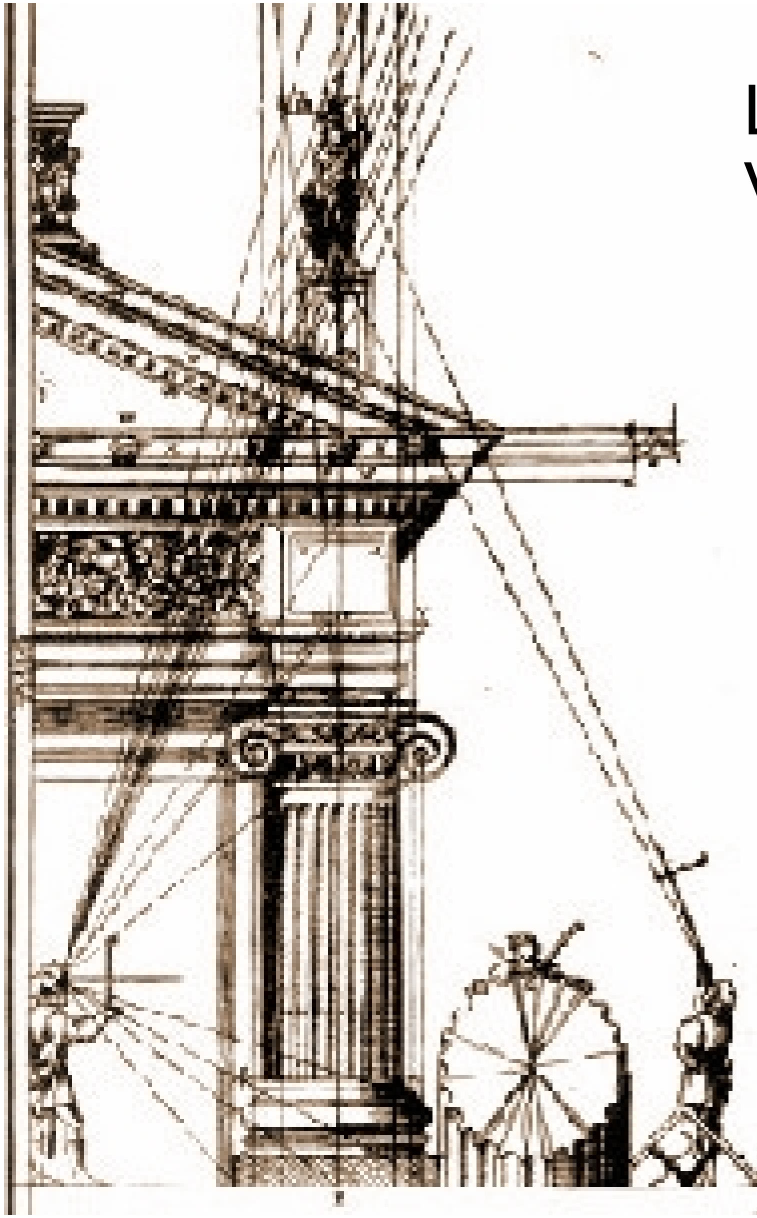


Ambrogio Lorenzetti
(Sienne 1344)

# L'oeil du peintre et la fenêtre ouverte sur le monde

L'apparition du point de fuite laisse une trace de l'oeil de l'artiste sur le tableau même.

On dit souvent que c'est un changement fondamental du rôle du peintre qui est ici à l'oeuvre.



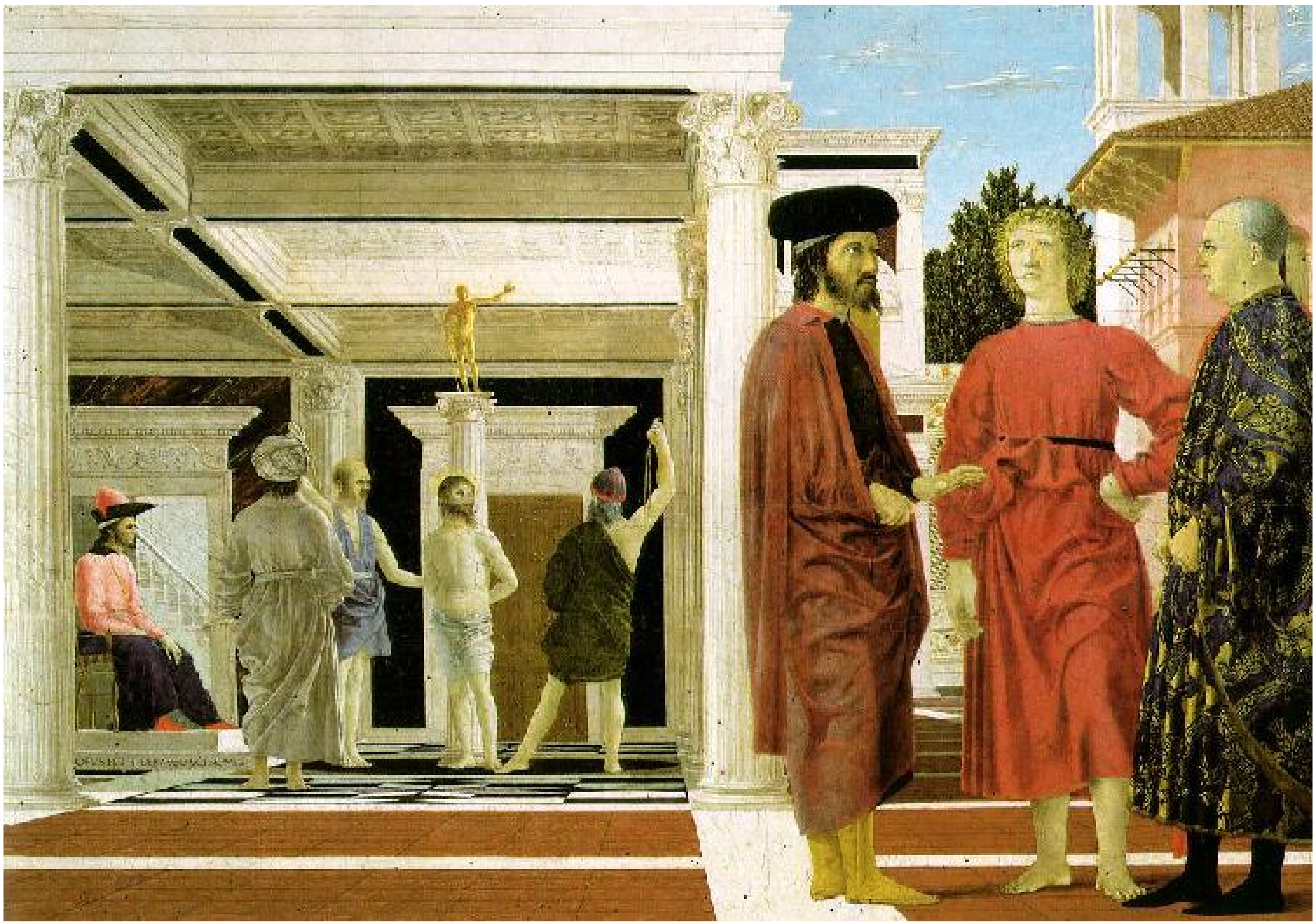
Les traités d'architecture de Vitruve sont de nouveau étudiés.

# Brunelleschi

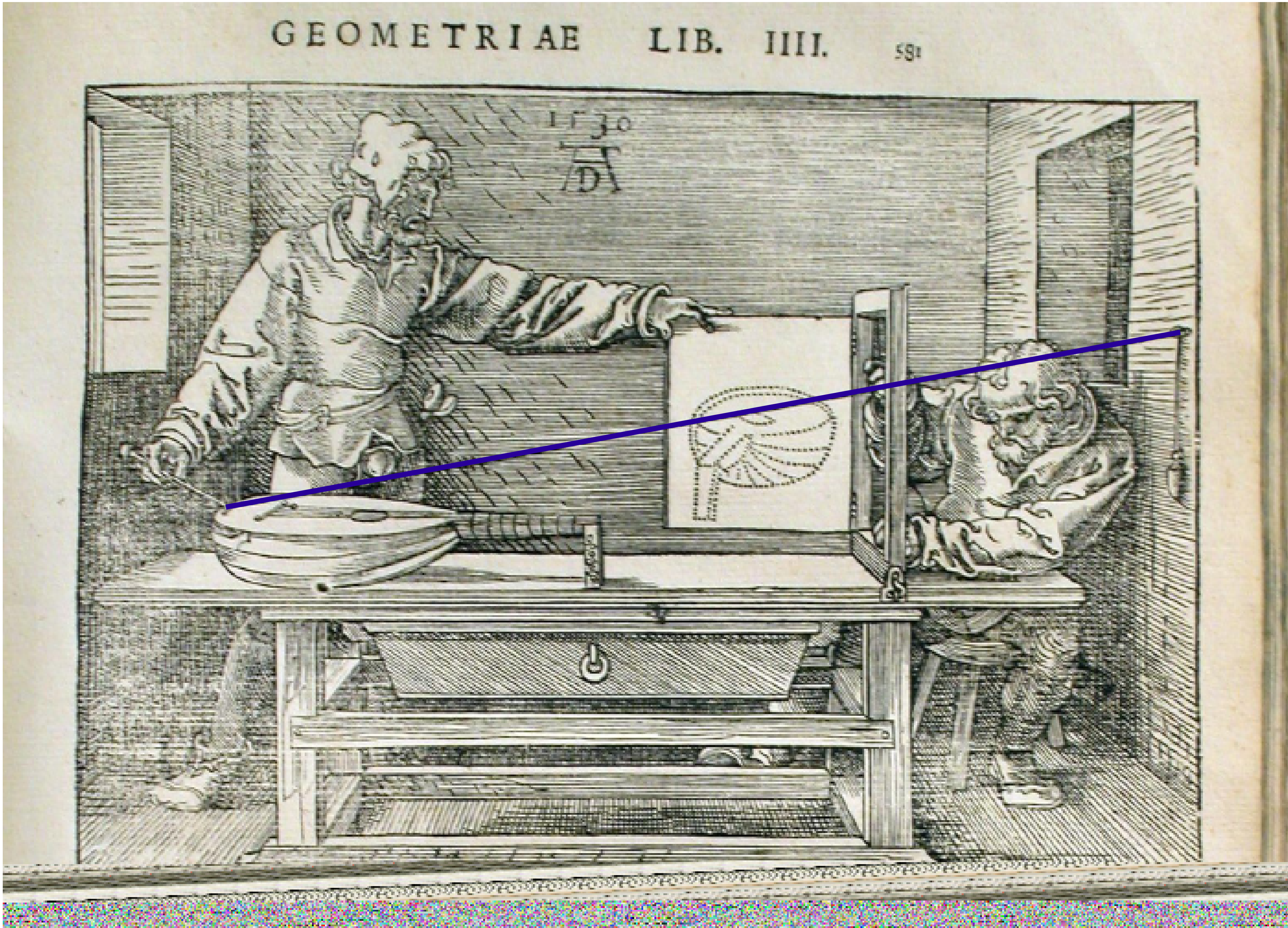
Brunelleschi démontre sa nouvelle méthode en donnant l'illusion de la réalité : il place l'observateur du tableau en face du point de fuite principal.

Méthode exposé par Alberti en 1435 dans
De Pictura.

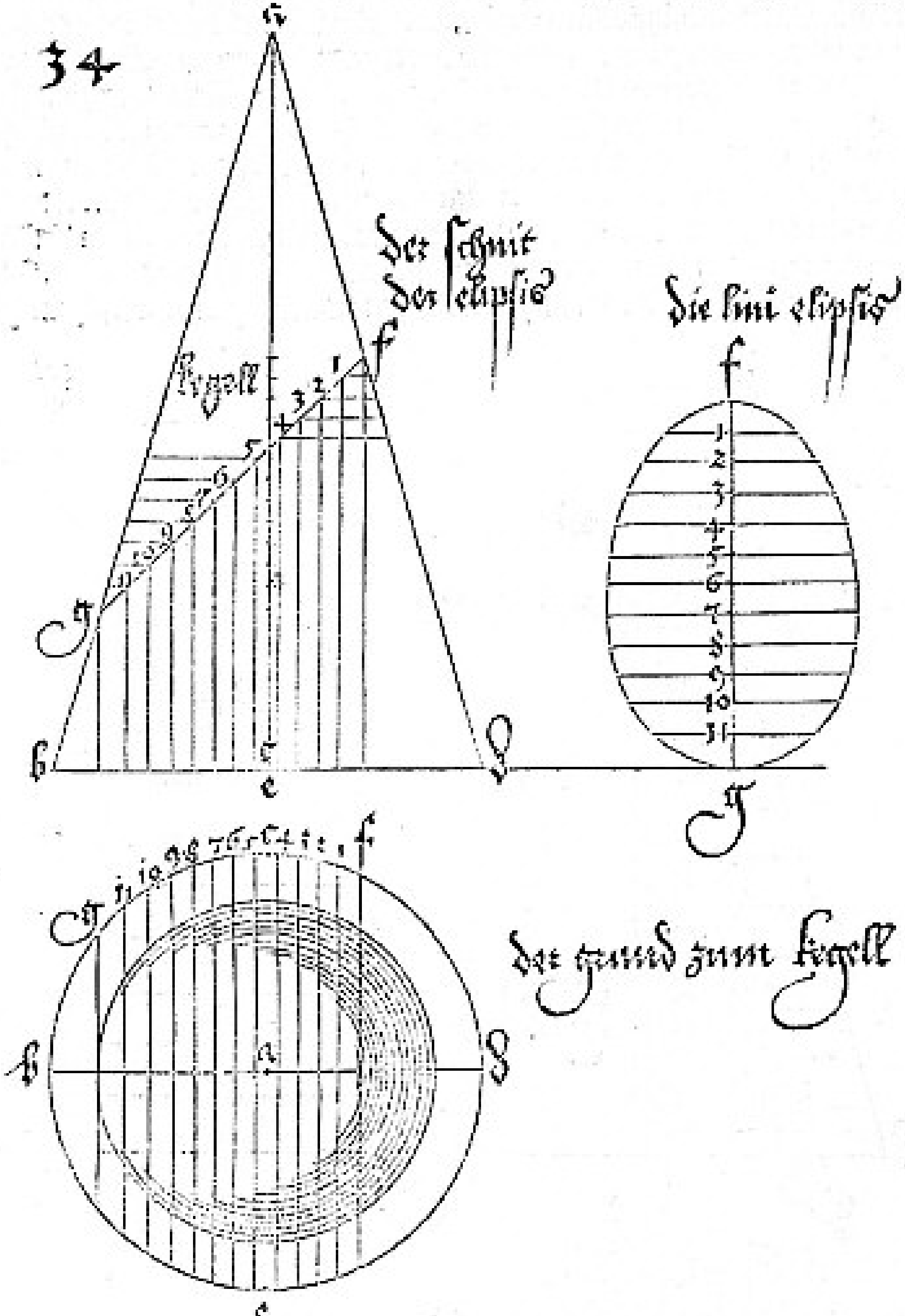
Piero della Francesca écrit le premier traité, en italien, De Prospectiva pingendi (1470)



