Chap II : Suites Numériques (1/3)

II.1-Définition. Suites classiques

Déf 2.1 : Une **suite numérique** $U = (u_n)_{n\geqslant 0}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui à chaque entier n associe un nombre (réel ou complexe) noté u_n.
On notera $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ si l'indice de départ n_0 est important ou $(u_n)_n$ si l'indice de départ n'a que peu d'importance.

Rem : 1) Une suite est parfois définie par la donnée d'une formule faisant intervenir le plus souvent les opérations algébriques (addition, soustraction, multiplication, division, puissance) et les fonctions classiques (fonctions trigonométriques, logarithme, exponentielle ...)
2) De manière générale, une suite est définie lorsqu'on se donne *un moyen théorique de calculer sans ambiguïté chacun de ses termes.* Ainsi une suite peut être définie par une relation de récurrence permettant de calculer chaque terme en fonction du ou des précédents, ou bien en fonction des termes d'autres suites.
Dans ce cas, il n'est en général pas possible d'expliciter une formule donnant u_n en fonction n.

Déf 2.2 : 1) La **suite arithmétique** de premier terme u_0 et de raison r est définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence : $\forall n \geqslant 0\,, \quad u_{n+1} = u_n + r$
2) La **suite géométrique** de premier u_0 et de raison q est définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \geqslant 0\,, \quad u_{n+1} = q\cdot u_n \end{cases}$

Rem : 1) Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors (par une récurrence immédiate) on montre : $\forall n \geqslant 0\,, \quad u_n = u_0 + n\cdot r$
La somme des N premiers termes de cette suite est

$$\sum_{n=0}^{N-1} u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1} = N\frac{u_0 + u_{N-1}}{2} = N u_0 + r\frac{N(N-1)}{2}$$

2) Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors (par une récurrence immédiate) on montre :

$$\forall n \geqslant 0\,, \quad u_n = u_0\cdot q^n$$

La somme des N premiers termes de cette suite est

$$\sum_{n=0}^{N-1} u_n = \begin{cases} N\cdot u_0 & \text{si } q = 1 \\ u_0\frac{1-q^N}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

ATTENTION : à partir de maintenant, on considère $u_n \in \mathbb{R}$ (on parlera des suites complexes à la fin du Chapitre)

Vocabulaire élémentaire

La suite $(u_n)_n$ est ...	signifie ...
majorée par M	Pour tout n, $u_n \leqslant M$
minorée par m	Pour tout n, $u_n \geqslant m$
majorée	Il existe un nombre M tel que $(u_n)_n$ soit majorée par M
minorée	Il existe un nombre m tel que $(u_n)_n$ soit minorée par m
majorée par la suite $(v_n)_n$	Pour tout n, $u_n \leqslant v_n$
minorée par la suite $(v_n)_n$	Pour tout n, $u_n \geqslant v_n$
constante	Tous les termes de $(u_n)_n$ sont égaux
croissante	Si $p < q$, alors $u_p \leqslant u_q$
strictement croissante	Si $p < q$, alors $u_p < u_q$
décroissante	Si $p < q$, alors $u_p \geqslant u_q$
strictement décroissante	Si $p < q$, alors $u_p > u_q$
monotone	$(u_n)_n$ est soit croissante, soit décroissante
bornée	$(\lvert u_n\rvert)_n$ est majorée

Certaines caractérisations sont à l'usage souvent plus intéressantes que les définitions. Ainsi on peut prouver facilement par récurrence que :

La suite $(u_n)_n$ est ...	équivaut à ...
croissante	Pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$
strictement croissante	Pour tout n, $u_n < u_{n+1}$
décroissante	Pour tout n, $u_n \geqslant u_{n+1}$
strictement décroissante	Pour tout n, $u_n > u_{n+1}$

