380

ASTÉRISQUE

2016

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2014/2015
EXPOSÉ N° 1098

Sébastien GOUËZEL

Spectre du flot géodésique en courbure négative

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 380

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 75 € ($ 112)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1 033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-85629-836-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Séminaire BOURBAKI mars 2015
67e année, 2014-2015, n° 1098, p. 325 à 353

SPECTRE DU FLOT GÉODÉSIQUE EN COURBURE NÉGATIVE [d'après F. Faure et M. Tsujii]

par **Sébastien GOUËZEL**

INTRODUCTION

Quand on cherche à compter des objets, une technique souvent très efficace est de les combiner pour former une fonction d'une variable complexe appelée fonction zêta, dans l'espoir que ses propriétés analytiques révéleront des informations sur les objets initiaux. L'archétype de cette approche est fourni par la fonction zêta de Riemann, qui doit permettre de compter les nombres premiers. En notant $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers, elle est donnée pour $\operatorname{Re} z > 1$ par la formule

$$\zeta_{\text{Riemann}}(z) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}} = \exp\left(\sum_{m \geq 1} \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{e^{-mz \log p}}{m} \right), \tag{1}$$

où la deuxième expression découle directement du développement en série du logarithme. La fonction ζ_{Riemann} s'étend méromorphiquement à $\mathbb{C}$ avec un unique pôle en 1, et elle vérifie une équation fonctionnelle reliant $\zeta_{\text{Riemann}}(z)$ et $\zeta_{\text{Riemann}}(1-z)$. L'hypothèse de Riemann affirme que les zéros de ζ_{Riemann} sont soit des entiers pairs strictement négatifs, soit de partie réelle $1/2$. Elle est équivalente au résultat de comptage suivant sur les nombres premiers : pour tout $\epsilon > 0$,

$$\operatorname{Card}\{\mathscr{P} \cap [1, x]\} = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} + O(x^{1/2+\epsilon}). \tag{2}$$

En 1956, Selberg s'est intéressé aux géodésiques fermées (orientées) sur une surface compacte M de courbure -1, i.e., un quotient compact du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$. Pour les compter, il a introduit dans [**35**] une fonction zêta, définie pour $\operatorname{Re} z > 1$ par la formule

$$\zeta_{\text{Selberg}}(z) = \prod_{\gamma \in \Gamma} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-(z+k)|\gamma|}) = \exp\left(-\sum_{m \geq 1} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-m(z+k)|\gamma|}}{m} \right), \tag{3}$$

où on a noté Γ l'ensemble des géodésiques fermées orientées primitives (i.e., on ne s'autorise pas à faire plusieurs fois le tour de la même géodésique) et $|\gamma|$ la longueur de la géodésique γ. Cette formule ressemble beaucoup (au signe près) à (1) si l'on fait correspondre $\log p$ et $|\gamma|$. Une différence (sur laquelle on reviendra) est le produit en k. En utilisant sa formule des traces (qui relie les géodésiques fermées au spectre du laplacien), Selberg a montré que ζ_{Selberg} admet une extension holomorphe à $\mathbb{C}$, qu'elle y vérifie une équation fonctionnelle reliant ses valeurs en z et $1-z$, et enfin que ses zéros non triviaux sont de la forme $1/2 \pm \sqrt{1/4-\lambda_i}$ où les λ_i sont les valeurs propres du laplacien (hyperbolique) sur M. Cet opérateur étant autoadjoint positif, ses valeurs propres sont réelles positives, ce qui implique que les zéros ont partie réelle $1/2$ en dehors d'un nombre fini d'exceptions dans $[0,1]$. Ainsi, un analogue de l'hypothèse de Riemann est vrai dans ce contexte. Huber en a ensuite déduit dans **[24]** un énoncé de comptage pour les géodésiques fermées analogue à (2).

La définition de la fonction zêta de Selberg s'étend à n'importe quelle variété riemannienne compacte. Plus généralement, étant donné un champ de vecteurs lisse V sur une variété compacte X, on peut considérer le flot correspondant, qui intègre l'équation différentielle donnée par V. Formellement, il s'agit de la famille de difféomorphismes $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de X définie uniquement par $\phi_0 = \mathrm{Id}$ et $\partial\phi_t(x)/\partial t = V(\phi_t(x))$. On peut alors considérer les orbites périodiques de ce flot, et définir une fonction zêta associée comme en (3) si le nombre d'orbites périodiques de longueur au plus T croît au plus exponentiellement en T. Le cas des géodésiques fermées sur une variété riemannienne est un cas particulier de cette construction, donné par le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent à la variété initiale. Dans ce contexte général, où on ne dispose pas de la formule des traces, le produit en k dans (3) ne semble plus justifié. Ruelle a donc introduit dans **[31]** une fonction zêta qui est un analogue plus direct de la fonction zêta de Riemann, soit

$$\zeta_{\mathrm{Ruelle}}(z) = \prod_{\gamma\in\Gamma} \frac{1}{1-e^{-z|\gamma|}} = \exp\left(\sum_{m\geq 1}\sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{e^{-mz|\gamma|}}{m}\right) = \zeta_{\mathrm{Selberg}}(z+1)/\,\zeta_{\mathrm{Selberg}}(z).$$

Il n'est cependant pas clair que ces définitions aient encore un intérêt en dehors de la courbure constante, où leur pertinence est reliée à la structure algébrique sous-jacente. Smale, dans l'article fondateur **[36]** qui introduit ces objets dans un cadre général, écrit d'ailleurs (en parlant du cas des flots d'Anosov, décrit plus bas) : « Does ζ_{Selberg} have a meromorphic continuation to all of $\mathbb{C}$? An affirmative answer would be roughly necessary and sufficient condition for ζ_{Selberg} to be useful. I must admit a positive answer would be a little shocking! »

On décrit dans ce texte les progrès récents à ce sujet, pour les flots d'Anosov (les flots les plus instables, dont l'exemple classique est le flot géodésique sur une variété compacte de courbure strictement négative). Ils apportent une réponse positive à la question de Smale, et vont même beaucoup plus loin dans l'analogie avec le cas de la courbure constante. D'une part, les fonctions ζ_{Selberg} et ζ_{Ruelle} (ainsi que de très nombreuses variantes pondérées naturelles) admettent une extension méromorphe à tout le plan complexe [**18, 11**]. D'autre part, d'après [**15, 17**], sous l'hypothèse supplémentaire que le flot d'Anosov préserve une structure de contact (ce qui est par exemple le cas pour les flots géodésiques), la description fine des zéros due à Selberg en courbure constante subsiste sous une forme à peine affaiblie, à condition de considérer la « bonne » fonction zêta, appelée semi-classique ou de Gutzwiller-Voros, définie en (15). Celle-ci coïncide avec ζ_{Selberg} pour le flot géodésique en courbure constante. La seule propriété de la courbure constante qui n'a pour l'instant pas d'analogue en courbure variable est l'équation fonctionnelle de la fonction zêta. Il semble très improbable qu'une telle relation ait lieu en général, mais qui sait !

Le but de ce texte n'est pas de développer les preuves (délicates) de Faure et Tsujii dans [**16, 17**], mais plutôt de décrire le cadre et les motivations qui mènent à leurs travaux, ainsi que quelques idées des outils mis en jeu dans leurs démonstrations. Le lecteur désireux d'aller plus loin est invité à se plonger dans les articles originaux, remarquablement écrits.

1. FLOTS D'ANOSOV

Les flots d'Anosov sont les flots les plus instables qui soient : deux points proches mais distincts ont des orbites qui s'écartent exponentiellement vite soit vers le passé soit vers le futur, et typiquement dans les deux directions du temps. Leur intérêt provient à la fois de leur lien avec la géométrie en courbure négative, et de leurs riches propriétés dynamiques. Tous les résultats de cette partie sont classiques, on pourra voir par exemple [**22**] pour plus de détails sur ce qui suit.

1.1. Définition et premières propriétés

DÉFINITION 1.1. — *Soit V un champ de vecteurs C^∞ sans zéro sur une variété riemannienne compacte connexe X, de flot $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$. On dit que (ϕ_t) est un flot d'Anosov s'il existe en chaque $x \in X$ une décomposition de l'espace tangent T_xX comme $E^c(x) \oplus E^u(x) \oplus E^s(x)$ et des constantes $\lambda > 0$, $C > 0$ telles que :*

- *les sous-espaces vectoriels $E^c(x)$, $E^u(x)$ et $E^s(x)$ dépendent continûment de x ;*
- *l'espace vectoriel $E^c(x)$ est de dimension 1, engendré par $V(x)$;*
- *pour tout $x \in X$, tout $v \in E^s(x)$ et tout $t \geq 0$, on a $\|D\phi_t(x) \cdot v\| \leq Ce^{-\lambda t}\|v\|$;*
- *pour tout $x \in X$, tout $v \in E^u(x)$ et tout $t \geq 0$, on a $\|D\phi_{-t}(x) \cdot v\| \leq Ce^{-\lambda t}\|v\|$.*

Cette définition est en fait indépendante de la métrique riemannienne sur X. On peut même choisir une telle métrique de telle sorte que $C = 1$. On dit que $E^s(x)$ est la direction contractante du flot, et $E^u(x)$ la direction dilatante. On note d_s et d_u les dimensions de $E^s(x)$ et $E^u(x)$, elles sont indépendantes de x. La décomposition $T_xX = E^c(x) \oplus E^u(x) \oplus E^s(x)$ est invariante par le flot, i.e., $E^i(\phi_t(x)) = D\phi_t(x) \cdot E^i(x)$ pour $i \in \{c, u, s\}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.2. — On peut aussi définir un difféomorphisme d'Anosov sur une variété X comme un difféomorphisme pour lequel on a une décomposition $T_xX = E^u(x) \oplus E^s(x)$ avec des propriétés similaires de dilatation exponentielle le long de E^u et de contraction exponentielle le long de E^s. La différence cruciale est la présence, dans le cas des flots, de la direction du flot le long de laquelle aucun chaos n'est *a priori* présent, puisque deux points distants de τ dans la direction du flot restent éternellement dans cette configuration quand on itère ϕ_t. Pour un certain nombre de problèmes, ceci rend le cas des flots nettement plus délicat que celui des difféomorphismes. La plupart des définitions et résultats dans la suite ont leur pendant pour les difféomorphismes, qu'on ne donnera pas explicitement ici.

Alors que la définition 1.1 ne concerne que la dynamique sur l'espace tangent, elle gouverne également le comportement local du flot comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.3. — *Soit ϕ_t un flot d'Anosov sur une variété X. Pour $\epsilon > 0$ et $x \in X$, notons*

$$W_\epsilon^{cs}(x) = \{y \in X \ : \ d(\phi_t x, \phi_t y) < \epsilon \text{ pour tout } t \geq 0\}$$

et

$$W_\epsilon^{s}(x) = \{y \in W_\epsilon^{cs}(x) \ : \ d(\phi_t x, \phi_t y) \to 0 \text{ quand } t \to +\infty\}.$$

On définit de même $W_\epsilon^{cu}(x)$ et $W_\epsilon^u(x)$ en imposant les mêmes conditions respectivement lorsque $t \leq 0$ et lorsque $t \to -\infty$.

Si ϵ est assez petit, ces quatre ensembles sont des sous-variétés C^∞ de X, tangentes en x respectivement à $E^{cs}(x) = E^s(x) \oplus E^c(x)$, à $E^s(x)$, à $E^{cu}(x) = E^u(x) \oplus E^c(x)$ et à $E^u(x)$.

On appelle $W_\epsilon^s(x)$ la variété stable locale en x, $W_\epsilon^{cs}(x)$ la variété stable faible locale en x, $W_\epsilon^u(x)$ la variété instable locale en x, et $W_\epsilon^{cu}(x)$ la variété instable faible locale en x. Ces variétés admettent aussi des versions globales, qui sont alors des sous-variétés immergées dans X, notées respectivement $W^s(x)$, $W^{cs}(x)$, $W^u(x)$ et $W^{cu}(x)$.

