Université de Nantes | **Licence STPI L1**
Module Mathématiques 2 | **Année 2005/2006**

Chap I : Calcul Intégral (1/3)

I.1-Rappels sur les primitives

Déf 1.1 : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On appelle ***primitive*** de f sur I toute fonction numérique F définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Prop 1.2 : 1) Si F est une primitive de f, alors toutes les primitives de f sur I sont des fonctions G telles qu'il existe un réel k telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$.
2) Soient f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique primitive de f sur I telle que $f(x_0) = \alpha$.

Théo 1.3 : Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet sur I une primitive.

Ex : Quelques primitives usuelles (parmi tant d'autres) :

Fonction f définie par	Primitive F de f définie par	Domaine de validité
x^α ; $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$]0;+\infty[$
x^n ; $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$k \in \mathbb{R}$	kx	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$\mathbb{R}^\star$
x^{-k} ; $k \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$	$\frac{1}{1-k}x^{1-k}$	$\mathbb{R}^\star$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$sh(x)$	$ch(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arcsin(x)$	$]-1;1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$Arctan(x)$	$\mathbb{R}$

Prop 1.4 : Si la fonction f s'écrit sous la forme $u' \cdot g_\circ u$, alors une primitive de f est $G_\circ u$ (une primitive de g).

Ex : Quelques exemples de telles primitives :

Fonction f	Primitive F de f
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$
$u' \cdot u^\alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$
e^{ax} ; $a \in \mathbb{R}^\star$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$u' \cdot e^u$	e^u
$\sin(ax)$; $a \in \mathbb{R}^\star$	$-\frac{1}{a}\cos(ax)$
$u' \cdot \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\cos(ax)$; $a \in \mathbb{R}^\star$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$
$u' \cdot \cos(u)$	$\sin(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$Arcsin(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$Arctan(u)$

I.2-Intégrales définies

Durant les trois prochains paragraphes, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Déf 1.5 : Soient f une fonction numérique continue sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$.
Le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de F, on l'appelle ***intégrale de f de a à b***, on le note $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$.
La variable x est "muette", elle peut être remplacée par toute autre :
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Prop 1.6 : *Quelques conséquences immédiates de la définition :*
1) Soit f une fonction numérique continue sur $[a;b]$.
a) "Inversion des bornes". On a : $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.
b) "Relation de Chasles". Si $c \in [a;b]$, alors :
$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$
2) *"Linéarité"*. Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, f et g deux fonctions numériques continues sur $[a;b]$. Alors on a :
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

Prop 1.7 : *"Positivité"* Soit $a \leqslant b$. Si f est une fonction numérique continue **positive** sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

I.3-Méthodes d'intégration

I.3.A-*Intégration d'une fraction rationnelle*

Il s'agit de simplifier un quotient de fonctions polynômes en l'écrivant comme somme de termes $\frac{1}{(x-\alpha)^k}$ ou $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$ avec $p^2 - 4q < 0$.
On rappelle alors les calculs de primitives :
$$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}$$
$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx = \frac{a}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx - \frac{ap}{2}\int\frac{dx}{x^2+px+q}$$
$$= \frac{a}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| - \frac{ap}{2\mu}Arctan\left(\frac{x-\lambda}{\mu}\right) + C$$
où les réels λ et μ vérifient $x^2+px+q = (x-\lambda)^2 + \mu^2$.

I.3.B-*Linéarisation d'un polynôme trigonométrique*

Il s'agit d'écrire des polynômes trigonométriques, à savoir des sommes de termes
$$(\cos(x))^n \qquad \text{ou} \qquad (\sin(x))^n \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$
sous la forme d'une somme de termes du type $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$ avec $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Pour cela, on va utiliser les *formules d'Euler* :
$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$
ou des formules trigonométriques usuelles comme
$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$
$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\ ,\ \sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$
De même, pour un $\alpha \in \mathbb{R}$, on peut (bien sûr) linéariser $(\cos(\alpha x))^n$ ou $(\sin(\alpha x))^n$ en l'exprimant comme de termes $\cos(k\alpha x)$ et/ou $\sin(k\alpha x)$.

I.3.C-*Intégration par parties*

Prop 1.8 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in I^2$, f et g deux fonctions numériques de classe C^1 sur I.
Alors on a *la formule d'intégration par parties* :
$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx.$$
Rappel : une fonction f est dite de *classe* C^1 sur I si f est dérivable sur I, à dérivée continue sur I.