II.2-Limite d'une suite. Convergence. Divergence

Déf 2.3 : On dit que **la suite** $(u_n)_n$ **converge vers** $l \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert I contenant l contient aussi tous les termes de la suite $(u_n)_n$ à partir d'un certain rang n_0 (qui dépend bien sûr de I).
On dit aussi que *"u_n a pour limite l quand n tend vers $+\infty$"* et on écrit indifféremment :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = l$$

Déf 2.4 : On dit que **la suite** $(u_n)_n$ **tend vers** $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_n$ à partir d'un certain rang n_0 (qui dépend bien sûr de A).
On écrira alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2) On dit que **la suite** $(u_n)_n$ **tend vers** $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty; B[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_n$ à partir d'un certain rang n_0 (qui dépend bien sûr de B).
On notera alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Déf 2.5 : On dit que $(u_n)_n$ **est convergente** s'il existe $l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.
On dit que $(u_n)_n$ **est divergente** si elle n'est pas convergente.

Prop 2.6 : On a les équivalences suivantes :
$(u_n)_n$ converge vers $l \iff (u_n - l)_n$ converge vers 0
$\iff u_n = l + \varepsilon_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Prop 2.7 : Il y a **unicité** de la limite d'une suite.

Ex : Les résultats suivants seront considérés comme connus :
- Pour $|a| < 1$, la suite $(a^n)_n$ converge vers 0.
- Pour $a > 1$, la suite $(a^n)_n$ tend vers $+\infty$.
- Pour $a \leqslant -1$, la suite $(a^n)_n$ n'a pas de limite.
- Pour $\alpha < 0$, la suite $(n^\alpha)_n$ converge vers 0.
- Pour $\alpha > 0$, la suite $(n^\alpha)_n$ tend vers $+\infty$.
- Les suites $(1^n)_n$ et $(n^0)_n$ sont constantes.

II.3-Propriétés algébriques des limites

Prop 2.8 : 1) La suite $(u_n)_n$ converge vers 0 si et seulement si $(|u_n|)_n$ converge vers 0.
2) Mais seulement une implication dans le cas général :
Si $(u_n)_n$ converge vers l, alors $(|u_n|)_n$ converge vers $|l|$.
3) Si $(u_n)_n$ converge vers 0 et $(v_n)_n$ est une suite bornée, alors la suite $(u_n v_n)_n$ converge vers 0.

Rem : La suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ est un contre-exemple à la réciproque du second point de la Prop 2.8.

Prop 2.9 : Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes respectivement vers $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$.
On a alors
1) la suite $(\lambda\, u_n + \mu\, v_n)_n$ converge vers $\lambda u + \mu v$.
2) la suite $(\lambda\, u_n\, v_n)_n$ converge vers λuv.
3) si $v \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)_n$ est définie à partir d'un certain rang et la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ converge vers $\frac{u}{v}$.

Rem : On peut être amener à étudier un de ces derniers types de suites mais avec u et v valant $\pm\infty$ ou/et 0, ce qui peut procurer des formes indéterminées pour "la limite" !
Voici 3 techniques souvent utiles pour s'en sortir :
○ mise en facteur et simplification algébrique
○ mise en facteur du terme prépondérant (s'il est facile à identifier)
○ usage d'astuce algébrique spécifique (comme la quantité conjuguée, ...) — là, c'est votre *"oeil de lynx"* et/ou votre *habitude à faire des maths* qui vous sauveront !

II.4-Majoration, minoration, comparaison.

Prop 2.10 : 1) Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent respectivement vers u et v, et $(v_n)_n$ majore $(u_n)_n$, alors $u \leqslant v$.
2) Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent respectivement vers u et v, et vérifiant $u < v$, alors il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0, \quad u_n < v_n$.
3) Si $(u_n)_n$ est une suite convergente vers u et vérifie pour tout $n \geqslant n_0, \quad a \leqslant u_n \leqslant b$, alors $a \leqslant u \leqslant b$.
4) Si $(u_n)_n$ est une suite convergente vers u et $a < u < b$, alors il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0, \quad a < u_n < b$

Rem : Même si $(v_n)_n$ majore strictement $(u_n)_n$, lors du passage à la limite, on obtient une *inégalité "large"* (comme celle énoncée).