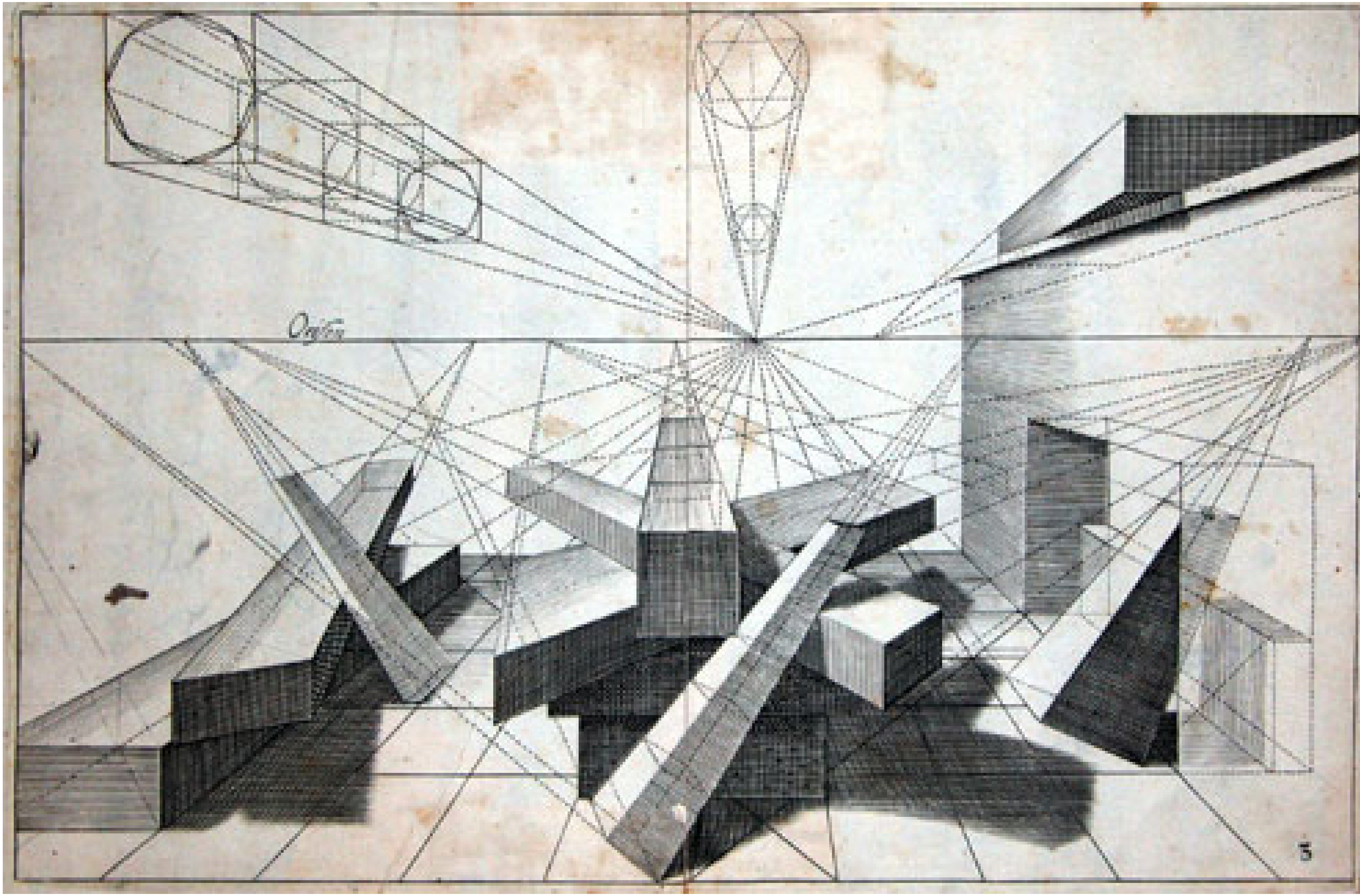
La flagellation (c. 1469)




Albrecht Dürer, Unterweysung des Messung, 1525 seytten/Also thů ich im durch die gantzen zal/so dann dise punckten zů rings herum gemacht sind/ alß dañ zeüch ich die eyer lini Elipsis von punckt zů punckt/wie ich sölchs hie bey hab aufgeryssen.




Die Parabola ist gleicher weiß zů machē/als die Elipsis/Jch reiß erstlich den kegel. a. b. c. d. e. vñ darin die aufrecht lini. a. vnd schneid das parabel/von oben herab biß durch des kegels fuß/ al



Jan Vredeman de Vries, *in* Opera mathematica de Samuel Marolois (c. 1620)

La leçon de musique (1662-65)
Jan Vermeer

# La perspective comme théorie géométrique

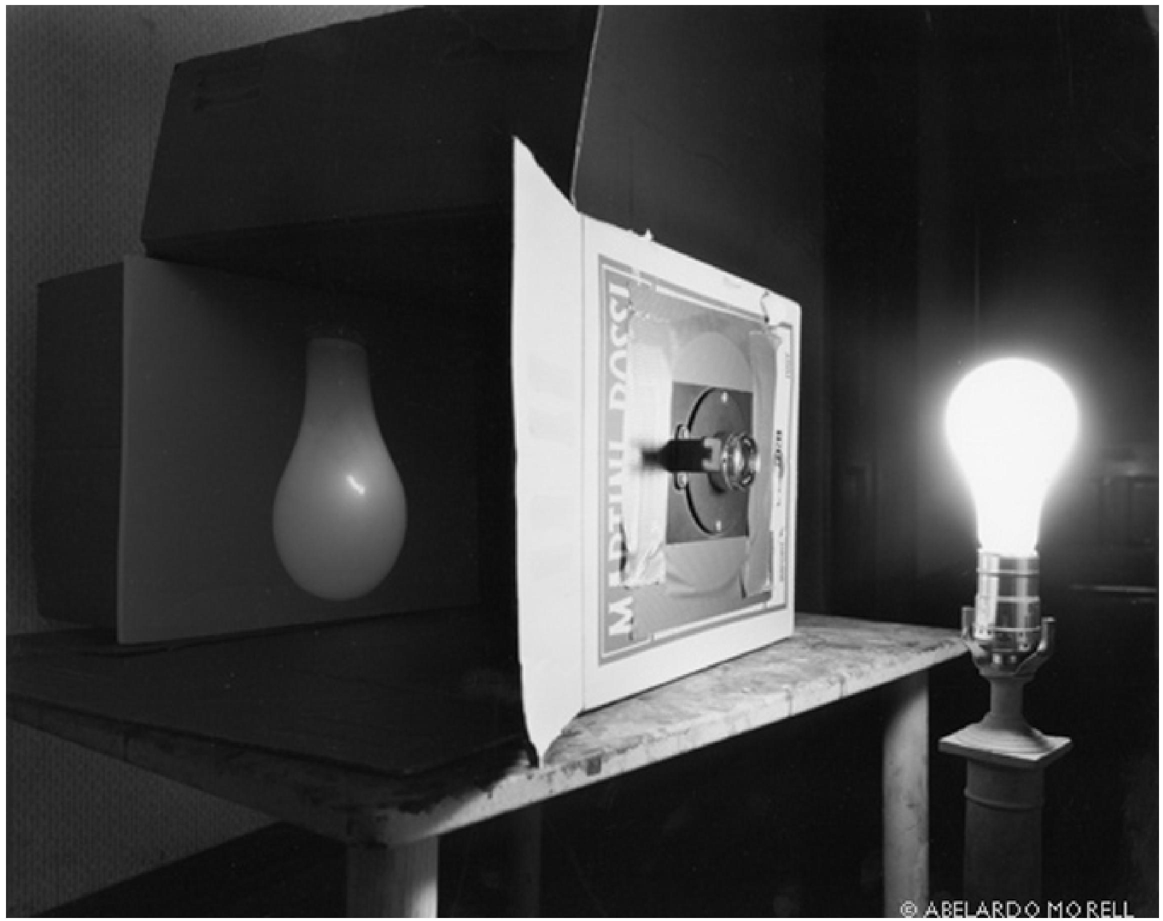
Avec la fin du XVIe siècle, la perspective devient interne à la géométrie.
Dans son Perspectivae Libri, Guidobaldo Burbon del Monte énonce que les droites parallèles se représentent par des droites parallèles ou concourantes. Ceci amène à la multiplicité des horizons.
Il applique aussi ses théories aux décors de théâtres

Dans De Perspectivis, Simon Stevin énonce un problème qui nous intéresse : étant données deux images perspectives, donner leur position et celle de l'observateur pour que la perspective aie lieu.

# La synthèse arguésienne

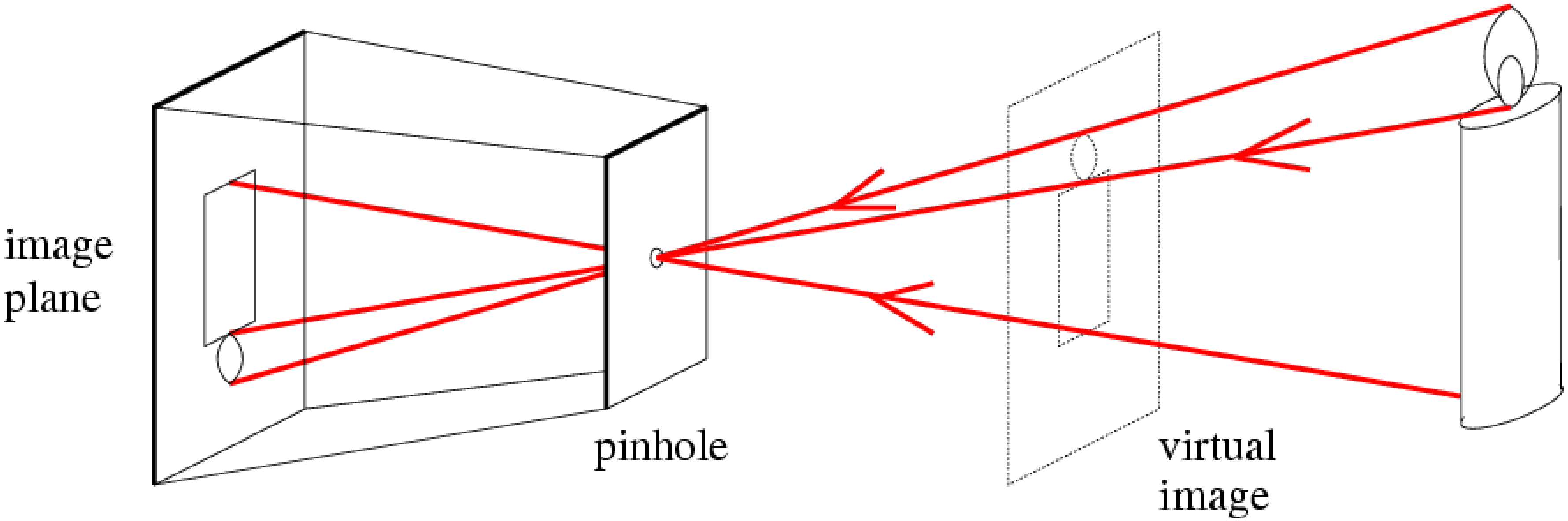
Girard Desargues, à partir de 1636, va intégrer la théorie des coniques dans une théorie perspective pour inventer la géométrie projective. Nous en verrons quelques aspects.