On peut reformuler la proposition en disant que les distributions de sous-espaces vectoriels E^s, E^{cs}, E^u et E^{cu} sont intégrables. Il y a cependant une subtilité ici :

en général, ces sous-espaces vectoriels ne dépendent pas de manière C^∞ de x, mais seulement höldérienne (autrement dit, si d désigne une distance riemannienne sur la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension d_s dans TX, on a $d(E^s(x), E^s(y)) \leq Cd(x,y)^\beta$ pour certains $C > 0$ et $\beta > 0$, mais on ne peut en général pas prendre $\beta = 1$). Ainsi, l'intégrabilité ne peut pas se formuler en utilisant le critère de Frobenius sur le crochet de Lie des champs de vecteurs lisses tangents à E^s ou E^u ou E^{cs} ou E^{cu}, puisqu'il n'y a en général pas de tel champ de vecteurs non nul.

Dans la suite, on fera toujours l'hypothèse supplémentaire que les flots d'Anosov que l'on considère sont *topologiquement transitifs* : pour tous ouverts non vides U et V, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_t(U) \cap V \neq \varnothing$.

Exemple 1.4. — Soit T la transformation du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ donnée par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Cette matrice a deux valeurs propres $\lambda_u = (3+\sqrt{5})/2 > 1$ et $\lambda_s = (3-\sqrt{5})/2 < 1$, de directions propres respectives notées e_u et e_s. C'est donc un difféomorphisme d'Anosov du tore. On définit une variété X comme le quotient de $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ par la relation identifiant $(x,1)$ avec $(T(x),0)$. Le champ de vecteurs vertical V (correspondant à la direction $[0,1]$) définit alors un flot d'Anosov sur X : les directions instable et stable, de dimension 1, sont dirigées respectivement par $(e_u, 0)$ et $(e_s, 0)$.

Plus généralement, si $r : \mathbb{T}^2 \to]0, +\infty[$ est une fonction C^∞, on définit une variété X_r comme le quotient de $\{(x,\tau) : x \in \mathbb{T}^2, \tau \in [0, r(x)]\}$ par la relation identifiant $(x, r(x))$ avec $(T(x), 0)$. Le champ de vecteurs vertical définit encore un flot d'Anosov sur X_r, mais les directions stable et instable ne sont plus horizontales en général, contrairement au cas précédent où r est constant. On dit que ce flot est le *flot de suspension* au-dessus du difféomorphisme d'Anosov T, de temps de retour r.

Exemple 1.5. — Soit M une variété riemannienne compacte. Sur son fibré tangent unitaire $X = T^1M$ (formé des vecteurs tangents à M de norme 1), le flot géodésique ϕ_t est défini comme suit. Partant d'un vecteur v, considérons l'unique géodésique issue de v dans M, parcourue à vitesse 1, et notons $\phi_t(v)$ le vecteur tangent à cette géodésique au temps t. Si M est partout de courbure sectionnelle strictement négative, le flot géodésique est alors un flot d'Anosov.

1.2. Flots d'Anosov de contact

On s'intéressera tout particulièrement dans la suite à une classe spécifique de flots d'Anosov qu'on introduit maintenant, ceux qui préservent une forme de contact.

Sur une variété X de dimension impaire $2d+1$, une *forme de contact* est une 1-forme différentielle α de classe C^∞ telle que $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^d$ est une forme volume. Un flot d'Anosov est dit *de contact* s'il préserve une telle forme de contact. Il préserve alors la forme volume correspondante.

Si ϕ_t est un flot d'Anosov de contact, les directions stable et instable E^s et E^u sont incluses dans le noyau de la forme de contact. En effet, si $v \in E^s(x)$, on a $\alpha(x)(v) = \alpha(\phi_t(x))(D\phi_t(x)v)$ par invariance de la forme de contact, et le terme de droite tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Comme $E^u \oplus E^s$ est de codimension 1, on obtient $\ker \alpha = E^u \oplus E^s$ (ce qui implique en particulier que $E^u(x) \oplus E^s(x)$ dépend de manière C^∞ de x, ce qui est faux pour un flot d'Anosov général). Ainsi, α est nécessairement partout non nulle sur le champ de vecteurs V définissant le flot d'Anosov. On peut normaliser α de telle sorte que $\alpha(V) = 1$. Le champ de vecteurs V est alors caractérisé par les équations $\alpha(V) = 1$ et $i_V \, \mathrm{d}\alpha = 0$.

La 2-forme $\omega = \mathrm{d}\alpha$, également invariante par le flot, se restreint en une 2-forme sur $E^u \oplus E^s$, symplectique puisque α est de contact. Considérons $v, w \in E^s(x)$. Par invariance, $\omega(x)(v, w) = \omega(\phi_t(x))(D\phi_t(x)v, D\phi_t(x)w)$. Le terme de droite tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini, grâce à la contraction du flot dans la direction stable. Cela montre que $\omega(x)(v, w) = 0$. Ainsi, la restriction de ω à E^s (et, de même, à E^u) est nulle. Ces deux sous-espaces ont donc tous deux dimension d, et sont lagrangiens.

Soit $v \in E^s(x)$ un vecteur non nul. Comme ω est non dégénérée sur $\ker \alpha$, on peut trouver un vecteur $w \in E^u(x)$ avec $\mathrm{d}\alpha(v, w) = \omega(v, w) = 1$. Géométriquement, cette égalité a l'interprétation suivante : si on se déplace d'une distance ϵ petite dans la direction v sur $W^s(x)$ jusqu'en un point x_1, puis d'une distance ϵ dans la direction w sur $W^u(x_1)$ jusqu'en un point x_2, puis d'une distance ϵ dans la direction $-v$ sur $W^s(x_2)$ jusqu'en un point x_3, puis d'une distance ϵ dans la direction $-w$ sur $W^u(x_3)$, on arrive en un point x_4 qui est dans l'orbite de x sous le flot ϕ_t, mais ne coïncide pas avec x : il est plutôt comparable à $\phi_{\epsilon^2}(x)$. En particulier, la distribution d'hyperplans $E^s \oplus E^u$ n'est pas intégrable. Ceci montre directement que la suspension d'un difféomorphisme d'Anosov avec temps de retour constant, décrite dans l'exemple 1.4, n'est *pas* un flot d'Anosov de contact : dans cet exemple, $E^s \oplus E^u$ est intégrable (les variétés intégrales étant les tores $\mathbb{T}^2 \times \{a\}$ pour $a \in [0, 1]$). Notons que, même si le temps de retour est variable (ce qui permet à $E^s \oplus E^u$ de ne pas être intégrable), une telle suspension n'est en fait jamais un flot de contact pour des raisons topologiques.

Le fibré cotangent à une variété M est muni d'une 1-forme canonique, la forme de Liouville, donnée par $\alpha(x, \xi)(v) = \xi(\pi_* v)$ où x est un point de la variété, ξ est un vecteur cotangent en x, v désigne un vecteur tangent en (x, ξ) au fibré cotangent T^*M et π est la projection canonique de T^*M vers M. Ainsi, $\pi_* v$ est tangent à M en x, et $\xi(\pi_* v)$ est bien défini. Lorsque M est une variété riemannienne, cette forme de Liouville se restreint au fibré cotangent unitaire, identifié avec le fibré tangent unitaire grâce à la métrique. Ainsi, T^1M est muni d'une 1-forme canonique, dont on vérifie de plus que c'est une forme de contact, invariante par le flot géodésique. Ainsi, les flots d'Anosov provenant de l'exemple 1.5 sont tous de contact.

1.3. Orbites périodiques et mesure de Bowen-Margulis

DÉFINITION 1.6. — *Un flot d'Anosov ϕ_t est topologiquement mélangeant si, pour tous ouverts non vides U et V, il existe t_0 tel que, pour tout $t \geq t_0$, on ait $\phi_t(U) \cap V \neq \varnothing$.*

On montre qu'un flot d'Anosov est topologiquement mélangeant si et seulement si les longueurs de ses orbites périodiques ne sont pas contenues dans un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$. Un flot de suspension avec temps de retour constant, comme dans l'exemple 1.4, n'est pas topologiquement mélangeant : ses orbites fermées ont toutes une longueur entière. Tous les flots d'Anosov qui ne sont pas topologiquement mélangeants sont essentiellement de cette nature. À l'opposé, les flots d'Anosov de contact sont topologiquement mélangeants : c'est une conséquence de la non-intégrabilité locale de $E^s \oplus E^u$ expliquée au paragraphe 1.2.

Dans [**27**], Margulis a démontré l'analogue du théorème des nombres premiers pour les orbites périodiques des flots d'Anosov topologiquement mélangeants. Étant donné un flot d'Anosov, on note Γ l'ensemble de ses orbites périodiques primitives.

THÉORÈME 1.7. — *Soit (ϕ_t) un flot d'Anosov topologiquement mélangeant. Il existe alors $h > 0$ tel que*

$$\operatorname{Card}\{\gamma \in \Gamma \ : \ |\gamma| \leq t\} \sim \frac{e^{ht}}{ht}.$$

Notons que la conclusion du théorème implique que, pour tout $\delta > 0$, il y a des orbites périodiques de longueur appartenant à $[t, t+\delta]$ pour tout t assez grand. Ainsi, les longueurs des orbites périodiques ne sont pas contenues dans un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$, ce qui montre que l'hypothèse de mélange topologique est nécessaire dans ce théorème.

Contrairement au théorème des nombres premiers, la preuve de Margulis ne passe pas par une fonction zêta. Elle repose sur des arguments de théorie ergodique, qu'on va esquisser puisqu'ils sous-tendent les résultats récents sur les fonctions zêta des flots d'Anosov. Une preuve reposant sur des fonctions zêta a été obtenue par Parry et Pollicott [**29**], voir la remarque 2.7.

L'étape principale de la preuve est la suivante :

FAIT 1.8. — *Il existe une famille de mesures positives $m^u(x)$ sur $W^u(x)$, finies sur les compacts de $W^u(x)$, dépendant mesurablement de x, telles que $(\phi_t)^*(m^u(\phi_t(x))) = e^{ht} m^u(x)$, pour un certain réel $h > 0$. Cette famille est unique, à multiplication par un scalaire près.*

De même, on construit $m^s(x)$ sur $W^s(x)$ avec $(\phi_t)^*(m^s(\phi_t(x))) = e^{-ht}m^s(x)$. On définit ensuite une mesure m comme « produit local » de m^u dans la direction instable, de m^s dans la direction stable, et de dt dans la direction du flot. Si les mesures avaient des densités, on serait simplement en train de prendre en chaque point x le produit extérieur d'une forme volume sur $E^u(x)$, d'une forme volume sur $E^s(x)$ et d'une forme volume sur $E^c(x)$, pour obtenir une forme volume sur T_xX. La construction générale est analogue mais un peu plus délicate.

Cette mesure m est invariante par le flot ϕ_t, i.e., $(\phi_t)^*m = m$, puisque pour calculer son jacobien on doit multiplier le facteur e^{ht} provenant de la direction instable avec le facteur e^{-ht} provenant de la direction stable et le facteur 1 provenant de la direction du flot. La mesure m est localement finie, donc finie puisque X est compact. Quitte à multiplier m^u par une constante, on peut supposer que m est de masse 1.

