Chap III : Développements Limités (1/3)

III.1-Les fonctions "$\varepsilon(\mathbf{x})$"

Déf 3.1 : Lorsque f est une fonction définie sur un intervalle contenant 0 telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, on écrira $\mathbf{f(x)} = \varepsilon(\mathbf{x})$ et on dira que $f(x)$ est un "$\varepsilon(x)$".

Rem : 1) On écrira $f(x) = a + \varepsilon(x - x_0)$ pour signifier que $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.
2) On peut rencontrer la notation $f(x) = o(x^k)$: on dira que $f(x)$ est "un petit o de x^k ".
On a la correspondance suivante $\varepsilon(x) = o(1)$ et plus généralement $x^k\varepsilon(x) = o(x^k)$.

Prop 3.2 : Soient f et g des fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant 0. On a les propriétés suivantes
1) SOMME : Si $f(x)=\varepsilon(x)$ et $g(x)=\varepsilon(x)$, alors $(f+g)(x)=\varepsilon(x)$.
2) MULTIPLICATION PAR UNE CONSTANTE : Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \varepsilon(x)$, alors $(\lambda f)(x) = \varepsilon(x)$.
3) MULTIPLICATION PAR UNE FONCTION BORNÉE : Si $f(x) = \varepsilon(x)$ et g est une fonction bornée, alors $(fg)(x) = \varepsilon(x)$.
4) COMPOSITION : Si $f(x) = \varepsilon(x)$ et $g(x) = \varepsilon(x)$, alors $(g\circ f)(x) = \varepsilon(x)$.

III.2-Généralités

Déf 3.3 : Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ **admet un développement limité à l'ordre** n **en** 0 (un $DL_n(0)$) s'il existe un polynôme P à coefficients réels tel que

$$(\star) \qquad deg(P) \leqslant n \qquad \text{et} \qquad \forall x \in I,\ f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x).$$

On dit que $g : J \to \mathbb{R}$ **admet un développement limité à l'ordre** n **en** x_0 (un $DL_n(x_0)$) s'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que

$$(\star\star)\ deg(Q)\leqslant n \text{ et } \forall x \in J,\ g(x)=Q(x-x_0)+(x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0).$$

Rem : 1) En pratique, on se ramène presque systématiquement au voisinage de 0 en posant $x-a = u$ et en cherchant un $DL_n(0)$ de $f(x) = g(a + u)$.
2) On réécrit parfois l'égalité de $(\star\star)$ sous la forme

$$f(x_0 + h) = Q(h) + h^n\varepsilon(h).$$

Prop/Déf 3.4 : Si f admet un $DL_n(0)$, alors ce développement limité est **UNIQUE**.
L'unique polynôme P vérifiant $(\star)$ est appelé **la partie régulière** du $DL_n(0)$ de f.

Prop 3.5 : TRONCATURE
Si f admet un $DL_n(0)$, de partie régulière P, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, f admet un $DL_k(0)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant P au degré k, c.à.d en ne prenant dans P que les termes de degré inférieur ou égal à k.

Prop 3.6 : Soit f une fonction admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière P.
Si f est une fonction paire (resp. impaire), alors la partie régulière P est PAIRE (resp. IMPAIRE).

Prop 3.7 : 1) f admet un $DL_0(x_0)$ si et seulement si f est continue en x_0.
On a alors $f(x) = f(x_0) + \varepsilon(x - x_0)$.
2) f admet un $DL_1(x_0)$ si et seulement si f est dérivable en x_0.
On a alors $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$.

Rem : il se peut que f admette un $DL_n(x_0)$ avec $n \geqslant 2$ sans être n-fois dérivable en x_0. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet un $DL_2(0)$ sans être 2-fois dérivable en 0.

III.3-Obtention des développements limités

Théo 3.8 : "IMPORTANT"
Si f est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si f admet un $DL_n(x_0)$ de la forme :

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \cdots + a_nh^n + h^n\varepsilon(h)$$

et si F est une primitive de f alors F admet pour $DL_{n+1}(x_0)$:

$$F(x_0+h) = F(x_0)+a_0h+a_1\tfrac{h^2}{2}+a_2\tfrac{h^3}{3}+\cdots+a_n\tfrac{h^{n+1}}{n+1}+h^{n+1}\varepsilon(h)$$

Attention : on n'a pas le droit de dériver (sans précaution) un développement limité ... mais on a le résultat suivant

Prop 3.9 : Si f est de classe C^n au voisinage de 0, alors f' admet un $DL_{n-1}(0)$. En particulier, si le $DL_n(0)$ de f s'écrit : $f(x) = P(x)+x^n\varepsilon(x)$, alors le $DL_{n-1}(0)$ de f' est de la forme : $f'(x) = P'(x) + x^{n-1}\varepsilon(x)$.

