Examen du 5 mai 2004

Durée 1h30, calculatrice non programmable et formulaire manuscrit autorisés ; l'énoncé est constitué de 3 exercices indépendants ; il sera tenu compte de la présentation des copies ; barème indicatif : 6+6+8

Exercice 1 On considère l'intégrale définie

$$K = \int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x}\, dx \ .$$

1). En utilisant le changement de variable $u = \pi - x$, montrer que

$$K = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{1}{1+\sin u}\, du \ .$$

2). A l'aide du même changement de variable que précédemment, démontrer que

$$K = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin u}\, du \ .$$

3). En déduire la valeur de K.

Exercice 2 1). Donner un développement limité de $\sin^2 x$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2). Plus généralement, soit $p \in \mathbb{N}^*$: montrer que

$$\sin^p x = x^p + x^p \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.
3). Déterminer un développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de

$$\frac{1}{1+\sin^5 x} \ .$$

Exercice 3 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

1). En admettant que P est inversible, calculer P^{-1}.
2). Montrer que

$$P^{-1}AP = B \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

3). En remarquant que $B = 2I_3 + N$ avec $N^3 = 0$, calculer B^n en fonction de n.
4). En déduire A^n en fonction de n.