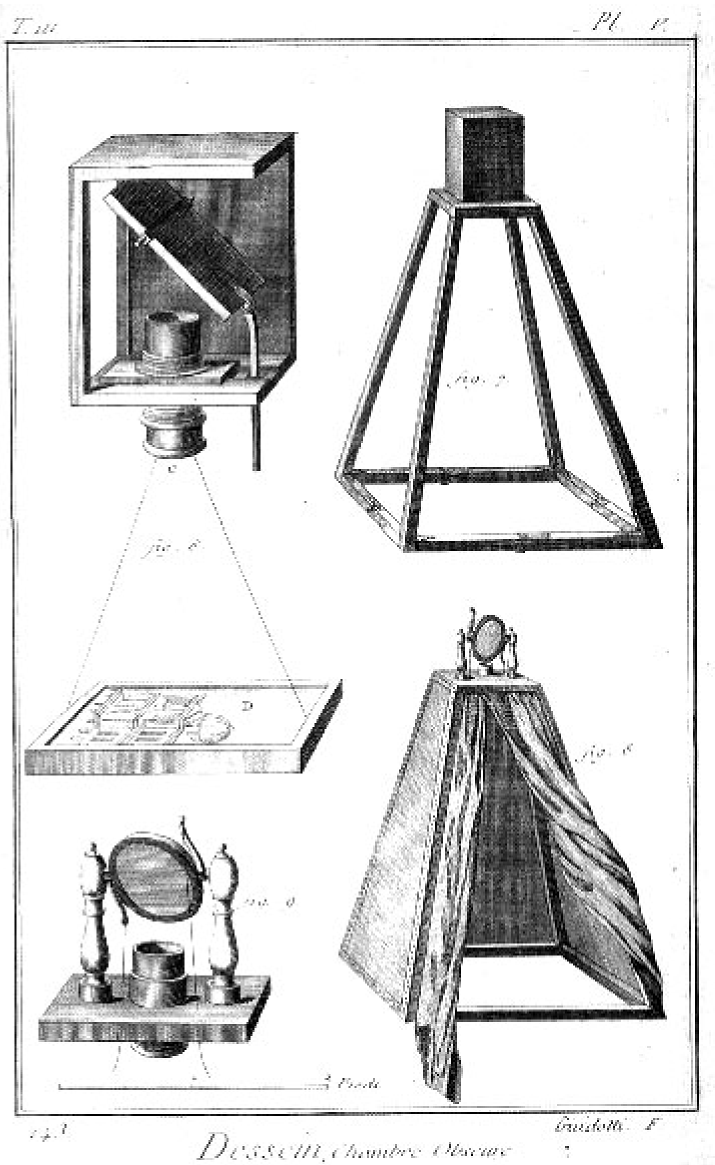
# Caméras

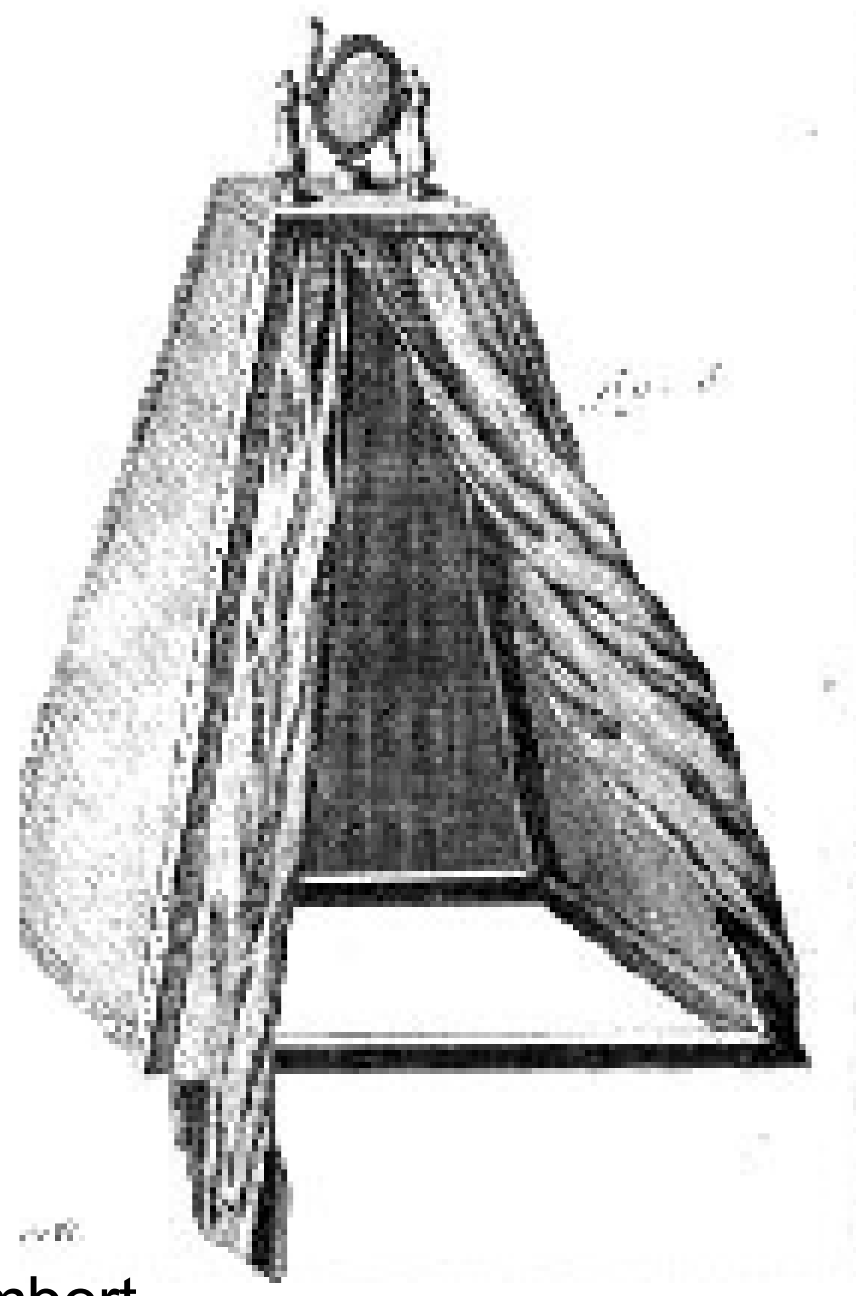



Camera obscura

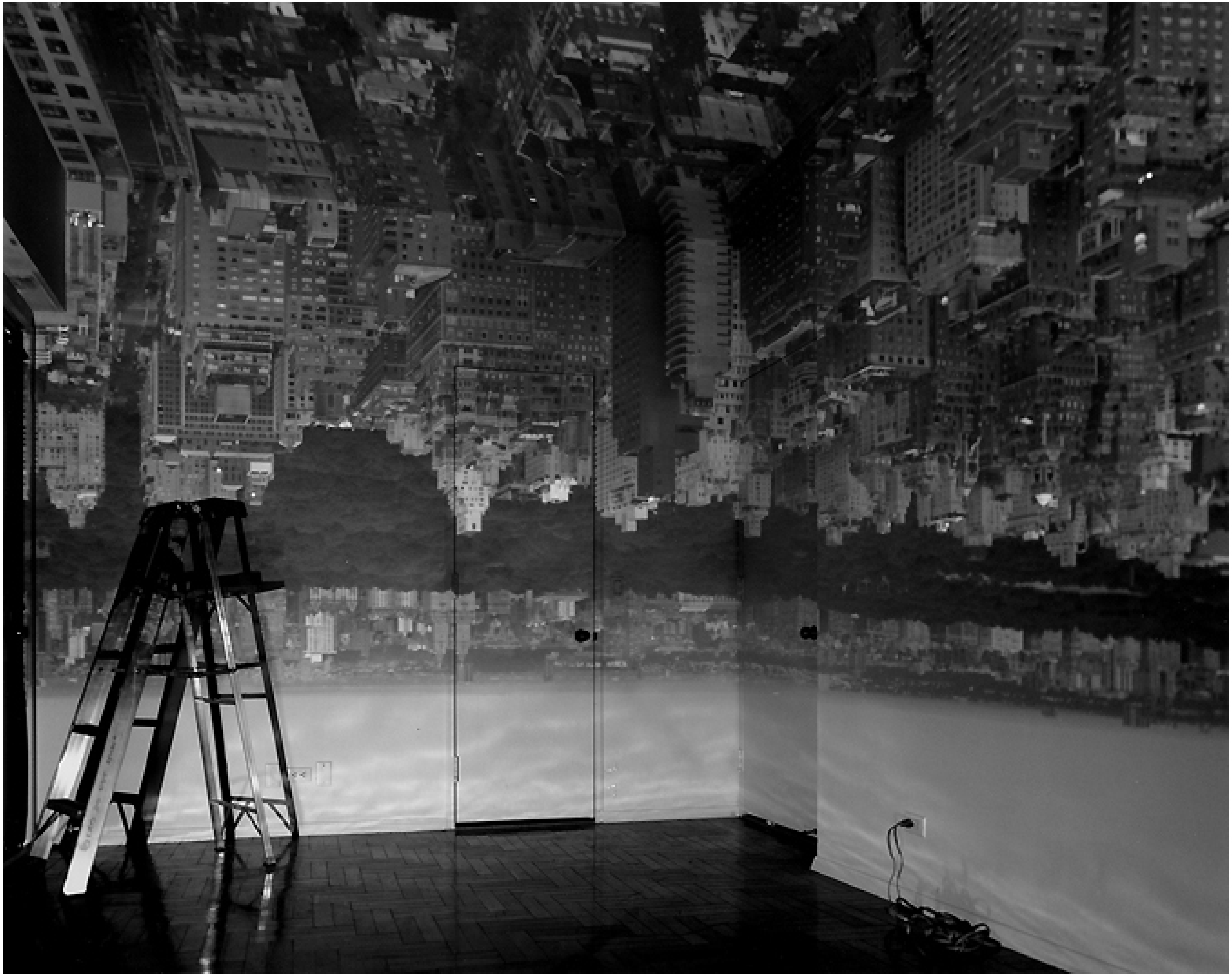
# Camera obscura



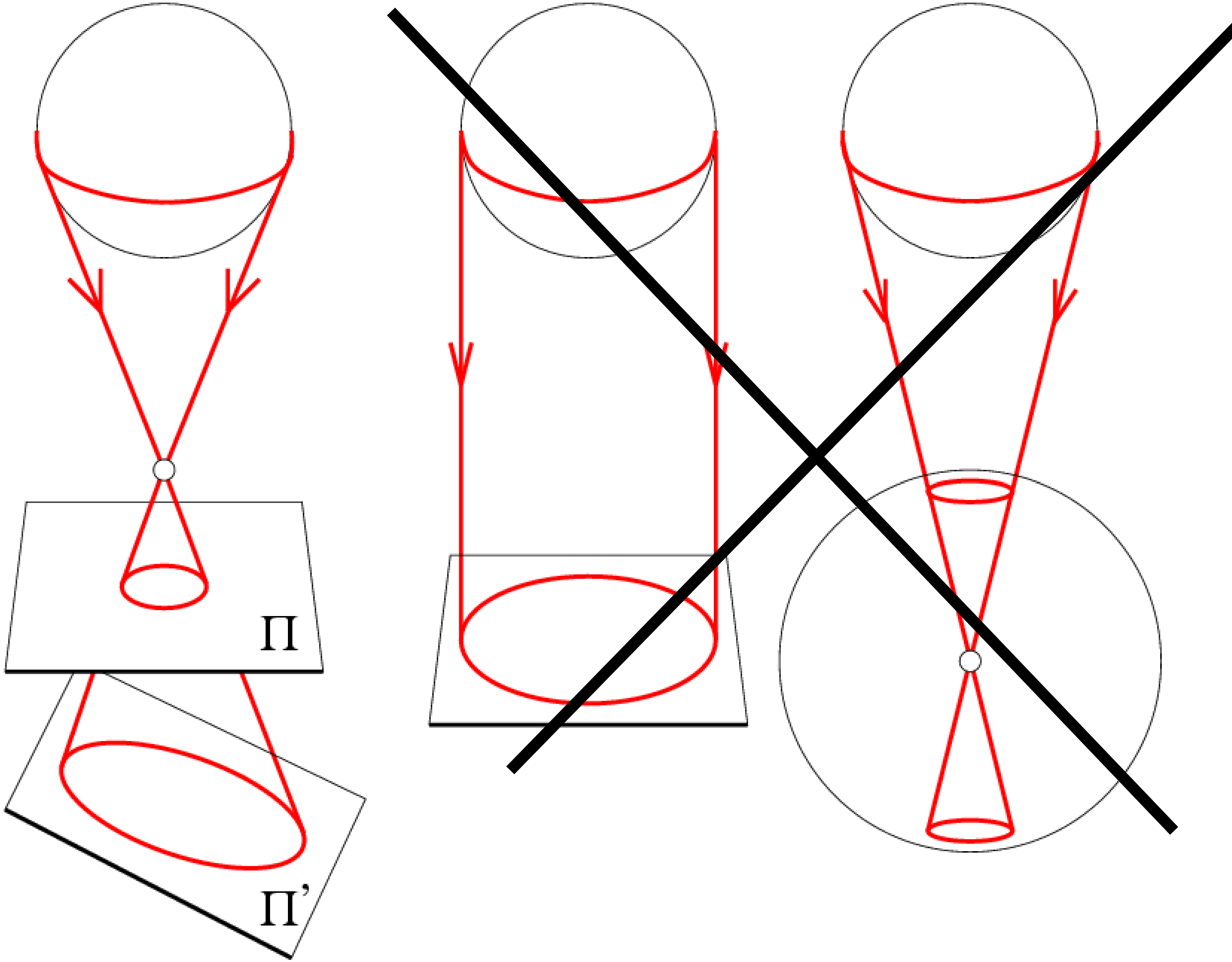


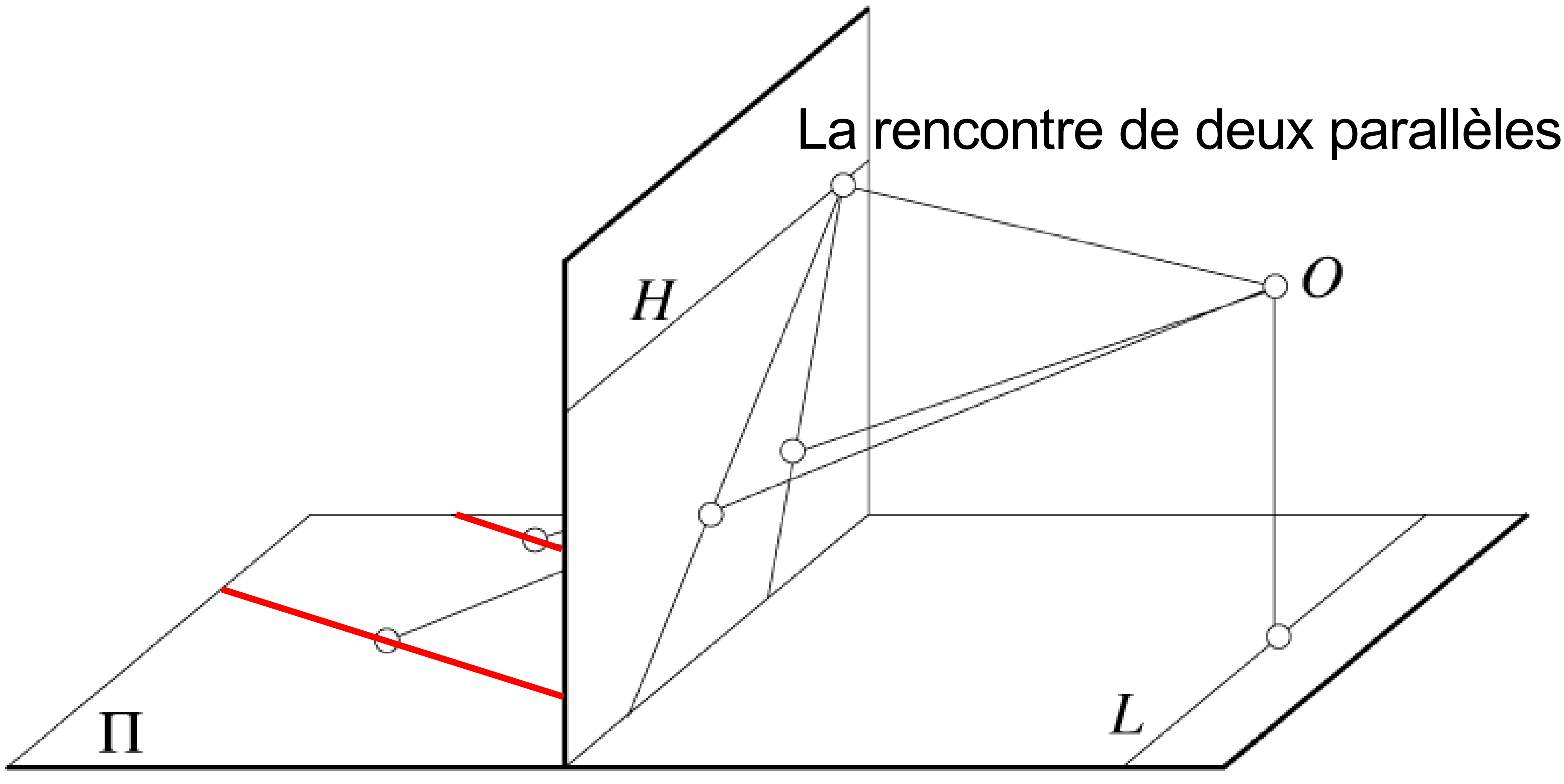
Une page de l'encyclopédie de d'Alembert