Rappel : f est dite de classe C^n sur un intervalle I si f est n-fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

Prop 3.10 : Formule de Taylor pour les polynômes.
Soit P un polynôme à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.
Alors pour tout a et x réels, on a

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= P(a) + P'(a)(x-a) + \cdots + \tfrac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Rem : 1) Ici, on a une identité purement algébrique "sans terme reste" (bien sûr, ça vaut si l'on a pris soin de l'écrire à un ordre au moins égal au degré du polynôme considéré).
2) Si on veut le $DL_k(a)$ de P avec $k < deg(P)$, on aura un terme reste $(x - a)^k\varepsilon(x - a)$:

$$P(x) = \sum_{q=0}^{k} \frac{P^{(q)}(a)}{q!}(x-a)^q + (x-a)^k\varepsilon(x-a)$$

Theo 3.11 : Formule de Taylor-Young.
Si f est de classe C^n sur I et $x_0 \in I$, alors f admet un $DL_n(x_0)$ donné par :

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + h^n\varepsilon(h) \\ &= f(x_0)+f'(x_0)h+\tfrac{f''(x_0)}{2}h^2+\cdots+\tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+h^n\varepsilon(h) \end{aligned}$$

Rem : 1) Cette *Formule* est TRÈS IMPORTANTE, elle permet d'obtenir "facilement" les $DL_n(0)$ des fonctions usuelles : e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\frac{1}{1+x}$, ou encore $(1+x)^\alpha$ (voir les formules à la fin de ce Chapitre).
2) On réécrit parfois cette formule comme suit

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((b-a)^n\right)$$

pour des points a et b de I. (Ici, $b = x_0 + h$ et $a = x_0$).

III.4-Opérations élémentaires

Prop 3.12 : Soient $n \geqslant 1$, f et g deux fonctions qui admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P et Q. Alors
1) $(f+g)$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est $(P+Q)$.
2) si $\lambda \in \mathbb{R}$, (λf) admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est (λP).
3) (fg) admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant le produit PQ au degré n.

Prop 3.13 : Si f admet un $DL_n(x_0)$ et g admet un $DL_n(f(x_0))$, alors $g_\circ f$ possède un $DL_n(x_0)$.

Cor 3.14 : Si f admet un $DL_n(0)$ et $f(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ admet un $DL_n(0)$.

Deux cas applications importantes de la Prop 3.13 :
1) Déterminer le $DL_n(0)$ des fonctions de la forme $x \mapsto g(\lambda x)$.
Avec $f(x) = \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, si g admet pour $DL_n(0)$, $g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$, alors $g_\circ f$ admet pour $DL_n(0)$

$$g_\circ f(x) = g(\lambda x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$$

2) Déterminer le $DL_n(0)$ des fonctions de la forme $x \mapsto g(x^p)$.
Avec $f(x) = x^p$ pour $p \in \mathbb{N}^\star$, si g admet pour $DL_n(0)$, $g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$, alors $g_\circ f$ admet pour $DL_{np}(0)$

$$g_\circ f(x) = g(x^p) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{kp} + x^{np} \varepsilon(x)$$

III.5-Applications des développements limités

III.5.A-Calculs des limites de formes indéterminées

III.5.B-Position de $\mathcal{G}_f$ par rapport à une de ses tangentes

Theo 3.15 : Soit f une fonction admettant un $DL_n(a)$ avec $n \geqslant 2$ de la forme

$$f(x) = f(a) + c_1(x-a) + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$

avec $c_n \neq 0$.
Alors $\mathcal{G}_f$ admet au point $(a, f(a))$ une tangente T_a d'équation $y = f(a) + c_1(x-a)$.
• Si n est PAIR, alors on a les deux propriétés
Si $c > 0$, alors au voisinage du point $(a, f(a))$ le graphe $\mathcal{G}_f$ est au-dessus de T_a.
Si $c < 0$, alors au voisinage du point $(a, f(a))$ le graphe $\mathcal{G}_f$ est en dessous de T_a.
• Si n est IMPAIR, alors au voisinage du point $(a, f(a))$, $\mathcal{G}_f$ *traverse sa tangente*. On dit que $(a, f(a))$ est un *point d inflexion*.

