Université de Nantes
Département de Mathématiques

DEUG STPI Module M2
Année 2004/2005

Examen de juin 2005

Durée 2h, calculatrice non programmable autorisée, formulaire manuscrit autorisé

Exercice 1 On se propose de calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta \ .$$

1) Montrer que pour tout θ réel tel que $\cos\theta \neq 0$, on a

$$\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \frac{1}{1+\tan\theta} \ .$$

2) En utilisant le changement de variable $t=\tan\theta$, montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan\theta}d\theta = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} \ .$$

3) Déterminer des réels A, B, C tels que pour $t \neq -1$, on ait

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \ .$$

4) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta \ .$$

Exercice 2 On rappelle que $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$. Déterminer la limite lorsque $x \to 0$ de

$$\frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{x^4} \ .$$

Exercice 3 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) On désigne par P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2) Vérifier que $P^{-1}AP = \text{ Diag }(1,2)$.
3) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Barème indicatif : 8 +6 +6=20