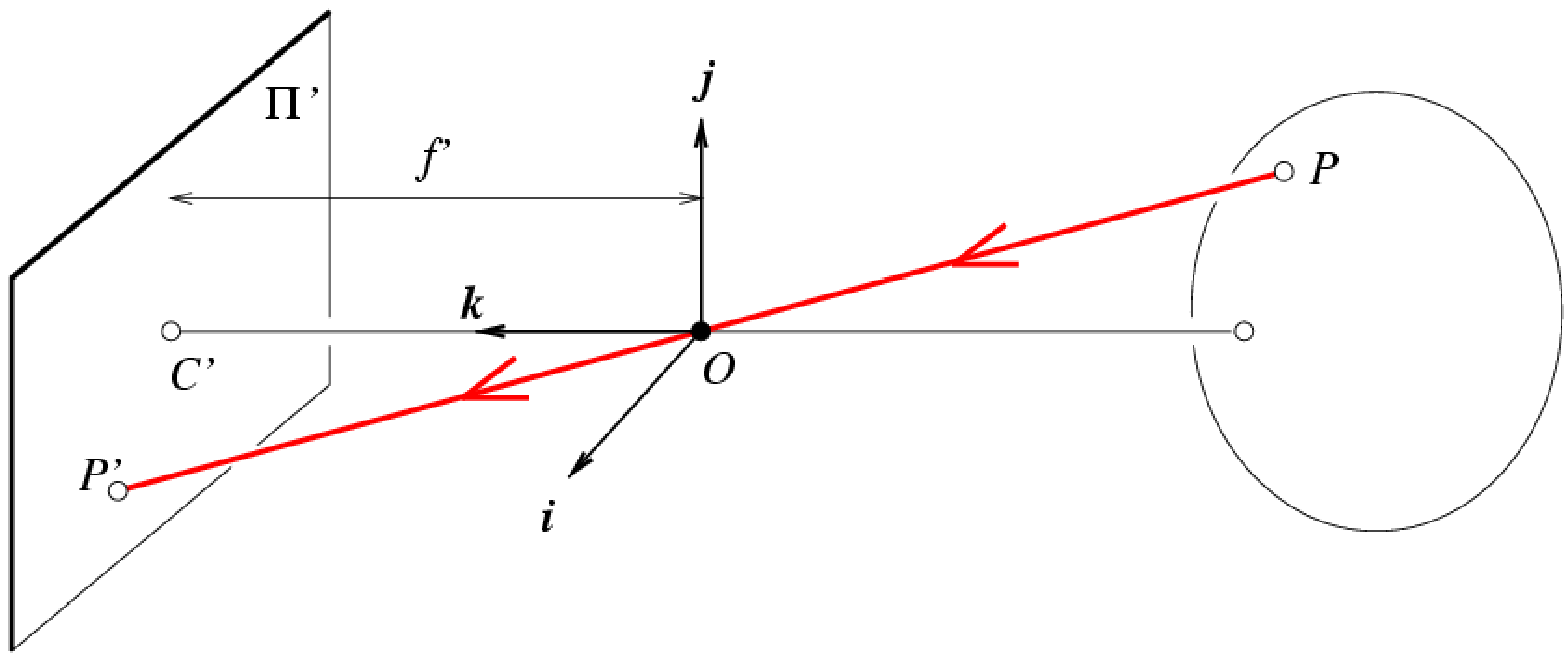
Abelardo Morell


Π
Π'

# Image d'une scène plane



# Modèle géométrique de caméra




Exprimer les coordonnées de l'image
en fonction des coordonnées (X,Y,Z) de l'objet P

(fX/Z+a , fY/Z+b)

Comment faire pour exprimer cette relation par une matrice ?

# Coordonnées homogènes

$(fX/Z+a\ ,\ fY/Z+b)$ devient
$(fX+ aZ : fY+bZ : Z)$

$$\begin{matrix} f & 0 & a \\ 0 & f & b \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Matrice de calibrage

# Intérêt des transformations données par des matrices sur les coordonnées homogènes

- Elles se composent : *si l'on effectue à la suite deux transformations données par une matrice, on obtient encore une transformation donnée par une matrice;*
- Tous les changements de repère en sont : *dans un changement de repère, les nouvelles cordonnées homogènes s'obtiennent des anciennes par une matrice.*

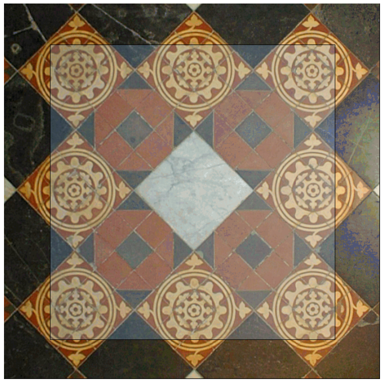
## On les appelle homographies

ou transformations projectives,

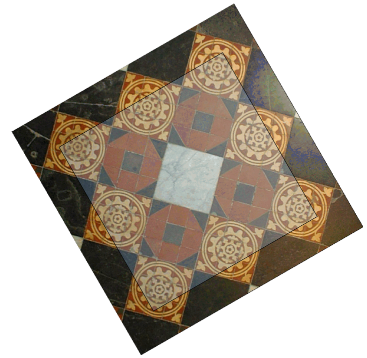
ou encore colinéations.

*Euclidienne* : rotation

Ce qui est conservé



similitude



Alignements, angles, distances

affine

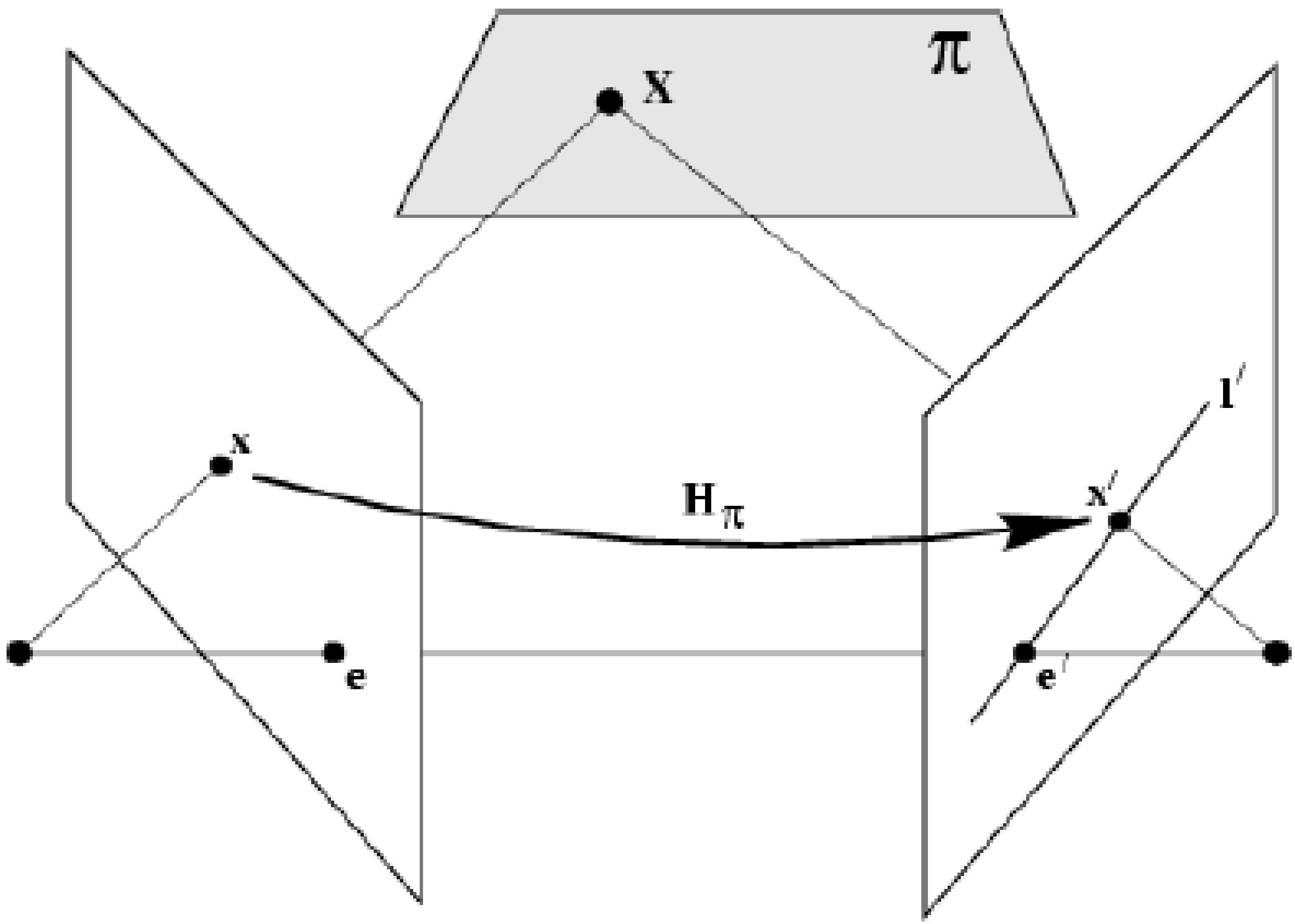
Alignements, parallélisme
rapports de distances sur une droite

projective

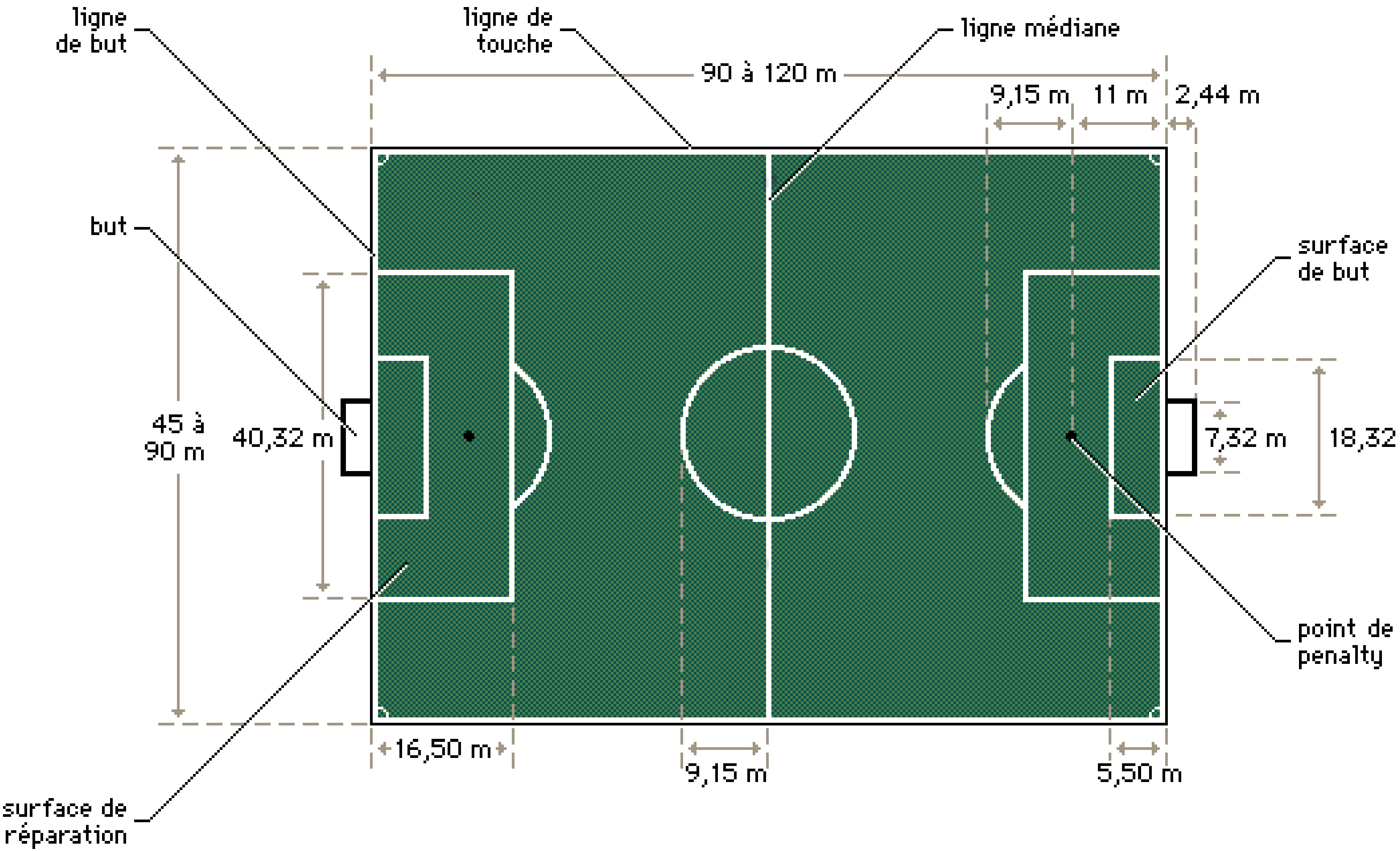
homographie

Alignements
et ?