En utilisant le mélange topologique du flot, on vérifie que la mesure m est mélangeante au sens de la théorie ergodique :

Fait 1.9. — *Pour toutes parties mesurables U et V de X, on a $m(\phi_t(U) \cap V) \to m(U)m(V)$ lorsque $t \to \infty$.*

Fixons maintenant une petite boîte de flot B, de la forme $W^u_\epsilon(p) \times W^s_\epsilon(p) \times [0, \epsilon]$ (où la dernière coordonnée correspond à la direction du flot). Si t est grand, la plupart des composantes connexes $(U_i)_{i \in I(B)}$ de $\phi_t(B) \cap B$ sont de la forme $U_i = W^u_\epsilon(p) \times A^s_i \times I_i$ où A^s_i est une partie exponentiellement petite de $W^s_\epsilon(p)$ et I_i est un sous-intervalle de $[0, \epsilon]$ de la forme $[0, \epsilon] \cap [s_i, s_i + \epsilon]$ (avec $s_i \in [-\epsilon, \epsilon]$ puisque l'intersection est non vide). En effet, comme $W^u_\epsilon(p)$ est dilaté exponentiellement, il va recouper la plupart du temps B suivant des morceaux entiers $W^u_\epsilon(p)$, les morceaux partiels étant des termes de bord qu'on peut négliger. La préimage par ϕ_t d'une telle composante connexe est de la forme $A^u_i \times W^s_\epsilon(p) \times J_i$, où A^u_i est exponentiellement petit. L'application induite par ϕ_t de A^u_i dans $W^u_\epsilon(p)$ étant dilatante, elle admet un point fixe d'après le principe de contraction de Banach appliqué à son inverse. De même, l'application de $W^s_\epsilon(p)$ dans A^s_i a un point fixe. On en déduit l'existence, dans cette composante connexe, d'une unique orbite périodique, dont la période $t - s_i$ appartient à $[t-\epsilon, t+\epsilon]$. Réciproquement, chaque orbite périodique provient d'une telle composante connexe. Il revient donc au même de compter les orbites périodiques ou les composantes connexes, ce qu'on va faire en utilisant la mesure. On a

$$(4)\quad m(\phi_t(B) \cap B) \approx \sum_{i \in I(B)} m(W^u_\epsilon(p) \times A^s_i \times I_i) \approx \sum_{i \in I(B)} m^u(W^u_\epsilon(p)) m^s(A^s_i) \operatorname{Leb}(I_i).$$

On a $m^s(A^s_i) = m^s(\phi_t(W^s_\epsilon(p))) = e^{-ht}m^s(W^s_\epsilon(p))$ d'après le fait 1.8 pour m_s. De plus, pour des composantes connexes typiques, $\operatorname{Leb}(I_i) \approx \epsilon/2$, puisqu'on montre que s_i est à peu près uniforme dans $[-\epsilon, \epsilon]$. Dans la somme de droite, chaque terme est donc comparable à

$$e^{-ht} \cdot m^u(W^u_\epsilon(p))m^s(W^s_\epsilon(p))\epsilon/2 \approx e^{-ht}/2 \cdot m(B).$$

D'après le mélange de la mesure m (fait 1.9), le terme de gauche dans (4) tend vers $m(B)^2$ lorsque t tend vers $+\infty$. On obtient donc

$$\mathrm{Card}\{I(B)\} \approx 2e^{ht}m(B).$$

Finalement, considérons une partition de l'espace en boîtes de flot B_k comme ci-dessus. Chaque orbite périodique de longueur dans $[t-\epsilon, t+\epsilon]$ a environ t/ϵ morceaux de longueur ϵ, chacun étant compté dans un $I(B_k)$. Ainsi,

$$\mathrm{Card}\{\gamma \in \Gamma \;:\; |\gamma| \in [t-\epsilon, t+\epsilon]\} \approx \frac{\epsilon}{t} \sum \mathrm{Card}\{I(B_k)\} \approx \frac{\epsilon}{t} \cdot 2e^{ht} \sum m(B_k) = 2\epsilon \frac{e^{ht}}{t}.$$

Ceci montre que la dérivée (discrétisée) de $t \mapsto \mathrm{Card}\{\gamma \in \Gamma \;:\; |\gamma| \leq t\}$ se comporte comme e^{ht}/t, et donc que cette fonction est comparable à $e^{ht}/(ht)$, prouvant le théorème 1.7. $\square$

Toutes les approximations faites dans l'argument précédent se justifient rigoureusement en utilisant le mélange. Ainsi, les seuls ingrédients non triviaux qu'il resterait à prouver sont les faits 1.8 et 1.9. Tandis que les arguments de Margulis pour les établir sont non-constructifs et peu explicites, on décrira dans la suite des arguments plus précis et plus fins, qui permettent d'aller plus loin que le théorème 1.7. Le réel h du fait 1.8 est *l'entropie topologique* du flot. La mesure m est appelée mesure d'entropie maximale, ou mesure de Bowen-Margulis.

1.4. Orbites périodiques pondérées et mesures de Gibbs

On a vu dans le paragraphe précédent que le comptage des orbites d'un flot d'Anosov était lié à une mesure invariante, la mesure de Bowen-Margulis. Dans le cas des flots d'Anosov de contact, on dispose d'une autre mesure invariante, la mesure de Lebesgue induite par la forme de contact, qui est en général différente de la mesure de Bowen-Margulis (elles coïncident pour les flots géodésiques en courbure constante strictement négative). On va expliquer en quoi cette mesure naturelle intervient dans un autre problème de comptage des orbites périodiques, pondéré.

Soit ϕ_t un flot d'Anosov sur une variété compacte X. Fixons une fonction $g : X \to \mathbb{R}$, höldérienne, appelée potentiel. On cherche à compter les orbites périodiques pondérées par la fonction g. Autrement dit, on cherche l'asymptotique de

$$\sum_{\gamma \in \Gamma, |\gamma| \leq t} e^{\int_\gamma g},$$

où $\int_\gamma g$ désigne $\int_0^{|\gamma|} g(\phi_\tau(x))\,\mathrm{d}\tau$ pour x un point arbitraire de γ. Le cas $g = 0$ correspond au comptage classique comme dans le théorème 1.7. Ici, on donne plus de poids aux orbites périodiques qui passent beaucoup de temps dans les régions où g est grand.

Pour résoudre ce problème de comptage, on peut imiter la construction de Margulis. On commence par construire une famille de mesures $m_g^u(x)$ sur $W^u(x)$ telles que, en notant y un point sur $W^u(x)$,

$$\mathrm{d}\big[(\phi_t)^* m_g^u(\phi_t(x))\big](y) = e^{P(g)t - \int_0^t g(\phi_\tau(y))\,\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\big[m_g^u(x)\big](y), \tag{5}$$

pour un certain scalaire $P(g)$ appelé la *pression* du potentiel g. De même, on construit des mesures $m_g^s(x)$ sur $W^s(x)$ telles que $(\phi_t)^* m_g^s(\phi_t(x)) = e^{-P(g)t + \int_0^t g(\phi_\tau(y))\,\mathrm{d}\tau} m_g^s(x)$ (où on a omis y en deux endroits par rapport à (5) pour alléger la notation). On définit ensuite une mesure m_g comme le produit local de m_g^u, de m_g^s et de $\mathrm{d}t$ dans la direction du flot. On peut faire en sorte que ce soit une mesure de probabilité en changeant la normalisation de m_g^u par exemple. Par construction, cette mesure est invariante par le flot. Lorsque ϕ_t est topologiquement mélangeant, cette mesure est mélangeante au sens ergodique du terme.

On peut alors reprendre la preuve du théorème 1.7, et aboutir à l'énoncé suivant (voir par exemple [**29, 30**]).

THÉORÈME 1.10. — *Soit (ϕ_t) un flot d'Anosov topologiquement mélangeant sur une variété compacte X. Soit $g : X \to \mathbb{R}$ une fonction höldérienne. Notons $P(g)$ sa pression. Si $P(g) > 0$, on a*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma, |\gamma| \leq t} e^{\int_\gamma g} \sim \frac{e^{P(g)t}}{P(g)t}. \tag{6}$$

Notons que, si $c \in \mathbb{R}$, on a $P(g + c) = P(g) + c$. Ainsi, on peut toujours aisément se ramener au cas $P(g) > 0$.

La mesure m_g qui apparaît dans la preuve de ce théorème est la *mesure de Gibbs* associée au potentiel g. Elle apparaît dans différents contextes, et possède donc de nombreuses définitions équivalentes.

Supposons maintenant qu'un flot d'Anosov topologiquement mélangeant préserve le volume m (par volume, on entend une mesure qui, dans toute carte, est équivalente à la mesure de Lebesgue avec une densité lisse). On va voir que le volume est alors une mesure de Gibbs. Fixons une métrique riemannienne sur la variété. La différentielle $D\phi_t(x)$ envoie $E^u(x)$ sur $E^u(\phi_t(x))$. Ces deux sous-espaces sont munis d'un volume induit par la métrique riemannienne. On peut donc définir le *jacobien instable* $J_u(t, x) = |\det(D\phi_t(x) : E^u(x) \to E^u(\phi_t(x)))|$ (qui tend exponentiellement vite vers $+\infty$ avec t). La fonction $t \mapsto J_u(t, x)$, à x fixé, est lisse puisque

$E^u(\phi_t(x)) = D\phi_t(x) \cdot E^u(x)$ dépend de manière lisse de t. On peut donc définir un potentiel

$$g_u(x) = -\partial(\log J_u(t,x))/\partial t|_{t=0}. \tag{7}$$

Soient C et λ les constantes intervenant dans la définition 1.1 du flot d'Anosov, et d_u la dimension de la direction instable. Si $C = 1$, on a $g_u(x) \leq -d_u\lambda < 0$. Par construction, $\log J_u(t,x) = -\int_0^t g_u(\phi_\tau(x))\,\mathrm{d}\tau$. Comme $E^u(x)$ dépend de x seulement de manière höldérienne, la fonction g_u est höldérienne, mais pas mieux en général. La mesure riemannienne $m^u(x)$ sur $W^u(x)$ vérifie

$$(\phi_t)^*(m^u(\phi_t(x))) = J_u(t,y)m^u(x) = e^{-\int_0^t g_u(\phi_\tau(y))\,\mathrm{d}\tau} m^u(x).$$

Cela montre que m^u est la mesure $m^u_{g_u}$ le long des variétés instables (et que la pression de g_u est nulle). On vérifie également que la mesure $m^s_{g_u}$ est équivalente à la mesure de Lebesgue le long des variétés stables, et que la mesure de Gibbs m_{g_u} correspondante, obtenue par produit local, est exactement le volume m dont on est parti.

Notons que le potentiel g_u n'est pas canonique : si on était parti d'une autre métrique riemannienne, on aurait obtenu un autre potentiel $\tilde{g}_u$, qui aurait tout de même donné lieu à la même mesure de Gibbs. Du point de vue dynamique, ces potentiels sont essentiellement les mêmes : il existe une fonction k (le rapport des volumes induits par les deux métriques sur E^u) telle que $\int_0^t g_u(\phi_\tau(x))\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \tilde{g}_u(\phi_\tau(x))\,\mathrm{d}\tau + k(\phi_t(x)) - k(x)$. On dit que ces deux potentiels sont *cohomologues*. Deux potentiels höldériens induisent la même mesure de Gibbs si et seulement si ils sont cohomologues.

Si γ est une orbite périodique, la quantité $e^{\int_\gamma g_u}$ est donnée par $1/J_u(\gamma)$, où $J_u(\gamma)$ désigne le jacobien instable de $D\phi_t(x) : E^u(x) \to E^u(x)$, pour tout point x dans γ. Le théorème général 1.10 se spécialise donc, dans ce cas particulier, en la proposition suivante.

PROPOSITION 1.11. — *Soit ϕ_t un flot d'Anosov topologiquement mélangeant, qui préserve une mesure de volume m. Fixons $a > 0$. Alors*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma, |\gamma|\leq t} \frac{e^{a|\gamma|}}{J_u(\gamma)} \sim \frac{e^{at}}{at}.$$

On a dû décaler g_u en $g_u + a$ avec $a > 0$ pour que l'hypothèse de pression positive dans le théorème 1.10 soit satisfaite. Sur une surface hyperbolique de courbure -1, on a $J_u(\gamma) = e^{|\gamma|}$. Ainsi, l'énoncé précédent (avec $a = 1$) redonne l'énoncé de comptage sans poids du théorème 1.7, avec $h = 1$. C'est normal puisque, dans ce cas, la mesure d'entropie maximale et le volume coïncident. En général, les deux énoncés de comptage sont indépendants.

2. EXTENSION MÉROMORPHE DE LA FONCTION ZÊTA

2.1. Opérateurs de transfert

On a vu dans la section précédente que les énoncés de comptage des orbites fermées, pondérées ou non, d'un flot d'Anosov ϕ_t topologiquement mélangeant, étaient liés à l'existence sur les variétés instables de familles de mesures dont la variation sous la dynamique est prescrite, et aux propriétés de mélange d'une mesure invariante pour le flot construite à partir de celles-ci.

