**Université de Nantes** | **Licence STPI L1**
**Module Mathématiques 2** | **Année 2005/2006**

---

# Liste n°5
# Calcul Matriciel

---

**Exercice 1.** "Petits calculs pour se chauffer"

1. *Calculer $AB$ et $BA$ avec les matrices*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

2. *Calculer $AB$, $A^2$, $B^2$, $A^2 + 2AB + B^2$ d'une part et $A + B$, $(A+B)^2$ d'autre part avec les matrices suivantes*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \\ 4 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.** "Une décomposition de Dunford"
*Soit la matrice*

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

*On décompose $A$ sous la forme $5I_3 + N$.*

1. *Calculer $N^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.*
2. *En déduire $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.*

**Exercice 3.** "Un petit changement de base pour simplifier les calculs"

*On se donne les matrices*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix} \qquad P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Inverser $P$ en résolvant un système d'équations linéaires ou par méthode de Jordan.*
2. *Calculer $AP$ puis $P^{-1}AP$.*

   *Indication : la matrice $D := P^{-1}AP$ est diagonale.*

   *Soit $k \in \mathbb{N}^\star$.*
3. *Calculer $D^k$.*
4. *Exprimer $A^k$ en fonction de $D^k$ et de $P$.*
5. *Calculer $A^k$.*

**Exercice 4.** "Polynôme annulateur et inverse"
*Soit la matrice*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* $A^2$ *et* $A^3$.
2. *Trouver des coefficients réels* $a_j$, $j \in \{0; 1; 2\}$, *tels que la matrice* $A^3 + a_2A^2 + a_1A + a_0I$ *soit nulle.*
3. *En déduire que* $A$ *est inversible et donner une expression de* $A^{-1}$ *en fonction des matrices* $A^2$, $A$ *et* $I_3$.
   *Déterminer* $A^{-1}$.
4. *Retrouver* $A^{-1}$ *par une autre méthode.*

**Exercice 5.** *Soit la matrice*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* $A^2$ *et exprimer* $A^2$ *en fonction de* $A$ *et de* $I_3$.
2. *En déduire que* $A$ *est inversible et donner une expression de* $A^{-1}$ *en fonction de* $A$ *et de* $I_3$.
   *Déterminer* $A^{-1}$.
3. *A l'aide d'une récurrence, vérifier que pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$,

   $$A^n = u_nA + v_nI_3$$

   *où* $u_n$ *et* $v_n$ *sont des réels.*
4. *On définit les deux suites* $(\alpha_n)_n$ *et* $(\beta_n)_n$ *avec les relations*

   $$\alpha_n = 2u_n + v_n \qquad \text{et} \qquad \beta_n = u_n - v_n$$

   *Calculer* $\alpha_{n+1}$ *et* $\beta_{n+1}$ *en fonction de* $\alpha_n$ *et* $\beta_n$.
   *En déduire les expressions de* $u_n$ *et* $v_n$ *en fonction de* $n$.
5. *En deduire l'expression de* $A^n$ *en fonction de* $n$.