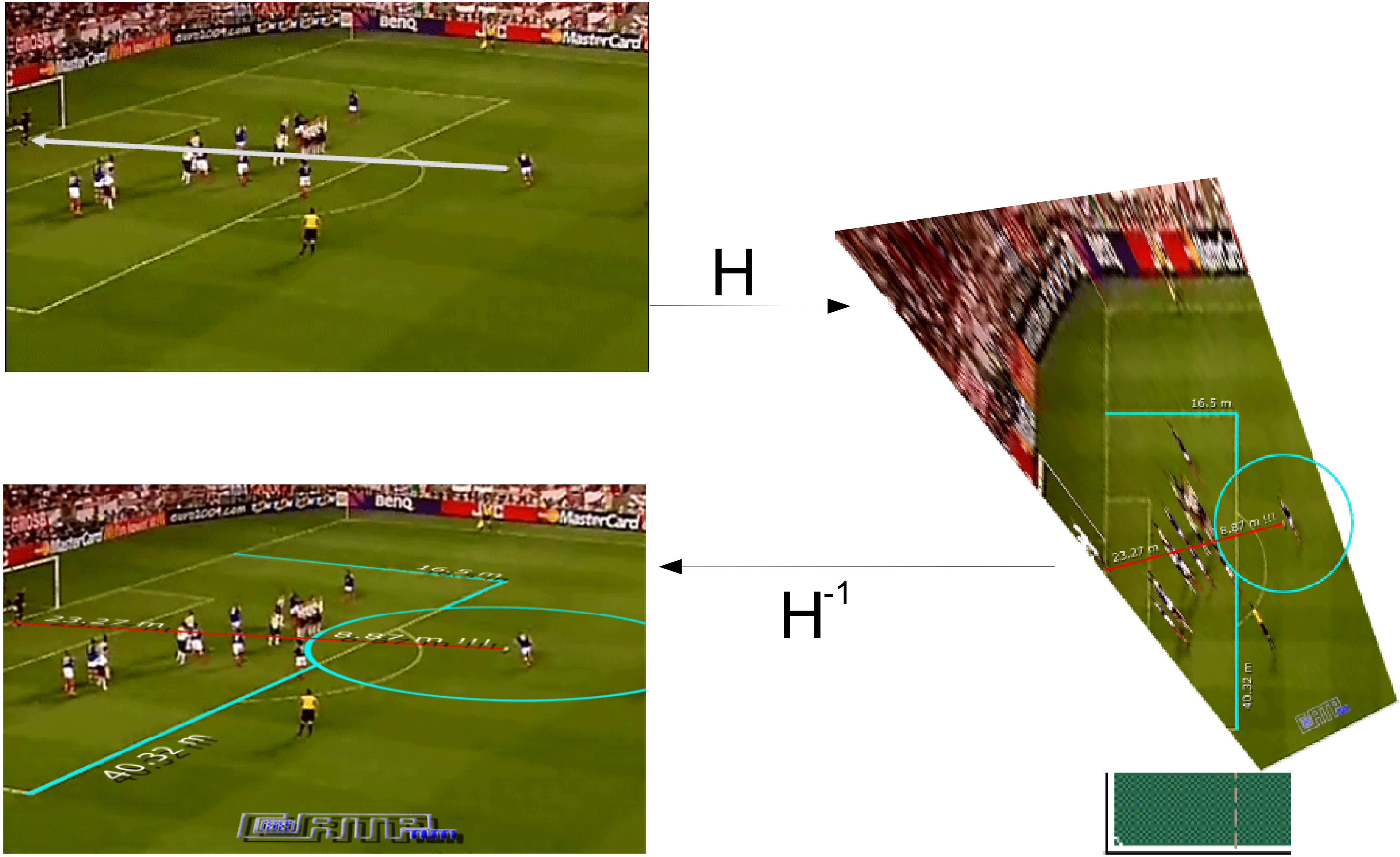
# 2 images en 2D




BenQ
MasterCard



ligne de but
ligne de touche
ligne médiane
90 à 120 m
9,15 m
11 m
2,44 m
but
surface de but
45 à 90 m
40,32 m
7,32 m
18,32
point de penalty
16,50 m
9,15 m
5,50 m
surface de réparation


H
H-1
16.5 m
23.27 m
8.87 m !!!
40.32 m

# Contrôle

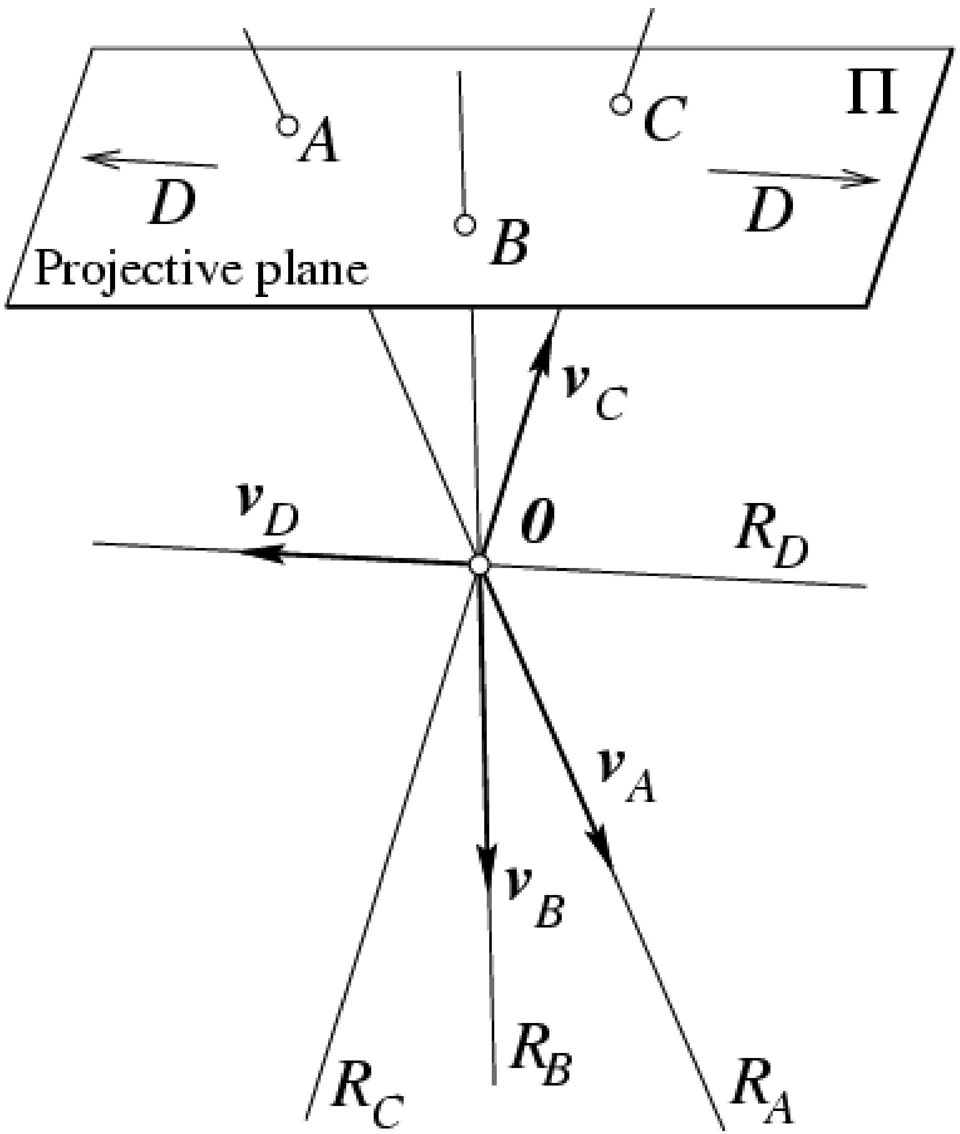
Q1
1. La représentation picturale d'un carrelage sur le sol,
2. la multiplicité des lignes d'horizon dans un tableau,
est comprise à l'époque de
Giotto, Lorenzetti (XIVe),
Brunelleschi, della Francesca (XVe),
Burbon del Monte,Dürer (XVIe), ou
Desargues (XVIIe) ?

Q2
L'intersection d'un plan avec un cône peut-être :
une ellipse, un ovale, une parabole, une demi-hyperbole, un cercle, un demi-cercle ?

*Durée : 2 minutes*

# le plan projectif

# Le plan projectif

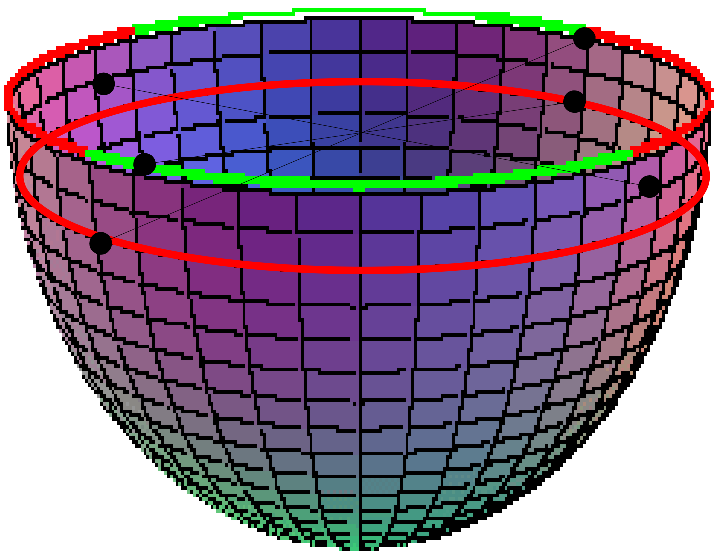



Un point de l'espace projectif

est

une direction de droite

# Comment imaginer le plan projectif en entier ?



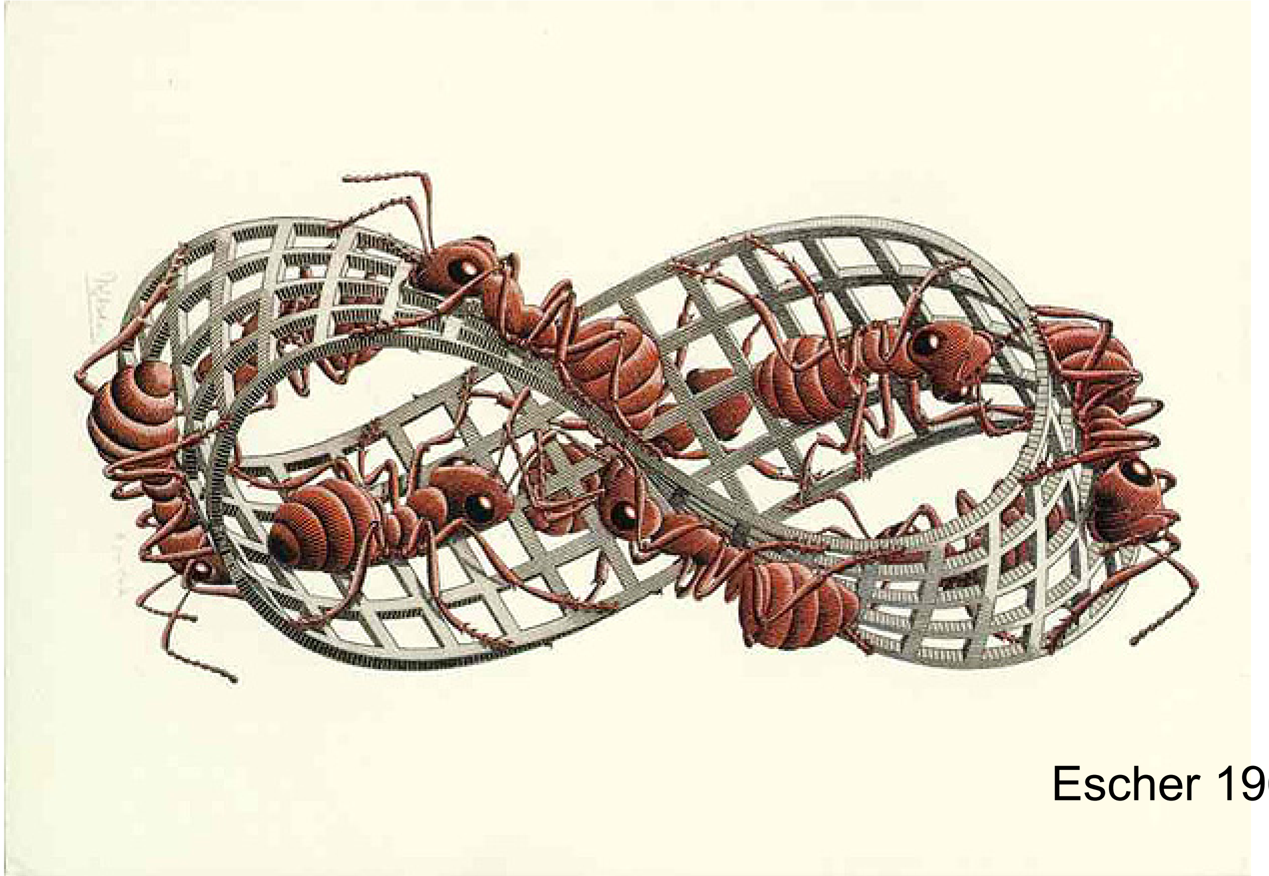
Images et animations :