Pour obtenir des résultats plus précis, l'idée centrale est de mieux comprendre l'opérateur dont ces familles de mesures forment un vecteur propre : on peut espérer que son comportement fin (et, en particulier, ses autres valeurs propres) donneront les termes suivants dans les énoncés de comptage.

L'opérateur qu'on doit considérer est l'opérateur de transfert, ou opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius, dont il existe divers avatars. Celui qui correspond directement à la discussion précédente agit sur l'espace $\mathcal{V}^u = \Gamma(\bigwedge^{d_u}(E^u)^*)$ des formes volume sur E^u. Plus précisément, un élément ω de $\mathcal{V}^u$ est par définition un objet qui associe à tout $x \in X$ une forme volume $\omega(x)$ sur $E^u(x)$. Soit $g : X \to \mathbb{R}$ un potentiel. Pour $t \geq 0$, on définit l'opérateur de transfert $\mathcal{L}^t_{g,\mathcal{V}^u} : \mathcal{V}^u \to \mathcal{V}^u$ associé à ϕ_t et au potentiel g par

$$(\mathcal{L}^t_{g,\mathcal{V}^u}\omega)(x) = e^{\int_0^t g(\phi_\tau(x))\,\mathrm{d}\tau} D\phi_t(x)^*\omega(\phi_t(x)).$$

Ces opérateurs forment un semi-groupe : on a $\mathcal{L}^{t+t'}_{g,\mathcal{V}^u} = \mathcal{L}^t_{g,\mathcal{V}^u} \cdot \mathcal{L}^{t'}_{g,\mathcal{V}^u}$.

Si on trouve un vecteur propre ω positif correspondant pour tout t à une valeur propre positive e^{tP} de $\mathcal{L}^t_{g,\mathcal{V}^u}$, alors la mesure m^u_g obtenue en intégrant cette forme volume le long de W^u vérifie l'équation (5).

Remarque 2.1. — Comme $x \mapsto E^u(x)$ est seulement höldérienne, on ne peut pas demander à un élément de $\Gamma(\bigwedge^{d_u}(E^u)^*)$ d'être C^∞. On pourrait requérir de la continuité dans la définition de $\mathcal{V}^u$. On sera amené dans la suite à utiliser d'autres classes de régularité, encore plus faibles. En effet, en général, la densité instable m^u_g de la mesure de Gibbs est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Cela signifie qu'il ne faudra pas chercher de vecteur propre directement dans $\mathcal{V}^u$, mais travailler dans la complétion de $\mathcal{V}^u$ pour une norme bien choisie.

On aura en fait besoin de faire agir ce type d'opérateur de transfert non seulement sur $\mathcal{V}^u$, mais aussi sur les sections d'autres fibrés. Le cas le plus simple est celui des sections du fibré trivial, i.e., les fonctions. On se concentrera sur ce cas pour simplifier, sachant que l'extension à un fibré général ne pose en général pas de difficulté. On notera $\mathcal{L}^t_g f(x) = e^{\int_0^t g(\phi_\tau(x))\,\mathrm{d}\tau} f(\phi_t(x))$ l'opérateur de transfert agissant sur les fonctions.

Remarque 2.2. — Comme $\bigwedge^{d_u}(E^u)^*$ est un fibré en droites, on peut ramener l'étude de $\mathcal{L}^t_{g,\mathcal{V}^u}$ au cas d'un opérateur agissant sur les fonctions, au moins quand E^u est orientable. En effet, fixons une métrique riemannienne sur X, et notons ω_0 l'élément de $\mathcal{V}^u$ qui associe à x le volume riemannien sur $E^u(x)$. Tout élément ω de $\mathcal{V}^u$ s'écrit $f\omega_0$ où f est une fonction continue. On a alors, en rappelant la notation g_u de (7)

$$\mathcal{L}^t_{g,\mathcal{V}^u}(f\omega_0)(x) = e^{\int_0^t (g-g_u)(\phi_\tau(x))\,\mathrm{d}\tau} f(\phi_t(x))\omega_0(x).$$

Ainsi, $\mathcal{L}^t_{g,\mathcal{V}^u}$ est conjugué à $\mathcal{L}^t_{g-g_u}$. L'opérateur $\mathcal{L}^t_g$ est donc relié à la mesure de Gibbs pour le potentiel $\tilde{g} = g + g_u$. Ainsi, $\mathcal{L}^t_0$ traite du volume, et $\mathcal{L}^t_{-g_u}$ est lié à la mesure d'entropie maximale.

2.2. Quelques rappels de théorie spectrale

Dans la suite, on aura besoin de quelques notions de théorie spectrale, qu'on rappelle brièvement dans ce paragraphe. Voir par exemple **[12]**.

Le cas d'un opérateur borné est plus aisé. Soient $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}$ un opérateur linéaire continu sur $\mathcal{B}$. Le *spectre* $\sigma(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ est l'ensemble des nombres complexes z tels que $zI - \mathcal{M}$ ne soit pas inversible. Si z a un module assez grand, il n'appartient pas au spectre puisque $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1}\mathcal{M}^k$ est bien défini et inverse de $zI - \mathcal{M}$.

Si z est un point isolé du spectre de $\mathcal{M}$, on peut définir le *projecteur spectral* correspondant $\Pi_z = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{C_z}(wI - \mathcal{M})^{-1}\,\mathrm{d}w$, où C_z est un petit cercle autour de z. Cette définition est indépendante du choix de C_z, par holomorphie de $w \mapsto (wI - \mathcal{M})^{-1}$ hors de $\sigma(\mathcal{M})$. L'opérateur Π_z est une projection, son image et son noyau sont invariants par $\mathcal{M}$, et le spectre de la restriction de $\mathcal{M}$ à l'image est $\{z\}$, tandis que le spectre de la restriction de $\mathcal{M}$ au noyau est $\sigma(\mathcal{M}) - \{z\}$.

On dit que z est une valeur propre isolée de multiplicité finie de $\mathcal{M}$ si z est un point isolé de $\sigma(\mathcal{M})$, et si l'image de Π_z est de dimension finie. Cette image est alors le sous-espace caractéristique associé à z, i.e., le noyau de $(zI - \mathcal{M})^N$ pour tout N assez grand. On note $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{M})$ le spectre essentiel de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire l'ensemble des points de $\sigma(\mathcal{M})$ qui ne sont pas des valeurs propres isolées de multiplicité finie.

On définit le rayon spectral $r(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ comme $\sup\{|z| \,:\, z \in \sigma(\mathcal{M})\} < \infty$, et le rayon spectral essentiel $r_{\mathrm{ess}}(\mathcal{M})$ comme $\sup\{|z| \,:\, z \in \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{M})\} \leq r(\mathcal{M})$. Moralement, au-delà du rayon spectral essentiel, l'opérateur $\mathcal{M}$ se comporte comme une matrice sur un espace de dimension finie.

On considérera aussi des opérateurs non bornés. Soit $\mathcal{M}^t$ un semigroupe fortement continu d'opérateurs sur un espace de Banach complexe $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$. On note A son générateur, défini par $Au = \lim_{t\to 0}(\mathcal{M}^t u - u)/t$ sur l'ensemble $D(A)$ (appelé le domaine de A) où cette limite existe. On parlera indifféremment des propriétés spectrales de A ou du semigroupe $\mathcal{M}^t$. Un nombre complexe z appartient à l'ensemble résolvant de A s'il existe un opérateur continu $R(z) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, d'image contenue dans $D(A)$, tel que $R(z)(zI - A) = \mathrm{Id}_{D(A)}$ et $(zI - A)R(z) = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$. On appelle $R(z)$ la résolvante de A au point z. Le spectre de A est le complémentaire de l'ensemble résolvant. On peut définir comme dans le cas d'un opérateur borné le projecteur spectral Π_z, et la notion de spectre essentiel. Si $\mathrm{Re}\, z$ est assez grand, alors z n'appartient pas au spectre de A puisque

$$R(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\mathcal{M}^t \,\mathrm{d}t \tag{8}$$

est bien défini et fournit un inverse à $zI - A$.

On peut formellement écrire $\mathcal{M}^t = \exp(tA)$. On voudrait donc penser que $\sigma(\mathcal{M}^t) = \exp(t\sigma(A))$, et de même pour le spectre essentiel. C'est faux en général, mais c'est une bonne intuition à conserver. Par exemple, les valeurs propres de module 1 pour $\mathcal{M}^t$ correspondraient aux valeurs propres sur l'axe imaginaire pour A. L'analogue dans ce contexte du rayon spectral et du rayon spectral essentiel sont donc l'abscisse spectrale $\rho(A) = \sup\{\mathrm{Re}\, z \,:\, z \in \sigma(A)\} < \infty$ et l'abscisse spectrale essentielle $\rho_{\mathrm{ess}}(A) = \sup\{\mathrm{Re}\, z \,:\, z \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)\} \leq \rho(A)$. Une donnée spécifique au cas des semigroupes est

$$\rho_{\mathrm{fini}}(A) = \inf\{a \in \mathbb{R} \,:\, \mathrm{Card}\{\sigma(A) \cap [a, +\infty[\times \mathbf{i}\mathbb{R}\} < \infty\}, \tag{9}$$

l'abscisse au-delà de laquelle le spectre est fini. Dans le cas des opérateurs bornés, l'analogue r_{fini} de cette quantité vérifierait $r_{\mathrm{fini}} = r_{\mathrm{ess}}$. Dans le cas des semigroupes on peut avoir dans un demi-plan une infinité de valeurs propres discrètes dont la partie imaginaire tend vers l'infini, si bien que typiquement $\rho_{\mathrm{ess}}(A) < \rho_{\mathrm{fini}}(A)$. Par abus de notation, on écrira $\rho(\mathcal{M}^t)$ pour $\rho(A)$, et de même pour $\rho_{\mathrm{ess}}(\mathcal{M}^t)$ et $\rho_{\mathrm{fini}}(\mathcal{M}^t)$.

Dans notre contexte dynamique, un opérateur $\mathcal{M}$ ou un semi-groupe $\mathcal{M}^t$ seront donnés, agissant initialement sur les fonctions C^∞, mais on choisira librement (et aussi astucieusement que possible) l'espace de Banach $\mathcal{B}$ contenant C^∞ sur lequel les faire agir. L'objectif sera de minimiser respectivement $r_{\mathrm{ess}}(\mathcal{M})$ et $\rho_{\mathrm{ess}}(\mathcal{M}^t)$ pour obtenir un maximum de valeurs propres isolées de multiplicité finie, en espérant que celles-ci contiendront des informations pertinentes sur la dynamique.

Pour que cette approche ait un sens, encore faut-il que les informations spectrales ainsi obtenues ne dépendent pas du choix de l'espace considéré. C'est effectivement le cas, comme l'affirme le théorème informel suivant (voir [**4**, lemme A.1] et [**14**, théorème 1.5] pour des énoncés plus précis).

THÉORÈME 2.3. — *Soit $\mathcal{M} : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ un opérateur linéaire. On suppose donné, pour $i \in \{1, 2\}$, un espace de Banach $\mathcal{B}_i$ de distributions sur X dans lequel*

$C^\infty(X)$ est dense et sur lequel $\mathcal{M}$ s'étend en un opérateur linéaire continu $\mathcal{M}_i$. Alors, au-delà de $\max(r_{\mathrm{ess}}(\mathcal{M}_1), r_{\mathrm{ess}}(\mathcal{M}_2))$, les opérateurs $\mathcal{M}_i$ ont même spectre, et leurs espaces propres coïncident.

Le même énoncé est valable pour des semigroupes fortement continus, dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > \max(\rho_{\mathrm{ess}}(\mathcal{M}_1^t), \rho_{\mathrm{ess}}(\mathcal{M}_2^t))$.

2.3. Espaces fonctionnels adaptés à une dynamique d'Anosov

Au vu des deux paragraphes précédents, le théorème qui suit apporte une première réponse satisfaisante concernant les propriétés spectrales des flots d'Anosov. Notons que le générateur du semigroupe $\mathcal{L}_g^t$ est $V + g$, où V désigne la différentiation dans la direction du flot, et g la multiplication par cette fonction.

