Ce résultat est démontré en appliquant la formule de trace de Krein (*cf.* [8]), établie pour une perturbation auto-adjointe à trace d'un opérateur auto-adjoint borné, à l'opérateur $R(E)^{e(n)}$. La formule de trace (T) résulte alors de l'étude de la fonction de déphasage spectral ξ_E que les résultats d'Agmon (*cf.* [1]) sur les valeurs au bord des résolvantes $R_{(0)}(\lambda \pm i0)$ d'une part, de Jensen-Kato (*cf.* [5], [6], [7]) sur le comportement de $R(\zeta)$ aux basses énergies d'autre part, permettent d'effectuer :

PROPOSITION. — 1. *ξ_E est localement constante sur le complémentaire du spectre de $R(E)^{e(n)}$. Pour une valeur propre λ non nulle de H de multiplicité $\nu(\lambda, H)$, on a $\xi_E((\lambda-E)^{-e(n)}-)-\xi_E((\lambda-E)^{-e(n)}+)=\nu(\lambda, H)$;*

2. *ξ_E est continue sur $\mathring{\sigma}_{ac}(R(E)^{e(n)})=]0, (-E)^{-e(n)}[$;*

3. *ξ_E admet une limite à gauche en $(-E)^{-e(n)}$. Le saut $\xi_E((-E)^{-e(n)}-)-\xi_E((-E)^{-e(n)}+)$ est génériquement égal en dimension $n \geq 2$ (resp. $n=1$) à la multiplicité $\nu(0, H)$ (resp. $-1/2$).*

Des situations exceptionnelles, correspondant à des résonances (*cf.* [5], [6]) peuvent intervenir en basses dimensions ($n \leq 4$). En dimension 1 (3, 4 resp.), la résonance lorsqu'elle a lieu, peut être considérée pour l'évaluation de la discontinuité $\xi_E((-E)^{-e(n)}-)-\xi_E((-E)^{-e(n)}+)$ comme une valeur propre de multiplicité 0 (1/2, 1 resp.). En dimension 2, l'interprétation, plus délicate, de cette discontinuité n'a pas été complètement effectuée. On choisira, dans la formule (T), la détermination du Log telle que :

$$\xi_E((-E)^{-e(n)}-)+\xi_E((-E)^{-e(n)}+)=\nu(0, H)+\frac{1}{2i\pi}\operatorname{Log}\det\mathscr{S}(\lambda, H, H_0).$$

Le déterminant de la matrice de diffusion est relié à la fonction de déphasage spectral suivant :

$$\det\mathscr{S}(\lambda, R_0(E)^{e(n)}, R(E)^{e(n)})=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\Delta_E(\lambda+i\varepsilon)}{\Delta_E(\lambda-i\varepsilon)}=e^{2i\pi\xi_E(\lambda)}.$$

D'autre part, la propriété d'invariance des opérateurs d'onde entraîne l'égalité $\det\mathscr{S}(\lambda, H_0, H)=e^{-2i\pi\xi_E((\lambda-E)^{-e(n)})}$. On en déduit la proposition :

PROPOSITION. — *Soit une factorisation $q=q_1 q_2$ avec $|q|=|q_i|^2$ ($i=1, 2$) et p un entier supérieur à $n/2$. On a la formule :*

$$\text{(S)}\quad \det\mathscr{S}(\lambda, H_0, H)=\frac{\det_p 1+q_1 R_0(\lambda+i0)q_2}{\det_p 1+q_1 R_0(\lambda-i0)q_2}\exp\sum_{l=1}^{p-1}\frac{(-1)^{l+1}}{l}\operatorname{Tr}\{[q_1 R_0(\lambda+i0)q_2]^l - [q_1 R_0(\lambda-i0)q_2]^l\},$$

où $\det_p$ désigne le déterminant régularisé d'indice p (cf. [12]).

Remarques. — 1. En dimension $n=1$, la formule de trace a été établie suivant des techniques élémentaires d'équations différentielles (*cf.* [2]).

2. La formule de trace ainsi que la formule (5) restent valables pour des potentiels à portée « suffisamment courte » (potentiels à décroissante polynomiale assez forte par exemple). La fonction de déphasage spectral est analytique pour des potentiels à décroissance exponentielle (i. e. $\operatorname{Sup}|e^{a|x|}q(x)|<\infty$ pour un a positif).

