Forme normale pour NLS en dimension quelconque

Dario BAMBUSI* & Benoît GREBERT†

04.03.03

Rubrique : Systèmes dynamiques / Dynamical systems

Résumé : Nous considérons l'équation de Schrödinger non linéaire

$$-iu_t = -\Delta u + V * u + g(u, \bar{u})$$

avec des conditions aux bords périodiques dans $[-\pi, \pi]^d$, $d \geq 1$. La fonction g est analytique dans les deux variables et d'ordre au moins 2 ; le potentiel V est dans L^2. Nous démontrons que, sous une hypothèse de non résonances générique pour V dans une certaine classe, il existe pour tout entier M une transformation canonique qui met l'Hamiltonien sous forme normale de Birkhoff à un reste d'ordre M près. La transformation canonique est bien définie dans un petit voisinage de l'origine de tout espace de Sobolev d'ordre assez grand. D'un point de vue dynamique, ceci signifie en particulier que si la donnée initiale est de norme plus petite que ε, la solution reste plus petite que 2ε pour des temps t de l'ordre de $\varepsilon^{-(M-1)}$. De plus, pendant le même laps de temps, la solution reste proche d'un tore de dimension infinie.

Titre anglais : Normal form for NLS in arbitrary dimension

Abstract : We consider the non linear Schödinger equation

$$-iu_t = -\Delta u + V * u + g(u, \bar{u})$$

with periodic boundary conditions on $[-\pi, \pi]^d$, $d \geq 1$; g is analytic and $g(0,0) = Dg(0,0) = 0$; V is a potential in L^2. Under a nonresonance condition which is fulfilled for most V's we prove that, for any integer M there exists a canonical transformation that puts the Hamiltonian in Birkhoff normal form up to a reminder of order M. The canonical tranformation is well defined in a neighbourhood of the origin of any Sobolev space of sufficiently high order. From the dynamical point of view this means in particular that if the initial data is smaller than ε, the solution remains smaller than 2ε for all times t smaller than $\varepsilon^{-(M-1)}$. Moreover, for the same times, the solution is close to an infinite dimensional torus.

Abridged English version :

Recently one of us has obtained a normal form result for the non linear wave equation in one dimension (cf. [1]). The aim of this note is to extend this result to the non linear Schr¨odinger equation (1) in dimension $d \geq 1$. The potential V is choosen in the space F_m (see (2)) and the nonlinearity g is of the form $g = \partial_{\bar{u}} G$ where $G(u, \bar{u})$ is an analytic function and is of order at least two. We denote $H^s \equiv H^s(\mathcal{T}^d; \mathbb{C})$ the Sobolev space of order s on the d-dimensional torus $\mathcal{T}^d$, $\|\cdot\|_s$ the ususal norm on H^s, d_s the associated distance and $B_s(R)$ the ball of radius R in H^s centered at the origin.

In Fourier (see 4) variables the Hamiltonian associated to (1) reads

$$h(\xi, \eta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \omega_k \xi_k \eta_{-k} \ + \ \int_{\mathcal{T}^d} G(u, \bar{u})$$

where the linear frequencies are given by $\omega_k = |k|^2 + \hat{V}(k)$, and $\partial_{\bar{u}} G = g$.

*Dipartimento di Matematica, Universit`a degli studi di Milano ; Via Saldini 50, 20133 MILANO, Italy.

†Laboratoire de Math´ematiques Jean LERAY, Universit´e de Nantes ; 2, rue de la Houssini`ere, 44072 NANTES Cedex 03, France.
Ce travail a ´et´e d´evelopp´e lors de la visite de B.G. `a l'Universit´e de Milan avec le support du MIUR sous le projet COFIN2001 "Dinamica dei sistemi classici Hamiltoniani, fondamenti dinamici della meccanica statistica e dinamica dell'interazione radiazione materia".