THÉORÈME 2.4. — *Soit ϕ_t un flot d'Anosov C^∞ sur une variété compacte X. Soit $g : X \to \mathbb{R}$ un potentiel C^∞. Fixons $a \in \mathbb{R}$. Il existe alors un espace de Banach $\mathcal{B}$ de distributions sur X dans lequel $C^\infty(X)$ est dense, sur lequel les opérateurs $\mathcal{L}_g^t : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ s'étendent en des opérateurs continus formant un semigroupe fortement continu qu'on note encore $\mathcal{L}_g^t$, et tel que $\rho_{\mathrm{ess}}(\mathcal{L}_g^t : \mathcal{B} \to \mathcal{B}) \leq a$.*

En variant a, ce théorème permet d'associer au flot d'Anosov ϕ_t et au potentiel g les données spectrales du semigroupe $\mathcal{L}_g^t$, composées d'un ensemble discret $\mathcal{R}(\phi_t, g)$ de valeurs propres dans $\mathbb{C}$ et des sous-espaces caractéristiques correspondants. Le théorème 2.3 assure que ces données sont canoniques : elles ne dépendent pas du choix de l'espace $\mathcal{B}$ dans le théorème.

Ces données spectrales peuvent également être lues en termes des propriétés de mélange de la mesure de Gibbs correspondante, pour le potentiel $\tilde{g} = g + g_u$. Si f_1 et f_2 sont deux fonctions C^∞, on définit leur corrélation au temps t, par rapport à la mesure de Gibbs $m_{\tilde{g}}$, par

$$\mathrm{Corr}(f_1, f_2, t, m_{\tilde{g}}) = \int_X f_1 \cdot f_2 \circ \phi_t \,\mathrm{d}m_{\tilde{g}} - \int_X f_1 \,\mathrm{d}m_{\tilde{g}} \cdot \int_X f_2 \,\mathrm{d}m_{\tilde{g}}. \tag{10}$$

Le mélange de la mesure $m_{\tilde{g}}$ (valable lorsque le flot est topologiquement mélangeant) équivaut au fait que $\mathrm{Corr}(f_1, f_2, t, m_{\tilde{g}})$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Avec le théorème précédent, on peut obtenir des informations beaucoup plus fines sur les corrélations. Définissons leur transformée de Laplace

$$F_{f_1,f_2}(z) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-zt} \,\mathrm{Corr}(f_1, f_2, t, m_{\tilde{g}}) \,\mathrm{d}t,$$

initialement pour $\operatorname{Re} z > 0$. Elle s'étend alors en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont les pôles sont inclus dans $\mathcal{R}(\phi_t, g) - P(\tilde{g})$. Cela découle de la construction de la mesure de Gibbs en utilisant le vecteur propre maximal de $\mathcal{L}_{\tilde{g},\mathcal{V}^u}$ qui est conjugué à $\mathcal{L}_g$.

De plus, si les fonctions f_1 et f_2 sont génériques, les pôles de la fonction F_{f_1,f_2} coïncident exactement avec $\mathscr{R}(\phi_t, g) - P(\tilde{g})$. Ainsi, cet ensemble a une description élémentaire en termes de corrélations dynamiques. On dit que les éléments de $\mathscr{R}(\phi_t, g) - P(\tilde{g})$ sont les *résonances de Ruelle* associées au flot ϕ_t et à la mesure de Gibbs $m_{\tilde{g}}$.

Remarque 2.5. — Le lecteur attentif aura remarqué que la discussion précédente ne s'applique pas au cas crucial de la mesure d'entropie maximale puisque le potentiel $\tilde{g}$ correspondant est 0, ce qui donne $g = -g_u$, seulement höldérienne en général. Ce problème peut se résoudre en travaillant directement avec des formes de dimension d_u. Mieux, les énoncés précédents sont en fait vrais pour des potentiels de la forme $g(x) = G(x, E^u(x))$ où G est une fonction C^∞ sur la grassmannienne des sous-espaces de dimension d_u, ce qui permet de traiter tous les potentiels intéressants. L'idée de cette extension est de considérer la dynamique sur la grassmannienne, pour laquelle l'ensemble $\{(x, E^u(x)) : x \in X\}$ est un attracteur. On doit donc sortir du monde des flots d'Anosov, et considérer un type de dynamique un peu plus général appelé flot Axiom A (voir [**20, 17**]). Dans la suite, on ignorera cette subtilité et on supposera la plupart du temps pour simplifier que g_u est C^∞.

Les espaces « habituels » comme C^0, ou C^k, ou L^2, ou les espaces de Sobolev, ne conviennent pas pour le théorème 2.4. La preuve de ce théorème s'est, historiquement, faite en plusieurs étapes :

- La première méthode utilisée pour démontrer le mélange exponentiel des systèmes d'Anosov repose sur une méthode de codage qui permet de se ramener à des systèmes combinatoires appelés décalages de type fini, voir par exemple [**6**]. Cette méthode est intrinsèquement limitée par la régularité höldérienne des directions stables et instables, et ne peut donc pas permettre d'obtenir un rayon spectral essentiel ou une abscisse spectrale essentielle arbitrairement petits. Tout l'enjeu des développements plus récents a été d'éviter cette réduction combinatoire et de travailler directement sur la variété.
- Si T est un difféomorphisme local uniformément dilatant sur une variété compacte, Ruelle a montré dans [**32**] que l'adjoint de l'opérateur $\mathscr{L}_g$ a, sur l'espace des fonctions C^k, un rayon spectral essentiel qui tend vers 0 avec k. C'est essentiellement dû au fait que l'action de $(\mathscr{L}_g^n)^*$ sur la dérivée k-ième d'une fonction fait apparaître un terme $e^{-\lambda n k}$ (où e^λ est la dilatation minimale de T), tandis que ce qui se passe sur les dérivées précédentes correspond à un terme compact, d'après le théorème d'Ascoli, et ne peut donc pas rajouter de spectre essentiel puisque le spectre d'un opérateur compact est discret. Par dualité, le rayon spectral essentiel de $\mathscr{L}_g$ sur les distributions d'ordre k (le dual de C^k) tend vers 0 avec k. Ceci indique qu'il est nécessaire pour ce genre de questions de considérer des espaces de distributions.

– Si T est un difféomorphisme d'Anosov, le cas précédent nous incite à chercher un espace de Banach $\mathscr{B}$ composé d'objets lisses dans la direction stable, et duaux de lisses dans la direction instable. Cependant, le manque de régularité de E^s et de E^u pose problème pour les définitions « naïves ». Des définitions ad hoc qui fonctionnent ont été développées dans [**5, 19**]. Parallèlement, Baladi dans [**2**] puis Baladi et Tsujii dans [**3**] ont montré que des techniques d'analyse de Fourier et d'opérateurs pseudo-différentiels pouvaient s'appliquer à cette situation, permettant d'importer tout un arsenal d'outils très efficaces. Nous expliquons plus bas la version de cet argument donnée par Faure-Roy-Sjöstrand dans [**13**], essentiellement équivalente à celle de [**3**] bien que les outils techniques employés soient différents.
– Dans le cas des flots, on n'a pas d'hyperbolicité dans la direction du flot, ce qui crée une difficulté supplémentaire qu'on ne peut pas traiter avec les outils fonctionnant dans le cas des difféomorphismes. Cependant, ce n'est pas un problème pour le théorème 2.4 : il s'agit de comprendre la résolvante du semigroupe, et non pas chaque élément individuel $\mathscr{L}_g^t$ avec t fixé. Comme le générateur du semigroupe correspond à dériver dans la direction du flot, sa résolvante intègre au contraire dans la direction du flot (voir par exemple la formule (8) pour $\operatorname{Re} z$ grand), et est donc automatiquement compacte dans cette direction. Voir [**7, 14**].

Très grossièrement, l'idée de l'analyse microlocale est de considérer une fonction comme une superposition de paquets d'ondes localisés en (x, ξ) (où x appartient à $\mathbb{R}^n$ ou à une variété, et ξ est un vecteur cotangent en x), et de comprendre les opérateurs linéaires en termes de leur comportement sur de tels paquets d'ondes. Le principe d'incertitude implique qu'un paquet d'ondes ne peut pas être localisé à la fois rigoureusement en x et en ξ (si une fonction a un petit support, sa transformée de Fourier a un grand support) mais on peut avoir une localisation en x d'autant meilleure que ξ est grand, tandis que les fréquences bornées donnent lieu à des termes C^∞ et sont donc considérées comme des perturbations bien comprises.

Plus formellement (voir par exemple [**1**]), étant donnée une fonction $b(x, \xi)$ suffisamment gentille, on définit un opérateur correspondant b^{Op} agissant sur les fonctions comme suit : on part d'une fonction f, on la décompose comme somme de paquets d'ondes, on multiplie le paquet d'ondes localisé en (x, ξ) par $b(x, \xi)$, puis on recombine les paquets d'ondes pour former la nouvelle fonction $b^{Op} f$. Il y a de nombreuses façons d'implémenter précisément cette procédure, appelée *quantification* de b, mais les détails de la quantification sont sans importance pour la preuve du théorème 2.4. Par exemple, dans $\mathbb{R}^k$, on peut prendre $b^{Op} f(x) = \mathscr{F}^{-1} M_{b(x,\xi)} \mathscr{F} f$ où $\mathscr{F}$ désigne la transformée de Fourier et $M_{b(x,\xi)}$ est la multiplication par la fonction $\xi \mapsto b(x, \xi)$ dans $(\mathbb{R}^k)^*$. Un tel opérateur b^{Op} est appelé *opérateur pseudo-différentiel*. Une classe plus large, où l'on s'autorise aussi à transporter les paquets d'ondes d'un point vers un autre, est formée des *opérateurs intégraux de Fourier.*

Considérons maintenant un difféomorphisme d'Anosov T, et un opérateur de transfert $\mathcal{L}_g$ associé donné par $\mathcal{L}_g f(x) = e^{g(T(x))} f(T(x))$. Formellement, cet opérateur transporte un paquet d'ondes localisé en (x, ξ) en un paquet d'ondes localisé en

$$F_T(x, \xi) = (T^{-1}(x), {}^t DT(T^{-1}(x)) \cdot \xi), \tag{11}$$

et le multiplie par le poids e^g. C'est un opérateur intégral de Fourier. La transformation F_T est la *transformation canonique* associée à T^{-1}. Pour tout ξ non nul, $F_T^n(x, \xi)$ part à l'infini lorsque n tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (et typiquement dans les deux directions), grâce à l'hyperbolicité. Fixons $C_0 > 0$. On peut alors construire sur le fibré cotangent une fonction régulière $b(x, \xi) > 0$ telle que $b(F_T(x, \xi)) \leq e^{-C_0} b(x, \xi)$ pour tout (x, ξ) en dehors d'un compact : il suffit de prendre b qui tend assez vite vers $+\infty$ dans la direction de E^{s*}, le dual de E^s défini par $E^{s*}(E^u) = 0$, et assez vite vers 0 dans la direction de E^{u*}. Techniquement, on ne peut pas utiliser exactement les directions stable et instable à cause de leur manque de régularité, mais ce problème se résout en utilisant des cônes autour de ces directions, qu'on peut faire varier de manière régulière avec le point.

On définit ensuite une norme par $\|f\| = \|b^{Op} f\|_{L^2}$ et un espace de Banach $\mathcal{B}$ comme la complétion de $C^\infty(X)$ pour cette norme. C'est un espace de Hilbert de distributions, l'espace de Sobolev associé à b. Heuristiquement, la norme d'un paquet d'ondes $\nu_{x,\xi}$ autour de (x, ξ) est $b(x, \xi)$, tandis que $\mathcal{L}_g \nu_{x,\xi} \approx e^{g(x)} \nu_{F_T(x,\xi)}$ est de norme $e^{g(x)} b(F_T(x, \xi)) \leq \|e^g\|_{C^0} e^{-C_0} b(x, \xi)$. Ainsi, pour des fonctions dont les fréquences en Fourier sont en dehors d'un compact, l'opérateur $\mathcal{L}_g$ contracte la norme d'un facteur $\|e^g\|_{C^0} e^{-C_0}$. La contribution de $\mathcal{L}_g$ sur les fonctions dont les fréquences en Fourier sont bornées est un opérateur compact, qui ne modifie pas le rayon spectral essentiel. Ainsi, $r_{\text{ess}}(\mathcal{L}_g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}) \leq \|e^g\|_{C^0} e^{-C_0}$. Ceci peut être rendu arbitrairement petit en augmentant C_0, comme désiré.

