Université de Nantes **Licence STPI L1**
Module Mathématiques 2 **Année 2005/2006**

Liste n°2
Suites numériques

Exercice 1. *Étudier la convergence des suites suivantes, et donner leurs limites éventuelles :*

$$a_n = 7\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad b_n = \frac{17^n}{393757424818000} \qquad c_n = 2n-5 \qquad d_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad e_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$$

$$f_n = \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n} \qquad g_n = \frac{5^n+(-7)^n}{5^n+7^n} \qquad h_n = \frac{\sin(n)}{n^2} \qquad i_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad j_n = n\cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$k_n = \cos(n\pi) \qquad l_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad v_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \qquad w_n = \sqrt[n]{n}$$

Exercice 2. *1. Calculer les sommes suivantes :*

$$S_{n,1} = \sum_{k=1}^{n} k \qquad S_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad S_{n,3} = \sum_{k=1}^{n} k^3 \qquad S_{n,4} = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$

2. *Calculer* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\cdots+k}$ *en fonction de l'une des sommes précédentes.*
   Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.
3. *Déterminer la limite de la suite définie par* $u_n = \frac{1+\cdots+(2n-1)}{1+\cdots+n}$ *pour* $n \geqslant 1$.

Exercice 3.

1. *Montrer que la suite* $(\cos(n))_{n\geqslant 0}$ *est divergente.*
   Indication : on peut raisonner par l'absurde et développer $\cos((n+1)+1)$ *et* $\cos((n+1)-1)$.
2. *En déduire que la suite* $(\sin(n))_{n\geqslant 0}$ *est également divergente.*

Exercice 4. *Soit* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *la suite définie par récurrence par*

$$u_{n+1} = \ln(1+e^{u_n}) \qquad et \qquad u_0 = 0.$$

1. *On pose* $v_n = e^{u_n}$. *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\geqslant 0}$ *est arithmétique.*
2. *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $u_n = \ln(1+n)$.

Exercice 5. *On considère la suite définie par récurrence par*

$$u_{n+1} - u_n = n \qquad et \qquad u_0 = 1.$$

1. *Calculer* u_1, u_2, u_3.
2. *Calculer le terme général* u_n *en fonction de* n.

Exercice 6. *"Suite d'intégrales"*

Pour $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x}dx$.

1. *Calculer* I_0.
2. *Montrer que* $I_n \geqslant 0$.
3. *Déterminer une relation entre* I_n *et* I_{n-1} *pour* $n \geqslant 1$.
   En déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ *est décroissante.*
4. *En conclure que la suite* $(I_n)_{n\geqslant 0}$ *converge.*
   Quelle est sa limite ? (Indication : on pourra penser à utiliser "l'inégalité de la moyenne")
5. *A l'aide de la question* 3), *démontrer que* $I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
   En déduire une nouvelle expression de e.

Exercice 7. *Soit la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *définie par*

$$u_1 = 2 \qquad et \qquad u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{u_n}$$

1. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *est majorée par* 3 *et minorée par* 1.
2. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *est croissante.*
3. *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 8. *On considère la suite définie par récurrence par*

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1 \qquad et \qquad u_0 = 1.$$

1. *Représenter graphiquement* u_0, u_1, u_2, u_3.
2. *Démontrer que la suite de terme général* $v_n = u_n - 2$ *est une suite géométrique.*
   En déduire l'expression de v_n *en fonction de* n, *puis celle de* u_n.
3. *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est convergente et déterminer sa limite.*
4. *Calculer la somme* $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 9. *On considère la suite définie par récurrence par*

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \qquad et \qquad u_0 = 0.$$

1. *Représenter graphiquement* u_0, u_1, u_2 *et en donner des valeurs approchées.*
2. *Montrer que l'équation* $\sqrt{x+2} = x$ *admet* $x = 2$ *comme unique solution.*
3. *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
4. *Prouver que la suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est croissante ; que peut-on en déduire ?*
5. (a) *Montrer que*
   $$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{\sqrt{u_n + 2} + 2}.$$
   (b) *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$
   $$|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - 2|\,,$$
   puis, à l'aide d'une récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$|u_n - 2| \leqslant 2^{-n+1}.$$
   Que peut-on en déduire ?

Exercice 10. *On considère la suite de terme général*

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \qquad pour\ n \in \mathbb{N}^*.$$

1. *Démontrer qu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*
$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$
2. *Calculer la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.*
3. *En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente et déterminer sa somme S.*

Exercice 11. *On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(x^2+1)$.*

1. *Montrer qu'on peut écrire sa dérivée n-ième sous la forme*
$$g^{(n)}(x) = e^x(x^2 + u_n x + v_n).$$
2. *Démontrer que $u_{n+1} = u_n + 2$ et $v_{n+1} = v_n + u_n$.*
En déduire u_n et v_n en fonction de n, puis l'expression de $g^{(n)}(x)$.

Exercice 12. *On considère la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence*
$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n).$$

1. *On pose $v_n := u_{n+1} - u_n$.*
Démontrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
2. *Déterminer v_n en fonction de n.*
3. *Déduire de la question précédente l'expression de u_n en fonction de n.*

Exercice 13. *On considère la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence*
$$u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n + u_{n-1} \qquad (1)$$

1. *Montrer qu'il existe deux suites géométriques $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ définies respectivement par $a_n = \alpha^n$ et par $b_n = \beta^n$ vérifiant l'égalité (1).*
2. *Montrer que si λ et μ sont deux réels quelconques, alors la suite $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie l'égalité (1).*
3. *On admet que toute suite vérifiant (1) est de la forme $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n\geqslant 0}$.*
Déterminer les coefficients λ et μ définissant la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en utilisant les conditions $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.
4. *Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.*

Exercice 14. *"La désintégration d'un corps radioactif : le carbone 14"*

1. *Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$, N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècle(s), où k est un entier.*
On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps : environ 1,24% par siècle.
   (a) *Donner l'expression de N_1 en fonction de N_0, puis de N_{k+1} en fonction de N_k.*
   (b) *En déduire la nature de la suite $(N_k)_{k\geqslant 0}$ et l'expression de N_k en fonction de N_0 et k.*
2. *Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. A la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre.*
Des archélogues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 40% de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin.
Calculer l'âge de ces fragments. (On arrondira le résultat au siècle près)