Université de Nantes
Module Mathématiques 2

Licence STPI L1
Année 2005/2006

Interrogation n°2 – Suites Numériques

Durée de l'épreuve : 60 minutes

Nom : **Prénom :** **Groupe : STPI 1.**

Document autorisé : une feuille A4 manuscrite recto. Calculatrices et téléphones interdits. L'énoncé est constitué d'exercices indépendants. Votre rédaction se fera sur la feuille (recto-verso) d'énoncé aux emplacements prévus à cet effet. Il sera tenu compte de la présentation de la copie.

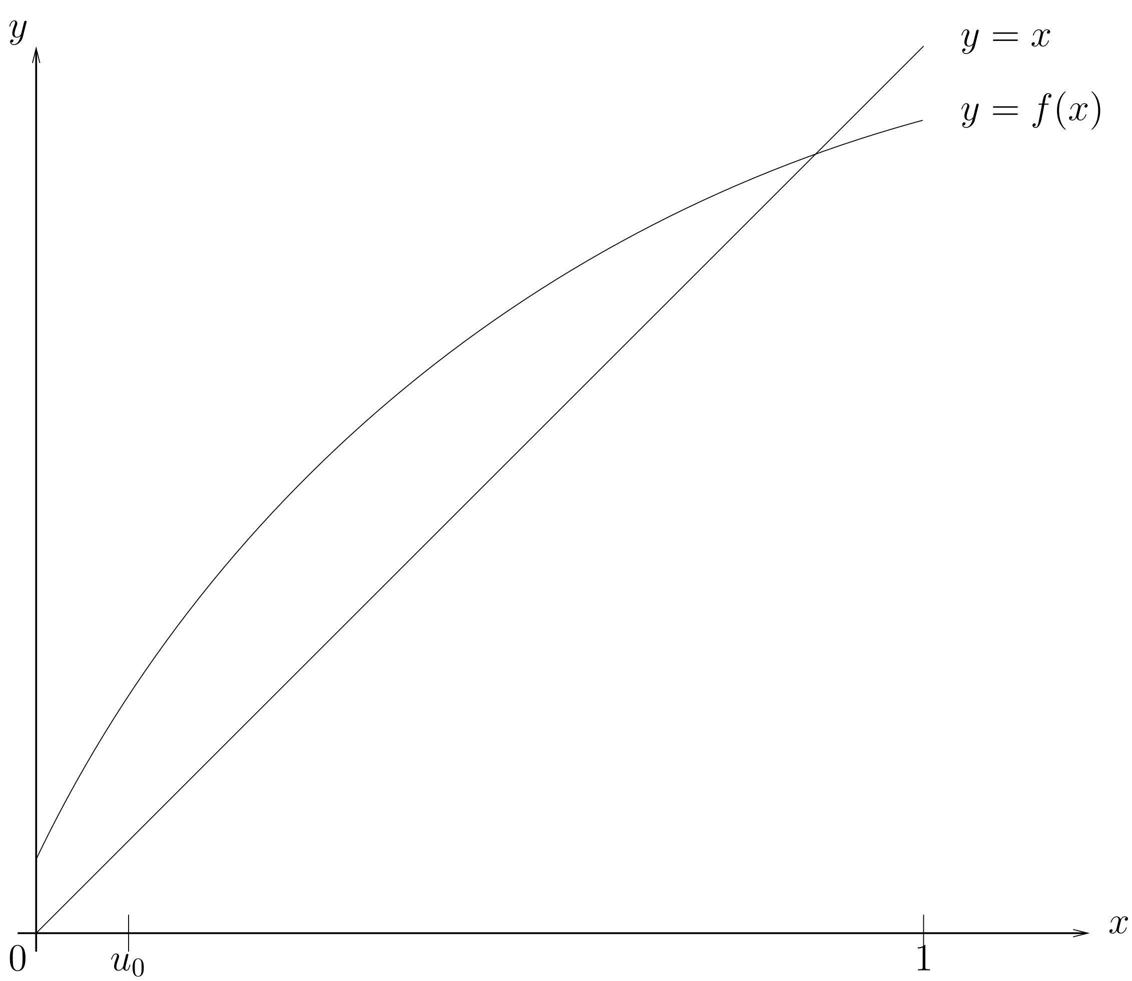
Barême (indicatif) : Ex 1 ***sur*** 3 ***points, Ex*** 2 ***sur*** 5 ***points, Ex*** 3 ***sur*** 7 ***points, Ex*** 4 ***sur*** 5 ***points.***

Exercice 1. *"Graphiquement vôtre"*

On se donne une fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ et on définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à l'aide de la donnée de u_0 et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Sur le graphique ci-dessous :

*i) Reporter u_1 et u_2 sur **l'axe des abscisses**.*

ii) On admet que la suite $(u_n)_n$ est convergente, et on notera par l sa limite.
*Reporter la limite l sur **l'axe des abscisses**.*



Exercice 2. ***"Des petits calculs"***

Étudier la convergence des suites suivantes, et donner leurs limites éventuelles :

i) $u_n = \dfrac{2n-3}{4n-5}$ *ii)* $v_n = n$ *iii)* $w_n = (-1)^n$ *iv)* $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

Exercice 3. ***"Suite récurrente d'ordre*** 1***"***

On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par récurrence par*

$$v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 3} \qquad \text{et} \qquad v_0 = 2$$

1. *A l'aide d'une récurrence, montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant v_n \leqslant 3$.
2. *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\geqslant 0}$ *est croissante.*
3. *En déduire que la suite* $(v_n)_{n\geqslant 0}$ *est convergente.*
4. *Déterminer la limite de cette suite.*

Exercice 4. *"Suite récurrente d'ordre* 2*"*

On considère la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par récurrence par* $w_0 = \frac{1}{2}$, $w_1 = 0$ *et par la relation de récurrence*

$$w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n$$

1. *On pose* $u_n := w_{n+1} - w_n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est une suite géométrique dont on déterminera la raison.*
2. *Déterminer* u_n *en fonction de* n.
3. *En déduire, pour* $n \in \mathbb{N}$*, une expression de* $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$ *en fonction de* n.
4. *En revenant à la définition de* u_k*, exprimer* S_n *en fonction de* w_{n+1}.
5. *Déduire de la question précédente l'expression de* w_n *en fonction de* n.