Rem : 1) En particulier, sous les hypothèses du théorème ci-dessus, si n est IMPAIR, on a alors les deux propriétés
Si $c_n > 0$, alors au voisinage du point $(a, f(a))$, le graphe $\mathcal{G}_f$ est au-dessus de T_a pour $x > a$, et en dessous de T_a pour $x < a$.
Si $c_n < 0$, alors au voisinage du point $(a, f(a))$, le graphe $\mathcal{G}_f$ est en dessous de T_a pour $x > a$, et au-dessus de T_a pour $x < a$.
2) Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, si n est PAIR et $c_1 = 0$, alors on dit que f admet un extremum local en a.
Plus précisément :

si $c_n > 0$, on dit que f admet un minimum local en a
si $c_n < 0$, on dit que f admet un maximum local en a.

III.5.C-Branche infinie et position de $\mathcal{G}_f$ par rapport à ces asymptotes

Déf 3.16 : les droites asymptotes
1) Soit $f :]a;b[\to \mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{G}_f$ a une asymptote verticale d'équation $x = a$ si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.
2) Soit $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$, on dit que la droite $y = ax + b$ est asymptote au graphe $\mathcal{G}_f$ si $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.
Lorsque $a = 0$, on a une asymptote horizontale.
Si $a \in \mathbb{R}^\star$ et $b \in \mathbb{R}$, on parle d'une asymptote oblique.

Rem : 1) On peut aussi parler de droite asymptote au graphe d'une fonction en $-\infty$.
2) On peut utiliser les développements limités de $\frac{f(x)}{x}$ pour déterminer l'équation de la droite asymptote et sa position par rapport à $\mathcal{G}_f$. En particulier, on a le résultat suivant :

Prop 3.17 Si f possède, au voisinage de $+\infty$, le développement suivant

$$f(x) = ax + b + \tfrac{c}{x^k} + \tfrac{1}{x^k}\varepsilon\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

avec $k \in \mathbb{N}^\star$ et $c \neq 0$, alors
i) la droite D d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{G}_f$ au voisinage de $+\infty$.
ii) De plus, au voisinage de $+\infty$, on aura

$\mathcal{G}_f$ est au dessus de D si $c > 0$
$\mathcal{G}_f$ est en dessous de D si $c < 0$.

III.6-Avec un peu plus de précision

Déf 3.18 : Lorsque f est une fonction définie sur un intervalle contenant 0 telle que le quotient $\frac{f(x)}{x^k}$ reste borné quand x tend vers 0, on écrira $\mathbf{f(x)} = \mathcal{O}(\mathbf{x^k})$ et on dira que $f(x)$ est "un grand o de x^k ".

Rem : Si $f(x) = o(x^k)$, alors $f(x) = \mathcal{O}(x^k)$. Mais la réciproque n'est pas vraie.

Theo 3.19 : Formule de Taylor avec Reste Intégral.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
Pour tout $a \in I$ et $b \in I$, on a

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx \end{aligned}$$

Rem : Sous les hypothèses du résultat précédent, on aura l'inégalité

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

On a donc une estimation plus fine qu'avec le Theo 3.11 puisqu'ici on sait que le terme reste est encadré par $\pm C(b-a)^{n+1}$.
Dans ce cas, on va écrire

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathcal{O}\left((b-a)^{n+1}\right)$$

III.7-Développements Limités Usuels

Voici quelques Développements Limités en 0 de fonctions usuelles :

à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \end{aligned}$$

à l'ordre $2n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x) \end{aligned}$$

à l'ordre $2n+2$ ($n \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x) \end{aligned}$$

à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x) \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \varepsilon(x) \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + x^n \varepsilon(x) \\ &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 * 3 * \cdots * (2n-3)}{2 * 4 * \cdots * 2n} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1 * 3 * \cdots * (2n-1)}{2 * 4 * \cdots + 2n} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}^\star$) :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

à l'ordre 8 :

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + x^8 \varepsilon(x)$$

$$\mathrm{th}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + x^8 \varepsilon(x)$$