Prop 2.11 : 1) Si $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ et $(v_n)_n$ majore $(u_n)_n$, alors $(v_n)_n$ tend vers $+\infty$.
2) Si $(v_n)_n$ tend vers $-\infty$ et $(v_n)_n$ majore $(u_n)_n$, alors $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$..

Prop 2.12 : Toute suite convergente est bornée.

Rem : La réciproque est *"FAUSSE"*, toujours avec la même suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ comme contre-exemple.

Théo 2.13 : ***"IMPORTANT"***
1) Toute suite croissante et majorée converge.
Toute suite décroissante et minorée converge.
2) Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Prop 2.14 : 1) Si $(u_n)_n$ est croissante et converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors pour tout $n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant l$.
2) Si $(v_n)_n$ est décroissante et converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors pour tout $n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant l$.

Théo 2.15 : *Théorème des gendarmes*
Soit $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ deux suites convergentes respectivement vers la même limite l.
Si la suite $(v_n)_n$ vérifie pour tout $n \geqslant 0, \; u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $(v_n)_n$ converge aussi vers l.

Déf 2.16 : Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites ***"suites adjacentes"*** si elles vérifient les trois conditions :
○ $(u_n)_n$ est croissante
○ $(v_n)_n$ est décroissante
○ $(v_n - u_n)_n$ converge vers 0.

Prop 2.17 : Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.
De plus, si l'on note par l cette limite commune, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \; u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant l \leqslant v_{p+1} \leqslant v_p.$$

II.5-Suites extraites.

Déf 2.18 : On appelle **"suite extraite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ "** une suite obtenue en supprimant un certain nombre de termes (éventuellement infini) dans la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, à condition toutefois qu'il en reste une infinité, et en renumérotant.
On dira aussi que l'on obtient **"une sous-suite de $(u_n)_n$ "**.

Ex : Si $v_n = u_{2n}$, $(v_n)_n$ est la suite-extraite des termes pairs.
Si $w_n = u_{2n+1}$, $(w_n)_n$ est la suite-extraite des termes impairs.
Plus généralement, si $v_n = u_{an+b}$ où $a \in \mathbb{N}^\star$ et $b \in \mathbb{N}$, alors $(v_n)_n$ est une suite-extraite de $(u_n)_n$.

Prop 2.19 : Si $(u_n)_n$ converge vers l, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge vers l.

Cor 2.20 : ***Un critère de divergence très utile***
Pour conclure que la suite $(u_n)_n$ diverge, il suffira d'exhiber une suite extraite de $(u_n)_n$ qui diverge, ou bien deux suites extraites de $(u_n)_n$ qui aient des limites différentes.

II.6-Suites et fonctions.

Prop 2.21 : Soient I un intervalle ouvert contenant a, f une fonction numérique définie sur I sauf peut-être en a tel que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = l$.
Si la suite $(u_n)_n$ converge vers a et vérifie pour tout n, $u_n \neq a$, alors la suite $(f(u_n))_n$ converge vers l.
[a et l désignent des réels ou $\pm\infty$]

II.7-Suites récurrentes.

Déf 2.22 : Une suite numérique est dite **"récurrente ordre k "** s'il existe une relation du type :
$$u_{n+k} = f(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k-1}) \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0$$
où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^k$ à valeurs réelles.

Rem : On a déjà rencontré des suites récurrentes d'ordre 1 :
○ les suites arithmétiques où $f(t) = t + r$
○ les suites géométriques où $f(t) = q\cdot t$.

Déf 2.23 : Une **suite récurrente affine du premier ordre** est définie par une relation de récurrence du type :
$$u_{n+1} = a\cdot u_n + b \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0$$
avec a et b réels, $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

Rem : 1) Avec $a = 1$, on retrouve une suite arithmétique de raison b.
2) Si $a \neq 1$, on peut montrer que pour tout $n \geqslant 0$,
$$u_n = a^n \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}.$$

Déf 2.24 : Une **suite récurrente linéaire du second ordre** est définie par une relation de récurrence du type :
$$u_{n+2} = a\cdot u_{n+1} + b\cdot u_n \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0$$
avec a et b réels, $b \neq 0$.