I.3.D-*Changement de variable*

Prop 1.9 : *Changement de variable affine*
Soient $\varphi : u \mapsto \alpha u + \beta$ une fonction affine définie sur $[a;b]$, avec $\alpha \neq 0$, et f une fonction numérique continue sur $[\alpha a+\beta;\alpha b+\beta]$, alors on a :
$$\int_a^b f(\alpha u+\beta)du = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(t)dt.$$

Cor 1.10 : 1) Soit f est une fonction numérique continue sur $[-a;a]$.
Si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\cdot\int_0^a f(t)dt$.
Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.
2) Si f est une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$, admettant une période $T \neq 0$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Théo 1.11 : *Changement de variable (version générale)*
Soient φ une fonction numérique définie sur $[a;b]$, de classe C^1 et f une fonction numérique continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si $\varphi([a;b]) \subset I$, alors on a :

$$\int_a^b f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Rem : 1) On peut retenir de façon "mécanique" ce résultat en posant

$$t = \varphi(u)$$
$$dt = \varphi'(u)\cdot du$$

Les bornes d'intégration a et b pour la variable u se modifiant en $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ pour la variable $t = \varphi(u)$.
2) Dans la pratique, pour utiliser le changement de variable $x = \varphi(v)$ dans l'intégrale $\int_A^B f(x)dx$, le facteur $\varphi'(x)$ n'est pas toujours en évidence dans l'intégrale étudiée, et il faut alors l'y intercaler, en divisant aussi par $\varphi'(x)$ (pour la compensation). Cela suppose que φ' ne s'annule pas dans l'intervalle considéré. Comme φ est de classe C^1 sur cet intervalle, cette condition revient à $\varphi' < 0$ ou $\varphi' > 0$.

Ex : Quelques changements de variables utiles :
1) Pour calculer une primitive du type $\int \cos^m(x)\cdot\sin^n(x)dx$
a) Si m est impair, on peut effectuer $u = \sin(x)$.
b) Si n est impair, on peut effectuer $u = \cos(x)$.
c) Si m et n sont pairs, on linéarisera.
2) Pour calculer une primitive du type $\int R(\cos(x), \sin(x))dx$ où R est une fraction rationnelle à deux variables. On peut toujours effectuer le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a alors

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

D'où $\int R(\cos(x), \sin(x))dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$ et on est ainsi ramené à calculer la primitive d'une fraction rationnelle en t.
3) Pour calculer une primitive du type $\int R(e^{\alpha x})\,dx$ où R est une fraction rationnelle. On peut poser $u = e^{\alpha x}$ et on a $\int R(e^{\alpha x})\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{R(u)}{u}du$ et on est ramené au calcul de la primitive d'une fraction rationnelle en u.

I.4-Valeur moyenne, Valeur efficace

Prop 1.12 : (Quelques conséquences de la Prop 1.7)
1) Soient $a \leqslant b$, f et g deux fonctions numériques continues sur $[a;b]$.
a) *"Relation d'ordre"*
Si $f \leqslant g$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.
En particulier, on a toujours $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.

b) Si $g \geqslant 0$ sur $[a;b]$ et il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in [a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx.$$

En particulier, avec $g(x) = 1$, on obtient

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Prop 1.13 : *"Critère d'annulation"*
Si f est positive et continue sur $[a;b]$ et $\int_a^b f(x)dx = 0$, alors f est *la fonction nulle.*

Prop 1.14 : *"La formule de la moyenne"*
Soient $a \leqslant b$, f et g deux fonctions numériques continues sur $[a;b]$.
Alors il existe $c \in [a;b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

Déf 1.15 : Soient $a < b$ et f une fonction numérique continue sur $[a;b]$.
1) Le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ s'appelle *Valeur moyenne de la fonction f sur le segment* $[a;b]$.
2) En particulier, si f est une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique, on appellera ***Valeur moyenne de f*** le réel

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)du$$

3) Si f est une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique, on appellera ***Valeur efficace de f*** le réel

$$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (f(u))^2du}$$

Rem : 1) Interprétation géométrique.
2) On peut remarquer sur $\overline{f}$ peut éventuellement être négatif alors que f_{eff} est toujours une quantité positive.
3) Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ sur $[a;b]$, alors $m \leqslant \overline{f} \leqslant M$.
4) On note que $(f_{eff})^2 = \overline{f^2}$.

I.5-Calcul d'aire et de volume

I.6-Notion d'intégrales généralisée

Dans tout ce paragraphe, $a < b$.

Déf 1.16 : 1) Soit $f : [a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b[$.
On dit que $\int_a^b f(t)dt$ **converge** si $\lim\limits_{\substack{u\to b\\u<b}} \int_a^u f(t)dt$ existe.
Si on appelle l cette limite, on note $\int_a^b f(t)dt = l$.
2) Soit $f : [a;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;+\infty[$.
On dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge** si $\lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(t)dt$ existe.
Si on appelle L cette limite, on note $\int_a^{+\infty} f(t)dt = L$.

Déf 1.17 : Soit $f : [a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b[$ (ou $[a;+\infty[$).
On dit que $\int_a^b f(t)dt \left(\text{ou } \int_a^{+\infty} f(t)dt\right)$ **diverge** si elle ne converge pas.

Rem : On a des définitions analogues aux Cadres 1.16 et 1.17 pour des intervalles $]a;b]$ et $]-\infty;a]$.