Cet argument heuristique se justifie rigoureusement grâce à des outils classiques sur les opérateurs pseudo-différentiels, comme le théorème d'Egorov ou le théorème de continuité L^2 (voir [**13**]), qu'on peut utiliser comme des boîtes noires ; à ceci près qu'on doit considérer des classes de symboles $b(x, \xi)$ un peu exotiques, anisotropes comme expliqué plus haut, mais néanmoins couvertes par la théorie très générale de Hörmander [**23**]. La fonction b qui décroît strictement le long des orbites de F_T est appelée *fonction de fuite.*

Ces espaces fonctionnels, expliqués ici pour les difféomorphismes d'Anosov, fonctionnent de la même manière pour les flots d'Anosov et mènent au théorème 2.4, voir [**14**].

2.4. Opérateur de transfert et fonction zêta

Dans ce paragraphe, nous expliquons comment utiliser le théorème 2.4 pour obtenir une extension méromorphe d'une fonction zêta associée à l'opérateur de transfert provenant d'un flot d'Anosov ϕ_t. Si $\gamma \in \Gamma$ est une orbite périodique primitive de ϕ_t, on note D_γ la différentielle de $\phi_{|\gamma|}$ sur une transversale au flot.

Proposition 2.6. — *Soient ϕ_t un flot d'Anosov C^∞ et g un potentiel C^∞. Alors la fonction*

$$\det{}^\flat(z) = \exp\left(- \sum_{m\geq 1} \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{e^{m\int_\gamma g - mz|\gamma|}}{m|\det(\mathrm{Id} - D_\gamma^m)|} \right), \tag{12}$$

initialement définie pour $\mathrm{Re}\, z$ *grand, s'étend en une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$. *Celle-ci s'annule exactement sur l'ensemble $\mathscr{R}(\phi_t, g)$ construit dans le théorème 2.4.*

Pour faire apparaître naturellement l'expression (12), on commence par définir la trace régularisée d'Atiyah-Bott $\mathrm{Tr}^\flat(\mathscr{L}_g^t)$ comme l'intégrale du noyau de Schwartz de cet opérateur le long de la diagonale. Pour des opérateurs à noyau continu, cette procédure fournit la vraie trace (au sens des opérateurs nucléaires). Pour $\mathscr{L}_g^t$, on obtient une distribution en t, qui se calcule par la formule suivante :

$$\mathrm{Tr}^\flat(\mathscr{L}_g^t) = \sum_{m\geq 1} \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{|\gamma| e^{m\int_\gamma g}}{|\det(\mathrm{Id} - D_\gamma^m)|} \delta(t - m|\gamma|).$$

De manière équivalente, on peut régulariser le noyau de $\mathscr{L}_g^t$, calculer la trace (bien définie) de l'opérateur régularisé puis faire tendre la taille de la régularisation vers 0. Ceci permet de retrouver la formule précédente pour $\mathrm{Tr}^\flat(\mathscr{L}_g^t)$.

On définit ensuite le déterminant régularisé

$$\det{}^\flat(z) = \exp\left(- \int_{0^+}^\infty \frac{e^{-zt}}{t} \mathrm{Tr}^\flat(\mathscr{L}_g^t)\, \mathrm{d}t \right),$$

où la division par t ne pose pas de problème en 0 puisque $\mathrm{Tr}^\flat(\mathscr{L}_g^t) = 0$ pour t assez petit. Avec la formule pour la trace régularisée, on obtient que $\det^\flat$ est donné par la formule (12). De plus, $\det^\flat$ vérifie $(\log \det^\flat(z))' = \int_{0^+}^\infty e^{-zt}\, \mathrm{Tr}^\flat(\mathscr{L}_g^t)\, \mathrm{d}t$. Si les $\mathscr{L}_g^t$ étaient des matrices diagonales en dimension finie, avec des éléments diagonaux $e^{\lambda_i t}$, le terme de droite de cette égalité serait $\sum 1/(z - \lambda_i)$, et on obtiendrait $\det^\flat(z) = C \prod (z - \lambda_i)$. En général, on s'attend à ce que le spectre de $\mathscr{L}_g^t$ coïncide avec les zéros de $\det^\flat$, ce qui explique la proposition 2.6.

Si les résolvantes associées au semigroupe $\mathscr{L}_g^t$ étaient de vrais opérateurs nucléaires, l'argument formel précédent pourrait être rendu rigoureux directement. Dans la situation qui nous intéresse, ce n'est pas le cas. L'argument rigoureux est dû à Ruelle **[33]** pour les endomorphismes uniformément dilatants, à Baladi et Tsujii [**4**] pour les difféomorphismes d'Anosov (mentionnons aussi les travaux de Rugh dans le cas analytique [**34**], et l'article [**25**] de Kitaev où il obtient l'extension méromorphe de la fonction zêta dans le cas C^∞, mais sans interprétation spectrale). Pour les flots d'Anosov, on trouve dans la littérature deux preuves de la proposition 2.6, l'une dans [**18**] de nature dynamique, et l'autre dans [**11**] utilisant des outils d'analyse semiclassique (en particulier front d'onde et propagation des singularités). Les deux preuves utilisent la structure précise des espaces de Banach construits dans le théorème 2.4, ainsi que le fait crucial, découlant de l'hyperbolicité, que l'image de la diagonale Δ dans $X \times X$ par $\phi_t \times \phi_{-t'}$ est transverse à Δ en dehors de la direction du flot.

Pour aller plus loin, il est utile de considérer non pas des espaces de fonctions, mais des sections d'un fibré vectoriel muni d'une action linéaire relevant la dynamique sur la base (appelée un *cocycle linéaire* en termes dynamiques). Les résultats spectraux du théorème 2.4 s'étendent à ce cadre, avec la même preuve. La proposition 2.6 s'étend aussi, avec la différence que le poids $\int_\gamma g$ est remplacé par la trace de l'application linéaire induite le long de l'orbite. En utilisant comme fibré l'espace des k-formes nulles dans la direction du flot, et comme cocycle l'application linéaire induite par la dynamique multipliée par e^g, on obtient que la fonction

$$\det_k^\flat(z) = \exp\left(- \sum_{m \geq 1} \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{\mathrm{Tr}(\bigwedge^k D_\gamma^m) e^{m \int_\gamma g - mz|\gamma|}}{m |\det(\mathrm{Id} - D_\gamma^m)|} \right)$$

s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, dont les zéros sont donnés par le spectre d'un certain opérateur de transfert agissant sur un espace distributionnel de k-formes, i.e., un espace de courants.

Supposons maintenant pour simplifier les notations que $\det(\mathrm{Id} - D_\gamma^m) > 0$ pour toute orbite fermée γ et tout m. En ce cas, l'identité algébrique

$$\det(\mathrm{Id} - M) = \sum_k (-1)^k \, \mathrm{Tr}(\bigwedge^k M)$$

permet d'écrire

$$\prod_k \det_k^\flat(z)^{(-1)^k} = \exp\left(- \sum_{m \geq 1} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{m \int_\gamma g} \frac{e^{-mz|\gamma|}}{m} \right). \tag{13}$$

Ainsi, la fonction de droite, qui est une variante pondérée de la fonction zêta de Ruelle notée $\zeta_{\mathrm{Ruelle}}(g)$, admet une extension méromorphe à $\mathbb{C}$, dont les zéros et les pôles ont une interprétation spectrale.

Remarque 2.7. — On peut retrouver le théorème 1.10 de Margulis à partir de cet énoncé. Il s'agit pour cela de localiser le premier zéro ou pôle de $\prod \det_k^\flat(z)^{(-1)^k}$. Au vu de l'expression de $\det_k^\flat$, il correspond à la croissance maximale des termes $\operatorname{Tr}(\bigwedge^k D_\gamma) e^{\int_\gamma g} / \det(\mathrm{Id} - D_\gamma)$ (si on suppose que tout est positif et qu'on néglige la somme sur m). Cette croissance est maximale pour $k = d_u$: en ce cas, $\operatorname{Tr}(\bigwedge^{d_u} D_\gamma)$ se comporte comme $J_u(\gamma)$ plus des termes exponentiellement plus petits, tandis que le dénominateur $\det(\mathrm{Id} - D_\gamma)$ est également égal à $J_u(\gamma)$ plus des termes exponentiellement petits. Les deux se compensent donc à peu près, et on retrouve $e^{\int_\gamma g}$. Le premier zéro de $\det_{d_u}^\flat$ est donné par la valeur propre dominante de $\mathcal{L}_g^t$ agissant sur les formes de dimension d_u, c'est-à-dire la pression de g. La fonction propre correspondante est la famille de mesures construite dans (5), ce qui fait le lien avec la mesure de Gibbs et l'approche de Margulis. Lorsque le flot est topologiquement mélangeant, la fonction $\zeta_{\mathrm{Ruelle}}(g)$ n'admet pas d'autre zéro ou pôle sur la droite $\operatorname{Re} z = P(g)$. Ainsi, comme dans la preuve classique du théorème des nombres premiers, on peut obtenir l'estimée (6) en appliquant un théorème taubérien à $\zeta_{\mathrm{Ruelle}}(g)$, voir **[29]**.

Remarque 2.8. — Sur une surface compacte de courbure -1, la dilatation du flot géodésique au temps t dans la direction instable est e^t, et la contraction dans la direction stable est e^{-t}. Ainsi, on peut écrire explicitement les déterminants dynamiques ci-dessus. Par exemple, pour le poids $g = 0$, on a

$$\det_1^\flat(z) = \exp\left(- \sum_{m \geq 1} \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{(e^{m|\gamma|} + e^{-m|\gamma|}) e^{-mz|\gamma|}}{m(1 - e^{m|\gamma|})(1 - e^{-m|\gamma|})} \right).$$

Tous ces déterminants s'expriment explicitement comme produits infinis de ζ_{Selberg} définie en (3), avec un décalage dans les variables, mais ζ_{Selberg} n'apparaît pas directement comme un déterminant dynamique ou la fonction zêta de Ruelle correspondante.

3. LE CAS DES FLOTS DE CONTACT

3.1. Problématique

Jusqu'à maintenant, toutes les propriétés qu'on a établies sont vraies pour des flots d'Anosov généraux, et de nature assez qualitative. Dans cette partie, on s'intéresse à des résultats plus quantitatifs, liés à la vitesse de mélange ou à la localisation des résonances de Ruelle.

Soit ϕ_t un flot d'Anosov. Dans le cas d'une suspension d'un difféomorphisme d'Anosov avec un temps de retour constant égal à 1, comme dans l'exemple 1.4, les fonctions $f_n(x, \tau) = e^{2\mathbf{i}\pi n \tau}$ sont des fonctions propres pour l'opérateur de différentiation dans la direction du flot, de valeur propre $2\mathbf{i}\pi n$. Ainsi, pour le potentiel $g = 0$, on a une infinité de résonances de Ruelle de partie réelle maximale. En particulier, $\rho_{\text{fini}}(\mathcal{L}_0^t) = \rho(\mathcal{L}_0^t)$ avec les notations de (9). Ces faits restent vrais pour n'importe quel potentiel dans cet exemple.

À l'opposé, quand le flot est topologiquement mélangeant, toute mesure de Gibbs $m_{\tilde{g}}$ est mélangeante (voir le paragraphe 1.4). Cela implique que l'opérateur $\mathcal{L}_g$ (avec $g = \tilde{g} - g_u$ comme dans la remarque 2.2) a juste $P(\tilde{g})$ comme valeur propre de partie réelle $P(\tilde{g})$, ses autres valeurs propres ayant une partie réelle strictement plus petite.