For each $k \in \mathbb{Z}^d$ introduce the linearized actions $I_k(u) \equiv I_k(\xi,\eta) = \xi_k \eta_{-k}$ and for each initial data $u_0 \in H^s$ the infinite dimensional torus

$$T(u_0) = \{u \in H^s \mid I_j(u) = I_j(u_0),\ \forall j \in \mathbb{Z}^d\}\ ,$$

one proves

Theorem *Fix $M \geq 4$ and $m > d/2$ there exists an integer s_0 and a set $\mathcal{V}_m \subset F_m$ of full mesure, such that for $V \in \mathcal{V}_m$ there exists $R_0 > 0$ and, for any $0 < R < R_0$, there exists an analytic canonical transformation $\Phi_R : B_{s_0}(R/3) \to B_{s_0}(R)$ such that*

$$(h_0 + f) \circ \Phi_R = h_0 + Z + \mathcal{R}$$

where Z depends only on the actions. Further for any $s > s_0$ there exists a constant C_s such that Φ_R et $X_{\mathcal{R}}$ are analytic also as a map from $B_{s_0}(R/C_s)$ to H^s and the following estimates hold

$$\sup_{\|u\|_s \leq R/C_s} \|u - \Phi_R(u)\|_s \ \leq\ C_s R^2 \text{ and } \sup_{\|u\|_s \leq R/C_s} \|X_{\mathcal{R}}(u)\|_s \ \leq\ C_s R^{M-1}\ .$$

As a consequence on deduces that if $u(t)$ is the solution of (1) with initial data $u_0 \in H^s$ ($s > s_0$) and $\|u_0\|_s = \varepsilon$ small enough then for times t of order $\varepsilon^{-(M-2)}$ one has

$$\|u(t)\|_s \leq 2\varepsilon\ , \quad |I_k(t) - I_k(0)| \leq \frac{1}{|k|^{2s}} \varepsilon^3$$

and for times t of order $\varepsilon^{-M'}$ one has

$$d_{s'}(u(t), \mathbf{T}(u_0)) \leq c_{s,s'} \varepsilon^{M''}\ .$$

where $s' < s - d/2$ and M', M'' satisfy $M' + M'' = M + 1$.

1 Contexte

Récemment, l'un des auteurs a obtenu un résultat de forme normale pour l'équation des ondes non linéaire en une dimension (cf. [1]). Le but de cette note est d'étendre ce résultat à des EDP non linéaires en dimension supérieure. Nous considérons le problème modèle de l'équation de Schrödinger non linéaire avec une partie linéaire de type convolution :

$$-iu_t = -\Delta u + V * u + g(u, \bar{u}) \tag{1}$$

sur le tore $\mathcal{T}^d \equiv [-\pi, \pi]^d$.

Le potentiel V est dans l'espace F_m ($m > d/2$) défini par

$$F_m = \{V(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\sigma_k}{(1+|k|)^m}\ e^{ik\cdot x} \mid \sigma_k \in [-1/2, 1/2] \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}^d\}\ . \tag{2}$$

Nous identifions l'espace F_m avec le produit cartésien $[-1,1]^{\mathbb{Z}^d}$ que nous munissons de la mesure de probabilité produit. Notre résultat sera valable pour des potentiels V dans un ensemble de mesure pleine inclus dans F_m.
Dans l'équation (1), le terme non linéaire g est de la forme $g = \partial_{\bar{u}} G$ où $G(u, \bar{u})$ est une fonction analytique dans les deux variables et d'ordre au moins 2. Nous notons $H^s \equiv H^s(\mathcal{T}^d; \mathbb{C})$ l'espace de Sobolev d'ordre s sur le tore, $\|\cdot\|_s$ la norme canonique sur H^s et d_s la distance associée. Enfin notons $B_s(R)$ la boule de H^s centrée en 0 et de rayon R.
L'équation (1) admet une écriture hamiltonienne dans H^s

$$-iu_t = \frac{\partial H}{\partial \bar{u}}(x, u, \bar{u}) \tag{3}$$

où l'Hamiltonien H est donné par

$$H(u,\bar u) = \int_{\mathcal{T}^d} |\nabla u|^2 + (V * u)\bar u + G(u,\bar u).$$