Rem : *Attention aux intégrales faussement généralisées !*
Si f continue sur $[a;b[$ et si la limite $\lim\limits_{\substack{u\to b\\ u<b}} f(x) = l$ existe, on peut considérer $\tilde{f}$, prolongement de f par continuité, défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ sur $[a;b[$ et $\tilde{f}(b) = l$. On aura alors

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{u\to b\\ u<b}} \int_a^u f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx.$$

Prop 1.18 : Si f continue sur $[a;b[$ et $c \in [a;b[$, alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont de même nature.
De plus, si elles convergent, on a *la Relation de Chasles* :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Rem : Avec des intégrales généralisées convergentes, on a des notions analogues à celles des intégrales définies comme *"la relation d'ordre"*, *"la linéarité"*, *"la positivité"*, *"le critère d'annulation"*, ...
Mais il faut bien prendre garde à la convergence de ces intégrales généralisées !!! ... A manipuler avec précautions ...

Ex : Voici quelques exemples fondamentaux :

- Riemann en $+\infty$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$
- Riemann en 0 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$
- Si $a \neq c$, alors $\displaystyle\int_a^c \frac{dx}{|x-a|^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}dx$ converge $\iff \alpha < 0$
- Si $\alpha < 0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}dx = -\frac{1}{\alpha}$
- $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt = -1$

Déf 1.19 : Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f : [a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b[$.
On dit que $\int_a^b f(t)dt$ **converge absolument** si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Prop 1.20 : Si $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge *(tout court)* et on a $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$.

Prop 1.21 : *"Règle $x^\alpha f(x)$ en $+\infty$"*
Soient $a > 0$ et f une fonction continue et positive sur $[a;+\infty[$.
1) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.
2) S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

Prop 1.22 : *"Règle $x^\alpha f(x)$ en 0^+"*
Soient $a > 0$ et f une fonction continue et positive sur $]0;a]$.
1) S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha f(x) = 0$, alors $\int_0^a f(x)dx$ converge.
2) S'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha f(x) = +\infty$, alors $\int_0^a f(x)dx$ diverge.

I.7-Et si on généralisait un peu tout ça !!!

I.7.A-*Pour des fonctions continues par morceaux*

Déf 1.23 : 1) Une fonction numérique f définie sur un segment $[a;b]$ est dite **continue par morceaux** s'il existe une suite finie d'éléments de $[a;b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b,$$

telle que pour tout $k \in \{0;1;\ldots;n-1\}$, la restriction de f à $]x_k;x_{k+1}[$ soit continue et admette un prolongement continu f_k sur $[x_k;x_{k+1}]$: *cela revient à dire que f admet une limite à droite finie en x_k et une limite à gauche finie en x_{k+1}.*
2) Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ et avec les notations précédentes, on appelle **intégrale de f de a à b**, le réel

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(t)dt.$$

Rem : 1) Vous avez déjà rencontré de telle fonction ! Par exemple, la fonction *partie entière* ou comme dans l'Exo 1.14, une intensité, T-périodique, valant I_0 sur $\left[0;\frac{T}{2}\right]$ et $-I_0$ sur $\left]-\frac{T}{2};T\right[$.
2) **IMPORTANT :** Dans les cadres 1.6, 1.7, 1.12 et 1.15, on aura les mêmes résultats en remplaçant f continue par f continue par morceaux.

I.7.B-*Pour des fonctions à valeurs complexes*

Pour étudier des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, on sépare sa partie réelle et sa partie imaginaire en écrivant $f(x) = g(x) + ih(x)$ (où $g(x) = \mathcal{R}e(f(x))$ et $h(x) = \mathcal{I}m(f(x))$).
Ensuite on peut se ramener à deux intégrales de fonctions à valeurs réelles :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + i\int_a^b h(x)dx$$

Bien sûr, on n'est pas obligé de faire cette séparation. Parfois on peut très bien primitiver des fonctions à valeurs complexes : par exemple $\displaystyle\int_0^\pi e^{i\alpha t}dt = \left[\frac{1}{i\alpha}e^{i\alpha t}\right]_0^\pi$.
On retrouvera de telles intégrales dans la Théorie des Séries de Fourier *(cf le calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique : vivement le STPI L2 !)* ou dans celle de la Transformée de Fourier *(en plus, là on calculera des intégrales de $-\infty$ à $+\infty$ ...)*

I.7.C-*Et encore un peu plus loin ...*

1) "Juste pour information", on peut noter qu'il existe aussi une théorie de l'intégration pour des fonctions définies sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ *(mais là, c'est une autre histoire ...)*
– Néanmoins, si vous êtes motivés pour en savoir plus, vous pouvez feuilleter des livres de Maths (sur l'Analyse Complexe, ou des livres de Classes Prépas ou Licence de Maths)
2) Pour finir, un jour vous pouvez aussi être amené à rencontrer l'intégrale de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, mais également pour des fonctions qui sont définies sur des surfaces de $\mathbb{R}^n$, par exemple définies sur la sphère dans $\mathbb{R}^3$
– Là encore, plongez-vous dans vos livres préférés !