http://www.neil-strickland.staff.shef.ac.uk/courses/algtop/pictures/RP2/

http://www.maths.warwick.ac.uk/~bjs/ , par exemple

http://www.maths.warwick.ac.uk/~bjs/images/mobtoboy.gif

# Un ruban de Möbius



Escher 1963

# Contrôle

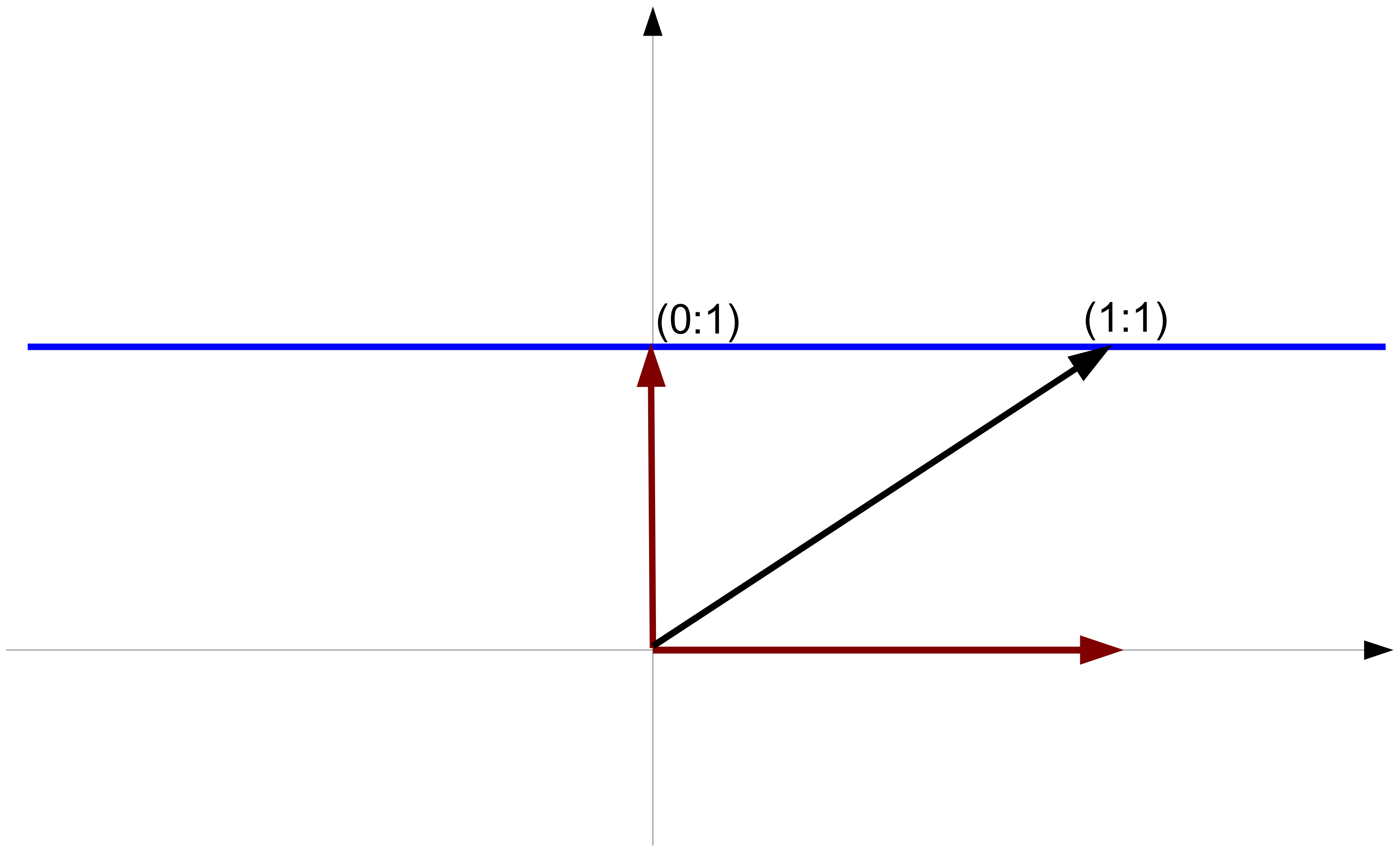
Pour repérer les points d'une droite projective par leurs coordonnées homogènes (ou par une abscisse, réelle ou infini), a-t-on besoin de :

1. un seul point de la droite,
2. deux points distincts de la droite,
3. trois points distincts ou
4. quatre points distincts de la droite ?

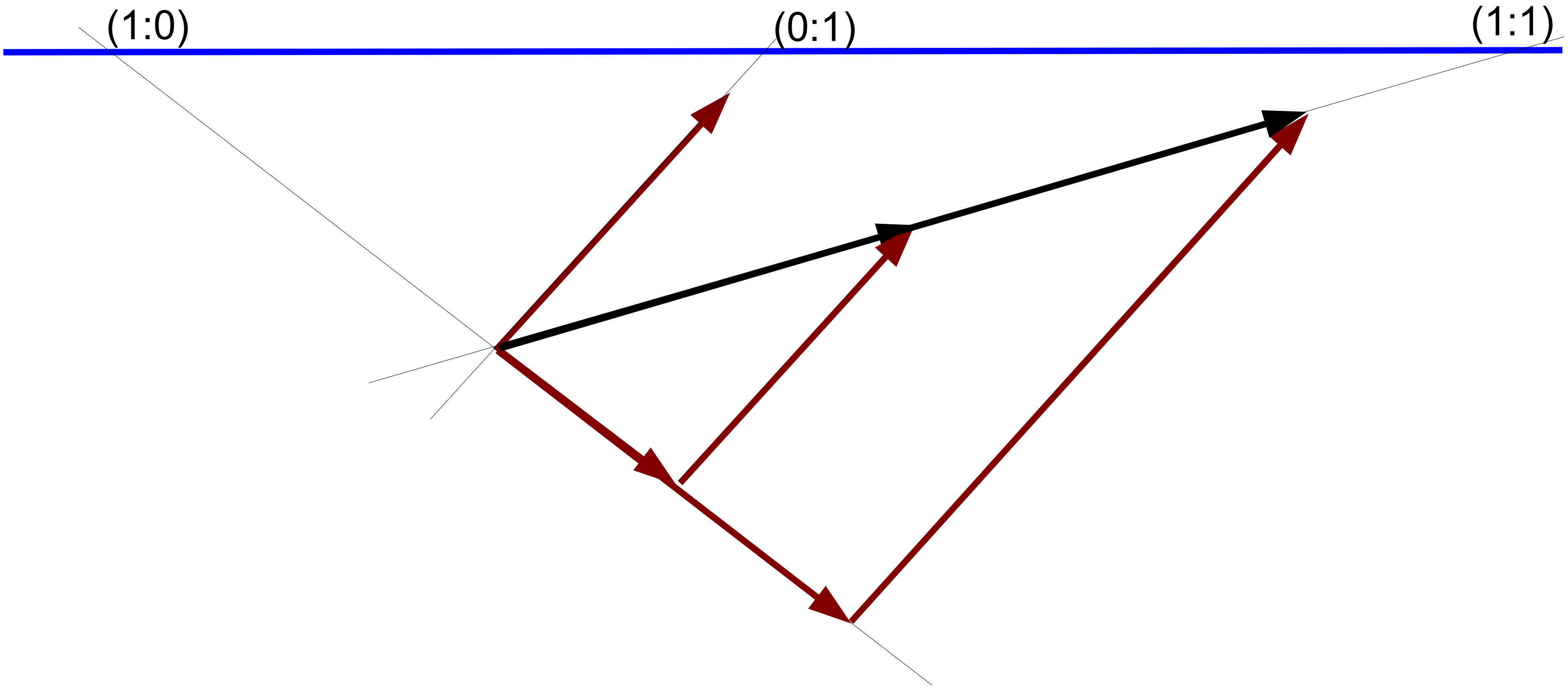
*Durée : moins de 1 minute*

# Le projectif 1D

# Repère affine de la droite en coordonnées homogènes



# Détermination des coordonnées projectives à proportionnalité près à partir de trois points sur une droite



# Repère projectif

Un repère de la droite projective est constitué de trois points distincts.
On convient que ce sont, dans l'ordre :
(1:0), (0:1), (1:1)
ou
$\propto$ , 0 , 1 ,
en convenant que le point de coordonnées homogènes (x:y) est donné par l'abscisse u=x/y.

Un repère du plan projectif est constitué de quatre points dont trois ne sont pas alignés.

Quand on a choisi un repère projectif,
les coordonnées projectives sont bien définies
à proportionnalité près.

Quand on a choisi les repères projectifs,
la matrice d'une homographie est bien définie
à proportionnalité près.

Une homographie est
déterminée par l'image d'un repère

Une homographie entre droites projectives est
déterminée par l'image de trois points distincts.

# Recherche d'un invariant projectif sur une droite

On se donne trois points alignés distincts A, B, C et un quatrième point D sur cette droite.
Si l'on utilise ABC comme repère projectif, l'abscisse projective du point D est invariant par homographie.
C'est le ***birapport*** [ABCD].

Par définition:

$$\boxed{[\propto,0,1,x]=x}$$

# Homographies entre droites

Par définition, une homographie entre deux droites repérées est donnée par une matrice 2x2 :

$$x'=ax+by \qquad y'=cx+dy\ .$$

En terme d'abscisses, la relation est donc :

$$u' = (au+b)/(cu+d)\ .$$

Par exemple, pour $u=\propto$, on trouve $u'=a/c$.

# Calcul du birapport dans un repère donné

$[u,v,w,x]=(ax+b)/(cx+d)=H(d)$

avec $H(u)=\propto$ (u est un pôle)

$H(v)=0$ (v est un zéro)

d'où : $H(x)= k(x-v)/(x-u)$

Enfin : $H(w)=1$, donc :

$$\boxed{[u,v,w,x]=(x-v/w-v):(x-u/w-u)}$$

# Application
# aux changements de repère

# Le birapport !

## Exemples de valeurs du birapport de quatre points

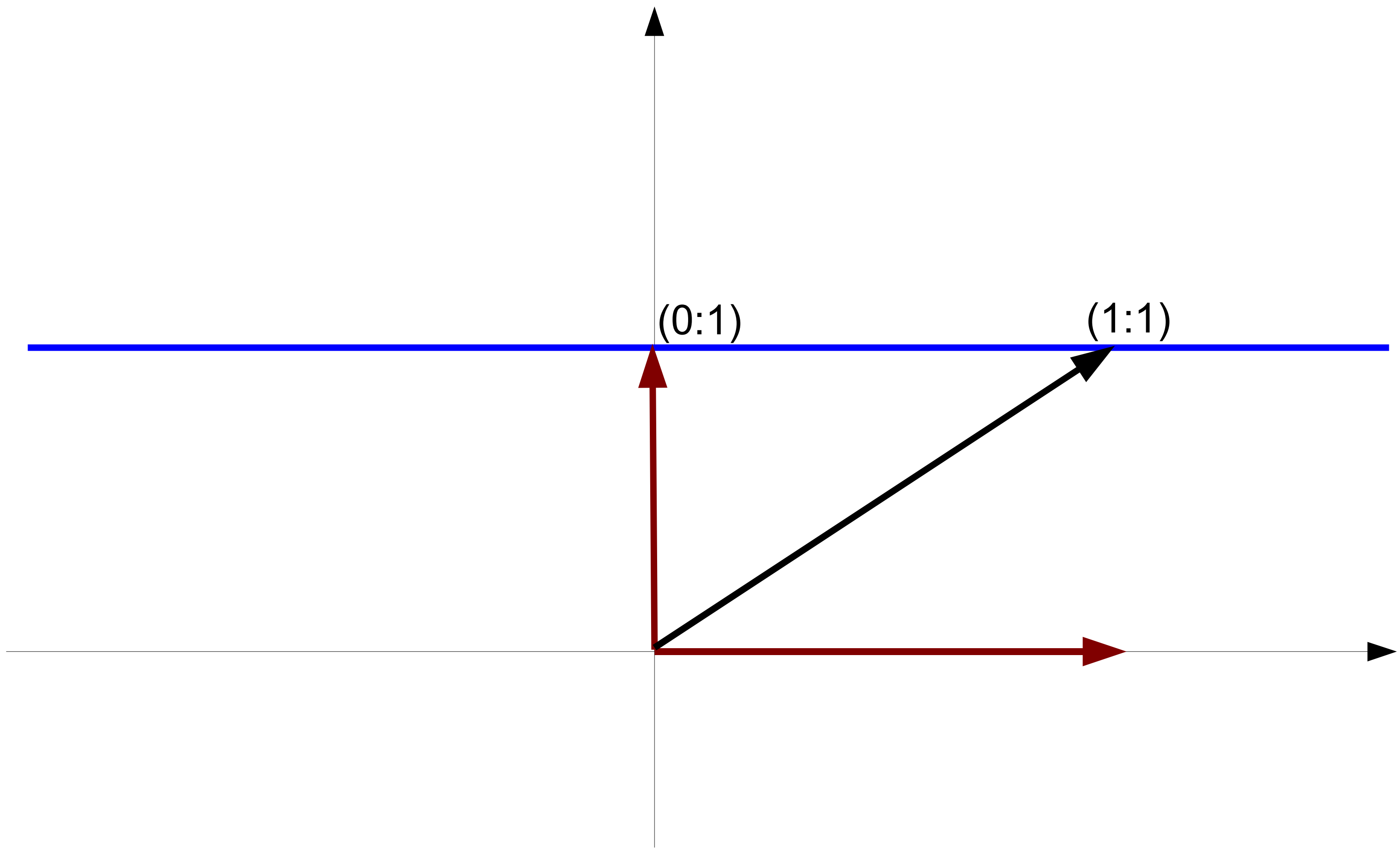
A faire :

division harmonique vs milieu
le quadrilatère complet
birapport de quatre droites concourantes

application aux mesures de hauteurs
et de distances

mon calcul à moi

# Repère affine de la droite
# en coordonnées homogènes



# Passage entre affine et projectif

- coordonnées, dans les deux sens avec choix de l'infini, voir dessin fondamental
- affine=homographie fixant l'infini
- Applications
  - envoi de points à l'infini
    - quadrilatère complet
    - théorème de Pappus
    - axe d'une perspective ou projection centrale

