Université de Nantes
Module Mathématiques 2

Licence STPI L1
Année 2005/2006

Examen de deuxième session
Mercredi 21 Juin 2006
Durée de l'épreuve : 2 heures

Numéro d'anonymat : ________.

Document autorisé : une feuille A4 manuscrite recto-verso. Calculatrices et téléphones interdits. L'énoncé est constitué d'exercices indépendants. Votre rédaction se fera sur les feuilles prévues à cet effet pour les exercices 1 à 4, et sur la feuille d'énoncé pour le QCM . Il sera tenu compte de la présentation de la copie.

Barême (à titre indicatif) : Ex 1 sur 4 points, Ex 2 sur 4 points, Ex 3 sur 3+2 points, Ex 4 sur 4 points, Ex 5 sur 5 + 3 points

---

Exercice 1. ***"Symphonie de systèmes et matrices"***
On considère le système (S) suivant :

$$(S)\begin{cases} x \quad\quad + z = 1 \\ \quad 2y - 3z = 2 \\ -\ y + 2z = -1 \end{cases}$$

1. *Trouver l'ensemble solution du système* (S).
2. *On pose* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   Ecrire le système (S) *sous forme matricielle* $AX = B$.
3. *Calculer* A^{-1}.
4. *Déterminer* $A^{-1}B$.

Exercice 2. ***"Tourbillon de matrices"***
On considère les matrices M *et* P *ci-dessous :*

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad et \qquad P := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer* P^{-1}.
2. *Calculer* $D := P^{-1}MP$.
3. *Pour* $n \in \mathbb{N}^\star$, *déterminer* D^n.
4. *Pour* $n \in \mathbb{N}^\star$, *exprimer* M^n *en fonction de* D^n, P *et* P^{-1}.
5. *Pour* $n \in \mathbb{N}^\star$, *calculer* M^n.

Exercice 3. ***"Mélodie de DL"***
Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \sqrt{1+4x^2} - 1$

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre* 2 *en* 0 *de* $f(x)$.
2. *En déduire l'équation de la tangente à* $\mathcal{C}_f$ *au point* $(0, f(0))$.

Tournez la page S.V.P.

3. *Déterminer* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
4. *Montrer que pour x au voisiange de $+\infty$, on a*

$$\frac{f(x)}{x} = 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

5. *Obtenir l'équation de (D_+) l'asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.*
6. *Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (D_+) au voisiange de $+\infty$.*

Exercice 4. ***"Valse entre intégrales et suites"***

On définit la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ par $\qquad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)dx.$

1. *Soit $n \in I\!N^\star$.*
   (a) *Montrer que $|I_n| \leqslant 2\pi^3$.*
   (b) *Montrer que $I_n = -\frac{1}{3n}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin(nx)dx$.*
   (c) *En déduire que $|I_n| \leqslant \frac{2\pi^4}{3n}$.*
2. *Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et précisez sa limite.*

Exercice 5. ***"Farandole de QCM"***

Pour cet exercice, une bonne réponse *rapporte $\frac{1}{3}$ point, une mauvaise réponse $-\frac{1}{3}$.*
Dans certains cas, quand on donne une réponse négative, il est demandé un contre-exemple. Si la réponse négative est correcte et le contre-exemple aussi, on obtient $+\frac{2}{3}$ point.

1. *Pour toute fonction de classe C^1 sur $I\!R$, a-t-on l'égalité $\int_0^1 f'(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_0^1$?*

   ☐ *Oui* ☐ *Non*

2. *Pour toute fonction f continue sur $[0;1]$, a-t-on $\left[\int_0^1 f(x)dx \geqslant 0 \Rightarrow (f \geqslant 0 \text{ sur } [0;1])\right]$?*

   ☐ *Oui* ☐ *Non*

   Contre-exemple :

3. *Pour toutes fonctions f et g continues sur $[0;1]$, a-t-on $\left[(f \geqslant g \text{ sur } [0;1]) \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \geqslant \int_0^1 g(x)dx\right]$?*

   ☐ *Oui* ☐ *Non*

   Contre-exemple :

4. *Pour toute fonction f continue sur $[0;1]$, a-t-on $\int_0^1 (f(x))^2dx = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$?*

   ☐ *Oui* ☐ *Non*

5. *Toute suite géométrique converge.*

   ☐ *Vrai* ☐ *Faux*

   Contre-exemple :

6. *Toute suite décroissante et minorée converge.*

☐ *Vrai* ☐ *Faux*

Contre-exemple :

7. *Toute suite croissante et positive converge.*

☐ *Vrai* ☐ *Faux*

Contre-exemple :

8. *Une suite* $(u_n)_n$ *de réels est dite croissante si*

☐ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 0$ ☐ $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ☐ $u_{n+1} - u_n \geqslant -1$

9. *Soit une fonction* f *continue sur* $\mathbb{R}$. *On considère la suite* $(u_n)_n$ *définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite $(u_n)_n$ *converge vers* l, *alors on a*

☐ $l = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ ☐ $l = f(l)$

Si la fonction f *est croissante, alors la suite* $(u_n)_n$ *est croissante.*

☐ *Vrai* ☐ *Faux*

Si la fonction f *est décroissante, alors la suite* $(u_n)_n$ *est négative à partir d'un certain rang.*

☐ *Vrai* ☐ *Faux*

10. *Si* $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$, *alors l'équation de la tangente* (T_0) *à* $\mathcal{C}_f$ *au point* $(0, f(0))$ *est*

☐ $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ ☐ $y = 1$ ☐ $y = 1 + \frac{1}{6}x^3$

Quelle est la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ *par rapport à* (T_0) *?*
Au voisinage de $(0, f(0))$, *on a :*

☐ (T_0) *au-dessus de* $\mathcal{C}_f$ ☐ (T_0) *au-dessous de* $\mathcal{C}_f$ ☐ (T_0) *traverse* $\mathcal{C}_f$

11. *Tout système de* 2 *équations linéaires à* 2 *inconnues peut se résoudre en appliquant les formules de Cramer.*

☐ *Vrai* ☐ *Faux*

Contre-exemple :

12. *Tout système de* n *équations linéaires à* n *inconnues possède un ensemble solution non vide.*

☐ *Vrai* ☐ *Faux*

Contre-exemple :

Tournez la page S.V.P.

13. *On considère les matrices :* $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ $B \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.
Peut-on effectuer les produits de matrices suivants ? ***Si oui, donner la taille de la matrice produit.***

AB ?	☐ *Oui*	☐ *Non*
BA ?	☐ *Oui*	☐ *Non*
AC ?	☐ *Oui*	☐ *Non*
CA ?	☐ *Oui*	☐ *Non*
BC ?	☐ *Oui*	☐ *Non*
CB ?	☐ *Oui*	☐ *Non*

14. *Pour toutes matrices carrées* A *et* B *de taille* 2×2*, a-t-on la relation* $AB = BA$?

☐ *Vrai* ☐ *Faux*

Contre-exemple :