Dans les variables de Fourier $(\xi_k,\eta_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ reliées à $(u,\bar u)$ par

$$u(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \xi_k e^{ik\cdot x}\ , \quad \bar u(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \eta_k e^{ik\cdot x}\ , \tag{4}$$

la forme symplectique devient $i\sum d\xi_k \wedge d\eta_{-k}$. et l'hamiltonien s'écrit

$$h(\xi,\eta) = h_0(\xi,\eta) + f(\xi,\eta)$$

où

$$h_0(\xi,\eta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \omega_k\ \xi_k\eta_{-k}\ , \quad f(\xi,\eta) = \int_{\mathcal{T}^d} G(u,\bar u)\ ,$$

et

$$\omega_k = |k|^2 + \hat V(k) = |k|^2 + \frac{\sigma_k}{(1+|k|)^m}\ .$$

Enfin nous introduisons les actions I_k, $k\in\mathbb{Z}^d$, du système linéarisé

$$I_k(u) \equiv I_k(\xi,\eta) = \xi_k\eta_{-k}$$

et, étant donné $u_0 \in H^s$, le tore

$$T(u_0) = \{u\in H^s \mid I_j(u) = I_j(u_0),\ \forall j\in\mathbb{Z}^d\}$$

qui est génériquement de dimension infinie.

2 Résultats

Notre résultat de forme normale s'énonce de la manière suivante

Théorème 2.1 *Pour tout entier $M \ge 4$ et tout réel $m > d/2$ il existe $\mathcal{V}_m$, un ensemble de mesure pleine de potentiels dans F_m, et un entier positif s_0 tels que, pour tout $V\in\mathcal{V}_m$ il existe $R_0>0$ et, pour chaque $R<R_0$ positif, une transformation canonique analytique $\Phi_R : B_{s_0}(R/3)\to B_{s_0}(R)$ qui met l'Hamiltonien h sous forme normale de Birkhoff jusqu'à l'ordre M. Plus précisément*

$$(h_0+f)\circ\Phi_R = h_0 + Z + \mathcal{R}$$

où Z ne dépend que des actions et $\mathcal{R}$ est une fonction analytique, dont le champ de vecteur hamiltonien est analytique en tant que fonction de $B_{s_0}(R/3)$ dans H^{s_0}. De plus pour tout $s>s_0$ il existe une constante C_s telle que Φ_R et $X_{\mathcal{R}}$ soient aussi analytiques de $B_s(R/C_s)$ dans H^s et satisfont

$$\sup_{\|u\|_s\le R/C_s} \|u-\Phi_R(u)\|_s \ \le\ C_s R^2$$

et

$$\sup_{\|u\|_s\le R/C_s} \|X_{\mathcal{R}}(u)\|_s \ \le\ C_s R^{M-1}\ .$$

Comme conséquences dynamiques nous obtenons

Corollaire 2.2 *Soient M, m, s et V comme dans le théorème précédent, il existe des constantes ε_s et c_s pour lesquelles les propriétés suivantes sont satisfaites :*
si $u(t)$ est la solution du problème de Cauchy de l'équation (1) *pour une donnée initiale $u_0 \in H^s$ vérifiant $\varepsilon := \|u_0\|_s \leq \varepsilon_s$ alors pour tout temps*

$$|t| \leq \frac{1}{c_s \varepsilon^{M-2}}$$

la solution u satisfait

$$\|u(t)\|_s \leq 2\varepsilon \ , \quad |I_k(t) - I_k(0)| \leq \frac{1}{|k|^{2s}} \varepsilon^3 \ .$$