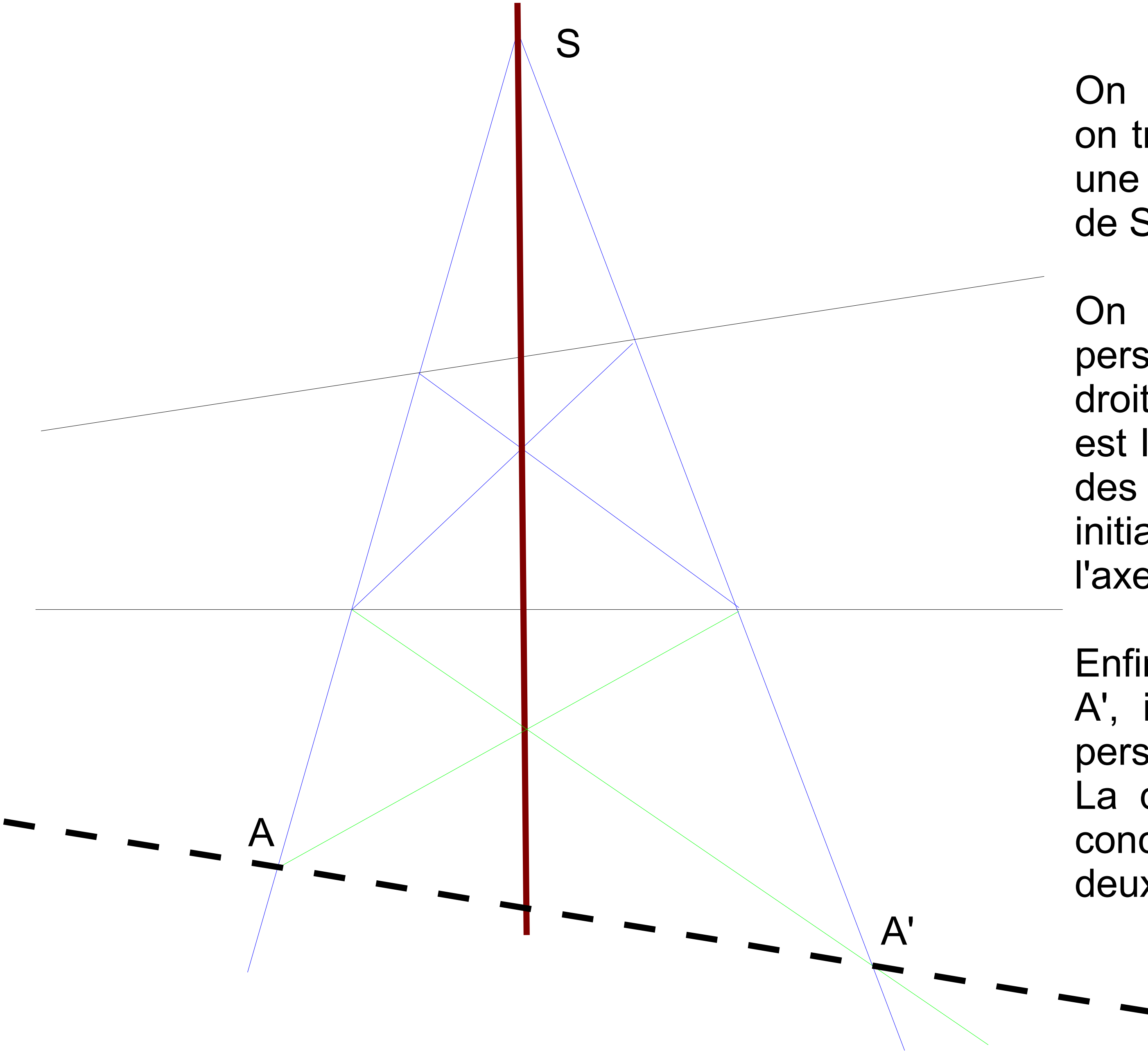
# Les droites dans le projectif 2D

# Homographies entre droites du plan

- Axe d'une perspective ou projection centrale
- Une homographie entre droites est déterminée par l'image de trois points.
  - Application : une homographie entre deux droites du plan est une projection centrale si, et seulement si, leur point d'intersection est envoyé sur lui-même.
- Axe d'une homographie entre deux droites du plan projectif.

On peut voir la droite d'alignement du théorème de Pappus comme l'axe d'une homographie.

# Construction d'une troisième concourante




On choisit un point S, on trace la droite AS et une autre droite issue de S.

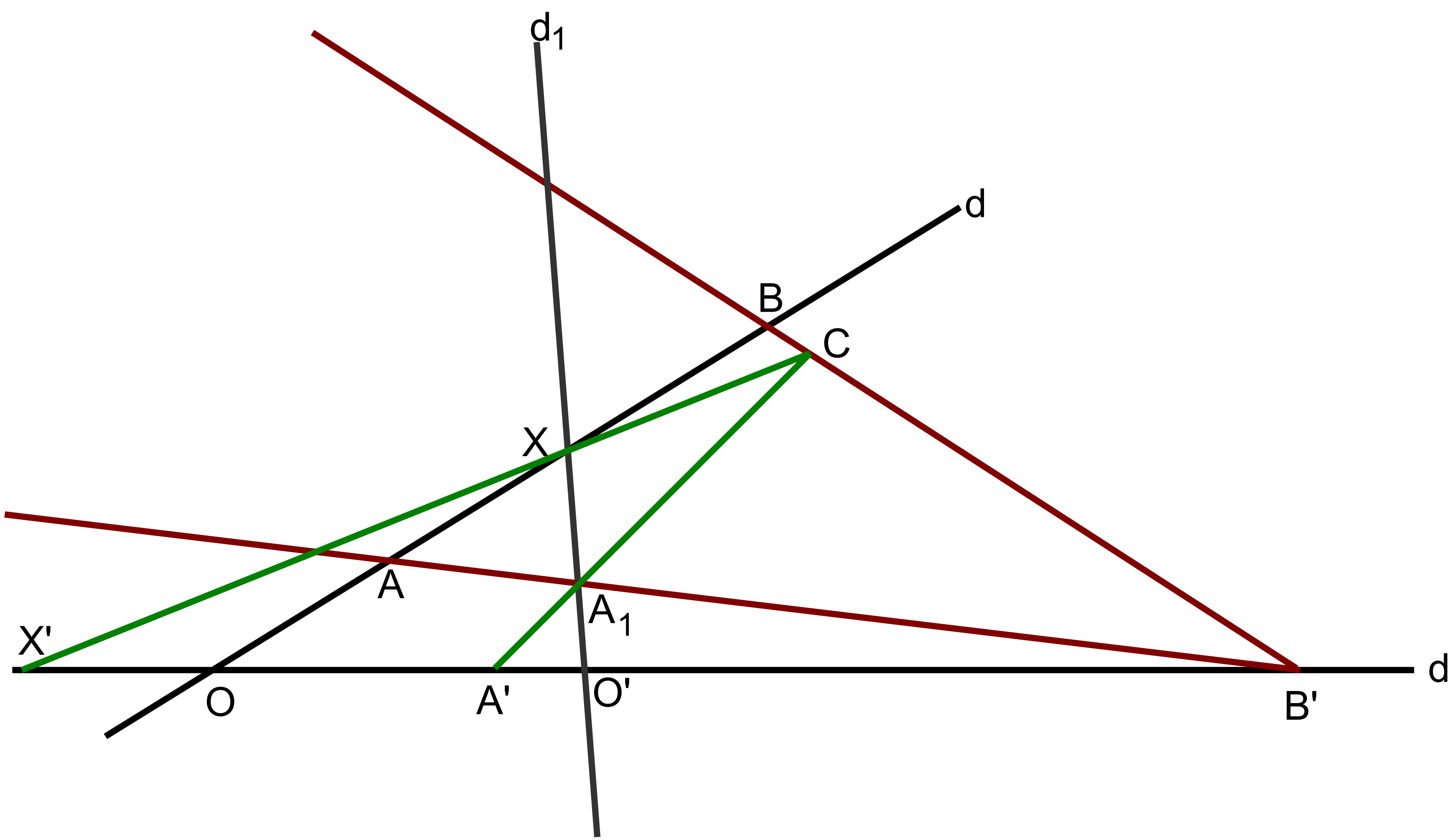
On considère alors la perspective entre ces droites dont le centre est le point de concours des deux droites initiales. On en trace l'axe; il passe par S.

Enfin, on obtient le point A', image de A par la perspective.
La droite AA' est donc concourantes avec les deux droites initiales.

# Axe d'une homographie entre deux droites du plan projectif :

démonstration quand ce n'est pas une projection centrale, utilisant

- Une perspective centrale est une homographie;
- une homographie est déterminée par l'image d'un repère.



# Axe d'une homographie entre deux droites du plan projectif : conséquences

Toute homographie entre deux droites du plan est
soit une perspective,
soit la composée de deux perspectives.

Constructions

D'où la photo a-t-elle été prise ?

• **Position du problème** :
on dispose d'une photo d'architecture et d'un plan de ville. On veut placer sur le plan l'endroit d'où la photo a été prise.

• Spécificité du problème permettant le succès :
On peut repérer les points et leur verticale sur la photo.

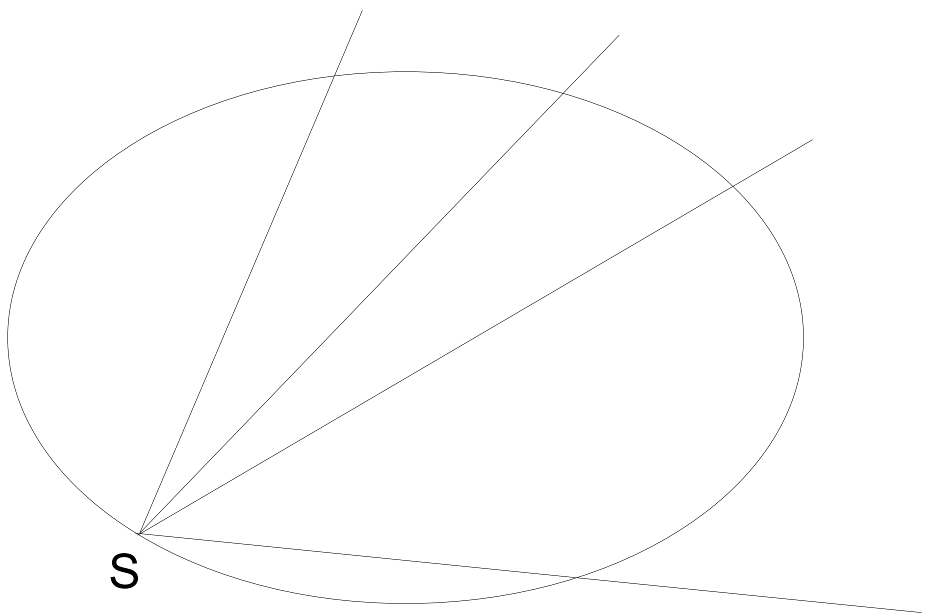
• **Outils théoriques** :
notion d'homographie et de birapport uniquement, mais dans toute sa force, y compris sur les coniques.

• **Outils matériels** :
on n'utilise pas de calculs à partir de données numérisées, mais on travaille à l'ancienne, avec une règle et un crayon.
Il est utile de savoir tracer une droite passant par un point défini par l'intersection de deux droites même quand ce point sort de la feuille du dessin !

# Les coniques vues comme des droites projectives

L'idée importante utilisée pour le TD du 19 mai est que l'ensemble des points de vue S qui permettent de voir quatre points donnés sous un birapport fixe sont les points d'une conique.

On peut donc voir une conique comme une droite projective, de la même manière que les droites issues d'un point sont une droite projective.
Le birapport de quatre points sur une conique est le birapport donné par les quatre droites issues d'un point de vue quelconque S situé sur la conique. On peut le mesurer sur une sécante à ces quatre droites.
Une homographie de la conique est alors une permutation de ses points qui conserve le birapport.




La diapo suivante donne les équivalents pour les coniques du théorème de Pappus et de sa généralisation à l'axe d'une homographie.

# Théorème de Pascal et axe d'une homographie

Pour le célèbre théorème de Pascal, voir les liens interactifs suivants :

- L'hexagramme mystique de Pascal
- Le théorème de Pascal : construction d'une conique point par point

La droite d'alignement du théorème de Pascal est l'axe d'une homographie de la conique : voir le lien interactif Axe d'une homographie de conique.