Rem/Prop : On peut chercher à obtenir une expression de u_n en fonction de n en considérant l'équation caractéristique
$$r^2 = ar + b \qquad (E).$$
1) Si (E) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe 2 constantes réelles λ et μ telles que pour tout $n \geqslant 0$,
$$u_n = \lambda\cdot r_1^n + \mu\cdot r_2^n$$
2) Si (E) admet une racine réelle double r, alors il existe 2 constantes réelles λ et μ telles que pour tout $n \geqslant 0$,
$$u_n = (\lambda + \mu\cdot n)\cdot r^n$$
3) Si (E) admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, alors il existe 2 constantes réelles λ et μ telles que pour tout $n \geqslant 0$,
$$u_n = \rho^n\left(\lambda\cdot\cos(n\theta) + \mu\cdot\sin(n\theta)\right)$$
4) Dans la pratique, les constantes réelles λ et μ sont déterminées en considérant les deux termes u_0 et u_1.

Rem : Etude générale pour une suite récurrente d'ordre 1 :

$$u_{n+1} = f(u_n) \qquad \text{(R)}$$

où la fonction f est définie sur I vérifie $f(I) \subset I$ où I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
• Si f est croissante sur I, alors la suite $(u_n)_n$ est monotone, et son sens de variation dépend de la position relative de u_0 et u_1.
Il restera à voir, dans chaque exemple, si $(u_n)_n$ est minorée ou majorée (pour appliquer le Théo 2.13).
• Si f est décroissante sur I, alors $f_\circ f$ est croissante sur I. Donc les suites extraites $(u_{2p})_p$ et $(u_{2p+1})_p$ sont monotones (et de sens contraires !).
Il restera à voir si ces deux suites extraites sont adjacentes (pour appliquer la Prop 2.17).
• On suppose que f soit continue sur I.
Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, alors $l \in I$ et, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation (R), on déduit $f(l) = l$.
Souvent, on pourra résoudre l'équation $f(l) = l$ (d'inconnue $l \in I$) et donc déterminer les seules limites "possibles" de $(u_n)_n$. MAIS attention, toutes les suites vérifiant (R) ne sont pas forcément convergentes !
On dit que $x_0 \in I$ est **"un point fixe"** de f si $f(x_0) = x_0$.

Rem : 1) Dans ce Chapitre, à partir de la fin du §II.1 (au Cadre "Vocabulaire élémentaire"), on a travaillé avec des suites de réels, mais comme annoncée à la Déf 2.1, on définit aussi des suites de complexes.
Les résultats sont en général conservés **SAUF** les résultats faisant intervenir les relations d'ordre sur $\mathbb{R}$ (à savoir tous les résultats utilisant les inégalités $\leqslant$, $<$, $\geqslant$ ou $>$), en particulier tous les résultats faisant intervenir la notion de suites monotones (resp. strictement monotone) ou suites adjacentes.
Néanmoins, on peut parler de suite de complexes bornée :

La suite de complexes $(z_n)_n$ est dite **bornée** si la suite de réels $(|z_n|)_n$ est bornée.

La suite de complexes $(z_n)_n$ est dite **convergente vers** l si tout disque ouvert $D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z - l| < r\}$ contient tous les termes de la suite $(z_n)_n$ à partir d'un certain rang n_0 (qui dépend de r, bien sûr on a $r > 0$).
On notera encore $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$.

La suite des coefficients de Fourier d'une fontion T-périodique forme un exemple très intéressant de suite de complexes *(Vivement le STPI L2 pour en savoir plus ...)*

2) Bien sûr, on peut également aller un peu plus loin avec des suites de $n-$uplets, i.e. des suites de points de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ ... mais ce n'est l'objet de ce module ...