3. ASYMPTOTIQUE DE LA PHASE DE DIFFUSION. — On suppose désormais la dimension n impaire. Notons $s(\lambda)=1/2i\pi\operatorname{Log}\det\mathscr{S}(\lambda, H, H_0)$ la phase de diffusion.

PROPOSITION. — *En dimension n impaire, la phase de diffusion $s(\lambda)$ admet aux hautes énergies un développement asymptotique, dérivable à tout ordre, en puissance de $\sqrt{\lambda}$.*

L'existence de ce développement résulte de l'étude, relativement technique, de chaque facteur de l'expression (S).

On sait par ailleurs (*cf.* [3]) que $Z(t) = \mathrm{Tr}\{e^{-tH} - e^{-tH_0}\}$ admet un développement asymptotique $Z(t) \sim (4\pi t)^{-n/2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i$ lorsque t tend vers 0^+, où les a_i sont des intégrales de fonctionnelles polynomiales universelles de q et de ses dérivées $\left(a_1 = -\int_{\mathbb{R}^n} q(x)\,dx,\ a_2 = 1/2 \int_{\mathbb{R}^n} q^2(x)\,dx, \ldots\right)$. La formule de trace (T) pour l'opérateur de la chaleur permet alors de préciser la forme du développement asymptotique aux hautes énergies de la phase de diffusion :

THÉORÈME :

1. $$s(\lambda) \underset{\lambda \to \infty}{\sim} \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{n/2} \sum_{l=1}^{[n/2]} \frac{a_l}{\Gamma(n/2 - l + 1)} \lambda^{-l} - N - \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{n/2} \sum_{l=[n/2]+1}^{\infty} \frac{a_l}{\Gamma(n/2 - l + 1)} \lambda^{-l}.$$

2. *Pour* ν *entier on a les identités de trace :*

$$(T_\nu) \sum_j \lambda_j^\nu = -\int_0^\infty \lambda^\nu \frac{d}{d\lambda}\left[s(\lambda) - \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{n/2} \sum_{l=1}^{[n/2]+\nu} \frac{a_l}{\Gamma(n/2 - l + 1)} \lambda^{-l}\right] d\lambda.$$

Remarques. — 1. Les identités de trace (T_ν) obtenues en remarquant l'absence de puissances entières de t dans le développement de $Z(t)$ sont équivalentes au fait que la fonction zêta $\zeta_E(s) = \mathrm{Tr}\{(H - E)^{-s} - (H_0 - E)^{-s}\}$ admet comme zéros les entiers négatifs. Ces identités de trace déterminent les valeurs propres de l'hamiltonien H à partir de la phase de diffusion.

2. En dimension paire, la phase de diffusion est à croissance polynomiale et vérifie $\int^\infty |s(\lambda)| \lambda^{-n/2-1}\,d\lambda < \infty$.

(*) Remise le 30 novembre 1981.

[1] S. AGMON, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, IV, n° 2, 1975, p. 151-218.
[2] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Séminaire Bourbaki*, exposé n° 557.
[3] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Annales de l'E.N.S.*, 14, 1981, p. 27-39.
[4] P. FADEEV et V. ZAHKAROV, *Func. Anal. Appl.*, 5, 1971, p. 280-288.
[5] A. JENSEN, *Duke Math. J.*, 46, 1979, p. 57-81.
[6] A. JENSEN, Preprint, University of Kentucky.
[7] A. JENSEN et T. KATO, *Duke Math. J.*, 46, 1979, p. 583-612.
[8] M. G. KREIN, *Mat. Sb.* 33.75, 1953, p. 597-626.
[9] M. G. KREIN, *Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, 144, 1962, p. 268-271.
[10] A. MAJDA et J. RALSTON, *Duke Math. J.*, 45, 1978, p. 183-196 et 513-536; 46, 1979, p. 725-731.
[11] M. REED et B. SIMON, *Method of Modern Mathematical Physics*, III, IV, Academic Press, 1978-1979.
[12] B. SIMON, *Trace Ideals and Their Applications*, Cambridge University Press, 1979.

Laboratoire de Mathématiques pures, associé au C.N.R.S.,
Institut Fourier, B.P. n° 116, 38402 *Saint-Martin-d'Hères Cedex.*