Dans le cas d'un difféomorphisme d'Anosov topologiquement mélangeant, on sait depuis les travaux de Sinai, Ruelle et Bowen [**6**] que les corrélations (10) décroissent exponentiellement vite vers 0. La même question se pose pour les flots d'Anosov, mais elle est considérablement plus délicate, et est toujours ouverte aujourd'hui. Une telle décroissance exponentielle implique que $\rho_{\text{fini}}(\mathcal{L}_g^t) < \rho(\mathcal{L}_g^t)$, i.e.,

$$\mathscr{R}(\phi_t, g) \subset \{P(\tilde{g})\} \cup \{z \,:\, \mathrm{Re}(z) \leq P(\tilde{g}) - \epsilon_0\}, \tag{14}$$

pour un certain ϵ_0 positif. Ce résultat spectral est plus faible en général que le mélange exponentiel, car les opérateurs qu'on considère ne sont pas autoadjoints, si bien qu'un contrôle du spectre ne donne pas *a priori* de contrôle de la norme des opérateurs.

La différence principale entre les difféomorphismes et les flots pour ce problème est la direction du flot, dans laquelle l'hyperbolicité n'intervient pas directement : si deux fonctions f_1 et f_2 oscillent avec une fréquence N dans la direction du flot, alors la fonction $\mathcal{L}_0^t f_2$ oscille avec la même fréquence, et on ne voit pas directement pourquoi le mélange du flot impliquerait que les fonctions f_1 et $\mathcal{L}_0^t f_2$ devraient devenir de plus en plus indépendantes. Le phénomène clé à expliciter est le suivant : si f_1 et $\mathcal{L}_0^t f_2$ sont en phase le long de la ligne de flot d'un point x, alors pour y typique proche de x ces mêmes fonctions seront en décalage de phase sur la ligne de flot de y, si bien que l'intégrale de $f_1 \cdot \mathcal{L}_0^t f_2$ y sera petite. En moyennant en y, on obtient que $\int f_1 \cdot \mathcal{L}_0^t f_2$ est petit, comme désiré. Au cœur de ce phénomène de déphasage, on trouve la non-intégrabilité locale de $E^u \oplus E^s$, qui permet de créer des décalages dans la direction du flot en se déplaçant le long de W^u et W^s.

Après des travaux précurseurs de Chernov [**8**], le premier progrès significatif est dû à Dolgopyat [**9**] : dans cet article remarquable (qui exploite explicitement le mécanisme décrit sommairement aux lignes précédentes), il montre qu'un flot d'Anosov muni d'une mesure de Gibbs est exponentiellement mélangeant si, d'une part, les feuilletages stable et instable sont C^1, d'autre part la mesure de Gibbs considérée a une certaine régularité (propriété faible de doublement), et enfin $E^u \oplus E^s$ n'est pas localement intégrable. Liverani, dans [**26**], a ensuite montré comment éliminer l'hypothèse de régularité des feuilletages, au prix d'une condition plus forte de non-intégrabilité, la condition de contact décrite dans le paragraphe 1.2. La condition de régularité de la mesure est encore implicitement présente, sous une forme moins géométrique. En particulier, ces résultats s'appliquent au volume pour tous les flots de contact (par exemple le flot géodésique sur une variété compacte de courbure strictement négative), ou à la mesure d'entropie maximale sous certaines conditions de pincement [**18**].

Plus récemment, Tsujii [**37, 38**] puis Faure et Tsujii [**16, 15, 17**] ont développé, encore pour les flots d'Anosov de contact, une approche alternative qui permet d'aller plus loin en localisant assez précisément le spectre du semigroupe $\mathscr{L}_g^t$ en fonction des caractéristiques du potentiel et de la dynamique. Notons que les premiers résultats de Tsujii ont été retrouvés avec une méthode différente dans [**28**].

3.2. Structure en bandes du spectre et fonction zêta semiclassique

Sur une surface hyperbolique compacte, le spectre du semigroupe $\mathscr{L}_0^t$ associé au flot géodésique est situé sur les droites $\operatorname{Re} z = -1/2 - k$ pour k entier : cela suit de l'expression de son déterminant dynamique comme produit infini de copies décalées de la fonction ζ_{Selberg} (voir la remarque 2.8). On peut aussi le démontrer par des arguments de théorie des représentations, ou des arguments plus géométriques. Voir [**10**] pour une généralisation en dimension plus grande.

En courbure variable, Faure et Tsujii ont démontré dans [**15**] qu'on a le même type de structure, à ceci près que les droites verticales sont remplacées par des bandes.

Théorème 3.1. — *Soient ϕ_t un flot d'Anosov de contact C^∞ sur une variété riemannienne compacte X de dimension $2d+1$, et g un potentiel C^∞. Pour $k \in \mathbb{N}$, définissons*

$$\gamma_k^+ = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\left[\sup_{x\in X}\int_0^t (g+g_u/2)(\phi_\tau(x))\,\mathrm{d}\tau - k\log\|D\phi_t(x) : E^u(x)\to E^u(\phi_t(x))\|_{\min}\right],$$

$$\gamma_k^- = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\left[\inf_{x\in X}\int_0^t (g+g_u/2)(\phi_\tau(x))\,\mathrm{d}\tau - k\log\|D\phi_t(x) : E^u(x)\to E^u(\phi_t(x))\|_{\max}\right],$$

où $\|A\|_{\min}$ et $\|A\|_{\max}$ désignent la dilatation minimale et maximale de la matrice A.

Alors, dans chaque demi-plan $\operatorname{Re} z > -a$ et pour tout $\epsilon > 0$, le spectre $\mathscr{R}(\phi_t, g)$ du semigroupe $\mathscr{L}_g^t$ est contenu, à un nombre fini d'exceptions près, dans la réunion des bandes $\mathbf{B}_k = [\gamma_k^- - \epsilon, \gamma_k^+ + \epsilon] \times \mathbf{i}\mathbb{R}$.

De plus, si $\mathbf{B}_k$ est disjointe des bandes voisines $\mathbf{B}_{k-1}$ et $\mathbf{B}_{k+1}$, le nombre de résonances dans $\mathbf{B}_k$ vérifie une loi de Weyl : pour tout δ positif, pour tout b assez grand, on a

$$C^{-1}b^d \leq \frac{1}{b^\delta}\operatorname{Card}\{z_j \in \mathbf{B}_k \cap \mathscr{R}(\phi_t, g) \;:\; \operatorname{Im} z_j \in [b, b+b^\delta]\} \leq Cb^d.$$

Enfin, si $\mathbf{B}_0$ est disjointe de $\mathbf{B}_1$, une proportion 1 des résonances dans $\mathbf{B}_0$ s'accumule sur la droite de partie réelle $\frac{1}{\mathrm{Leb}(M)}\int_M (g+g_u/2)\,\mathrm{dLeb}$.

Sur une surface hyperbolique de courbure constante, et pour $g = 0$, on a $g_u = -1$ et $D\phi_t(x) : E^u(x) \to E^u(\phi_t(x))$ dilate d'exactement e^t. Ainsi, $\gamma_k^+ = \gamma_k^- = -1/2 - k$ et on retrouve l'énoncé classique. Si on est proche de la courbure constante, les premières bandes $\mathbf{B}_k$ sont disjointes les unes des autres mais elles finissent par se rejoindre pour k grand.

L'énoncé implique en particulier que $\rho_{\text{fini}}(\mathscr{L}_g^t) \leq \gamma_0^+$. Si γ_0^+ est strictement à gauche de la plus grande valeur propre de $\mathscr{L}_g^t$, soit $P(g + g_u)$, on en déduit que (14) est vrai. Un raffinement du théorème 3.1 affirme même que le flot mélange exponentiellement dans ce cas, pour la mesure m_{g+g_u}. Pour $g = 0$ (qui correspond à l'étude du volume), on a $P(g + g_u) = 0$ tandis que $\gamma_0^+ < 0$. On retrouve le fait qu'un flot d'Anosov de contact mélange exponentiellement pour le volume, dû à Liverani [**26**]. Pour $g = -g_u$, qui correspond à la mesure d'entropie maximale, si on considère un flot géodésique sur une variété compacte de courbure strictement négative suffisamment pincée (i.e., la courbure est assez proche d'être constante, de manière précisément quantifiée), on a $\gamma_0^+ < P(0) = h(\phi_t)$ (l'entropie de ϕ_t). En revanche, en général, on peut avoir $\gamma_0^+ > P(0)$, auquel cas le théorème ne dit plus rien d'intéressant.

Une caractéristique remarquable du théorème 3.1 est l'apparition de la fonction $g_u/2$, à mi-chemin entre les potentiels définissant les deux mesures *a priori* les plus intéressantes, la mesure d'entropie maximale et la mesure de Lebesgue. Si l'on prend $g = -g_u/2$, on obtient $\gamma_0^- = \gamma_0^+ = 0$. Ainsi, *toutes* les valeurs propres de la première bande s'alignent asymptotiquement le long d'une droite verticale. Cela indique que ce choix de g, qui correspond à la mesure de Gibbs pour le potentiel $\tilde{g} = g + g_u = g_u/2$ d'après la remarque 2.2, a des propriétés particulières qui ressemblent au plus près au cas de la courbure constante. En particulier, la fonction zêta pondérée correspondante $\zeta_{\text{Ruelle}}(g_u/2)$ présente, pour ses premiers zéros ou pôles, un comportement très proche de la courbure constante. Cependant, cette fonction, en courbure constante, est encore assez différente de la fonction zêta de Selberg, et a en particulier des zéros sur une infinité de droites verticales.

Le « bon » analogue de la fonction zêta de Selberg en courbure variable, appelé fonction zêta semiclassique ou fonction zêta de Gutzwiller-Voros, a été introduit et étudié pour des raisons physiques de chaos quantique dans [**21, 39**]. Cette fonction est basée sur le même potentiel $g_u/2$, mais la pondération est différente : elle est donnée pour $\operatorname{Re} z$ grand par la formule

$$\zeta_{\text{sc}}(z) = \exp\left(-\sum_{m\geq 1}\sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{e^{-mz|\gamma|}}{m|\det(\operatorname{Id} - D_\gamma^m)|^{1/2}} \right). \tag{15}$$

Comme $|\det(\operatorname{Id} - D_\gamma^m)|^{1/2} \sim J_u(\gamma)^{m/2} = e^{-m\int_\gamma g_u/2}$, on voit que le terme dominant dans l'expression de $\zeta_{\text{sc}}(z)$ est $e^{m\int_\gamma g_u/2 - mz|\gamma|}$, comme dans la fonction $\zeta_{\text{Ruelle}}(g_u/2)$.

En particulier, $\zeta_{\mathrm{sc}}(z)$ devrait hériter des premiers zéros de $\zeta_{\mathrm{Ruelle}}(g_u/2)$ asymptotiquement alignés sur la droite verticale de partie réelle nulle. En revanche, le comportement pour les zéros suivants devrait être différent : une interprétation cohomologique heuristique indique qu'il devrait y avoir beaucoup de simplifications entre les zéros des facteurs successifs lorsqu'on exprime ζ_{sc} comme un produit alterné de déterminants dynamiques avec une variante de l'équation (13).

Avec le théorème 3.1, Faure et Tsujii démontrent effectivement dans [**17**] le résultat suivant.

THÉORÈME 3.2. — *Soit ϕ_t un flot d'Anosov de contact sur une variété compacte. La fonction ζ_{sc} admet une extension méromorphe à $\mathbb{C}$. De plus, pour tout $\epsilon > 0$, à un nombre fini d'exceptions près, ses zéros et pôles sont contenus dans*

$$\{z \,:\, |\mathrm{Re}\, z| \leq \epsilon\} \cup \{z \,:\, \mathrm{Re}\, z \leq -\lambda + \epsilon\},$$

où λ est la constante d'hyperbolicité du flot donnée dans la définition 1.1. De plus, le voisinage $\{z \,:\, |\mathrm{Re}\, z| \leq \epsilon\}$ contient au plus un nombre fini de pôles, et il contient une infinité de zéros (qui vérifient de plus la loi de Weyl).