De plus, pour chaque $s' < s - d/2$, il existe une constante $c_{s,s'}$ telle que pour tout entiers M', M'' vérifiant $M' + M'' = M + 1$ et pour tout temps $|t| \leq \frac{1}{c_s \ \varepsilon^{M'}}$, en a

$$d_{s'}(u(t), \mathbf{T}(u_0)) \leq c_{s,s'} \varepsilon^{M''} \ .$$

Commentaires

– A notre connaissance le theorème 2.1 est le premier résultat de ce type pour des équations en dimension plus grande que 1. En dimension 1, des résultats comparables ont été obtenus dans [3, 5, 1].

– Des résultats s'appliquant à des équations beaucoup plus générales mais valables sur des échelles de temps beaucoup plus petites ont été obtenus dans [2].

– Rappelons que la théorie KAM a aussi été utilisée pour étudier la dynamique des EDP hamiltoniennes [10, 11, 7, 8, 4, 6]. Mais jusqu'à maintenant elle n'a permis de mettre en évidence que des tores invariants de dimension finie. Par contre notre résultat est valable pour toutes les solutions de petite amplitude du système considéré.

– Remarquons que les actions I_k sont "presque" conservées pour des temps polynomialement grands. Il n'y a donc que très peu d'échange entre les différents modes linéaires.

– Notre théorème peut être adapté au cas de l'équation des plaques

$$u_{tt} + \Delta\Delta u + mu = f(x, u)$$

sur un hypercube avec la condition de Dirichlet au bord pour u et Δu. Dans ce cadre les résonances entre les fréquences linéaires sont encore faciles à contrôler du moment que m soit choisi dans un ensemble générique adéquat. Néanmoins cette fois la forme normale est résonante (on ne peut distinguer les fréquences correspondant à des k de même norme). De ce fait, on obtient encore une estimation pour des temps polynomialement longs de la solution dans des espaces de Sobolev d'ordre élevé mais, par contre, les quantités qui restent "presque" conservées sont cette fois les $J_N = \sum_{|k|^2=N} I_k$ pour N entier. Ainsi des échanges sont possibles entre un mode j et un mode k dès que $|j| = |k|$.

– Notre théorème peut être généralisé au cas d'une non linéarité g dépendant aussi de x. Mais la forme normale obtenue est légèrement plus compliquée. En fait, elle ne permet plus d'assurer que toutes les actions sont "presque" constantes mais seulement les actions I_k pour $|k| \leq N$. Par ailleurs les quantités $J_M = \sum_{|k|^2=M} I_k$ pour $M > N$ sont elles aussi presque conservées.

– Nous aimerions étendre notre résultat au cas plus naturel où l'opérateur de convolution $V*$ est remplacé par un opérateur de multiplication. On peut espérer que le résultat reste vrai néanmoins la connaissance du spectre de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$ sur un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ ($d > 1$) est trop pauvre pour nous permettre de vérifier la condition de non résonance. Dans le cas très particulier d'un potentiel découplé $V(x_1, \ldots, x_d) = V_1(x_1) + \ldots + V_d(x_d)$ sur un domaine cubique, on peut montrer qu'il y a énormément de résonances entre les fréquences correspondantes. On peut néanmoins mettre le système sous forme normale résonante mais, du fait de la complexité de cette forme normale, nous sommes incapables d'en extraire une information dynamique.

