
Contrôle continu 1

Durée 2h30, sans calculatrice, formulaire manuscrit autorisé

Exercice 1 Soient ω et T deux réels strictement positifs tels que $\omega T = 2\pi$. Calculer en fonction de ω l'intégrale définie

$$\int_0^T t^2 \cos(\omega t)\, dt \ .$$

Exercice 2 Soient ω et T deux réels strictement positifs tels que $\omega T = 2\pi$. Déterminer la valeur efficace de l'intensité définie par $i(t) = I_0 \sin \omega t$ si $0 \leq t \leq T/2$, et $i(t) = 0$ si $T/2 < t \leq T$.

Exercice 3 1° Soit $T > 0$; en utilisant le changement de variable défini par $t = \tan x$, déterminer en fonction de T l'intégrale définie

$$\int_0^T \frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} \ .$$

2° En déduire que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

est convergente et déterminer sa valeur.
3° Démontrer de même que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 4 Démontrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\frac{5}{3} + \cos x} = \frac{3}{2} \arctan \frac{1}{2} \ .$$

On rappelle que si a est un réel strictement positif :

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right) + C \ .$$

Barème indicatif : 6 +3 +6 +5=20