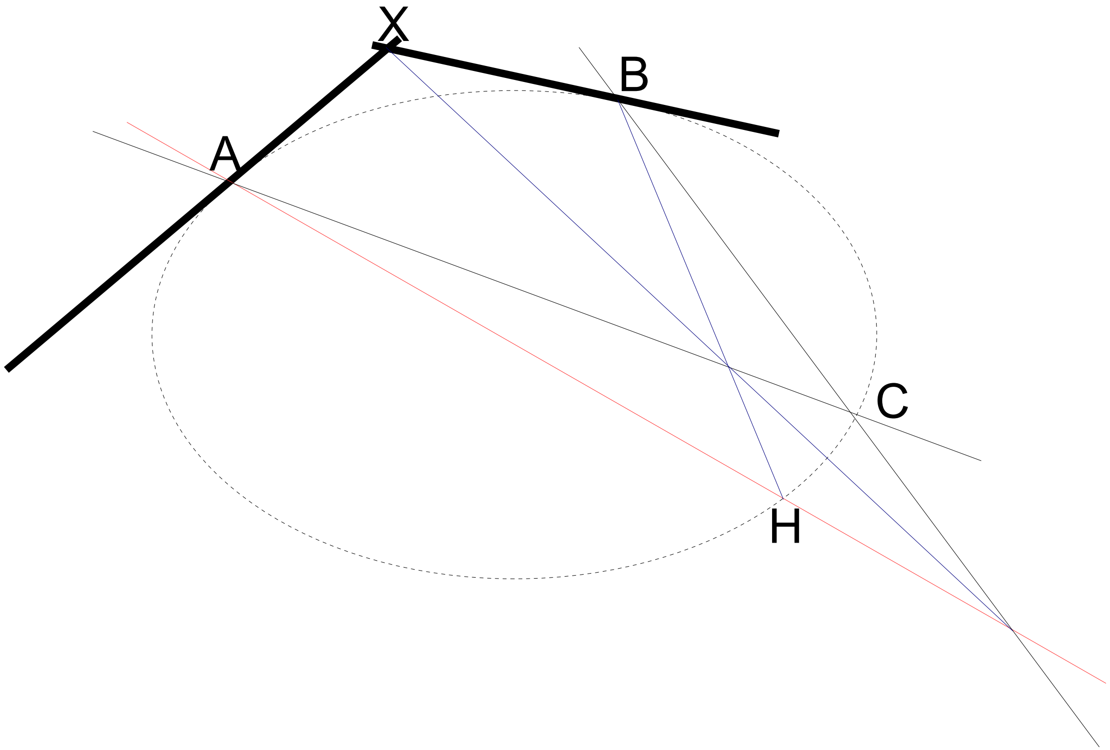
Nous utiliserons des variantes de la construction d'une conique, à la règle, point par point, à partir de cinq points donnés de cette conique:

- construction d'une tangente à partir de quatre points et du birapport sous-lequel on voit ces quatre points
- construction à partir de trois points et des tangentes en deux de ces points

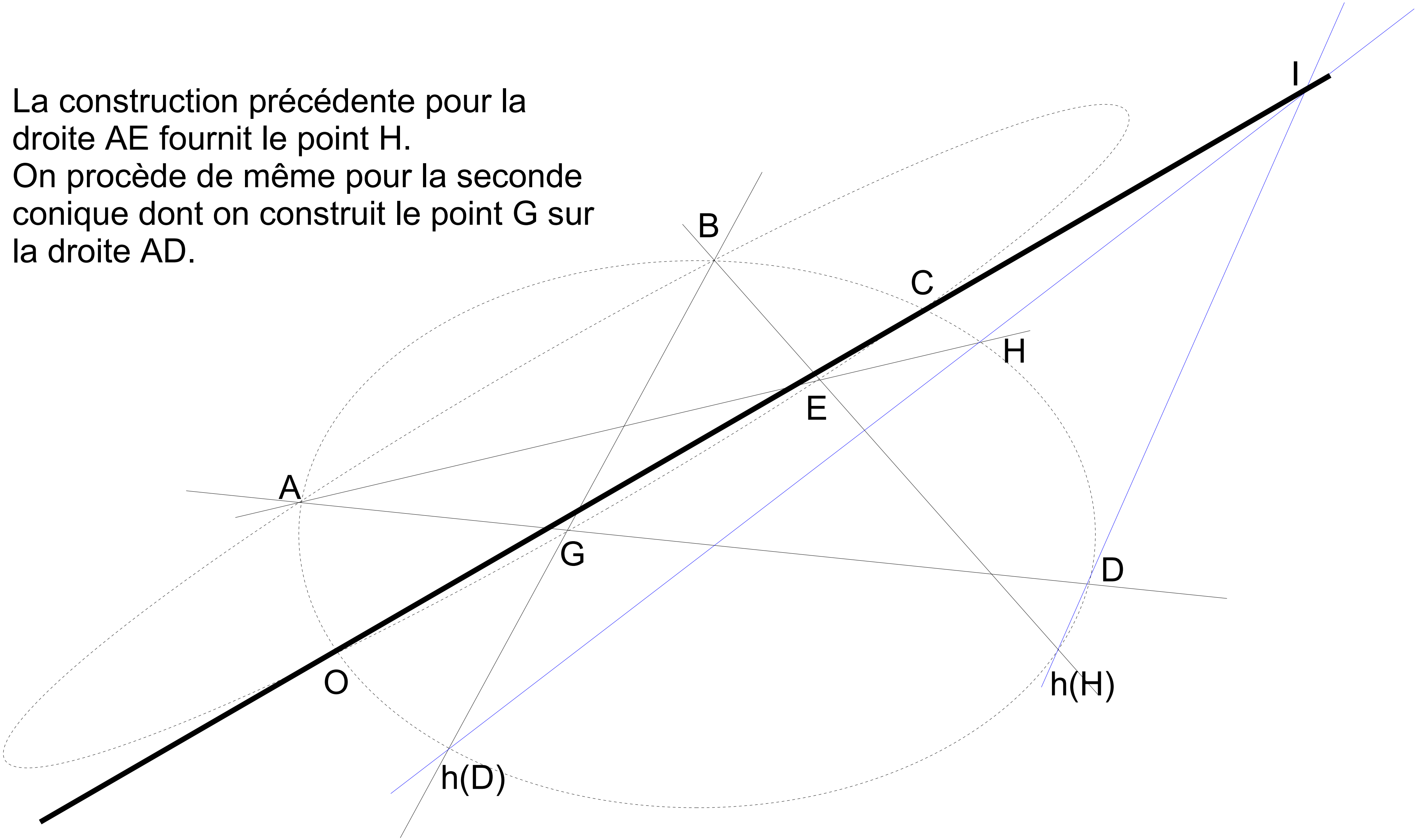
## Plan de la construction à la règle d'une solution

- Travail sur la photographie :
  - Répérer cinq points de repère très précisément
  - Tracer les verticales issues de ces points
- Travail sur le plan :
  - Reporter les cinq points de repère sur le plan.
- Notations :
  - bien nommer les cinq points A, B, C, D, E
  - La première conique est définie par le birapport des quatre verticales des points A,B,C,D, obtenu sur la photo, et ces quatre points du plan.
  - La seconde conique est obtenue de même avec les points A, B, C, E.

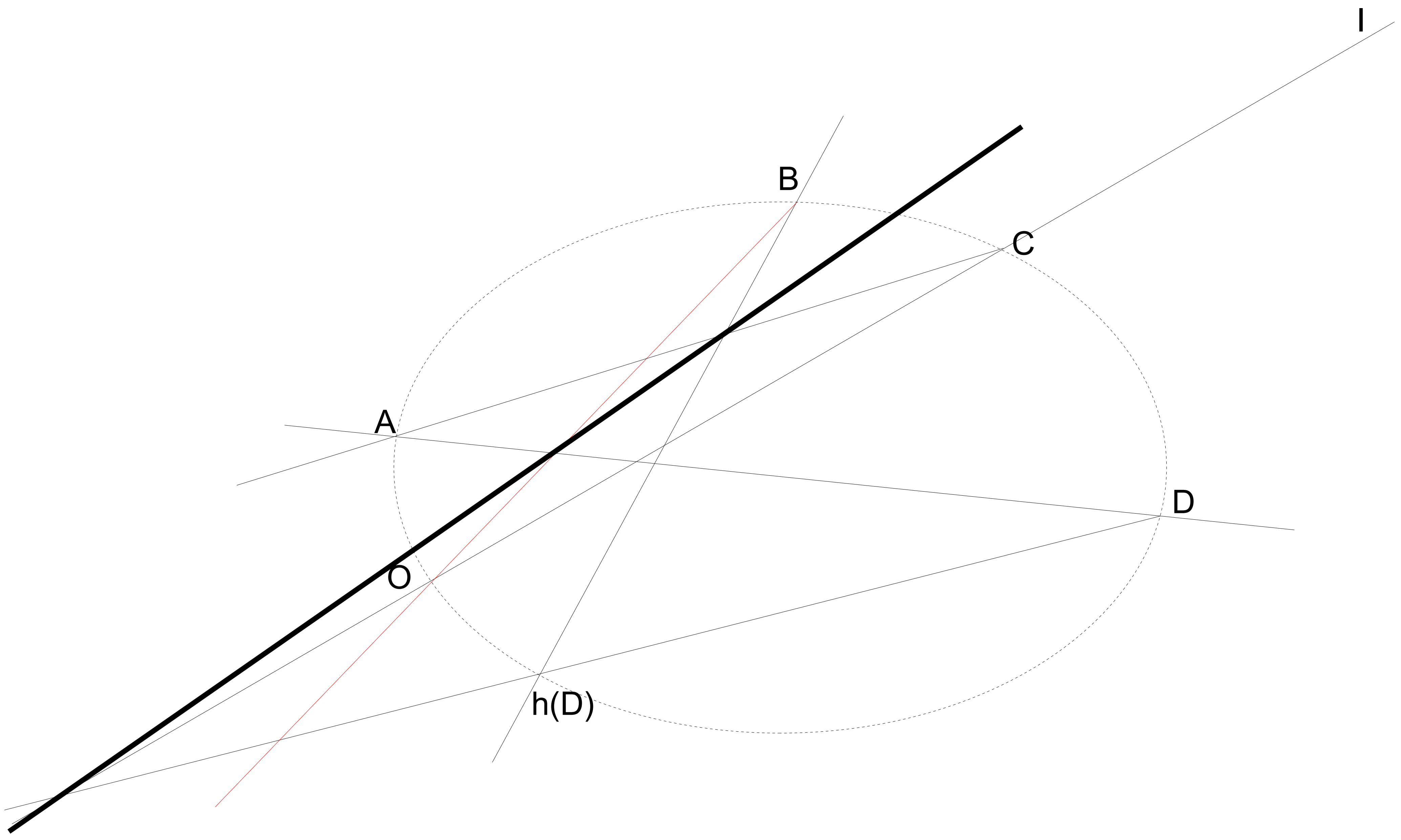
- Constructions
  - A l'aide du birapport, construire la tangente en A et la tangente en B à la première conique. Elles s'intersectent en un point X.
  - Ce point X permet alors de construire le point de la conique sur toute droite issue de A :

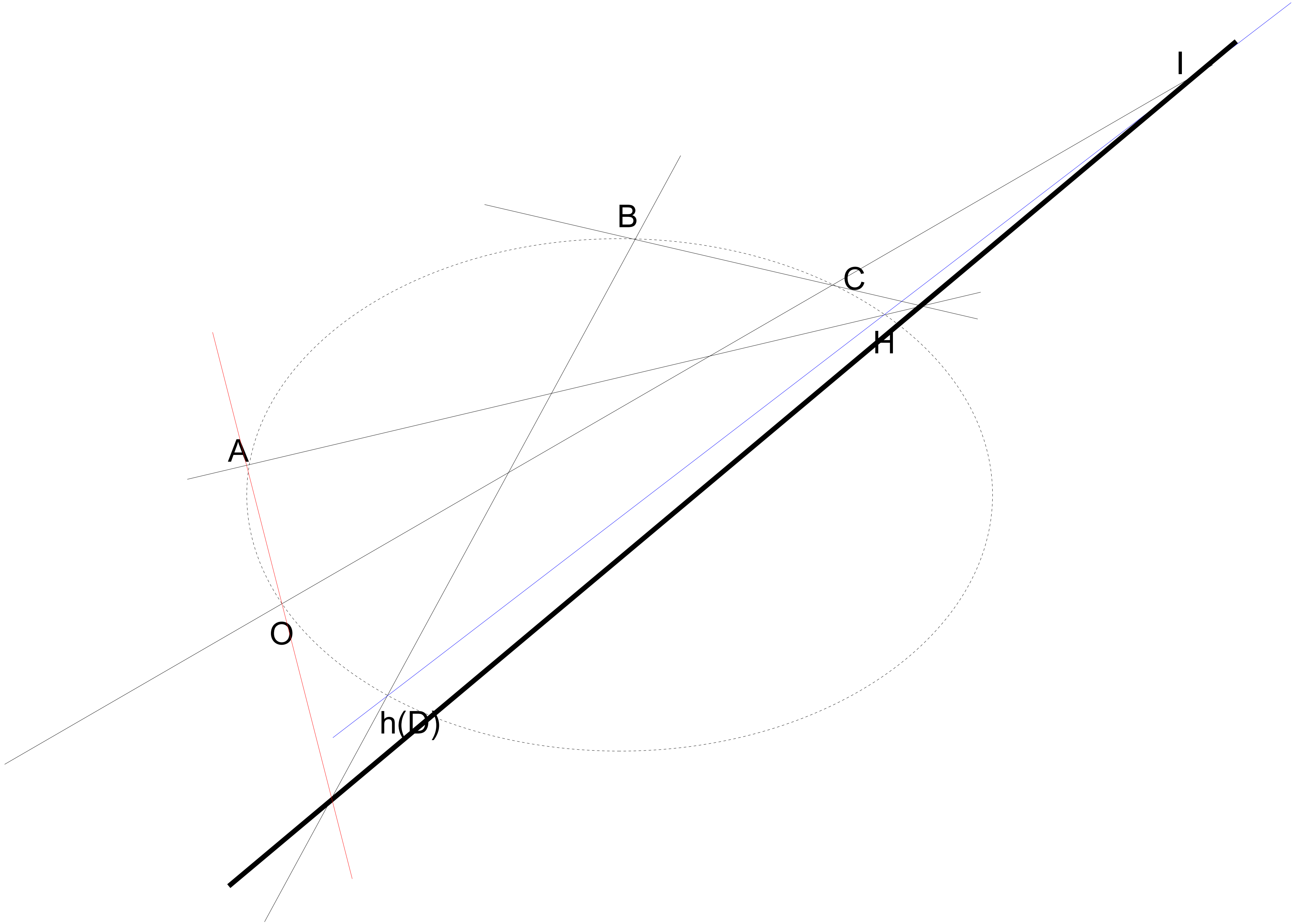


La construction précédente pour la droite AE fournit le point H.
On procède de même pour la seconde conique dont on construit le point G sur la droite AD.




On définit alors une homographie h de la conique passant par ABCDH : à un point M, on associe la droite AM, puis son point d'intersection M' avec la seconde conique, puis la droite BM' et enfin le point h(M) de la première conique sur BM'. Cette homographie laisse fixe C et le point que l'on cherche O, c'est que la droite CO est son axe.
On construit l'axe grâce au point I, et le point O est le point de la conique sur IC.


I
B
C
A
D
O
h(D)



I
B
C
H
A
O
h(D)