Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2003-2004
Licence de Maths Classiques, module LC4

Contrôle continu du 12 mars 2004
Durée 3h

Calculatrices interdites

Exercice I

Donner un système fondamental de solutions pour le système différentiel $x' = Ax$ où
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
(On commencera par trigonaliser A).

Exercice II

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle

$$x'' + f(x)x' + x = 0 \quad (E).$$

1) Dans cette question on suppose que f est la fonction constante égale à 1. Résoudre l'équation (E) et dessiner le portrait de phase dans le plan (x, x').

2) On pose $y = x'$. Montrer que l'équation (E) est équivalente à un système non linéaire (S) de la forme $X' = F(X)$ où $X = (x, y)$ et où $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une fonction que l'on déterminera.

3) Montrer qu'il y a existence et unicité pour le problème de Cauchy de conditions initiales (t_0, x_0, y_0).

4) On suppose que f vérifie $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   a) Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $||F(X)|| \leq K||X||$ pour tout $X \in \mathbb{R}^2$. (On prendra par exemple $||(x, y)|| = |x| + |y|$).

   b) En déduire l'intervalle maximal d'existence de toute solution du problème de Cauchy de conditions initiales (t_0, x_0, y_0).

Exercice III

On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel $\langle\ ,\ \rangle$ et on désigne par $||\ ||_2$ la norme associée. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\langle f(x), x\rangle \geq c||x||_2^4$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

1) Soit $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une solution de l'équation $x' = f(x)$ et soit $h(t) = ||x(t)||_2^2$. Montrer que h vérifie l'inéquation

$$(\beta) \quad h'(t) \geq 2c(h^2(t)),\ t \in I.$$

2) Soit $a \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$, et soit ϕ la solution maximale du problème $x' = f(x),\ x(0) = a$. On désigne par $]t_-, t_+[$ l'intervalle d'existence de ϕ.

   a) En utilisant (β), montrer que pour tout $t \in]t_-, 0]$, $\phi(t)$ appartient à une boule fixe et en déduire t_-.

   b) i) Montrer en utilisant (β) que, pour tout $t \in [0, t_+[$, $||\phi(t)||_2^2 > 0$.

      ii) Montrer en utilisant (β) que, pour tout $t \in [0, t_+[$, on a

$$\frac{1}{||a||_2^2} - \frac{1}{||\phi(t)||_2^2} \geq 2ct.$$

En déduire que $t_+ \leq \dfrac{1}{2c||a||_2^2}$.