Faure et Tsujii conjecturent même le résultat plus fort que ζ_{sc} admet une extension *holomorphe* au plan complexe et que, pour tout ϵ, tous ses zéros sauf un nombre fini sont contenus dans $\{z \,:\, |\mathrm{Re}\, z| \leq \epsilon\} \cup \{z \,:\, |\mathrm{Im}\, z| \leq C\}$ où C est une constante bien choisie. Le théorème 3.2 fait déjà de ζ_{sc} un bon analogue de la fonction zêta de Selberg en courbure variable, la conjecture irait encore plus loin dans cette analogie.

Sur une surface hyperbolique de courbure -1, on a $|\det(\mathrm{Id} - D^m_\gamma)|^{1/2} = e^{m|\gamma|/2}(1 - e^{-m|\gamma|})$. En utilisant le développement en série $1/(1 - e^{-m|\gamma|}) = \sum_k e^{-km|\gamma|}$, on obtient la formule $\zeta_{\mathrm{sc}}(z) = \zeta_{\mathrm{Selberg}}(z + 1/2)$, si bien que la conjecture est satisfaite dans ce cas particulier.

3.3. Quelques idées de preuve

Les idées centrales de la preuve du théorème 3.1 ont été développées par Faure et Tsujii dans l'article [**16**], qui traite un modèle techniquement un peu plus simple mais où les structures essentielles (dynamique hyperbolique avec une direction neutre, structure de contact) sont déjà présentes. On va les esquisser brièvement dans ce paragraphe, en simplifiant outrageusement les choses.

Pour démontrer le théorème 3.1, il s'agit de comprendre le comportement des éléments du spectre de grande partie imaginaire, puisque ce qui se passe dans une partie compacte de $\mathbb{C}$ contribue simplement au nombre fini d'exceptions autorisé par le théorème. De manière équivalente, il faut comprendre l'action du semigroupe sur les fonctions qui oscillent très rapidement dans la direction du flot. C'est le domaine de l'analyse semiclassique : une telle fonction est combinaison de paquets d'ondes très localisés d'après le principe d'incertitude, et il va s'agir de comprendre comment la dynamique fait interagir de tels paquets d'ondes, dans l'asymptotique où la fréquence h^{-1} dans la direction du flot tend vers l'infini (la notation h pour une quantité qui tend vers 0 est standard en analyse semi-classique, par analogie avec la constante de Planck en physique).

Étant donnée une fonction f, sa décomposition en paquets d'ondes se fait grâce à la transformée FBI partielle [**38**] : on prend dans la direction du flot la transformée de Fourier, pour isoler la fréquence h^{-1}, et dans la direction transverse la *transformée FBI* (pour Fourier-Bros-Iagolnitzer) ou de Bargmann, qui décompose une fonction en somme de paquets d'onde gaussiens dont le support est de taille $h^{1/2}$ (cette taille est celle qui permet de créer des déplacements de taille h dans la direction du flot d'après la non-intégrabilité de $E^u \oplus E^s$, comme on l'a expliqué dans le paragraphe 1.2). Il s'agit de voir comment la dynamique interagit avec cette décomposition.

Posons $F^t(x, \xi) = (\phi_{-t}(x), {}^t D\phi_t(\phi_{-t}x) \cdot \xi)$, comme en (11). Le paquet d'ondes $\nu_{x,\xi}$ est alors transporté par $\mathcal{L}_g^t$ en $\nu_{F^t(x,\xi)}$. Les paquets d'ondes qui partent vers l'infini peuvent être traités grâce à une fonction de fuite, comme dans le paragraphe 2.3. Ceux qui restent dans un compact forment *l'ensemble captif* K de la dynamique. Ils correspondent à la direction du flot, ce sont ceux de la forme $\nu_{x,h^{-1}\alpha(x)}$ (où α est la 1-forme dont $E^u \oplus E^s$ est le noyau, i.e., la forme de contact dans le cas que nous considérons, et h^{-1} est la fréquence dans la direction du flot). On va les contrôler par un argument différent lié à la nature symplectique du problème.

Comme on considère des paquets d'ondes de haute fréquence, très localisés, on peut remplacer ϕ_t par sa différentielle et se ramener au cas d'une dynamique linéaire, dans $\mathbb{R}^{2d+1}$, et même dans $\mathbb{R}^{2d}$ en prenant une transversale au flot. En notant A une matrice symplectique, son action sur $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ se relève en une action explicite sur l'espace $L^2(T^*\mathbb{R}^{2d})$ des combinaisons de paquets d'ondes. Le calcul fait apparaître un facteur $d(A) = \det((A + {}^t A^{-1})/2)$ appelé *correction métaplectique*, qui s'interprète heuristiquement comme le fait que l'action de A modifie les quantités de paquets d'ondes qui interagissent entre eux. C'est ce facteur qui explique l'apparition de $g_u/2$ dans le théorème 3.1.

L'ensemble captif K défini plus haut est un sous-espace symplectique de $T^*\mathbb{R}^{2d}$ invariant par la dynamique, et son orthogonal symplectique $K^\perp$ est également invariant. Ceci décompose localement l'opérateur de transfert comme un produit tensoriel d'opérateurs agissant respectivement sur K et sur $K^\perp$, qu'on peut comprendre séparément. Dans la direction K, qui correspond essentiellement à la direction compacte de la variété, on a un opérateur unitaire. Sur $K^\perp$, en revanche, qui correspond à la direction non compacte dans T^*X, on dispose de la fonction de fuite, choisie soigneusement, qui rend arbitrairement petite toute la dynamique qui se passe loin de la partie captive $\{0\}$. Faure et Tsujii obtiennent alors dans **[16]** le spectre de l'opérateur de transfert agissant sur $K^\perp$ en décomposant une fonction comme somme de polynômes homogènes autour de 0 : la bande $\mathbf{B}_k$ correspond à la partie homogène de degré k dans cette décomposition. De plus, on a un gain dû au facteur $d(A)$ ci-dessus.

Il s'agit ensuite de recoller ces estimées obtenues localement. Il faut passer par des partitions de l'unité de taille soigneusement ajustée pour s'assurer que les non-linéarités ne détruisent pas les estimées fines obtenues dans le modèle linéaire ci-dessus. Une difficulté centrale est que, dans l'optique du théorème 3.2, il est nécessaire de considérer le potentiel non lisse $-g_u/2$, et donc de travailler dans une grassmannienne comme expliqué dans la remarque 2.5. Mais le flot induit sur cette grassmannienne n'est plus un flot de contact, et son attracteur $\{(x, E^u(x))\}$ n'est pas une sous-variété lisse, ce qui rend les arguments précis extrêmement techniques et subtils.

RÉFÉRENCES

[1] S. Alinhac & P. Gérard – *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, Savoirs Actuels., InterÉditions, Paris ; Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Meudon, 1991.

[2] V. Baladi – Anisotropic Sobolev spaces and dynamical transfer operators : C^∞ foliations, in *Algebraic and topological dynamics*, Contemp. Math., vol. 385, Amer. Math. Soc., 2005, p. 123–135.

[3] V. Baladi & M. Tsujii – Anisotropic Hölder and Sobolev spaces for hyperbolic diffeomorphisms, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **57** (2007), p. 127–154.

[4] ———, Dynamical determinants and spectrum for hyperbolic diffeomorphisms, in *Geometric and probabilistic structures in dynamics*, Contemp. Math., vol. 469, Amer. Math. Soc., 2008, p. 29–68.

[5] M. Blank, G. Keller & C. Liverani – Ruelle-Perron-Frobenius spectrum for Anosov maps, *Nonlinearity* **15** (2002), p. 1905–1973.

[6] R. Bowen – *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math., vol. 470, Springer, 1975.

[7] O. Butterley & C. Liverani – Smooth Anosov flows : correlation spectra and stability, *J. Mod. Dyn.* **1** (2007), p. 301–322.

[8] N. I. Chernov – Markov approximations and decay of correlations for Anosov flows, *Ann. of Math.* **147** (1998), p. 269–324.

[9] D. Dolgopyat – On decay of correlations in Anosov flows, *Ann. of Math.* **147** (1998), p. 357–390.

[10] S. Dyatlov, F. Faure & C. Guillarmou – Power spectrum of the geodesic flow on hyperbolic manifolds, Preprint, 2014.

[11] S. Dyatlov & M. Zworski – Dynamical zeta function for Anosov flows via microlocal analysis, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **49** (2016), p. 543–577.

[12] K.-J. Engel & R. Nagel – *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Graduate Texts in Math., vol. 194, Springer, New York, 2000.

[13] F. Faure, N. Roy & J. Sjöstrand – Semi-classical approach for Anosov diffeomorphisms and Ruelle resonances, *Open Math. J.* **1** (2008), p. 35–81.

[14] F. Faure & J. Sjöstrand – Upper bound on the density of Ruelle resonances for Anosov flows, *Comm. Math. Phys.* **308** (2011), p. 325–364.

[15] F. Faure & M. Tsujii – Band structure of the Ruelle spectrum of contact Anosov flows, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **351** (2013), p. 385–391.

[16] ———, *Prequantum transfer operators for symplectic Anosov diffeomorphism*, Astérisque, vol. 375, 2015.

[17] ———, The semiclassical zeta function for geodesic flows on negatively curved manifolds, prépublication arXiv:1311.4932.

[18] P. Giulietti, C. Liverani & M. Pollicott – Anosov flows and dynamical zeta functions, *Ann. of Math.* **178** (2013), p. 687–773.

[19] S. Gouëzel & C. Liverani – Banach spaces adapted to Anosov systems, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **26** (2006), p. 189–217.

[20] ———, Compact locally maximal hyperbolic sets for smooth maps : fine statistical properties, *J. Differential Geom.* **79** (2008), p. 433–477.

[21] M. C. Gutzwiller – Periodic orbits and classical quantization conditions, *J. Math. Phys.* **12** (1971), p. 343–358.

[22] B. Hasselblatt & A. Katok – *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge Univ. Press, 1995.

[23] L. Hörmander – *The analysis of linear partial differential operators. III*, Classics in Mathematics, Springer, Berlin, 2007.

[24] H. Huber – Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen. II, *Math. Ann.* **143** (1961), p. 463—464.

[25] A. Y. Kitaev – Fredholm determinants for hyperbolic diffeomorphisms of finite smoothness, *Nonlinearity* **12** (1999), p. 141–179.

[26] C. Liverani – On contact Anosov flows, *Ann. of Math.* **159** (2004), p. 1275–1312.

[27] G. A. Margulis – Certain applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **3** (1969), p. 89–90.

[28] S. Nonnenmacher & M. Zworski – Decay of correlations for normally hyperbolic trapping, *Invent. math.* **200** (2015), n° 2, p. 345–438.

[29] W. Parry & M. Pollicott – *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque, vol. 187–188, 1990.

[30] F. Paulin, M. Pollicott & B. Schapira – *Equilibrium states in negative curvature*, Astérisque, vol. 373, 2015.

[31] D. Ruelle – Generalized zeta-functions for Axiom A basic sets, *Bull. Amer. Math. Soc.* **82** (1976), p. 153–156.

[32] ———, The thermodynamic formalism for expanding maps, *Comm. Math. Phys.* **125** (1989), p. 239–262.

[33] ———, An extension of the theory of Fredholm determinants, *Publ. Math. IHÉS* **72** (1990), p. 175–193.

[34] H. H. Rugh – The correlation spectrum for hyperbolic analytic maps, *Nonlinearity* **5** (1992), p. 1237–1263.

[35] A. Selberg – Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **20** (1956), p. 47–87.

[36] S. J. Smale – Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), p. 747–817.

[37] M. Tsujii – Quasi-compactness of transfer operators for contact Anosov flows, *Nonlinearity* **23** (2010), p. 1495–1545.

[38] ———, Contact Anosov flows and the Fourier-Bros-Iagolnitzer transform, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **32** (2012), p. 2083–2118.

[39] A. Voros – Unstable periodic orbits and semiclassical quantisation, *J. Phys. A* **21** (1988), p. 685–692.

Sébastien GOUËZEL

IRMAR
Université de Rennes 1
UMR 6625 du CNRS
Campus de Beaulieu
F–35042 Rennes Cedex
E-mail : `sebastien.gouezel@univ-rennes1.fr`