**Université de Nantes** — **Licence STPI L1**
**Module Mathématiques 2** — **Année 2005/2006**

---

**Liste n°1**
**Calcul Integral**

---

**Exercice 1.** *Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes définies par :*

1. $f(x) = 3x\sin(x^2+1)$ *sur* $\mathbb{R}$
2. $g(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$ *sur* $\mathbb{R}$
3. $h(x) = \dfrac{5}{\sqrt{1-4x^2}}$ *sur* $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$
4. $k(x) = \dfrac{2}{9x^2+1}$ *sur* $\mathbb{R}$

**Exercice 2.** *Calculer les intégrales suivantes :*

$$A = \int_0^1 (6x^2-5)(2x^3-5x+1)dx \qquad B = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(y)}{\cos(y)}dy$$

**Exercice 3.** *On considère les intégrales définies*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx.$$

*Calculer* $I+J$, $I-J$, *puis* $I$ *et* $J$.

**Exercice 4.** *Calculer les intégrales suivantes :*

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx \qquad C = \int_0^1 \frac{2x+1}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

$$B = \int_3^4 \frac{1}{x^2-1}dx \qquad D = \int_3^4 \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-1}dx$$

**Exercice 5.** *Soit la fraction rationnelle* $F(x) = \dfrac{\alpha x+\beta}{(x-2)^2(x-3)}$ *où* $\alpha$ *et* $\beta$ *sont des paramètres réels.*

1. *Décomposer la fraction rationnelle* $F$ *en éléments simples.*
2. *Exprimer la condition sur* $\alpha$ *et* $\beta$ *pour que*

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x-2)^2(x-3)}dx$$

*soit une fraction rationnelle et calculer cette primitive en fonction de* $\alpha$.

**Exercice 6.**

1. *A l'aide de la formule* $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)^2+1}dx = \arctan(u(x))+C$, *démontrer que*

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C.$$

2. (a) *Soit* $x^2 + px + q$ *un polynôme de degré 2 sans racine réelle,* $\Delta = p^2 - 4q$ *son discriminant, qui vérifie donc* $\Delta < 0$. *Déterminer des réels* $\alpha$ *et* $\beta$ *tels que* $x^2 + px + q = (x-\alpha)^2 + \beta^2$.

   (b) *En utilisant une méthode analogue à la question 1), en déduire que*

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C.$$

**Exercice 7.** *Calculer les intégrales définies suivantes*

$$A = \int_0^1 \frac{x+2}{(x+1)^2}dx \qquad D = \int_0^{\pi} \sin^2(x)\,\cos^2(x)\,dx$$

$$B = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1}dx \qquad E = \int_0^{\pi} \sin(x)\cos^3(x)\,dx$$

$$C = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln(x)} \qquad F = \int_0^{\pi} \cos^4(x)\,dx$$

**Exercice 8.** *Calculer les intégrales définies suivantes en utilisant une ou plusieurs intégrations par parties :*

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{t}{\cos^2(t)}dt \qquad C = \int_0^1 t^2 e^t dt \qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos(t)\,dt$$

$$B = \int_1^2 \ln^2(t)\,dt \qquad D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin(t)\,dt \qquad F = \int_1^2 \cos(\ln(t))dt$$

**Exercice 9.** *On considère les intégrales définies*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2(t)\,dt \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2(t)\,dt.$$

*Calculer* $I+J$, $I-J$, *puis* $I$ *et* $J$.

**Exercice 10.** *Calculer les intégrales définies suivantes en utilisant les changements de variables indiqués :*

$$A = \int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} \quad (\,x = t^2\,) \qquad D = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx \quad (\,u = \sqrt{x}\,)$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2+\tan^2(x)} \quad (\,t = \tan(x)\,) \qquad E = \int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx \quad (\,x = \sin^2(t)\,)$$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^3(t)}{1+2\sin(t)}dt \quad (\,x = \sin(t)\,) \qquad F = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} \quad (\,x = \tan(t)\,)$$

**Exercice 11.** *Calculer les intégrales définies* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ *et* $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x}$.

**Exercice 12.** *On considère la fonction* $f$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

1. *Etudier les variations de* $f$ *; on montrera en particulier que* $f$ *se prolonge en* $x = 0$. *Construire sa courbe représentative* $(\mathcal{C}_f)$ *dans un repère orthonormé.*

2. *On notera toujours $f$ le prolongement par continuité en 0.*
*Calculer l'aire $S(\lambda)$ comprise entre la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \lambda$.*
*Que se passe-t-il lorsque $\lambda \to +\infty$ ?*

**Exercice 13.** *Soit la fonction définie par $f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$.*

1. *Faire l'étude des variations de $f$ et construire la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$.*
2. *Calculer l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C}_f)$, et les droites d'équations $x = -\pi$ et $x = \pi$.*

**Exercice 14.** *Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace des intensités suivantes :*

*a)* $i(t) = \begin{cases} I_0 & si\ \ 0 \leqslant t \leqslant T/2 \\ 0 & si\ \ T/2 < t \leqslant T \end{cases}$

*b)* $i(t) = \begin{cases} I_0 & si\ \ 0 \leqslant t \leqslant T/2 \\ -I_0 & si\ \ T/2 < t \leqslant T \end{cases}$

*c)* $i(t) = \begin{cases} I_0 \sin \omega t & si\ \ 0 \leqslant t \leqslant T/2 \\ 0 & si\ \ T/2 < t \leqslant T \end{cases}$

*d)* $i(t) = I_0 |\sin \omega t|$.

**Exercice 15.** *On considère un dipôle inductif RL soumis à une tension $u = E$ constante. A l'instant $t = 0$, l'intensité $i$ parcourant le circuit est nulle. L'équation différentielle vérifiée par $i$ est*

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}, \qquad i(0) = 0.$$

1. *Montrer que*
$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-tR/L}\right).$$
2. *Soit $T > 0$.*
*Déterminer en fonction de $T, E, R, L$ l'énergie dissipée par effet Joule entre les instants $t = 0$ et $t = T$.*
*Que se passe-t-il lorsque $T \to +\infty$ ?*

**Exercice 16.** *Existence et calcul des intégrales généralisées suivantes :*

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$$

$$B = \int_0^{+\infty} e^{-t^{1/p}} dt \qquad \textit{pour } p \in \mathbb{N}^*$$

$$C = \int_0^{+\infty} e^{-ts} \cos(\omega t) dt \qquad \textit{pour } s > 0$$

$$D = \int_0^{+\infty} e^{-ts} \sin(\omega t) dt \qquad \textit{pour } s > 0$$

**Exercice 17.** *Existence et calcul des intégrales généralisées suivantes :*

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^2} \qquad B = \int_1^{+\infty} \frac{t \ln t}{(t^2+1)^2} dt \qquad C = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + 1}$$