3 Esquisse de la preuve

La preuve consiste en une adaptation des méthodes de [1]. Le point de départ en est l'algorithme classique d'élimination des monômes non résonants de l'Hamiltonien. En dimension finie et sous une hypothèse de non résonance sur les fréquences linéaires, cet algorithme permet de mettre l'Hamiltonien non linéaire sous forme normale de Birkhoff jusqu'à l'ordre M (M arbitraire) au voisinage de l'origine. L'obtention d'un résultat similaire en dimension infinie requiert certaines propriétés supplémentaires :

(1) "Les monômes faisant intervenir au moins trois variables de Fourier d'indice grand ont un champ de vecteurs petit". Plus précisément, étant donné un entier N grand, considérons un monôme $f(\xi, \eta)$ contenant au moins trois variables d'indice plus grand que N. Nous utilisons une estimation de type "tame" (cf. [9]) qui entraine que si deux fonctions u et v ont tous leurs coefficients de Fourier d'indice plus petit que N nuls alors

$$\|uv\|_s \;\leq\; \frac{C(s,d)}{N^{(s-d)}}\, \|u\|_s \|v\|_s \;.$$

Cette estimation nous permet de montrer que $\|X_f\|_s$ est de l'ordre de $N^{-(s-d)}$. De ce fait, en choisissant N et s suffisamment grand, les monômes de ce type n'ont pas besoin d'être éliminés : ils sont déjà petits.

(2) En conséquence les monômes que l'on doit éliminer ne font intervenir que des petits diviseurs de la forme

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \omega_{k_i} \pm \omega_j \pm \omega_l \tag{5}$$

où $k_i \in \mathbb{Z}^d$, $|k_i| \leq N$ et $|j| \geq |l| > N$ et $a_i \in \mathbb{Z}$ avec $\sum_i |a_i| \leq r$. Si il est possible de minorer de telles quantités par une puissance négative de N, on peut alors terminer la preuve comme dans [1]. Si les a_i sont non tous nuls, on montre qu'effectivement on peut borner (5) par une puissance négative de N. Par contre si tous les a_i sont nuls, la quantité à contrôler devient $\omega_j - \omega_l$. Or celle-ci peut être arbitrairement petite, il suffit pour cela de choisir $|j| = |l| \to \infty$. Ceci signifie que nous ne pouvons pas éliminer les monômes du type $I_{k_1} \ldots I_{k_r} \xi_j \eta_{-l}$ où $|k_i| \leq N$.

(3) C'est ici qu'intervient notre choix de la nonlinéarité : c'est une fonction locale de u et $\bar{u}$. Nous montrons que cette propriété impose une condition de moment zéro sur les monômes à éliminer. Ainsi nous avons obligatoirement $j = l$ et ces monômes ne dépendent que des actions.

Références

[1] D. Bambusi : *Birkhoff normal form for some nonlinear PDEs*, Commun. Math. Phys. (2003).

[2] D. Bambusi : *Averaging Theorem for Quasilinear Hamiltonian PDEs*. Preprint 2003.

[3] J. Bourgain : *Construction of approximative and almost periodic solutions of perturbed linear Schrödinger and wave equation*. GAFA **6** 201–230 (1996).

[4] J. Bourgain : *Quasi periodic solutions of Hamiltonian perturbations of 2D linear Schrödinger equation.* Ann. of Math. **148**, 363–439 (1998).

[5] J. Bourgain : *On diffusion in high dimensional Hamiltonian systems and PDE* J. Anal. Math. **80**, 1-35 (2000).

[6] J. Bourgain : *Green functions estimates for lattice Schrödinger operators and applications.* Preprint 2003.

[7] W. Craig : Problèmes de petits diviseurs dans les équations aux dérivées partielles. Panorama et Synthèses, 9 (SMF, Paris 2000).

[8] W. Craig, C.E. Wayne : *Newton's Method and Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations* Comm. Pure and Appl. Math. **46** 1409-1501 (1993).

[9] R.S. Hamilton : *The inverse function theorem of Nash and Moser.* Bull. Amer. Math. Soc. **7**, 65–222 (1982).

[10] S.B. Kuksin : Nearly Integrable Infinite-Dimensional Hamiltonian Systems, Lect. Notes Math. 1556 (Springer 1994).

[11] S.B. Kuksin : Analysis of Hamiltonian PDEs, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 19 (Oxford University Press, Oxford, 2000).